Sprawozdanie z Zadania numerycznego **NUM4**

Marian Wąchała

13 listopada 2024

1 Zadanie numeryczne NUM4

Zadana jest macierz

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

oraz wektor $\mathbf{b} \equiv (2, \dots, 2)^T$. Macierz A ma liczby 5 na diagonali, 3 na pierwszej pozycji nad diagonalą, a pozostałe elementy są równe 1. Wymiar macierzy ustalamy na $N = 120$.

- Rozwiąż numerycznie równanie $A\mathbf{y} = \mathbf{b}$, stosując odpowiednią metodę. **Uwaga:** algorytm należy zaimplementować samodzielnie.
- Sprawdź swój wynik przy użyciu procedur bibliotecznych lub pakietów algebry komputerowej.
- Potraktuj N jako zmienną i zmierz czas potrzebny do uzyskania rozwiązania w funkcji N. Wynik przedstaw na wykresie. Czy wykres jest zgodny z oczekiwaniami?

2 Wstęp Teoretyczny

2.1 Wzór Sherman-Morrisona

Wzór Sherman-Morrisona jest przydatnym narzędziem do obliczania odwrotności macierzy, która stanowi modyfikację macierzy o znanej odwrotności. Zakładając, że macierz A można przedstawić w postaci:

$$A = B + uv^T,$$

gdzie B jest macierzą o znanej odwrotności, a u oraz v to wektory, wzór Sherman-Morrisona umożliwia wyrażenie odwrotności macierzy A jako:

$$A^{-1} = (B + uv^T)^{-1} = B^{-1} - \frac{B^{-1}uv^T B^{-1}}{1 + v^T B^{-1} u}.$$

Pozwala to na szybkie wyznaczenie odwrotności macierzy A, unikając kosztownego procesu pełnej inwersji macierzy.

3 Zastosowanie wzoru Sherman-Morrisona w rozwiązaniu zadania

W zadaniu $Ay = b$, możemy zastosować wzór Sherman-Morrisona w celu uzyskania rozwiązania w formie:

$$y = (B + uv^T)^{-1} b = B^{-1} b - \frac{B^{-1} u \left(v^T B^{-1} b\right)}{1 + v^T B^{-1} u}$$

Aby uprościć wyrażenie, wprowadzamy następujące oznaczenia:

$$z = B^{-1} b \quad \text{oraz} \quad z' = B^{-1} u$$

co pozwala zapisać rozwiązanie w bardziej kompaktowej formie:

$$y = z - \frac{z' \left(v^T z\right)}{1 + v^T z'}$$

3.1 Rozwiązywanie układów równań

Aby obliczyć wektory z oraz z', wystarczy rozwiązać dwa układy równań liniowych:

$$Bz = b \quad \text{oraz} \quad Bz' = u$$

Ze względu na to, że macierz B jest macierzą trójkątną górną, oba układy można rozwiązać metodą podstawiania wstecznego (backward substitution). Dzięki temu złożoność obliczeniowa rozwiązania tych układów jest równa $O(n)$.

4 Omówienie problemu

Macierz, którą rozważamy, nie jest macierzą gęstą, a jej obliczenia mogłyby być bardzo czasochłonne. Naszym celem jest znalezienie rozwiązania, które będzie miało złożoność liniową. Aby to osiągnąć, należy sprowadzić macierz A do formy rzadkiej, w której niezerowe elementy występują głównie na diagonalach. Taka transformacja jest możliwa, ponieważ macierz składa się głównie z jedynek, z wyjątkiem elementów na diagonalach. Wystarczy odjąć 1 od każdego elementu macierzy, co pozwoli uzyskać macierz rzadką z dwoma diagonalami, co znacznie uprości dalsze obliczenia.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 5 & 3 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 5 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Dzięki temu, możemy przechowywać macierz A w macierzy wstęgowej:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 4 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

W celu rozwiązania układu równań $Ax = b$ dla tej macierzy, przy zachowaniu złożoności liniowej, zastosujemy metodę **Sherman'a**. Wykorzystując budowę rzadkiej macierzy, aby uniknąć czasochłonnych operacji macierzowych. Dzięki temu, zamiast klasycznych algorytmów eliminacji Gaussa czy faktoryzacji, które mają złożoność $O(n^3)$, możemy rozwiązać ten problem w czasie liniowym $O(n)$.

Metoda ta polega na obliczeniu dwóch wektorów pomocniczych: q i w. Pierwszy z nich, q, stanowi rozwiązanie układu równań dla prawej strony b, a wektor w reprezentuje rozwiązanie układu dla macierzy jednostkowej. Po obliczeniu tych wektorów, możemy uzyskać rozwiązanie całego układu.

5 Wyniki

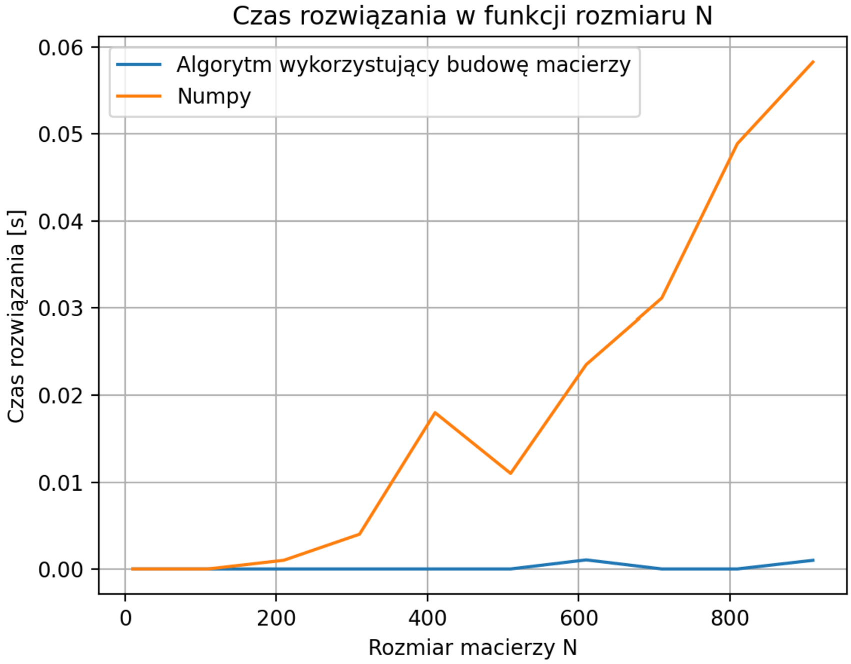
5.1 Wynik własny

y = [0.015579357351509282, 0.01557935735150931, 0.015579357351509254, 0.015579357351509338, 0.015579357351509199, 0.015579357351509449, 0.015579357351509004, 0.015579357351509726, 0.015579357351508533, 0.015579357351510559, 0.015579357351507173, 0.015579357351512807, 0.015579357351503398, 0.01557935735151908, 0.015579357351492962, 0.015579357351536482, 0.015579357351463957, 0.015579357351584833, 0.015579357351383355, 0.01557935735171917, 0.015579357351159479, 0.01557935735209226, 0.015579357350537643, 0.015579357353128681, 0.015579357348810274, 0.015579357356007628, 0.01557935734401203, 0.015579357364004703, 0.01557935733068358, 0.015579357386218767, 0.015579357293660112, 0.015579357447924547, 0.015579357190817184, 0.015579357619329465, 0.01557935690514231, 0.015579358095454243, 0.015579356111601023, 0.015579359418023048, 0.015579353907319682, 0.015579363091825282, 0.015579347784315967, 0.015579373296831484, 0.015579330775972261, 0.015579401644070956, 0.01557928353057314, 0.015579480386402833, 0.015579152293353354, 0.015579699115102513, 0.015578787745520573, 0.015580306694823798, 0.015577775112651737, 0.015581994416271838, 0.01557496224357166, 0.0155866825314053, 0.015567148718349244, 0.015599705073442688, 0.015545444448162029, 0.015635878801324277, 0.015485154935150958, 0.015736361378773156, 0.015317683972736168, 0.01601547964946448, 0.014852486854917274, 0.01679080817916262, 0.013560272638753673, 0.018944498539435306, 0.009970788704965927, 0.024926971762414873]

5.2 Wyniki dla Numpy

y = [[0.01557936, 0.01557936, 0.01557936 0.01557936, 0.01557935, 0.01557936, 0.01557935, 0.01557937, 0.01557933, 0.0155794, 0.01557928, 0.01557948, 0.01557915, 0.0155797, 0.01557879, 0.01558031, 0.01557778, 0.01558199, 0.01557496, 0.01558668, 0.01556715, 0.01559971, 0.01554544, 0.01563588, 0.01548515, 0.01573636, 0.01531768, 0.01601548, 0.01485249, 0.01679081, 0.01356027, 0.0189445, 0.00997079, 0.02492697]]

6 Wnioski



Rysunek 1: Porównanie wyników

Zgodnie z przedstawionym na powyższym obrazku wykresem, dzięki zastosowaniu wzoru Shermana-Morrisona oraz metody podstawiania wstecznego (backward substitution), udało się obliczyć rozwiązanie równania macierzowego w czasie liniowym $O(n)$ (efekt będzie widoczny dla większej liczby danych). Własnoręczna implementacja algorytmu wykazuje znaczną przewagę wydajnościową w porównaniu do standardowych metod dostępnych w popularnych bibliotekach, takich jak NumPy. Dzięki wykorzystaniu algorytmu Shermana-Morrisona możliwe stało się znaczne skrócenie czasu obliczeń, co przekłada się na znaczną oszczędność zasobów obliczeniowych. Niemniej jednak, z uwagi na obecność błędów numerycznych, występują pewne niewielkie różnice pomiędzy wynikiem teoretycznym a rzeczywistym. Różnice te są jednak zauważalne dopiero w bardzo dalekich miejscach po przecinku, co wskazuje na minimalny wpływ błędów na ostateczny wynik.