Sprawozdanie z Zadania numerycznego **NUM5**

Marian Wąchała

20 listopada 2024

Zadanie numeryczne NUM5

Rozwiąż układ równań

$$\begin{pmatrix} d & 0.5 & 0.1 & 0 & \dots & 0 \\ 0.5 & d & 0.5 & 0.1 & \dots & 0 \\ 0.1 & 0.5 & d & 0.5 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0.1 & 0.5 & d & 0.5 & \dots & 0.1 \\ 0.1 & 0.5 & d & 0 & \dots & 0.1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ x_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ N-1 \\ N \end{pmatrix}$$

dla $N = 200$ za pomocą metod Jacobiego i Gaussa-Seidela, gdzie d jest elementem diagonalnym.

Dla różnych wartości d i punktów startowych przedstaw graficznie różnicę pomiędzy dokładnym rozwiązaniem a jego przybliżeniami w kolejnych iteracjach. Odpowiednio dobierając zakres parametrów, porównaj dwie metody.

Czy procedura iteracyjna zawsze jest zbieżna?

1 Ważne informacje

1.1 Metoda iteracyjna

Metody iteracyjne to techniki numeryczne, które służą do znajdowania przybliżonych rozwiązań równań lub układów równań, które nie mogą być rozwiązane dokładnie w sposób analityczny. Polegają one na sukcesywnym powtarzaniu pewnego algorytmu, który przybliża rozwiązanie problemu w każdym kroku. W każdej iteracji wartość zmiennej jest aktualizowana na podstawie poprzednich przybliżeń, a proces powtarza się aż do osiągnięcia zadowalającej dokładności. Teoretycznie, dokładne rozwiązanie można uzyskać w nieskończoność wielu iteracji, jednak w praktyce zatrzymuje się je po niewielkiej liczbie kroków, kiedy błąd zaokrąglenia osiągnie akceptowalny poziom

1.2 Metoda Jacobiego

wzór:

$$x_i^{(k+1)} = \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

Górny indeks $x^{(k)}$ oznacza, że jest to przybliżenie w k-tym kroku. Jest to tak zwana metoda Jacobiego.

1.3 Metoda Gaussa-Seidela

wzór:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{N} a_{ij} x_j^{(k)} \right)$$

2 zbieżność metod iteracyjnych

2.1 Twierdzenia dotyczące zbieżności metod iteracyjnych

Twierdzenie 1.
Iteracja

$$x^{(k+1)} = M^{-1}(b - Nx^{(k)})$$

jest zbieżna, jeśli $\det M \neq 0$ oraz $\rho(M^{-1}N) < 1$, gdzie $\rho(\cdot)$ oznacza promień spektralny macierzy.

Twierdzenie 2. Metoda Jacobiego jest zbieżna, jeśli macierz A jest silnie przekątniowo dominująca, to znaczy, jeśli wartości bezwzględne elementów na głównej przekątnej są większe od sumy wartości bezwzględnych pozostałych elementów w danym wierszu:

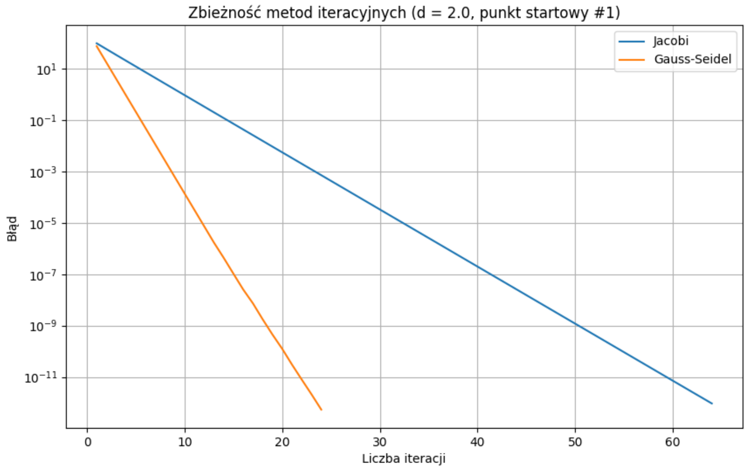
$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \quad \text{dla } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Twierdzenie 3. Metoda Gaussa-Seidela jest zbieżna, jeśli macierz A jest symetryczna i dodatnio określona.

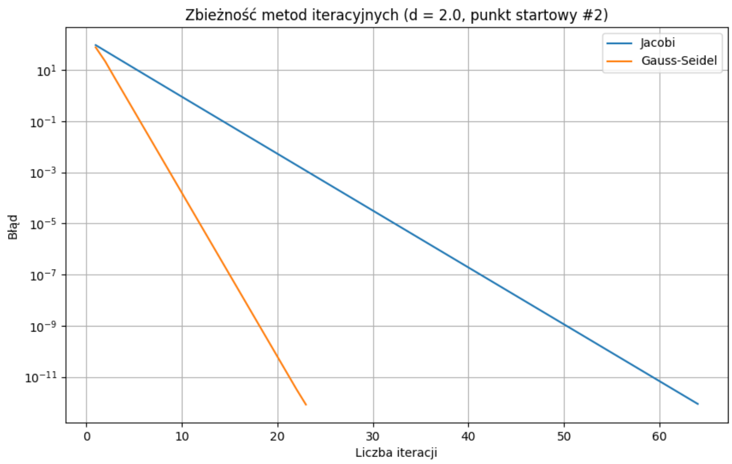
Podsumowanie Na podstawie powyższych twierdzeń możemy stwierdzić, że metody Jacobiego oraz Gaussa-Seidela nie zawsze są zbieżne, ponieważ ich zbieżność zależy od spełnienia określonych warunków dotyczących macierzy.

3 Wyniki

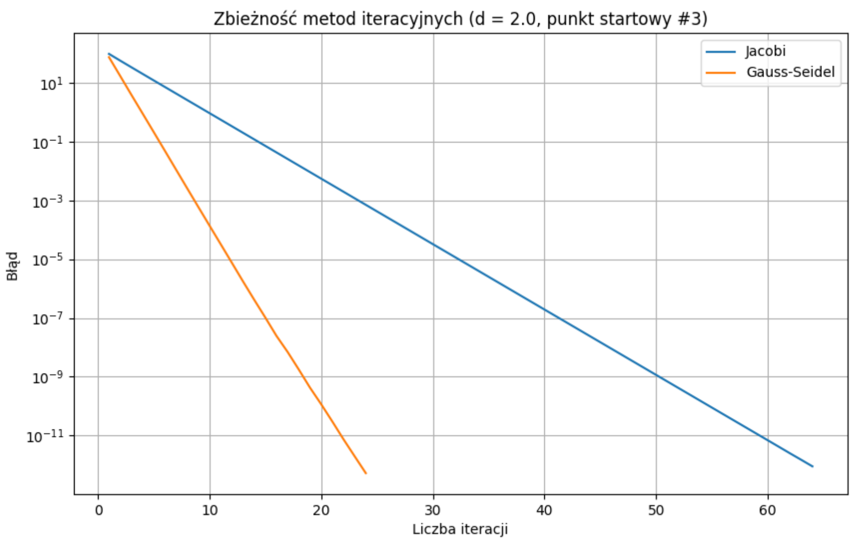
3.1 Wyniki dla d=2 dla 3 różnych punktów startowych



Rysunek 1:

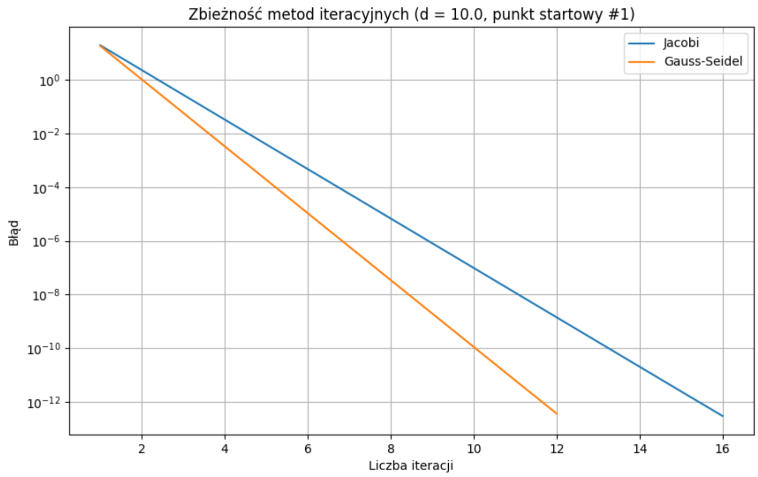


Rysunek 2:

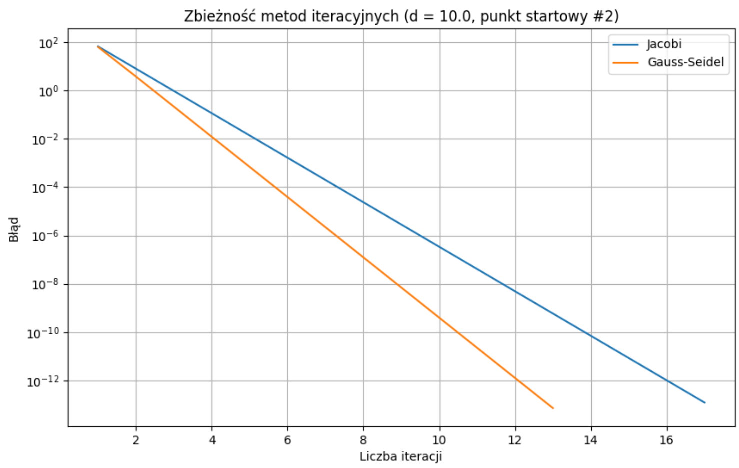


Rysunek 3:

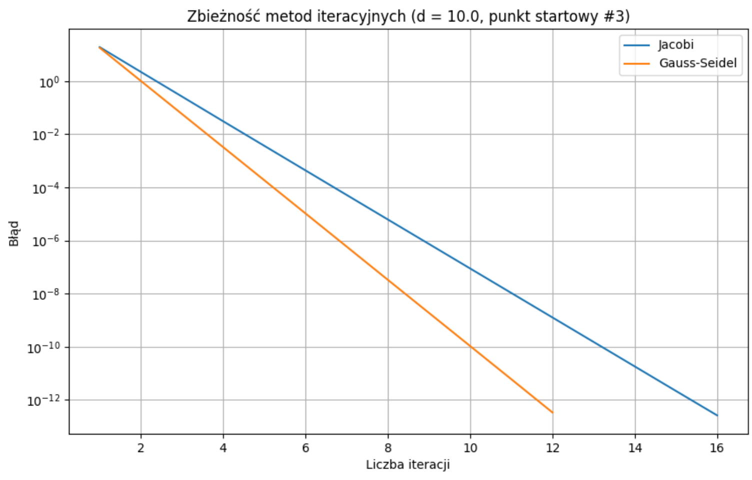
3.2 Wyniki dla d=10 dla 3 różnych punktów startowych



Rysunek 4:



Rysunek 5:



Rysunek 6:

.

Gdzie wybrane punkty startowe to:
1 - zerowy wektor, **2** - wektor zbudowany z samych 60tek **3** - losowy wektor

1) **Wyniki dla d = 2:**
wektor 1:
Błąd końcowy (Jacobi): 4.98e-12
Błąd końcowy (Gauss-Seidel): 4.72e-13

wektor 2:
Błąd końcowy (Jacobi): 4.64e-12
Błąd końcowy (Gauss-Seidel):1.00e-12

Wektor 3:
Błąd końcowy (Jacobi): 4.73e-12
Błąd końcowy (Gauss-Seidel): 4.64e-13

2) **Wyniki dla d = 10:**
wektor 1:
Błąd końcowy (Jacobi): 2.18e-12
Błąd końcowy (Gauss-Seidel): 1.55e-13

wektor 2:
Błąd końcowy (Jacobi): 1.31e-12
Błąd końcowy (Gauss-Seidel): 4.50e-14

Wektor 3:
Błąd końcowy (Jacobi): 1.83e-12
Błąd końcowy (Gauss-Seidel): 1.31e-13

4 Podsumowanie

4.1 Różnice w wykresie

Na wykresach widać, że wraz z rosnącą liczbą iteracji algorytm dąży do pożądanego wyniku. Metoda Gaussa-Seidla dąży szybciej do wyniku niż metoda Jacobiego. Dzieje się tak, ponieważ w metodzie Gaussa-Seidla przy każdej iteracji używane są najnowsze obliczone wartości, co pozwala szybciej poprawić wynik. W metodzie Jacobiego wartości z poprzedniej iteracji są wykorzystywane przez całą iterację, co sprawia, że zbliżanie się do rozwiązania jest wolniejsze. W rezultacie metoda Gaussa-Seidla zbiega szybciej do rozwiązania, a błędy maleją szybciej niż w metodzie Jacobiego.

4.2 Wpływ wektorów początkowych

Na podstawie błędów końcowych dla różnych wektorów początkowych można stwierdzić, że wektor początkowy ma wpływ na ostateczny wynik. W niektórych przypadkach wybór odpowiedniego wektora początkowego może przyspieszyć zbieżność metody iteracyjnej, zmniejszając liczbę iteracji potrzebnych do osiągnięcia zadanej dokładności.

4.3 zbieżność metod iteracyjnych

W ogólności metody iteracyjne nie są zbieżne, można to stwierdzić na podstawie na podstawie twierdzeń dotyczących zbieżności metod Jacobiego i Gaussa-Seidla. Natomiast na wykresach można zauważyć, że podane przykłady są metodami zbieżnymi.