

Sprawozdanie z Zadania numerycznego NUM3

Marian Wąchała

5 listopada 2024

1 Polecenie

Zadanie numeryczne NUM3: Wyznacz $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ dla

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.01 & \frac{0.2}{1} & \frac{0.15}{1^3} & & & & & & \\ 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{2} & \frac{0.15}{2^3} & & & & & \\ & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{3} & \frac{0.15}{3^3} & & & & \\ & & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{N-2} & \frac{0.15}{(N-2)^3} \\ & & & & & & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{N-1} \\ & & & & & & & 0.3 & 1.01 \end{pmatrix}$$

oraz $\mathbf{x} = (1, 2, \dots, N)^T$. Ustalamy $N = 300$. Oblicz również wyznacznik macierzy \mathbf{A} . Zadanie rozwiąż właściwą metodą (uzasadnij wybór) i wykorzystaj strukturę macierzy. Algorytm proszę zaprogramować samodzielnie; wyjątkowo nie należy stosować procedur bibliotecznych z zakresu algebry liniowej ani pakietów algebry komputerowej (chyba, że do sprawdzenia swojego rozwiązania, co zawsze jest mile widziane). Ponadto, potraktuj N jako zmienną i zmierz czas działania swojego programu w funkcji N . Wynik przedstaw na wykresie. Jakiej zależności się spodziewamy?

2 Wstęp Teoretyczny

Operacja $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ jest na ogół operacją bardzo kosztowną, jednakże można ją efektywnie zastąpić poprzez $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}$ dzięki temu unikamy niepotrzebnego obliczania \mathbf{A}^{-1} co znacząco redukuje złożoność obliczeniową i przyspiesza proces. To podejście nie tylko zwiększa wydajność, ale również upraszcza implementację.

Aby wybrać odpowiedni algorytm, należy przyjrzeć się strukturze podanej macierzy. Jest to macierz rzadka, zbudowana z czterech diagonal, dlatego zastosowanie standardowej dekompozycji LU będzie nieopłacalne, ponieważ złożoność obliczeniowa wyniesie $O(\mathbf{n}^3)$. Można jednak wykorzystać budowę macierzy w celu zredukowania liczby operacji, przez co złożoność wyniesie jedynie $O(\mathbf{n})$.

Wzory na elementy macierzy \mathbf{U} oraz \mathbf{L} w rozkładzie \mathbf{LU} :

$$L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}U_{kj}}{U_{jj}} & \text{if } i > j \\ 0 & \text{if } i < j \end{cases} \quad (1)$$

$$U_{ij} = \begin{cases} A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}U_{kj} & \text{for } i \leq j \\ 0 & \text{for } i > j \end{cases} \quad (2)$$

Stosując powyższe wzory do macierzy podanej w poleceniu, wykonujemy zbędne sumy, które dodają zera. Generuje to dużą liczbę niepotrzebnych operacji, które można pominąć. Ponieważ $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ można zapisać to równanie w postaci $\mathbf{LUy} = \mathbf{x}$, następnie skorzystać ze wzorów:

- $\mathbf{Lz} = \mathbf{y}$ (Forward substitution)
- $\mathbf{Uy} = \mathbf{x}$ (back substitution)

Ponownie, rozwiązania powyższych układów równań przez strukturę macierzy również można sprowadzić do $O(\mathbf{n})$.

W celu efektywnej faktoryzacji macierzy czterodiagonalnej można zastosować algorytm LU przystosowany do tego typu macierzy. Algorytm działa w następujący sposób:

1. Inicjalizacja macierzy L i U w formie macierzy czterodiagonalnej o rozmiarze $4 \times N$, gdzie każdy wiersz odpowiada poszczególnym diagonalom.
2. Faktoryzacja LU przystosowana do macierzy $N \times N$, zbudowanej z czterech diagonal, pomijająca sytuacje, w których sumujemy zera.
3. Uproszczona procedura *forward substitution* oraz *back substitution*, dostosowana do macierzy czterodiagonalnej, co przyspiesza obliczenia.

Dzięki zastosowaniu powyższego algorytmu można efektywnie rozwiązywać układy równań liniowych oraz obliczać macierz odwrotną dla macierzy czterodiagonalnych.

3 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zbadanie efektywności metody rozkładu LU w kontekście rozwiązywania układów równań oraz obliczania wyznacznika macierzy. Oto główne zadania:

1. **Rozkład LU:** Skonstruowanie rozkładu LU macierzy \mathbf{A} w celu obliczenia rozwiązań $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ za pomocą macierzy dolnotrójkątnej \mathbf{L} i górnortrójkątnej \mathbf{U} .
2. **Wyznacznik macierzy:** Obliczenie wyznacznika macierzy \mathbf{A} na podstawie rozkładu LU, jako iloczynu elementów diagonalnych macierzy \mathbf{U} .
3. **Wykres złożoności:** Stworzenie wykresu ilustrującego złożoność obliczeniową faktoryzacji LU w zależności od rozmiaru macierzy.
4. **Algorytm LU:** Opracowanie algorytmu faktoryzacji LU o złożoności $O(n)$ dla macierzy $n \times n$.

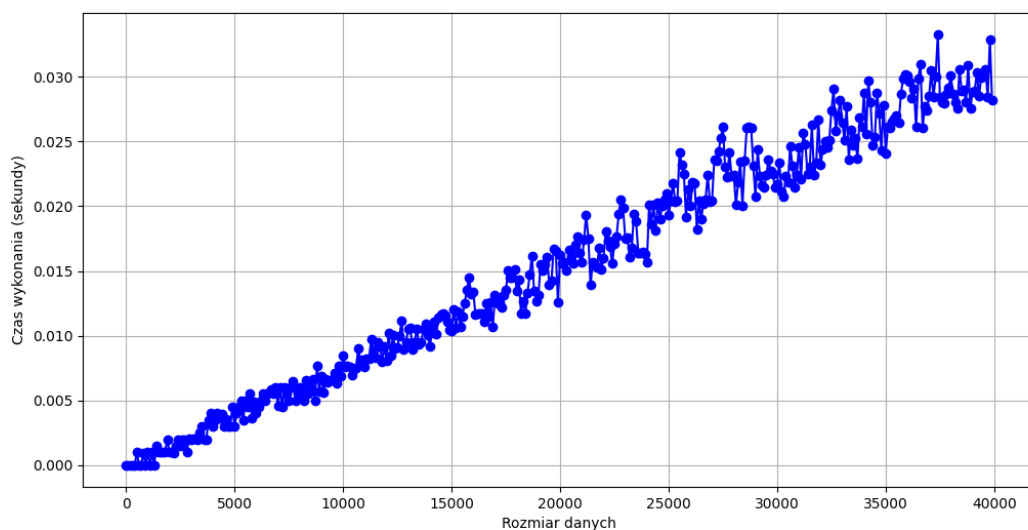
4 Wyniki

Poniżej wyniki równania podanegow poleceniu dla N=300:

```
[0.3363766944273483, 1.5981824494515218, 2.27882032493809, 3.0848365457457945, 3.844774106923569, 4.616655346834123, 5.382478675076812, 6.14867296978407, 6.91388200016796, 7.67879847542006, 8.443388685013728, 9.207773833842142, 9.971992233232145, 10.736084291291783, 11.508075150377635, 12.263984698578499, 13.027827622658412, 13.79161536358432, 14.555356853219754, 15.31905920134059, 16.08272812746752, 16.846368288288676, 17.60998351277017, 18.373576978660548, 19.137151345293276, 19.908708855257353, 20.664251412998514, 21.427788646278613, 22.1912979546909, 22.954884548308847, 23.718301478732506, 24.48178966422267, 25.245269910196356, 26.00874292605299, 26.77220933907569, 27.535669705984454, 28.29912452259137, 29.062574231912827, 29.826019231013913, 30.589459876825202, 31.35289649108394, 32.11632936457209, 32.879758760752615, 33.64318491890531, 34.40660805684011, 35.17002837325326, 35.933446049779484, 36.69686125278547, 37.46027413494153, 38.22368483660315, 38.98709348702842, 39.750500205453875, 40.51390510204758, 41.27730827875534, 42.04070983005392, 42.80410984362296, 43.56750840094559, 44.330905577846444, 45.09430144497458, 45.85769606823778, 46.62108950919375, 47.38440182540334, 48.14787307874975, 48.911263295727736, 49.674652547705826, 50.43804087116474, 51.20142830791402, 51.964814897289784, 52.72820067633488, 53.491585679963706, 54.2549699411129, 55.01835349087947, 55.781736358647464, 56.5451185722044, 57.30850015784814, 58.0718811404855, 58.83526154372303, 59.59864138995076, 60.36202070041957, 61.125399495312756, 61.888777793812274, 62.652155614160816, 63.41553297371476, 64.178909889005, 64.94228637577791, 65.7056624490451, 66.46903812312497, 67.23241341168236, 67.99578832776534, 68.75916288383968, 69.52253709182098, 70.28591096310467, 71.049284508859403, 71.81265773872664, 72.57603066349884, 73.33940329248884, 74.10277563487843, 74.86614769947313, 75.62951949472145, 76.39289102873265, 77.15626230929372, 77.91963334388514, 78.68300413969584, 79.44637470363736, 80.20974504235691, 80.97311516225015, 81.73648506947265, 82.4998547699514, 83.26322426939504, 84.02659357330403, 84.78996268697986, 85.55333161553422, 86.31670036389711, 87.08006893682511, 87.84343733890879, 88.60680557457995, 89.3701736481184, 90.13354156365845, 90.896909325195, 91.66027693658934, 92.42364440157482, 93.18701172376204, 93.95037890664373, 94.71374595359973, 95.47711286790134, 96.24047965271575, 97.00384631111015, 97.76721284605554, 98.53057926043061, 99.2934555702521, 100.05731173854373, 100.82067780760845, 101.58404376676252, 102.34740961847304, 103.11077536513372, 103.87414100906781, 104.63750655253044, 105.4008719977113, 106.16423734673681, 106.92760260167256, 107.69096776452535, 108.45433283724536, 109.217697821728, 109.98106271981598, 110.74442753330105, 111.50779226392567, 112.2711569133849, 113.03452148332777, 113.79788597535895, 114.56125039104032, 115.32461473189217, 116.08797899939472, 116.85134319498945, 117.6147073200803, 118.37807137603484, 119.14143536418553, 119.90479928583083, 120.66816314223625, 121.43152693463537, 122.19489066423085, 122.95825433219548, 123.72161793967295, 124.48498148777887, 125.24834497760152, 126.01170841020281, 126.77507178661908, 127.5384351078615, 128.3017983749175, 129.06516158875084, 129.8285247503026, 130.59188786049188, 131.35525092021624, 132.11861393035258, 132.88197689175752, 133.6453398052681, 134.40870267170217, 135.1720654918593, 135.93542826652086, 136.6987909946508, 137.46215368239606, 138.22551632508706, 138.98887892523803, 139.7522414835477, 140.5156040006995, 141.27896647736208, 142.04232891418968, 142.80569131182256, 143.5690536708872, 144.332415991997, 145.0957782757522, 145.85914052274063, 146.6225027335378, 147.3858649087072, 148.14922704880875, 148.912589154359, 149.67595122591152, 150.43931326397697, 151.20267526906363, 151.96603724166948, 152.72939918228263, 153.4927610913813, 154.2561229694344, 155.01948481690138, 155.7828466342328, 156.5462084218705, 157.30957018024748, 158.0729319097886, 158.836293461091033, 159.59965528402142, 160.3630169295225, 161.12637854780678, 161.88974013926008, 162.6531017042609, 163.41646324318054, 164.17982475638362, 164.9431862442278, 165.70654770706426, 166.46990914523755, 167.23327055908624, 167.9966319489423, 168.7599933151321, 169.52335465797586, 170.2867159777881, 171.0500772748778, 171.8134385495483, 172.57679980209772, 173.34016103281877, 174.1035222419992, 174.86688342992144, 175.63024459686332, 176.3936057430977, 177.15696686889262, 177.92032797451168, 178.68368906021396, 179.44705012625408, 180.21041117288226, 180.97377220034465, 181.73713320888308, 182.5004941987355, 183.26385517013577, 184.02721612331396, 184.7905770584962, 185.553937975905, 186.31729887575918, 187.08065975827395, 187.84408262366118, 188.607381472129, 189.3707423038825, 190.13410311912324, 190.89746391804968, 191.660824700857, 192.4241854677375, 193.1875462188801, 193.95090695447107, 194.71426767469347, 195.47762837972778, 196.24098906975146, 197.00434974493925, 197.76771040546322, 198.5310710514928, 199.29443168319483, 200.05779230073358, 200.82115290427063, 201.58451349396557, 202.34787406997512, 203.11123463245397, 203.87459518155407, 204.63795751742568, 205.40131624021623, 206.1646767500715, 206.92803724713468, 207.6913977315471, 208.45475820344794, 209.2181866297435, 209.98147911026155, 210.74483954544255, 211.5081999686488, 212.2715603800096, 213.03492077965254, 213.79828116770324, 214.56164154428564, 215.32500190952186, 216.08836226353236, 216.8517226043577, 217.61508293834936, 218.3784432593883, 219.14180356966645, 219.9051638692961, 220.66852415838787, 221.43188443705097, 222.19524470539292, 222.95860496351983, 223.72196521153668, 224.48532544954642, 225.24868677651222, 226.01204589595142, 226.77540610450333, 227.5387663686332, 228.30202726185823, 229.2172196251906]
```

Rysunek 1: Wynik dla równania podanego w poleceniu

Wyznacznik macierzy: 13.826355108346936



Rysunek 2: wykres czasu działania programu

5 Analiza wyników

Otrzymane wyniki są zgodne z rezultatami uzyskanymi przy użyciu biblioteki NumPy, co potwierdza prawidłowość przeprowadzonych obliczeń. Analizując zarówno wykres, jak i wyniki, można dostrzec tendencję: dla macierzy o określonej strukturze istnieje znaczący potencjał do redukcji kosztów obliczeniowych. Dzięki temu możliwe jest osiągnięcie znacznie lepszej wydajności obliczeniowej, co może mieć istotne znaczenie w kontekście dużych zbiorów danych oraz skomplikowanych obliczeń matematycznych. Optymalizacja operacji na macierzach może przyczynić się do znacznego skrócenia czasu obliczeń oraz zwiększenia efektywności algorytmów.