Sprawozdanie z Zadania numerycznego **NUM2**

Marian Wąchała

31 października 2024

1 Polecenie

Zadanie numeryczne NUM3: Wyznacz $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ dla

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1.01 & \frac{0.2}{1} & \frac{0.15}{1^3} & & & & & & \\ 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{2} & \frac{0.15}{2^3} & & & & & \\ & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{3} & \frac{0.15}{3^3} & & & & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{N-2} & \frac{0.15}{(N-2)^3} \\ & & & & & & 0.3 & 1.01 & \frac{0.2}{N-1} \\ & & & & & & & 0.3 & 1.01 \end{pmatrix}$$

oraz $\mathbf{x} = (1, 2, \ldots, N)^T$. Ustalamy $N = 300$. Oblicz również wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$. Zadanie rozwiąż właściwą metodą (uzasadnij wybór) i wykorzystaj strukturę macierzy. Algorytm proszę zaprogramować samodzielnie; wyjątkowo nie należy stosować procedur bibliotecznych z zakresu algebry liniowej ani pakietów algebry komputerowej (chyba, że do sprawdzenia swojego rozwiązania, co zawsze jest mile widziane). Ponadto, potraktuj N jako zmienną i zmierz czas działania swojego programu w funkcji N. Wynik przedstaw na wykresie. Jakiej zależności się spodziewamy?

2 Wstęp Teoretyczny

Operacja $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ jest na ogół operracją bardzo kosztowną, jednakże można ją efektywnie zastąpić poprzez $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}$ dzięki temu unikamy niepotrzebnego obliczania $\mathbf{A}^{-1}$ co znacząco redukuje złożoność obliczeniową i przyspiesza proces. To podejście nie tylko zwiększa wydajność, ale również upraszcza implementację.

Aby wybrać odpowiedni algorytm, należy przyjrzeć się strukturze podanej macierzy. Jest to macierz rzadka, zbudowana z czterech diagonali, dlatego zastosowanie standardowej dekompozycji LU będzie nieopłacalne, ponieważ złożoność obliczeniowa wyniesie $O(\mathbf{n}^3)$. Można jednak wykorzystać budowę macierzy w celu zredukowania liczby operacji, przez co złożoność wyniesie jedynie $O(\mathbf{n})$.

Wzory na elementy macierzy $\mathbf{U}$ oraz $\mathbf{L}$ w rozkładzie $\mathbf{LU}$:

$$L_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ \frac{A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik}U_{kj}}{U_{jj}} & \text{if } i > j \\ 0 & \text{if } i < j \end{cases} \tag{1}$$

$$U_{ij} = \begin{cases} A_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik}U_{kj} & \text{for } i \leq j \\ 0 & \text{for } i > j \end{cases} \tag{2}$$

Stosując powyższe wzory do macierzy podanej w poleceniu, wykonujemy zbędne sumy, które dodają zera. Generuje to dużą liczbę niepotrzebnych operacji, które można pominąć. Ponieważ $\mathbf{A} = \mathbf{LU}$ można zapisać to równanie w postaci $\mathbf{LUy} = \mathbf{x}$, następnie skorzystać ze wzorów:

- $\mathbf{Lz} = \mathbf{y}$ (Forward substitution)
- $\mathbf{Uy} = \mathbf{x}$ (back substitution)

Ponownie, rozwiązania powyższych układów równań przez strukturę macierzy również można sprowadzić do O($\mathbf{n}$).
W celu efektywnej faktoryzacji macierzy czterodiagonalnej można zastosować algorytm LU przystosowany do tego typu macierzy. Algorytm działa w następujący sposób:

1. Inicjalizacja macierzy L i U w formie macierzy czterodiagonalnej o rozmiarze $4 \times N$, gdzie każdy wiersz odpowiada poszczególnym diagonalom.

2. Faktoryzacja LU przystosowana do macierzy $N \times N$, zbudowanej z czterech diagonali, pomijająca sytuacje, w których sumujemy zera.

3. Uproszczona procedura *forward substitution* oraz *back substitution*, dostosowana do macierzy czterodiagonalnej, co przyspiesza obliczenia.

Dzięki zastosowaniu powyższego algorytmu można efektywnie rozwiązywać układy równań liniowych oraz obliczać macierz odwrotną dla macierzy czterodiagonalnych.

3 Cel ćwiczenia

Celem ćwiczenia jest zbadanie efektywności metody rozkładu LU w kontekście rozwiązywania układów równań oraz obliczania wyznacznika macierzy. Oto główne zadania:

1. **Rozkład LU:** Skonstruowanie rozkładu LU macierzy $\mathbf{A}$ w celu obliczenia rozwiązań $\mathbf{y} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{x}$ za pomocą macierzy dolnotrójkątnej $\mathbf{L}$ i górnotrójkątnej $\mathbf{U}$.

2. **Wyznacznik macierzy:** Obliczenie wyznacznika macierzy $\mathbf{A}$ na podstawie rozkładu LU, jako iloczynu elementów diagonalnych macierzy $\mathbf{U}$.

3. **Wykres złożoności:** Stworzenie wykresu ilustrującego złożoność obliczeniową faktoryzacji LU w zależności od rozmiaru macierzy.

4. **Algorytm LU:** Opracowanie algorytmu faktoryzacji LU o złożoności O(n) dla macierzy $n \times n$.

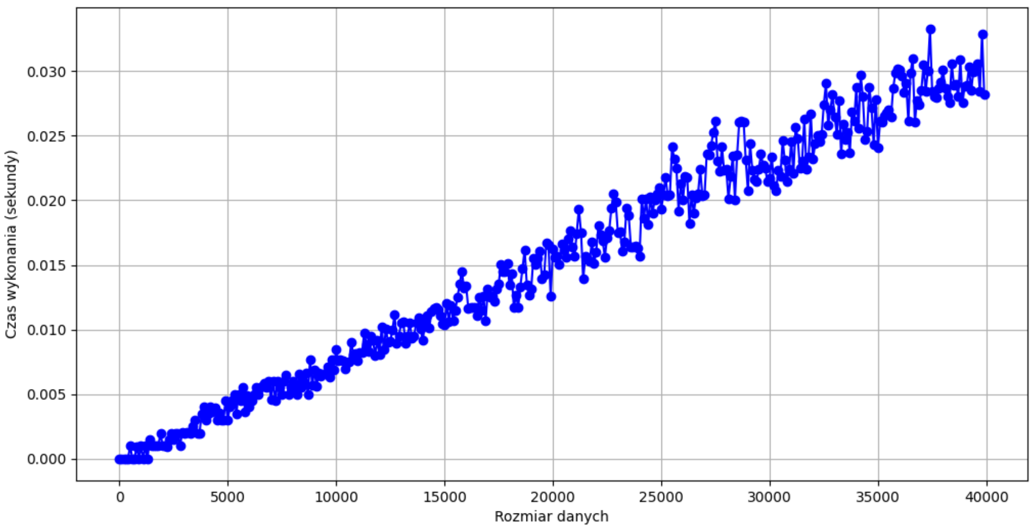
4 Wyniki

Poniżej wyniki równania podanegow poleceniu dla N=300:

```
[0.33637669442473483, 1.5981824494515218, 2.27082032493809, 3.0848365457457945, 3.844974106923569, 4.616655346834123, 5.382478675076812, 6
 .14867296978407, 6.91388200016796, 7.67879847542006, 8.443388685013728, 9.207773833842142, 9.971992233232145, 10.736084291921783, 11.500075150377635,
 12.263984698578499, 13.027827622658412, 13.79161536358432, 14.555356853219754, 15.31905920134059, 16.08272812746752, 16.846368288288676, 17
 .60998351277017, 18.373576978660548, 19.137151345293276, 19.900708855257353, 20.664251412998514, 21.427780646278613, 22.1912979546909, 22
 .954804548308847, 23.718301478732506, 24.48178966422267, 25.245269910196356, 26.00874292605299, 26.77220933907569, 27.535669705984454, 28
 .29912452259137, 29.062574231912027, 29.826019231013913, 30.589459876825202, 31.35289649108394, 32.11632936457209, 32.879758760752615, 33
 .64318491890531, 34.40660805684011, 35.17002837325326, 35.933446049779484, 36.69686125278547, 37.46027413494153, 38.22368483660315, 38.98709348702842,
 39.750500205453875, 40.51390510204758, 41.27730827875534, 42.04070983005392, 42.80410984362296, 43.56750840094559, 44.330905577846444, 45
 .09430144497458, 45.85769606823778, 46.62108950919375, 47.384481825403334, 48.14787307074975, 48.911263295727736, 49.674652547705826, 50.43804087116474,
  51.20142830791402, 51.964814897289784, 52.72820067633488, 53.491585679963706, 54.2549699411129, 55.01835349087947, 55.781736358647464, 56
 .5451185722044, 57.30850015784814, 58.0718811404855, 58.83526154372303, 59.59864138995076, 60.36202070041957, 61.125399495312756, 61.888777793812274,
 62.652155614160016, 63.41553297371476, 64.178909889005, 64.94228637577791, 65.7056624490451, 66.46903812312497, 67.23241341168236, 67.99578832776534,
 68.75916288383968, 69.52253709182098, 70.28591096310467, 71.04928450859403, 71.81265773872664, 72.57603066349884, 73.33940329248884, 74.10277563487843,
 74.86614769947313, 75.62951949472145, 76.39289102873265, 77.15626230929372, 77.91963334388514, 78.68300413969584, 79.44637470363736, 80.20974504235691,
 80.97311516225015, 81.73648506947265, 82.4998547699514, 83.26322426939504, 84.02659357330403, 84.78996268697986, 85.55333161553422, 86.31670036389711,
 87.08006893682511, 87.84343733890879, 88.60680557457995, 89.3701736481184, 90.13354156365845, 90.896909325195, 91.66027693658934, 92.42364440157482,
 93.18701172376204, 93.95037890664373, 94.71374595359973, 95.47711286790134, 96.24047965271575, 97.00384631111015, 97.76721284605554, 98.53057926043061,
 99.29394555702521, 100.05731173854373, 100.82067780760845, 101.58404376676252, 102.34740961847304, 103.11077536513372, 103.87414100906781, 104
 .63750655253044, 105.4008719977113, 106.16423734673681, 106.92760260167256, 107.69096776452535, 108.45433283724536, 109.217697821728, 109
 .98106271981598, 110.74442753330105, 111.50779226392567, 112.2711569133849, 113.03452148332777, 113.79788597535895, 114.56125039104032, 115
 .32461473189217, 116.08797899939472, 116.85134319498945, 117.6147073200803, 118.37807137603484, 119.14143536418553, 119.90479928583083, 120
 .66816314223625, 121.43152693463537, 122.19489066423085, 122.95825433219548, 123.72161793967295, 124.48498148777887, 125.24834497760152, 126
 .01170841020281, 126.77507178661905, 127.5384351078615, 128.3017983749175, 129.06516158875084, 129.8285247503026, 130.59188786049188, 131
 .35525092021624, 132.11861393035258, 132.88197689175752, 133.6453398052681, 134.40870267170217, 135.1720654918593, 135.93542826652086, 136
 .6987909964508, 137.46215368239606, 138.22551632508706, 138.98887892523803, 139.7522414835477, 140.5156040006995, 141.27896647736208, 142
 .04232891418968, 142.80569131182256, 143.5690536708872, 144.332415991997, 145.0957782757522, 145.85914052274063, 146.6225027335378, 147.3858649087072,
 148.14922704880075, 148.912589154359, 149.67595122591152, 150.43931326397697, 151.20267526906363, 151.96603724166948, 152.72939918228263, 153
 .4927610913813, 154.2561229694344, 155.01948481690138, 155.7828466342328, 156.5462084218705, 157.30957018024748, 158.0729319097886, 158.83629361091033,
 159.59965528402142, 160.3630169295225, 161.12637854780678, 161.88974013926008, 162.6531017042609, 163.41646324318054, 164.17982475638362, 164
 .9431862442278, 165.70654770706426, 166.46990914523755, 167.23327055908624, 167.9966319489423, 168.7599933151321, 169.52335465797586, 170.2867159777881,
  171.0500772748778, 171.8134385495483, 172.57679980209772, 173.34016103281877, 174.1035222419992, 174.86688342992144, 175.63024459686332, 176
 .3936057430977, 177.15696686889262, 177.92032797451168, 178.68368906021396, 179.44705012625408, 180.21041117288226, 180.97377220034465, 181
 .73713320888308, 182.5004941987355, 183.26385517013577, 184.02721612331396, 184.7905770584962, 185.553937975905, 186.31729887575918, 187.08065975827395,
  187.84402062366118, 188.607381472129, 189.3707423038825, 190.13410311912324, 190.89746391804968, 191.660824700857, 192.4241854677375, 193
 .1875462188801, 193.95090695447107, 194.71426767469347, 195.47762837972778, 196.24098906975146, 197.00434974493925, 197.76771040546322, 198
 .5310710514928, 199.29443168319483, 200.05779230073358, 200.82115290427063, 201.58451349396557, 202.34787406997512, 203.11123463245397, 203
 .87459518155407, 204.63795571742568, 205.40131624021623, 206.1646767500715, 206.92803724713468, 207.6913977315471, 208.45475820344794, 209
 .21811866297435, 209.98147911026155, 210.74483954544255, 211.5081999686488, 212.2715603800096, 213.03492077965254, 213.79828116770324, 214
 .56164154428564, 215.32500190952186, 216.08836226353236, 216.85172260643577, 217.61508293834936, 218.3784432593883, 219.14180356966645, 219
 .9051638692961, 220.66852415838787, 221.43188443705097, 222.19524470539292, 222.95860496351983, 223.72196521153668, 224.48532544954642, 225
 .24868567765122, 226.01204589595142, 226.77540610450333, 227.5387663686332, 228.30202726185823, 229.2172196251906]
```

Rysunek 1: Wynik dla równania podanego w poleceniu

Wyznacznik macierzy: 13.826355108346936



Rysunek 2: wykres czasu działania programu

5 Analiza wyników

Otrzymane wyniki są zgodne z rezultatami uzyskanymi przy użyciu biblioteki NumPy, co potwierdza prawidłowość przeprowadzonych obliczeń. Analizując zarówno wykres, jak i wyniki, można dostrzec tendencję: dla macierzy o określonej strukturze istnieje znaczący potencjał do redukcji kosztów obliczeniowych. Dzięki temu możliwe jest osiągnięcie znacznie lepszej wydajności obliczeniowej, co może mieć istotne znaczenie w kontekście dużych zbiorów danych oraz skomplikowanych obliczeń matematycznych. Przykładowo, w zastosowaniach takich jak uczenie maszynowe czy analiza danych, optymalizacja operacji na macierzach może przyczynić się do znacznego skrócenia czasu obliczeń oraz zwiększenia efektywności algorytmów.