Dokumentacja Implementacji Drzewa Czerwono-Czarnego (Red-Black Tree)

Autor: Marian Wąchała

Data: 15 stycznia 2025

Spis treści

1 Wstęp

1.1 Drzewo czerwono-czarne

Drzewo czerwono-czarne (ang. *Red-Black Tree*) to samobalansujące się drzewo BST (ang. *Binary Search Tree*), które zapewnia średni czas wstawiania, usuwania i wyszukiwania na poziomie $\mathcal{O}(\log n)$.

Zachowanie równowagi jest możliwe dzięki specjalnym regułom związanym z kolorowaniem węzłów na kolor czerwony (`RED`) lub czarny (`BLACK`) oraz dzięki odpowiednim operacjom rotacji (lewo- i prawostronnej).

1.2 Założenia drzewa czerwono-czarnego

Drzewa czerwono-czarne opierają się na następujących regułach:

1. Każdy węzeł jest **czerwony** lub **czarny**.
2. **Strażnik NIL** jest zawsze czarny i działa jako końcowy węzeł (liść) w każdej ścieżce.
3. Korzeń drzewa jest zawsze **czarny**.
4. Każda ścieżka od węzła do liścia zawiera taką samą liczbę **czarnych węzłów**.
5. Czerwony węzeł nie może mieć czerwonych rodziców ani dzieci (własność **Black Depth**).

1.3 Podstawowe pojęcia w drzewie czerwono-czarnym

Podczas opisywania operacji na drzewie czerwono-czarnym używane są następujące terminy:

- **Ojciec (Parent)** – bezpośredni przodek danego węzła w drzewie.
- **Dziadek (Grandparent)** – przodek węzła będący ojcem jego ojca.
- **Wujek (Uncle)** – węzeł będący drugim dzieckiem dziadka, który nie jest ojcem danego węzła.
- **Brat (Sibling)** – inne dziecko tego samego ojca co dany węzeł.

2 Opis Implementacji

2.1 Rola NIL jako strażnika

W implementacji zastosowano specjalny węzeł `NIL`, który:

- Działa jako wskaźnik na wszystkie puste liście w drzewie.
- Upraszcza implementację, eliminując konieczność sprawdzania, czy wskaźniki są `nullptr`.
- Wspiera zachowanie spójności drzewa podczas operacji naprawczych (`fixInsert` i `fixDelete`).

2.2 Podstawowe metody

2.2.1 Wstawianie elementu

Proces wstawiania polega na dodaniu nowego węzła do drzewa zgodnie z zasadami BST, a następnie naprawie potencjalnych naruszeń zasad drzewa czerwono-czarnego za pomocą metody `fixInsert`.

```
1 void insert(const T& key);
```

Metoda wykonuje następujące kroki:

1. Tworzy nowy węzeł o wartości `key` z kolorem `RED`.
2. Znajduje odpowiednie miejsce w drzewie dla nowego węzła.
3. Wywołuje `fixInsert` w celu przywrócenia właściwości drzewa czerwono-czarnego.

2.2.2 Naprawa drzewa po wstawieniu (`fixInsert`)

Gdy nowy węzeł zostanie wstawiony, może dojść do naruszenia reguł drzewa czerwono-czarnego. Naprawa odbywa się w następujących krokach:

Przypadek A: Ojciec węzła jest lewym dzieckiem dziadka.

- **1. Wujek jest czerwony:**
  - Zmieniamy kolor dziadka na czerwony.
  - Zmieniamy kolor ojca na czarny.
  - Zmieniamy kolor wujka na czarny.
  - Przechodzimy do dalszego przetwarzania od dziadka.
- **2. Wujek jest czarny:**
  - **a. Węzeł jest lewym dzieckiem ojca:**
    - Wykonujemy rotację w lewo na ojcu.
    - Aktualizujemy odniesienia do węzła i jego rodzica.
  - **b. Węzeł jest prawym dzieckiem ojca:**
    - Wykonujemy rotację w prawo na dziadku.
    - Zamieniamy kolory ojca i dziadka.
    - Przechodzimy do dalszego przetwarzania od ojca.

Przypadek B: Ojciec węzła jest prawym dzieckiem dziadka.
Wykonujemy to samo, tylko, że podmieniamy left z right.

2.2.3 Usuwanie elementu

Proces usuwania obejmuje:

```
bool remove(const T& key);
```

1. Wyszukanie węzła o wartości `key`.
2. Przypadek dla węzła z jednym dzieckiem lub bez dzieci:
   - Usunięcie węzła i podłączenie jego dziecka.
3. Przypadek dla węzła z dwoma dziećmi:
   - Znalezienie najmniejszego węzła w prawym poddrzewie (`minValueNode`).
   - Zastąpienie wartości usuwanego węzła wartością znalezionego węzła.
   - Usunięcie znalezionego węzła.
4. Wywołanie `fixDelete` w celu przywrócenia właściwości drzewa.

2.2.4 Naprawa drzewa po usunięciu elementu (`fixDelete`)

Podobnie jak w przypadku wstawiania, po usunięciu elementu może dojść do naruszenia własności drzewa czerwono-czarnego. Naprawa po usunięciu elementu odbywa się w następujących krokach:

Przypadek A: Węzeł jest lewym dzieckiem rodzica.

- **1. Brat węzła jest czerwony:**
  - Zmieniamy kolor brata na czarny.
  - Zmieniamy kolor rodzica na czerwony.
  - Wykonujemy rotację w lewo na rodzicu.
  - Aktualizujemy odniesienie do brata (teraz jest to prawy syn rodzica po rotacji).
- **2. Brat węzła jest czarny i ma dwóch czarnych synów:**
  - Zmieniamy kolor brata na czerwony.
  - Przechodzimy do dalszego przetwarzania od rodzica.
- **3. Brat węzła jest czarny i jego prawy syn jest czarny, ale lewy syn jest czerwony:**
  - Zmieniamy kolor lewego syna brata na czarny.
  - Zmieniamy kolor brata na czerwony.
  - Wykonujemy rotację w prawo na bracie.
  - Aktualizujemy odniesienie do brata (teraz jest to prawy syn rodzica po rotacji).

- **4. Brat węzła jest czarny i jego prawy syn jest czerwony:**
  - Zmieniamy kolor brata na kolor rodzica.
  - Zmieniamy kolor rodzica na czarny.
  - Zmieniamy kolor prawego syna brata na czarny.
  - Wykonujemy rotację w lewo na rodzicu.
  - Przerywamy pętlę (ustawiamy węzeł na korzeń).

Przypadek B: Węzeł jest prawym dzieckiem rodzica.
Postępujemy analogicznie jak w przypadku A, zamieniając kierunki rotacji oraz role lewego i prawego syna.

2.2.5 Wyszukiwanie elementu

Metoda wyszukuje element w drzewie:

```
Node<T>* search(Node<T>* root, const T& key);
```

Wyszukiwanie odbywa się rekurencyjnie w oparciu o reguły BST:

- Jeśli wartość `key` jest równa wartości bieżącego węzła, zwracany jest wskaźnik do węzła.
- Jeśli wartość `key` jest mniejsza, wyszukiwanie kontynuowane jest w lewym poddrzewie.
- Jeśli wartość `key` jest większa, wyszukiwanie kontynuowane jest w prawym poddrzewie.

2.3 Metody pomocnicze

- `rotateLeft(Node<T>* node)` – Rotacja w lewo względem węzła `node`.
- `rotateRight(Node<T>* node)` – Rotacja w prawo względem węzła `node`.
- `minValueNode(Node<T>* node)` – Znajduje węzeł o najmniejszej wartości w poddrzewie.
- `transplant(Node<T>* u, Node<T>* v)` – Zamienia węzeł `u` z węzłem `v`.

3 Przykładowe Testy

Poniżej przedstawiono przykładowe scenariusze testowe dla drzewa czerwono-czarnego (Red-Black Tree). Każdy scenariusz zawiera opis operacji, wizualizację drzewa przed i po wykonaniu danej operacji.

Scenariusz 1: Usuwanie korzenia z drzewa z jednym węzłem

Opis: Usuwamy węzeł 42 z drzewa, które zawiera tylko jeden węzeł (korzeń).

Drzewo PRZED usunięciem 42:

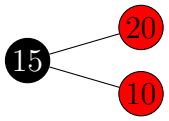
Drzewo PO usunięciu 42:

(empty tree)

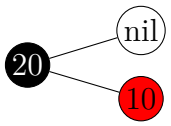
Scenariusz 2: Usuwanie czerwonego liścia

Opis: Usuwamy czerwony węzeł 15 z drzewa.

Drzewo PRZED usunięciem 15:



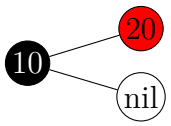
Drzewo PO usunięciu 15:



Scenariusz 3: Usuwanie pojedynczego czerwonego liścia

Opis: Usuwamy czerwony węzeł 20 z drzewa.

Drzewo PRZED usunięciem 20:

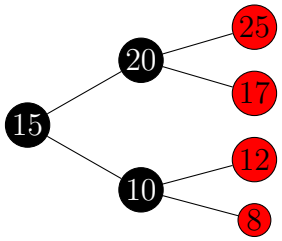


Drzewo PO usunięciu 20:

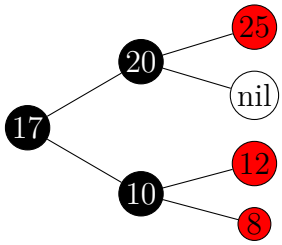
Scenariusz 4: Usuwanie węzła posiadającego dwoje dzieci

Opis: Usuwamy węzeł 15, który ma dwoje dzieci.

Drzewo PRZED usunięciem 15:



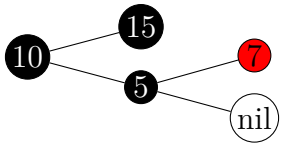
Drzewo PO usunięciu 15:



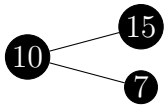
Scenariusz 5: Usuwanie węzła z jednym dzieckiem

Opis: Usuwamy węzeł 5, który posiada jedno dziecko.

Drzewo PRZED usunięciem 5:



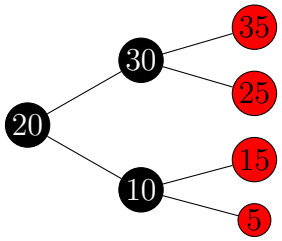
Drzewo PO usunięciu 5:



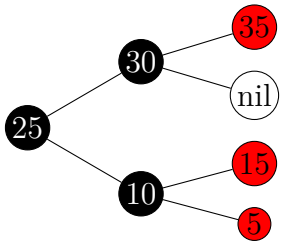
Scenariusz 6: Usuwanie korzenia z dwojgiem dzieci

Opis: Usuwamy korzeń drzewa (węzeł 20), który posiada dwoje dzieci.

Drzewo PRZED usunięciem 20:



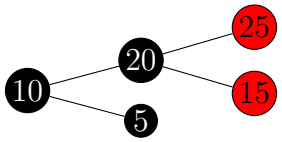
Drzewo PO usunięciu 20:



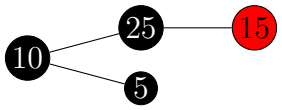
Scenariusz 7: Usunięcie czarnego węzła z dwoma czerwonymi dziećmi

Opis: Usuwamy czerwony węzeł (20), który posiada dwóch czarnych potomków.

Drzewo PRZED usunięciem 20:



Drzewo PO usunięciu 20:



4 Podsumowanie

4.1 Złożoność operacji dodawania i usuwania elmentów z drzewa czerwono-czarnego

Drzewa czerwono-czarne są niezwykle efektywnymi strukturami danych, które dzięki swoim właściwościom zapewniają, że operacje wstawiania i usuwania są wykonywane w czasie $\mathcal{O}(\log n)$. Utrzymanie zrównoważenia drzewa poprzez odpowiednie rotacje i zmiany kolorów węzłów gwarantuje, że nawet w najgorszym przypadku wysokość drzewa pozostaje na poziomie logarytmicznym względem liczby jego elementów.

5 Źródła

- GeeksforGeeks, *Introduction to Red-Black Tree*, `https://www.geeksforgeeks.org/introduction-to-red-black-tree/`.
- Wikipedia, *Drzewo czerwono-czarne*, `https://pl.wikipedia.org/wiki/Drzewo_czerwono-czarne`.
- Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., Stein, C., *Wprowadzenie do algorytmów*, PWN, 2022.
- University of San Francisco, *Red-Black Tree Visualization*, `https://www.cs.usfca.edu/~galles/visualization/RedBlack.html`.