吉林大学电动力学考试题解

wms

2021 年 7 月 10 日

前言

想了好久不知道引用啥才能与题目整理的文档对应，于是求助室友得到了牛顿的一句话：

“I do not know what I may appear to the world, but to myself I seem to have been only like a boy playing on the sea-shore, and diverting myself in now and then finding a smoother pebble or a prettier shell than ordinary, whilst the great ocean of truth lay all undiscovered before me”

本书献给在吉大度过了三年的你们，大三马上就要结束了，有没有完成当时刚进大学时的目标呢？嘻嘻，希望学弟学妹在追梦路上，不负韶华。

这个答案整理是看到了往年学长整理的题目后想到的，由于今年有期中考试，这个答案又是在期末刚考完后整理的，所以就少了前几章的答案。考完后在家浪了几天，部分答案就只写了一个做题过程，没有较详尽的解析，但仍然希望这个整理能够帮助到您。

爱你们的，
学长

献给可爱的学妹们

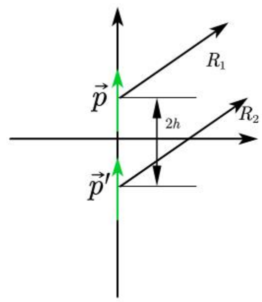
电磁现象的基本规律

静电场

稳定电磁场

电磁波的辐射

习题 1.4.1



为求上半空间得辐射场，利用镜像法原理，可将导体等效为下半空间一电偶极子 $\vec{P}' = \vec{P} = \vec{P}_0 e^{-i\omega t}$，距原点 h 处，则

$$\vec{B}_1 = \frac{e^{ikR_1}}{4\pi c^3 \varepsilon_0 R_1} \ddot{\vec{P}}_1 \times \vec{e}_R$$

$$\vec{B}_2 = \frac{e^{ikR_2}}{4\pi c^3 \varepsilon_0 R_2} \ddot{\vec{P}}_2 \times \vec{e}_R$$

由于辐射问题中，R_1，R_2 远大于场源线度，故可近似为 R_1 与 R_2 平行，所以得到 $R_1 - R_2 = -2h\cos\theta$，又因为 $h << \lambda \to kh = \frac{2\pi}{\lambda} h << 1$，则

$$\begin{aligned}\vec{B} =& 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R} e^{ikR} \ddot{\vec{P}} \times \vec{e}_R \\ =& \frac{e^{ikR} \left|\ddot{\vec{P}}\right| \sin\theta}{2\pi\varepsilon_0 c^3 R} \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

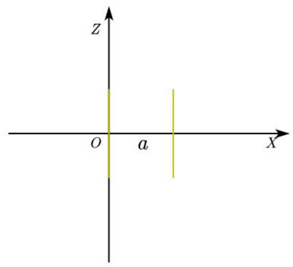
得到磁场后可计算电场：

$$\begin{aligned}\vec{E} =& c\vec{B} \times \vec{e}_R \\ =& \frac{e^{ikR} \ddot{\vec{P}} \times \vec{e}_R \times \vec{e}_R}{2\pi\varepsilon_0 c^2 R} \\ =& \frac{e^{ikR} \left|\ddot{\vec{P}}\right| \sin\theta}{2\pi\varepsilon_0 c^2 R} \vec{e}_\theta\end{aligned}$$

平均辐射能流

$$\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\vec{E}^* \times \vec{H}\right) = \frac{c}{2\mu_0} \left|\vec{B}\right|^2 \vec{e}_R = \frac{\left|\ddot{\vec{P}}\right|^2 \sin^2\theta}{8\pi^2 \varepsilon_0 c^3 R^2} \vec{e}_R$$

习题 1.4.2



对于每一根天线，由于其长度 $l << \lambda$，可将其视为电偶极辐射，电偶极矩变化率为:

$$\dot{P}_1 = \dot{P}_2 = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} I(z)\, e^{-i\omega t} dz = \frac{1}{2} I_0 l e^{-i\omega t}$$

磁场为:

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 e^{ikR_1}}{4\pi c R_1} \ddot{\vec{P}}_1 \times \vec{e}_R$$

$$\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 e^{ikR_2}}{4\pi c R_2} \ddot{\vec{P}}_2 \times \vec{e}_R$$

在辐射问题中，R_1，R_2 远大于场源线度，故可近似认为 R_1 与 R_2 是平行的，R_1 与 R_2 的差值与 a 同量级，由于 $a << \lambda$，则 $ka << 1$，两偶极子的相位因子之差与 ka 同一量级，故可忽略，则得:

$$\begin{aligned}\vec{B} =& \frac{2\mu_0}{4\pi c R} e^{ikR} \cdot \ddot{\vec{P}} \times \vec{e}_R \\ =& -\frac{i\omega I_0 l \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^3 R} e^{i(kR-\omega t)} \vec{e}_\phi\end{aligned}$$

计算电场: $\vec{E} = c\vec{B} \times \vec{e}_R = -\frac{i\omega I_0 l \sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 c^2 R} e^{i(kR-\omega t)} \vec{e}_\theta$

辐射角分布: $\bar{\vec{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E^*} \times \vec{H}\right) = \frac{\omega^2 I_0^2 l^2 \sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2} \vec{e}_R$

辐射功率:

$$\begin{aligned}w =& \oint \left|\bar{\vec{S}}\right| R^2 d\Omega \\ =& \int \frac{\omega^2 I_0^2 l^2 \sin^2\theta}{32\pi^2\varepsilon_0 c^3 R^2} R^2 \sin\theta d\theta d\phi \\ =& \frac{\omega^2 I_0^2 l^2}{12\pi\varepsilon_0 l^3}\end{aligned}$$

习题 1.4.3

$$
\begin{aligned}
\vec{A}\left(\vec{R},t\right) =&\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}\left(\vec{R}',t-\frac{r}{c}\right)}{r}dV' \\
=&\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}\left(\vec{R}'\right)}{r}e^{-iw\left(t-\frac{r}{c}\right)}dV' \\
=&\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\vec{J}\left(\vec{R}'\right)}{r}e^{ikr}dV'e^{-i\omega t}
\end{aligned}
$$

对 $\frac{e^{ikr}}{r}$ 进行展开：$\frac{e^{ikr}}{r}=\frac{e^{ikR}}{R}-\vec{R}'\cdot\nabla\frac{e^{ikR}}{R}$
对于第二项 $\vec{R}'\cdot\nabla\frac{e^{ikR}}{R}=\vec{R}'\cdot\left(-\frac{\vec{R}}{R^3}+ik\frac{\vec{R}}{R}\right)\frac{e^{ikR}}{R}$
所以第二项比第一项为 $\vec{R}'\cdot\left(-\frac{\vec{R}}{R^3}+ik\frac{\vec{R}}{R}\right)$
当 $R'<<R$，且 $kR'<<1$ 时，第二项远小于第一项，下面计算电偶极矩

$$
\vec{P}\left(t\right)=\int\rho\left(\vec{R}',t\right)\vec{R}'dV'
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\vec{P}\left(t\right)}{dt}=&\int\frac{\partial\rho\left(\vec{R}',t\right)}{\partial t}\vec{R}'dV' \\
=&-\int\left(\nabla\cdot\vec{J}\right)\vec{R}'dV' \\
=&-\int\nabla\cdot\left(\vec{J}\vec{R}'\right)dV'+\int\vec{J}\cdot\nabla'\vec{R}'dV' \\
=&-\oint\vec{J}\vec{R}'d\vec{S}+\int\vec{J}dV' \\
=&\int\vec{J}dV'
\end{aligned}
$$

则有

$$
\vec{A}_0=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\int\vec{J}\left(\vec{R}'\right)dV'=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikR}}{R}\dot{\vec{P}}
$$

故 $\vec{A}_0\left(\vec{R},t\right)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\vec{P}}e^{ikR}}{R}$

习题 1.4.4

（1）近区 $R << \lambda$，即 $kR << 1$，电场得主要项为 $\frac{1}{R^3}$，磁场得主要项为 $\frac{1}{R^2}$，所以电场和磁场分别为：

$$\vec{E} = -\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^3}\left(\vec{p} - 3\vec{p}\cdot\vec{e}_R\vec{e}_R\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\nabla\frac{\vec{p}(t)\cdot\vec{R}}{R^3}$$

$$\vec{B} = \frac{i\mu_0\omega^2}{4\pi c}\frac{1}{kR^2}\vec{e}_R\times\vec{p} = \frac{i\mu_0\omega}{4\pi R^2}\vec{e}_R\times\vec{p} = -\frac{\mu_0}{4\pi R^2}\vec{e}_R\times\dot{\vec{p}}$$

远区 $R >> \lambda$，电磁场的主要项均为 $\frac{1}{R}$，所以远区的电磁场分别为：

$$\vec{E} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{k^2}{R}\left(\vec{e}_R\times\vec{p}\right)\times\vec{e}_R$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\omega^2}{4\pi c}\frac{1}{R}e^{ikR}\vec{e}_R\times\vec{p}$$

近区场与远区场的主要差别：

- 近场的电磁场和源同步变化，在每一瞬间时都服从静态或稳恒情况规律
- 远场 $\vec{B}\left(\vec{R},t\right)$，$\vec{E}\left(\vec{R},t\right)$ 中含有 $e^{i\left(\vec{k}\cdot\vec{R}-\omega t\right)}$ 表明远区其主要作用的电磁场以波的形式向外传

（2）远区电磁场：

$$\vec{E} = \frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{k^2}{R}\left(\vec{e}_R\times\vec{p}\right)\times\vec{e}_R$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0\omega^2}{4\pi c}\frac{1}{R}e^{ikR}\vec{e}_R\times\vec{p}$$

平均能流：

$$\begin{aligned}\bar{\vec{S}} =& \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E}*\times\vec{H}\right)\\ =& \frac{c}{2\mu_0}\mathrm{Re}\left[\left(\vec{B}*\times\vec{e}_R\right)\times\vec{B}\right]\\ =& \frac{c}{2\mu_0}\frac{\left|\ddot{\vec{p}}\right|^2}{16\pi^2\varepsilon_0^3c^6R^2}\sin^2\theta\vec{e}_R\\ =& \frac{\left|\ddot{\vec{p}}\right|^2}{32\pi^2\varepsilon_0c^3R^2}\sin^2\theta\vec{e}_R\end{aligned}$$

辐射功率：

$$
\begin{aligned}
w &= \oint \left|\bar{\vec{S}}\right| R^2 \sin\theta d\theta d\phi \\
&= \frac{\left|\ddot{\vec{p}}\right|^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3}
\end{aligned}
$$

习题 1.4.5

用矢势和标势表示电磁场：$\vec{B}=\nabla\times\vec{A}$，$\vec{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$，由麦克斯韦方程 $\nabla\times\vec{H}=\vec{J}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ 可得：

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\vec{B} =& \mu_0\vec{J}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\
\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right) =& \mu_0\vec{J}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\\
\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A} =& \mu_0\vec{J}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)
\end{aligned}
$$

移相得

$$
\begin{aligned}
\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} =& -\mu_0\vec{J}+\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi\\
=& -\mu_0\vec{J}+\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)
\end{aligned}
$$

再次移相得到：

$$
\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}-\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi\right)=-\mu_0\vec{J}
$$

再用麦克斯韦方程组中得 $\nabla\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}$ 推导：

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\left(-\nabla\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) =& \frac{\rho}{\varepsilon_0}\\
\nabla^2\phi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\vec{A} =& -\frac{\rho}{\epsilon_0}
\end{aligned}
$$

洛伦兹变换：

$$
\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\phi=0
$$

带入上面得到得两个一般方程即可得到达朗伯方程：

$$
\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A}=-\mu_0\vec{J}
$$

$$
\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}
$$

习题 1.4.6

$$
\begin{aligned}
\vec{P}\left(t\right) &= \int \rho\left(\vec{R}', t\right)\vec{R}' dV' \\
\frac{d\vec{P}\left(t\right)}{dt} &= \int \frac{\partial \rho\left(\vec{R}', t\right)}{\partial t}\vec{R}' dV' \\
&= -\int \left(\nabla \cdot \vec{J}\right)\vec{R}' dV' \\
&= -\int \nabla \cdot \left(\vec{J}\vec{R}'\right) dV' + \int \vec{J} \cdot \nabla' \vec{R}' dV' \\
&= -\oint \vec{J}\vec{R}' d\vec{S} + \int \vec{J} dV' \\
&= \int \vec{J} dV'
\end{aligned}
$$

电磁波的传播

习题 1.5.1

传输线在 z 方向没有限制,在 z 方向传播得电磁波得形式为 $\vec{E}(x,y,z)=\vec{E}(x,y)\,e^{-ik_z z}$，将其带入电磁波的传播方程 $\nabla^2\vec{E}+k^2\vec{E}=0$，得到:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{E}+k^2\vec{E}=0$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\vec{E}(x,y)\,e^{ik_z z}+k^2\vec{E}(x,y)\,e^{ik_z z}=0$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\vec{E}(x,y)\,e^{ik_z z}+\left(k^2-k_z^2\right)\vec{E}(x,y)\,e^{ik_z z}=0$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\vec{E}+\left(k^2-k_z^2\right)\vec{E}=0$$

用 $u(x,y)$ 表示 $\vec{E}$ 或 $\vec{H}$ 的任一分量，令 $u(x,y)=X(x)\,Y(y)$，带入上式可以得到:

$$\frac{1}{X}\frac{d^2X}{dx^2}+\frac{1}{Y}\frac{d^2Y}{dy^2}+\left(k^2-k_z^2\right)=0$$

令 $\frac{d^2X}{dx^2}=-k_x^2X$，$\frac{d^2Y}{dy^2}=-k_y^2Y$（其中 k_x，k_y 满足 $k_x^2+k_y^2+k_z^2=k^2$），可以解得:

$$u(x,y)=(A\sin k_x x+B\cos k_x x)\,(C\sin k_y y+D\cos k_y y)$$

由边界条件 $\vec{n}\times\vec{E}=0$，$\frac{\partial E_n}{\partial n}=0$ 可以得到:

$$x=0,a\ \text{时，}\ E_y=E_z=0，\ \tfrac{\partial E_x}{\partial x}=0$$
$$y=0,b\ \text{时，}\ E_x=E_z=0，\ \tfrac{\partial E_y}{\partial y}=0$$

用 $y=0,b$ 时 $E_x=0$ 和 $x=0,a$ 时 $\frac{\partial E_x}{\partial x}=0$ 可以得到 E_x:

$$E_x=C_1\,(\cos k_x x)\,(\sin k_y y)\,e^{i(k_z z-\omega t)}$$

同理可得 E_y:

$$E_y=C_2\,(\sin k_x x)\,(\cos k_y y)\,e^{i(k_z z-\omega t)}$$

$$E_z=C_3\,(\sin k_x x)\,(\sin k_y y)\,e^{i(k_z z-\omega t)}$$
$$\left(k_x=\frac{m\pi}{a},k_y=\frac{n\pi}{b}\right)$$

然后计算截止频率：

$$k_z^2 = k^2 - k_x^2 - k_y^2 = \left(\frac{\omega}{v}\right)^2 - k_x^2 - k_y^2 \geq 0$$

$$\omega^2\mu\varepsilon \geq \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2$$
$$\omega \geq \frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}$$

则 TE_{10} 的截止频率为 $\frac{\pi}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \cdot \frac{1}{a}$
现计算传输功率

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = -C_1k_x - C_2k_y + iC_3k_z = 0$$

取 $C_3 = 0$，$C_2 = \frac{i\omega\mu a}{\pi}H_0$，此时 $E_x = E_z = 0$，$E_y = \frac{i\omega\mu a}{\pi}H_0 \sin\frac{\pi x}{a}e^{ik_z z}$，由 $\vec{H} = -\frac{i}{\omega u}\nabla \times \vec{E}$ 计算可得磁场：

$$\begin{cases} H_x = -\frac{ik_z a}{\pi}H_0 \sin\frac{\pi x}{a}e^{ik_z z} \\ H_y = 0 \\ H_z = H_0 \cos\frac{\pi x}{a}e^{ik_z z} \end{cases}$$

能流密度为：

$$\begin{aligned} \bar{\vec{S}} &= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\vec{E^*} \times \vec{H}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(E_y^* H_x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{aH_0}{\pi}\right)^2 \omega\mu k_z \sin^2\frac{\pi x}{a}\vec{e}_z \end{aligned}$$

功率：

$$P = \int_0^a \int_0^b \bar{\vec{S}} dxdy = \frac{a^3 b\omega\mu k_z}{4\pi^2}H_0^2$$

习题 1.5.2

均匀导体中由于电荷守恒：

$$\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

导体内有 $\vec{J}=\sigma\vec{E}$，带入可得：

$$\nabla\cdot\vec{J}=\nabla\cdot\left(\sigma\vec{E}\right)=\frac{\sigma}{\varepsilon}\rho$$

所以得到

$$\rho\frac{\sigma}{\varepsilon}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$
$$\rho=\rho_0e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon}t}$$

导体中 $\frac{\sigma}{\varepsilon}$ 很大，因此均匀导体内不可能积累自由电荷，在导体内认为 $\rho=0$
于是在导体中电磁波传播的基本方程为：

$$\nabla\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\qquad\nabla\times\vec{H}=\sigma\vec{E}+\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$$
$$\nabla\cdot\vec{E}=0\qquad\qquad\nabla\cdot\vec{B}=0$$

则

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{E}&=-\frac{\partial\left(\mu\vec{H}\right)}{\partial t}=i\omega\mu\vec{H}\\ \nabla\times\vec{H}&=\sigma\vec{E}+\left(-i\omega\varepsilon\right)\vec{E}\\ &=-i\omega\left(\varepsilon+\frac{i\sigma}{\omega}\right)\vec{E}\\ &=-i\omega\varepsilon'\vec{E}\end{aligned}$$

其中 $\varepsilon'=\varepsilon+\frac{i\sigma}{\omega}$
于是得到导体中单色电磁波基本方程：

$$\begin{cases}\nabla\times\vec{E}=i\omega\mu\vec{H}\\ \nabla\cdot\vec{E}=0\\ \nabla^2\vec{E}+k'^2\vec{E}=0\end{cases}\quad\begin{cases}\nabla\times\vec{H}=-i\omega\varepsilon'\vec{E}\\ \nabla\cdot\vec{H}=0\\ \nabla^2\vec{B}+k'^2\vec{B}=0\end{cases}$$

习题 1.5.3

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad\qquad \nabla \cdot \vec{E} = 0$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \left(\nabla \times \vec{E}\right) &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \vec{B}\right)\\ -\nabla^2 \vec{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \times \mu \vec{H}\right)\\ &= -\mu \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\end{aligned}$$

则有

$$\nabla^2 \vec{E} - \varepsilon\mu \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0$$

设单色平面波角频率为 ω

$$\vec{E} = \vec{E}\left(\vec{R}\right) e^{-i\omega t}$$

则

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{E} + \frac{\omega^2}{v^2}\vec{E} &= 0\\ \nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} &= 0\end{aligned}$$

同理可得 $\nabla^2 \vec{B} + k^2 \vec{B} = 0$
于是介质中的基本方程为

$$\begin{cases}\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0\\ \nabla \cdot \vec{E} = 0\\ \vec{B} = -\frac{i}{\omega}\nabla \times \vec{E}\end{cases} \qquad \begin{cases}\nabla^2 \vec{B} + k^2 \vec{B} = 0\\ \nabla \cdot \vec{B} = 0\\ \vec{E} = \frac{i}{\omega\varepsilon\mu}\nabla \times \vec{B}\end{cases}$$

习题 1.5.4

在轴线中传播的 TEM 波，由于对称性，E 与 θ 无关。设内外导体横向电势差为 V，在横截面内电势 ϕ 满足

$$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = 0$$

$$\phi = C_1 \ln r + C_2$$

由边界条件 $r = a, \phi = V, r = b, \phi = 0$ 可得到

$$\phi = V\frac{\ln\frac{r}{b}}{\ln\frac{a}{b}}$$

于是电场振幅为

$$\vec{E} = -\nabla\phi = -\frac{\partial}{\partial r}\phi\vec{e}_r = \frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}\vec{e}_r$$

写出传播因子后，电场是

$$\vec{E} = \frac{V}{\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}e^{i(k_z z - \omega t)}\vec{e}_r$$

$$(k_z = \frac{w}{c})$$

磁场为：

$$\begin{aligned}\vec{H} &= -\frac{i}{\omega\mu}\nabla\times\vec{E}\\ &= -\frac{i}{\omega\mu}\frac{1}{r}\begin{vmatrix}\vec{e}_r & r\vec{e}_\theta & \vec{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_r & rA_\theta & A_z\end{vmatrix} = \frac{Vk_z}{\omega\mu\ln\frac{b}{a}}\frac{1}{r}e^{i(k_z z-\omega t)}\vec{e}_\theta\end{aligned}$$

习题 1.5.5

入射波，反射波，折射波分别为

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i_0} e^{i\left(\vec{k}_i \cdot \vec{R} - \omega_i t\right)}$$
$$\vec{E}_f = \vec{E}_{f_0} e^{i\left(\vec{k}_f \cdot \vec{R} - \omega_f t\right)}$$
$$\vec{E}_g = \vec{E}_{g_0} e^{i\left(\vec{k}_g \cdot \vec{R} - \omega_g t\right)}$$

由边界条件 $\vec{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0$ 可得：

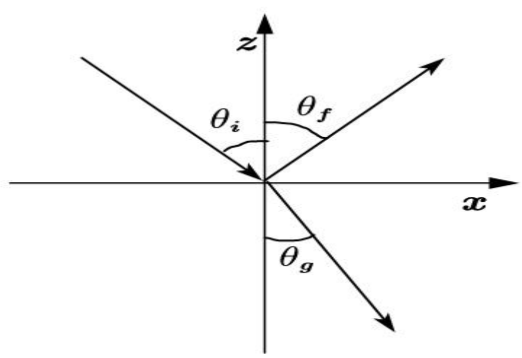
$$\vec{n} \times \left(\vec{E}_i + \vec{E}_f\right) = \vec{n} \times \vec{E}_g$$

$$\vec{n} \times \left(\vec{E}_{i_0} e^{i(k_{ix}x + k_{iy}y - \omega_\mathrm{i}\mathrm{t})} + \vec{E}_{\mathrm{f}_0} e^{i(k_{\mathrm{f}x}x + k_{\mathrm{f}y}y - \omega_\mathrm{f}\mathrm{t})}\right) = \vec{n} \times \vec{E}_{\mathrm{g}_0} e^{i(k_{\mathrm{g}x}x + k_{\mathrm{g}y}y - \omega_\mathrm{g}\mathrm{t})}$$

次关系在任何时刻，对分界面上的任何一点都成立，因此可得

$$k_{ix} = k_{fx} = k_{gx}$$
$$k_{iy} = k_{fy} = k_{gy}$$
$$\omega_i = \omega_f = \omega_g$$

下面是折射定律和反射定律



折射反射

入射波在 $x - z$ 平面内，此时 $k_{iy} = 0$，因此 $k_{fy} = k_{gy} = 0$

由图可得

$$k_{ix} = k_i \sin\theta_i$$
$$k_{fx} = k_f \sin\theta_f$$
$$k_{gx} = k_g \sin\theta_g$$

再由 $k_{ix} = k_{fx} = k_{gx}$ 可得

$$k_i \sin\theta_i = k_f \sin\theta_f = k_g \sin\theta_g$$
$$\frac{\omega}{v_1}\sin\theta_i = \frac{\omega}{v_1}\sin\theta_f = \frac{\omega}{v_2}\sin\theta_g$$

所以得到 $\sin\theta_i = \sin\theta_f \to \theta_i = \theta_f$,，此为反射定律
$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_g} = \frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \frac{n_2}{n_1} = n_{21}$ 此为折射定律

习题 1.5.6

垂直入射时

$$k = k_z = w\sqrt{\varepsilon\mu}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}+1\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\tau = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon^2}}-1\right)^{\frac{1}{2}}$$

良导体有 $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} >> 1$ 因此

$$\tau \approx \sqrt{\frac{\omega\sigma\mu}{2}}$$

透入深度

$$d = \frac{1}{\tau} = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$$

狭义相对论

习题 1.6.1

势方程

$$\nabla^2\phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial^2 t}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial^2 t}=-\mu_0\vec{J}$$

洛伦兹条件

$$\nabla\cdot\vec{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\phi}{\partial t}=0$$

电荷守恒

$$\nabla\cdot\vec{J}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0$$

相对论形式:

势方程: $\frac{\partial^2 A_\nu}{\partial x_\mu \partial x_\mu}=-\mu_0 J_\nu$

电荷守恒: $\frac{\partial J_\mu}{\partial x_\mu}=0 \qquad J_4=ic\rho$

洛伦兹条件: $\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=0 \qquad A_4=i\frac{\phi}{c}$

习题 1.6.2

线考虑一般情况：$1+2\to3+4+...$

$$\Delta M=(m_3+m_4+...)-(m_1+m_2)$$

阈能要求质心系中产生的粒子动能为 0，质心系下总能量为产生的粒子的静止质量.

$$E'=(m_3+m_4+...)\,c^2=(m_1+m_2+\Delta M)\,c^2$$

由四维动量的标量积是不变量可得

$$\begin{aligned}(P_1+P_2)\cdot(P_1+P_2)&=(P_1'+P_2')\cdot(P_1'+P_2')\\ \left(\vec{P}_1+\vec{P}_2\right)^2-\frac{1}{c^2}(E_1+E_2)^2&=\left(\vec{P}_1'+\vec{P}_2'\right)^2-\frac{1}{c^2}(E_1'+E_2')^2\end{aligned}$$

靶粒子静止：$\vec{P}_2=0$，质心系下总动量为零：$\vec{P}_1'+\vec{P}_2'=0$，初始时两粒子的能量方程：$E_1^2=c^2p_1^2+m_1^2c^4$，$E_2=m_2c^2$，带入上式可得：

$$\vec{p}_1^2-\frac{1}{c^2}\left(m_1^2c^4+c^2\vec{p}_1^2+m_2^2c^4+2E_1E_2\right)=0-\frac{E'^2}{c^2}$$

$$E_1=\tfrac{1}{2m_2c^2}\left(E'^2-m_1^2c^4-m_2^2c^4\right)$$

把 $E'=(m_1+m_2+\Delta M)\,c^2$ 带入可得：

$$\begin{aligned}E_1=&\frac{1}{2m_2c^2}\left[(m_1+m_2+\Delta M)^2c^4-\left(m_1^2+m_2^2\right)c^4\right]\\ =&\left(m_1+\frac{m_1}{m_2}\Delta M+\Delta M+\frac{\Delta M^2}{2m_2}\right)c^2\end{aligned}$$

$$T=E_1-m_1c^2=\Delta M\left(1+\frac{m_1}{m_2}+\frac{\Delta M}{2m_2}\right)c^2$$

本题中 $m_1=m_2=m_3=m_4=...=m_p$，$\Delta M=2m_p$，带入可得：

$$T=2m_p\,(1+1+1)\,c^2=6m_pc^2$$

习题 1.6.3

$$\begin{cases} x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{cases}$$

把题目中的 $t' = t$ 条件带入可得:

$$\sqrt{1-\beta^2}t = t - \frac{v}{c^2}x$$
$$t = \frac{1}{1-\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{v}{c^2}x$$

把得到的 t 带入可得:

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \left(x - \frac{1}{1-\sqrt{1-\beta^2}} \cdot \frac{v}{c^2}x \right) = -x \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

习题 1.6.4

(1)

由

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

可以得到:

$$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}$$
$$B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}$$
$$B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$$

对于公式 $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$,由 $A_4 = i\frac{\phi}{c} \to \phi = -icA_4$ 可得:

$$-\nabla\phi = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial A_4}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial A_4}{\partial x_3}\vec{e}_3\right)$$

$x_4 = ict \to \frac{1}{dt} = ic\frac{1}{dx_4}$,可以得到:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = ic\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_4}\vec{e}_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_4}\vec{e}_1 + \frac{\partial A_3}{\partial x_4}\vec{e}_1\right)$$

带入到公式 $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ 得到:

$$E_1 = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right)$$
$$E_2 = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4}\right)$$
$$E_3 = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4}\right)$$

引入电磁场张量 $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$

$$[F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -i\frac{E_1}{c} \\ -B_3 & & B_1 & -i\frac{E_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & & -i\frac{E_3}{c} \\ i\frac{E_1}{c} & i\frac{E_2}{c} & i\frac{E_3}{c} & \end{bmatrix}$$

(2)

做题依据的公式：$F'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\sigma}\alpha_{\nu\lambda}F_{\sigma\lambda}$，计算一个为例：

$$\begin{aligned}
i\frac{E'_1}{c} = F'_{41} &= \alpha_{4\sigma}\alpha_{1\lambda}F_{\sigma\lambda} \\
&= \alpha_{41}\alpha_{1\lambda}F_{1\lambda} + \alpha_{44}\alpha_{1\lambda}F_{4\lambda} \\
&= \alpha_{41}\alpha_{11}F_{11} + \alpha_{41}\alpha_{14}F_{14} + \alpha_{44}\alpha_{11}F_{41} + \alpha_{44}\alpha_{14}F_{44} \\
&= i\frac{E'}{c}
\end{aligned}$$

则 $E'_1 = E_1$，同理可得：

$$\begin{aligned}
B'_1 &= B_1 \\
E'_2 &= \frac{E_2 - vB_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
E'_3 &= \frac{E_3 + vB_2}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
B'_2 &= \frac{B_2 + \frac{v}{c^2}E_3}{\sqrt{1-\beta^2}} \\
B'_3 &= \frac{B_3 - \frac{v}{c^2}E_2}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}$$

若将电磁场分解为相对运动速度 $\vec{v}$ 平行和垂直的分量可以得到：

$$\begin{cases}
\vec{E}' = \vec{E} & \vec{B}' = \vec{B} \\
\vec{E}'_\perp = \gamma\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) & \vec{B}'_\perp = \gamma\left(\vec{B} - \frac{\vec{v}}{c^2}\times\vec{E}\right)
\end{cases}$$

习题 1.6.5

S 系下由两个事件，时空坐标为 (x_1, y_1, z_1, t_1)，(x_2, y_2, z_2, t_2)
S' 系下为 (x_1', y_1', z_1', t_1')，(x_2', y_2', z_2', t_2')，由洛伦兹变换可得：

$$t_2' - t_1' = \frac{(t_2 - t_1) - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

若在 S 系中 $t_2 > t_1$，但若 $t_2 - t_1 - \frac{v}{c_2}(x_2 - x_1) < 0$，即 $t_2' < t_1'$，即在 S' 系中观察事件发生的次序与 S 系中不同。那么如果有因果关系，则将违反因果律。

为克服此矛盾，爱因斯坦假定：任何物体的运动速度都不可能大于真空中的光速 c，即若 $t_2 > t_1$，为使 $t_2' > t_1'$，需要：

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \cdot v < c^2$$

$$uv < c^2$$

u 代表两个事件相互作用讯号的传播速度

习题 1.6.6

电荷 Q 是一个洛伦兹标量

$$Q = \int \rho dV$$

当粒子静止时，设电荷密度 ρ_0，体积元 dV_0，若粒子以速度 u 运动，则体积元有洛伦兹收缩

$$dV = \sqrt{1-\beta^2} dV_0$$

为了保证总电荷 Q 的不变性，电荷密度相应的增大

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

当粒子以速度 u 运动时，其电流密度为

$$\vec{J} = \rho \vec{u} = \frac{\rho_0 \vec{u}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

因为，$u_\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}(u, ic)$ 时四维速度矢量，ρ_0 是标量
所以 $\rho_0 u_\mu$ 是一个四维矢量.

$$J_\mu = \left(\vec{J}, ic\rho\right) = \rho_0 u_\mu$$

所以电流密度 $\vec{J}$ 和电荷密度 ρ 构成四维矢量 $J_\mu = \left(\vec{J}, ic\rho\right)$

习题 1.6.7

1. Maexwell 方程组是一阶偏微分方程，不像牛顿定律那样是二阶微分方程。Maxwell 方程在伽利略变化下不是协变的。

2. 对于 S 系中静止的带电体，S 系中观察者只能观察到静电场，在匀速运动的 S' 中观察，带电梯还有磁场。

3. 从自由电磁波波动方程 $\nabla^2 \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{bmatrix} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \begin{bmatrix} \vec{E} \\ \vec{B} \end{bmatrix} = 0$ 看，电磁波沿任何方向传播速度都是 c，不符合伽利略速度合成公式。

习题 1.6.8

四维速度 $u_\mu = \frac{dx_\mu}{d\tau} \qquad d\tau = \sqrt{1-\beta^2}dt$
前三维：$\vec{u}_i = \frac{d\vec{x}_i}{d\tau} = \frac{\vec{v}_i}{\sqrt{1-\beta^2}}$
第四分量：$u_4 = \frac{icdt}{\sqrt{1-\beta^2}dt} = \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}$
四维速度：$u_\mu = \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$
四维动量：$p_\mu = m_0 u_\mu$
前三项：$\vec{p} = \frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}$
第四项：$p_4 = \frac{im_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{iE}{c}$
最终得到：$p_\mu = \left(\vec{p}, i\frac{E}{c}\right) = \left(\frac{m_0\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{im_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$
牛顿第二定律协变形式：$K_\mu = \frac{dp_\mu}{d\tau}$
第四维：$K_4 = \frac{dp_4}{d\tau} = \frac{d\left(i\frac{E}{c}\right)}{d\tau}$

$$
\begin{aligned}
-icK_4 = \frac{dE}{d\tau} =& \frac{c^2}{2\sqrt{\vec{p}^2c^2 + m_0^2c^4}} \cdot \frac{d\left(\vec{p}\cdot\vec{p}\right)}{d\tau} \\
=& \frac{c^2}{E}\vec{p}\cdot\frac{d\vec{p}}{d\tau} \\
=& \frac{c^2}{mc^2}m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{p}}{d\tau} \\
=& \vec{v}\cdot\frac{d\vec{p}}{d\tau} = \vec{v}\cdot\vec{K}
\end{aligned}
$$

由 $d\tau = \sqrt{1-\beta^2}dt$ 可得：

$$
\begin{cases}
\sqrt{1-\beta^2}\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{dt} \\
\sqrt{1-\beta^2}\vec{K}\cdot\vec{v} = \frac{dE}{dt}
\end{cases}
$$

定义力：$\vec{F} = \sqrt{1-\beta^2}\vec{K}$，有

$$
\begin{cases}
\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \\
\vec{F}\cdot\vec{v} = \frac{dE}{dt}
\end{cases}
$$

符合牛顿第二定律形式，所以四维力矢量为：

$$
K_\mu = \left(\vec{K}, \frac{i}{c}\vec{K}\cdot\vec{v}\right) = \left(\frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \frac{i}{c}\frac{\vec{v}\cdot\vec{F}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)
$$

习题 1.6.9

在 S 系中同时读出两端的时空坐标为 (x_1, t)，(x_2, t)，在 S' 系中这两事件时空坐标为 (x_1', t_1')，(x_2', t_2')

$$t_2' - t_1' = -\frac{v}{c^2}\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

此时 $x_2 > x_1$，则 $t_1' > t_2'$
在 t_2' 时测 x_2，过一会 t_1' 时测 x_1，S' 认为在 S 上的尺以 v 左移。先读 x_2 后读 x_1，B 的长度应再加上 $t_1' - t_2'$ 内走过的距离

$$(t_1' - t_2')\, v = \frac{v}{c^2}\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

以 S' 看 S 中距离应缩 $\sqrt{1-\beta^2}$，则有

$$\begin{aligned} x_2' - x_1' =& (x_2 - x_1)\sqrt{1-\beta^2} + \frac{v^2}{c^2}\frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ =& \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ =& \frac{\sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2}} l_0 \\ =& l_0 \end{aligned}$$

（其中 $x_2' = \frac{x_2 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$，$x_1' = \frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}$，得到 $x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1-\beta^2}} = l_0$，推出 $x_2 - x_1 = \frac{l_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$）

习题 1.6.10

$$
\begin{aligned}
\vec{B} =& \nabla \times \vec{A} \\
=& \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

$B_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}$，$B_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}$，$B_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}$
$A_4 = i\frac{\phi}{c}$ 得到 $\phi = -icA_4$ $\quad$ $x_4 = ict$ 得到 $\frac{1}{dt} = ic\frac{1}{dx_4}$
则可算出

$$
-\nabla\phi = ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial A_4}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial A_4}{\partial x_3}\vec{e}_3\right)
$$

$$
\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = ic\left(\frac{\partial A_1}{\partial x_4}\vec{e}_1 + \frac{\partial A_2}{\partial x_4}\vec{e}_1 + \frac{\partial A_3}{\partial x_4}\vec{e}_1\right)
$$

得到 E 的三个分量:

$$
\begin{aligned}
E_1 =& ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4}\right) \\
E_2 =& ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4}\right) \\
E_3 =& ic\left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4}\right)
\end{aligned}
$$

电磁场张量 $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$，则有:

$$
[F_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -i\frac{E_1}{c} \\ -B_3 & & B_1 & -i\frac{E_2}{c} \\ B_2 & -B_1 & & -i\frac{E_3}{c} \\ i\frac{E_1}{c} & i\frac{E_2}{c} & i\frac{E_3}{c} & \end{bmatrix}
$$

现在利用电磁场张量将麦克斯韦方程组表现为四维形式
$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$，$\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$
对于 $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$，$\nabla \cdot \vec{E} = \left(\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}\right) = -ic\left(\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3}\right)$，

$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \frac{\frac{J_4}{ic}}{\varepsilon_0} = -i\frac{1}{c}\frac{J_4}{\varepsilon_0}$，则有:

$$-ic\left(\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3}\right) = -i\frac{1}{c\varepsilon_0}J_4$$
$$\frac{\partial F_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_3} = \frac{1}{c^2\varepsilon_0}J_4 = \mu_0 J_4$$

对于 $\nabla \times \vec{B} = \mu_0\vec{J} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$，选其中一项计算，其他同理

$$\frac{\partial B_3}{\partial x_2} - \frac{\partial B_2}{\partial x_3} = \mu_0 J_1 + \frac{1}{c^2}\frac{\partial E_1}{\partial t}$$

把 $B_3 = F_{12}$，$-B_2 = F_{13}$，$E_1 = -icF_{41}$，$\frac{1}{dt} = ic\frac{1}{dx_4}$ 带入可得:

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{13}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{14}}{\partial x_4} = \mu_0 J_1$$

同理可得其他几项，因而:

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \mu_0 J_\mu$$

用麦克斯韦方程组中的剩下方程来求另一个四维形式

对于 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$，$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$，有

$$\frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} = 0$$

用电磁场张量来表示有

$$\frac{\partial F_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial F_{31}}{\partial x_2} = 0$$

另外一组同理

$$\frac{\partial E_3}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_3} + \frac{\partial B_1}{\partial t} = 0$$
$$\frac{\partial F_{24}}{\partial x_3} + \frac{\partial F_{43}}{\partial x_2} + \frac{\partial F_{32}}{\partial x_4} = 0$$

最后得到

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0$$

习题 1.6.11

某一点设为原点，此处的时间设为 0，在距离此处 r 的地方的时钟时间设为 $\frac{r}{c}$，在原点发出一道光，当 r 处的时钟接收到光时再开始走动，即完成了在同一惯性系中种校准同步的方法

习题 1.6.12

$$t' = \frac{t-\frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$t_2' - t_1' = -\frac{v}{c^2}\frac{(x_2-x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} \neq 0$$

故不同时发生

习题 1.6.13

1. 相对性原理：在任何惯性系中，物理现象都按相同的方式发生，物理规律有相同的形式

2. 光速不变原理：在一切惯性系中，光在真空中的速度都为 c，且与光源的运动状态无关

习题 1.6.14

在实验室系下，粒子的四维动量分别为 p_0，p_1，p_2
因为在衰变过程中，动量守恒

$$p_0 = p_1 + p_2$$

由四维动量的标量积时不变量得

$$p_0 \cdot p_0 = (p_1 + p_2) \cdot (p_1 + p_2)$$

写成分量形式

$$\begin{aligned}\left(\vec{p}_0 + i\frac{E_0}{c}\right) \cdot \left(\vec{p}_0 + i\frac{E_0}{c}\right) &= \left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + i\frac{E_1 + E_2}{c}\right) \\ \vec{p}_0^2 - \frac{1}{c^2}E_0^2 &= (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 - \frac{1}{c^2}(E_1 + E_2)^2\end{aligned}$$

考虑 $\vec{p}_0$，$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$，$E_0 = M_0 c^2$，$E_1 + E_2 = M_0 c^2$，可以得到

$$E_1 + E_2 = M_0 c^2$$

又由 $\begin{cases} E_1^2 = c^2\vec{p}_1^2 + m_1^2 c^4 \\ E_2^2 = c^2\vec{p}_2^2 + m_2^2 c^4 \end{cases}$，$\vec{p}_1^2 = \vec{p}_2^2$，可得到

$$E_1^2 - E_2^2 = \left(m_1^2 - m_2^2\right) c^4$$

$$\begin{aligned}(E_1 - E_2)(E_1 + E_2) &= (E_1 - E_2) M_0 c^2 \\ &= \left(m_1^2 - m_2^2\right) c^4\end{aligned}$$

进而得到 $E_1 - E_2 = \frac{m_1^2 - m_2^2}{M_0} c^4$，联立 $E_1 + E_2$ 可得

$$\begin{cases} E_1 = \frac{m_1^2 - m_2^2 + M_0^2}{2M_0} c^2 \\ E_2 = \frac{m_2^2 - m_1^2 + M_0^2}{2M_0} c^2 \end{cases}$$

由 $T = E - m_0 c^2$ 可得

$$\begin{cases} T_1 = E_1 - m_1 c^2 = \frac{m_1^2 - m_2^2 + M_0^2 - 2M_0 m_1}{2M_0} c^2 \\ T_2 = E_2 - m_2 c^2 = \frac{m_2^2 - m_1^2 + M_0^2 - 2M_0 m_2}{2M_0} c^2 \end{cases}$$

带电粒子和电磁场的相互作用

习题 1.7.1

S 系中两个时空坐标，始末分别为 (x^*, y^*, z^*, t^*)，(x, y, z, t)，S' 系中的时空坐标始末分别为 $(x^{*\prime}, y^{*\prime}, z^{*\prime}, t^{*\prime})$，$(x', y', z', t')$
由于在 S' 系中相对静止，所以可以用静电场中的公式 $\vec{A}' = 0$，$\phi' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r'}$，$r' = c\left(t' - t^{*\prime}\right)$
由 $x_4 = ict$ 可得 $t = -\frac{i}{c}x_4$，带入 $\vec{r}'$ 中可得：

$$\vec{r}' = \vec{r} + i\frac{\vec{v}}{c}x_4 + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\frac{\vec{v}}{v^2}\left(\vec{v}\cdot\vec{r} + i\frac{v^2}{c}x_4\right)$$

$$x_4' = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(x_4 - \frac{i}{c}\left(\vec{v}\cdot\vec{r}\right)\right)$$

则有

$$\vec{A} = \vec{A}' - i\frac{\vec{v}}{c}A_4' + \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1\right)\frac{\vec{v}}{v^2}\left(\vec{v}\cdot\vec{A}' - i\frac{v^2}{c}A_4'\right)$$

$$A_4 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(A_4' + \frac{i}{c}\left(\vec{v}\cdot\vec{A}'\right)\right)$$

把 $\vec{A}' = 0$，$A_4 = i\frac{\phi}{c}$ 带入得

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\vec{v}}{c^2 r'\sqrt{1-\beta^2}}$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{r'\sqrt{1-\beta^2}}$$

再计算 $\vec{r}'$：

$$\begin{aligned} r' =& c\left(t' - t^{*\prime}\right) \\ =& \frac{c\left(t - t'\right) - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{r}}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ =& \frac{r - \frac{1}{c}\vec{v}\cdot\vec{r}}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{aligned}$$

故有

$$\vec{A} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e\vec{v}}{c^2\left(r - \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c}\right)}$$

$$\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e}{\left(r - \frac{\vec{v}\cdot\vec{r}}{c}\right)}$$

习题 1.7.2

本题做的时候不同人的答案不同，因此就不给不准确的答案了，可以在书上或 ppt 上找到背下来

习题 1.7.3

韧致辐射：当带电粒子入射到靶物质上时，它和靶内原子中得电子或原子核碰撞，在碰撞过程中减速，从而产生辐射。韧致辐射的 $\dot{\vec{v}}\vec{v}$

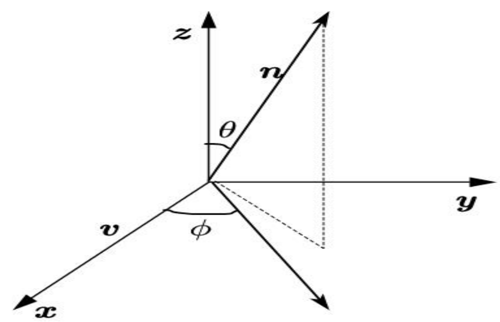
同步辐射：带电粒子作圆周运动时，$\dot{\vec{v}}\perp\vec{v}$，这种情况下产生的辐射为同步辐射。

$$\vec{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 r}\frac{\vec{n}\times\left(\vec{n}\times\dot{\vec{v}}\right)}{\left(1-\frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3}$$

$$\vec{B}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^3 r}\frac{-\vec{n}\times\dot{\vec{v}}}{\left(1-\frac{\vec{n}\cdot\vec{v}}{c}\right)^3}$$

习题 1.7.4

带电粒子作圆周运动时，$\dot{\vec{v}} \perp \vec{v}$. 这种情况下的辐射为同步辐射 如图所示



$\vec{n} = \sin\theta\cos\phi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\phi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z$，因此有

$$\vec{n}\cdot\vec{v} = v\cos\theta$$
$$\vec{n}\cdot\dot{\vec{v}} = \left|\dot{\vec{v}}\right|\sin\theta\cos\phi$$

$$\begin{aligned}
&\vec{n}\times\left(\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\times\dot{\vec{v}}\right)\\
=&\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\left(\vec{n}\cdot\dot{\vec{v}}\right)-\dot{\vec{v}}\left(\vec{n}\cdot\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\right)\\
=&\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\left|\dot{\vec{v}}\right|\sin\theta\cos\phi-\dot{\vec{v}}\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)
\end{aligned}$$

则 $\left(\vec{n}\times\left(\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\times\dot{\vec{v}}\right)\right)^2$ 为

$$\left|\dot{\vec{v}}\right|^2\sin^2\theta\cos^2\phi\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)^2+\left|\dot{\vec{v}}\right|^2\left(1-\frac{v}{c}cos\theta\right)^2-2\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\dot{\vec{v}}\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)\left|\dot{\vec{v}}\right|\sin\theta\cos\phi$$

其中

$$\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)^2 = 1-\frac{2v\cos\theta}{c}+\frac{v^2}{c^2}$$
$$\left(\vec{n}-\frac{\vec{v}}{c}\right)\dot{\vec{v}} = \left|\dot{\vec{v}}\right|\sin\theta\cos\phi$$

这两个式子带入上式可得

$$\left|\dot{\vec{v}}\right|^2\left(\sin^2\theta\cos^2\phi\left(1-\frac{2v\cos\theta}{c}+\frac{v^2}{c^2}\right)+\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2-2\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)\sin^2\theta\cos^2\phi\right)$$
$$=\left|\dot{\vec{v}}\right|^2\left(\sin^2\theta\cos^2\phi\left(-1+\frac{v^2}{c^2}\right)+\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2\right)$$

因此，辐射功率的角分布为:

$$\frac{dP\left(t'\right)}{d\Omega}=\frac{e^2\left|\dot{\vec{v}}\right|^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}\frac{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^2-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\phi}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right)^5}$$

习题 1.7.5

这道题做的几次答案不一样，基本思路就是泰勒展开硬做

习题 1.7.6

$P(t')$ 为单位时间内带电粒子损失的能量，等于阻尼力 $\vec{F}_s$ 单位时间内对粒子做的负功，即 $-\vec{F}_s\cdot\vec{v}=\frac{e^2\dot{\vec{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}$ 则有

$$\int_{t_0}^{t_0+T}\vec{F}_s\cdot\vec{v}dt=-\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{e^2\dot{\vec{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}dt=-\frac{e^2\dot{\vec{v}}\cdot\vec{v}}{6\pi\varepsilon_0c^3}\Bigg|\begin{matrix}t_0+T\\t_0\end{matrix}+\int_{t_0}^{t_0+T}\frac{e^2\ddot{\vec{v}}}{6\pi\varepsilon_0c^3}\vec{v}dt$$

故有 $\vec{F}_s=\frac{e^2\ddot{\vec{v}}}{6\pi\varepsilon_0c^3}$