电动力学题解

往年考试例题与解答 [1]

王大可[2]　　小锡[3]

July 15, 2018

[1]吉林大学物理学院电动力学课程
[2]www.example.com
[3]www.example.com

献给可爱的学妹们

目录

前言

按照西方教材的传统，在目录之前一般会给出一句话。言明作者把本书献给谁，以表达作者的某种情怀。通常是作者的朋友，家人。令人我印象深刻的是 J.K. 罗琳女士在她的第 7 本小说中写到：

> “Thededication of this book Is split seven ways: To Neil, To Jessica, To David, To Kenzie, To Di, To Anne, And to you, If you have stuck with Harry until the very end. ”

同样本书献给在吉林大学物理学院度过三年的你们。当你们完成电动力学的考试时回想自己三年前，学习物理学的想法。一定会有很多感触吧。

言归正传，本书收录吉林大学物理学院电动力学课程 2004 级到 2015 级往年试题我们会给出试题参考解答。尽力做到详细，准确且便于理解。当然本书的解答方式主要基于吉大物院电动力学课本。不过希望学弟学妹们除了我们的课本外，也去看看郭硕鸿先生以及格里菲斯先生的电动力学教材。最后祝学弟学妹们前途似锦。

爱你们的，
学长

1

往年试题

"And God said

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

and there was light "

– Genesis 1:3

1.1 电磁现象的基本规律

对应电动力学课本第二章，占分 20 分左右。

习题 1.1.1 写出电磁现象的基本规律，其中包括真空中的 *Maxwell* 方程组，电荷守恒定律，洛仑兹力公式，介质的电磁性质方程及电磁场的边界条件。

习题 1.1.2 从毕奥-萨伐尔定律出发推导出磁场的散度。

习题 1.1.3 从基本的麦克斯韦（*Maxwell*）方程组出发，推出静电场的基本方程和边界条件。*(*需说明静电场的特殊条件，引入电势，将静电场的方程和边界条件用电势来表示*)*

习题 1.1.4 证明：通过任意闭合曲面的自由电流和位移电流的总量为零。

习题 1.1.5 一长直导线半径为 a，电导率为 ρ，导线中的电流强度为 I，设导线表面带有正电荷 δ ，计算导体表面外侧的能流密度矢量，并证明单位时间内流入长为 L 的一段导体的能量，恰好是 L 长导线的焦耳热损耗。

习题 1.1.6 叙述法拉第电磁感应定律与楞次定律；由法拉第定律推出变化磁场产生的电场的旋度；麦克斯韦对变化磁场产生的电场的散度做了什么假定？导出电荷产生的电场和变化磁场产生的电场的总电场的散度和旋度。

习题 1.1.7 *1.* 从库仑定律可以推出高斯定理，从高斯定理是否可以推出库仑定律？*2.* 从毕奥-萨伐尔定律可以推出安培环路定理，安培环路定理是否能代替毕奥-萨伐尔定律？

习题 1.1.8 推出磁化电流密度与磁化强度之间的关系，并需画图说明。

习题 1.1.9 推出束缚电荷密度与极化强度之间的关系，并需画图以及严谨的说明。

习题 1.1.10 静电场，稳定电磁场，电偶极子的电磁场以及电磁波传播的求解问题是普遍的麦克斯韦方程组在特定物理条件下的求解问题。分别写出这些物理条件。

习题 1.1.11 (*1*) 说明什么是电磁感应现象。(*2*) 陈述法拉第电磁感应定律和楞次定律，并结合这两个定律给出统一的数学表达式。(*3*) 指出动生电动势和感生电动势的区别。(*4*) 推出变化磁场引起的电场的旋度。(*5*) 关于变化磁场引起的电场的散度，麦克斯韦做了什么假定。

习题 1.1.12 从麦克斯韦（*Maxwell*）方程组的积分形式推出磁场强度 $\mathbf{H}$ 的边界条件。

习题 1.1.13 已知束缚电荷密度与极化强度的关系为 $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$，极化电流密度为 $\mathbf{J_p} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$，磁化电流密度与磁化强度的关系为 $J_m = \nabla \times \mathbf{M}$。从真空中的麦克斯韦方程组出发引入电位移矢量 $\mathbf{D}$ 和磁场强度 $\mathbf{H}$ 推出介质中的麦克斯韦方程组。

习题 1.1.14 从库仑定律可以推出静电场的散度和旋度，那么从法拉第电磁感应定律能否推出变化磁场引起的电场的散度和旋度？为什么？

1.2 静电场

对应课本第三章，占分 20 分左右

习题 1.2.1 有一半径为 a 的导体球，原先不带电，在球外离球心为 d 处放一点电荷 q, 设导体球接地，用电像法求空间电势，球面上感应电荷密度。(要求写清楚电像法的步骤)

习题 1.2.2 在均匀外电场 E_0 中置入半径为 R_0 的导体球，导体球上带总电荷 Q ，试用分离变数法求导体球外的电势。

习题 1.2.3 平行板电容器的平板间相距为 d, 两极间加直流电压 V, 下板电势高。在下板内侧面上有一很小的半球突起，球半径为 a (a=d)，求电容器内的电场和半球上的电荷密度。

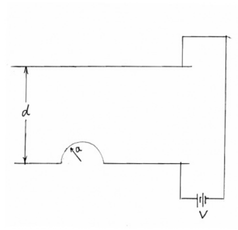

Figure 1.1: 题 1.2.3

习题 1.2.4 有一半径为 a 的导体球，原先不带电，在球外离球心为 d 处放一点电荷 q，设导体球接地，用电像法求空间电势，球面上感应电荷密度。(要求写清楚电像法的步骤)

习题 1.2.5 如图所示的 $x>0$ 与 $x<0$ 区域充满两种均匀介质，介电常数为 ε_1 与 ε_2，在 x 轴上的 d 处有点电荷 q，用电像法求空间电势。

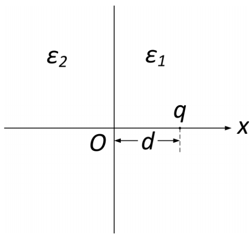

Figure 1.2: 题 1.2.5

习题 1.2.6 求真空中带电导体球的静电能量。

习题 1.2.7 有一半径为 a，介电常数为 ε 的无限长电介质圆柱，柱轴沿 $\boldsymbol{e}_z$ 方向，沿 $\boldsymbol{e}_x$ 方向外加一均匀电场 E_0，求空间电势分布。

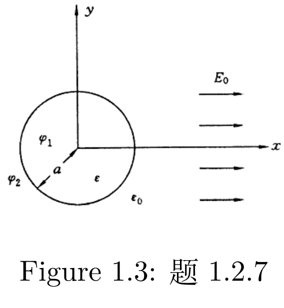

Figure 1.3: 题 1.2.7

习题 1.2.8 一平行板电容器，板长为 l，宽为 b，板间距离 d，如图所示，从板的左部插入一块介质，其介电常数为 ε，插入深度为 x，介质和平板之间无空隙，求介质板上受的力。略去平板电容器的边缘效应，两板间保持电位差为 V。

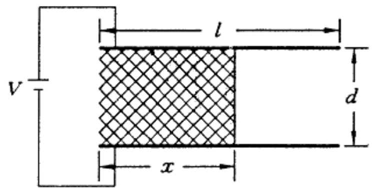

Figure 1.4: 题 1.2.8

习题 1.2.9 如图所示，一半径为 a 的均匀介质球，介电常数为 ε_1，介质球内带均匀自由电荷，电荷密度为 ρ，介质球沉浸在介电常数为 ε_2 的无限大均匀介质中，在 z 方向加一均匀电场 E_0，求球内外的电势。

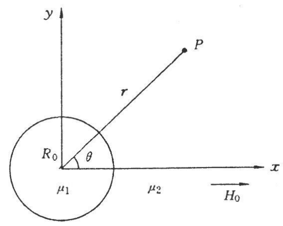

Figure 1.5: 题 1.2.9

习题 1.2.10 有一均匀带电的回转椭球体，回转半径为 a, 轴半径长为 c, 总电量为 q, 计算其电偶极矩、电四极矩以及远处的电势。

习题 1.2.11 利用格林函数方法来证明静电势的均值定理，即在无电荷的空间中的任一点的电势，等于以该点为球心任一球面上的电势的平均值。

1.3 稳定电磁场

对应电动力学课本第四章，占分 10 分左右。

习题 1.3.1 一半径为 a 的均匀带电的导体球壳，绕自身某一直径以角速度 ω 转动，设球上的总电量为 Q（假设始终均匀分布在导体球表面），球内外为真空，计算球内外的矢势和磁场。
(球坐标中方程 $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial f}{\partial r})+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta})-\frac{f}{r^2\sin^2\theta}=0$ 的一般解为: $f=\sum_{n=0}^{\infty}(b_nr^n+\frac{a_n}{r^{n+1}})P_n^{(1)}(\cos\theta)$，其中一阶连带勒让德函数 $P_n^{(1)}(\cos\theta)=(1-x^2)^{1/2}\frac{\mathrm{d}P_n}{\mathrm{d}x}$)

习题 1.3.2 一半径为 a 的均匀磁化介质球，其磁化强度为 $\mathbf{M_0}$，求空间静磁荷密度 ρ_m，磁标势及磁场强度。

习题 1.3.3 半径为 a 的长直圆柱导体，均匀地沿轴方向通过恒定电流 I，导体的磁导率为 μ_1 ，周围介质的磁导率为 μ_2，求矢势 $\mathbf{A}$。
可能用到的公式：柱坐标系中，
对于标量 ϕ 有：$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$
对于矢量 $\mathbf{A}$ 有：$\nabla\times\mathbf{A} = [\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}]\boldsymbol{e}_r + [\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}]\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r}[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}]\boldsymbol{e}_z$

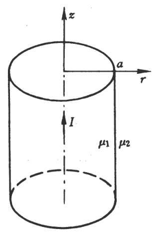

Figure 1.6: 题 1.3.3

习题 1.3.4 如图所示，一无限长的磁导率为 μ_1 的介质圆柱，半径为 R_0，置于磁导率为 μ_2 的磁介质中，在垂直于柱轴方向加一均匀静磁场 $\mathbf{H_0}$，求柱内、外磁场分布。
(在柱坐标系中，$\nabla^2\phi(r,\theta) = 0$ 的通解为：$\phi = c_0\ln r + d_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta)(c_n r^n + d_n r^{-n})$，其中 $c_0, d_0, a_n, b_n, c_n, d_n$ 为常数。)

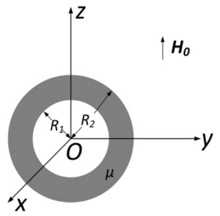

Figure 1.7: 题 1.3.4

习题 1.3.5 如图所示，有一内、外半径分别为 R_1 和 R_2 的空心球壳，放置在均匀磁场 $\mathbf{H_0}$ 中，球壳介质的磁导率为 μ，球壳外为真空，求空间的磁标势。

习题 1.3.6 一半径为 a 的均匀带电球壳，质量为 M，总电量为 Q，绕某一直径以角速度 ω 转动，求磁矩和旋磁比。

习题 1.3.7 一半径为 a 的均匀带电球壳，总电量为 Q ，绕某一直径以角速度 ω 转动，求磁场总能量。

习题 1.3.8 在一长直导线电流 I_1 附近，有一矩形载流线圈，电流为 I_2，线圈和直导线的最短距离为 x，夹角为 θ，如图所示，计算线圈所受的力和力矩。

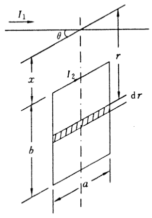

Figure 1.8: 题 1.3.8

1.4 电磁波的辐射

对应电动力学课本第五章，占分 10 分左右。

习题 1.4.1 已知一电偶极辐射势为：$\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{R},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{p}}\exp(ikR)}{R}$ 的电偶极子，$\dot{\mathbf{p}}=\frac{1}{2}I_0 l\boldsymbol{e}_z$，竖直放在距地面为 h 处,$h\ll\lambda$，可将地面看作理想导体，试求其辐射场和平均辐射能流。

习题 1.4.2 两根完全相同的直天线，长度为 $l\ll\lambda$，在天线中点外接交变电动势，天线上电流为：$I(z,t)=I_0[1-\frac{2}{l}|z|]e^{-i\omega t}$，天线并行排列，如图所示，相距为 $a\ll\lambda$，计算辐射场、辐射角分布和辐射功率。

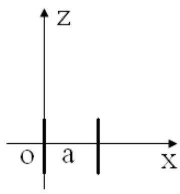

Figure 1.9: 题 1.4.2

习题 1.4.3 已知推迟势 $\mathbf{A}(\mathbf{R},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\int\frac{\mathbf{J}(\mathbf{R}',t-r/c)}{r}\mathrm{d}V'$，假定周期变化的电流 $\mathbf{J}(\mathbf{R}',t)=\mathbf{J}(\mathbf{R}')e^{-i\omega t}$。当实际问题中的电流分布在一个小区域时，可用多极展开法来计算矢势。证明矢势展开的第一项与电偶极矩有关，即 $\mathbf{A}^{(0)}(\mathbf{R},t)=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{p}}\exp(ikR)}{R}$，并给出矢势展开的第二项远远小于第一项的条件。

习题 1.4.4 振荡的电偶极子的电磁场为：

$$\mathbf{E}=\frac{e^{ikR}}{4\pi\varepsilon_0}\left\{\frac{-k^2}{R}\mathbf{R}_0\times(\mathbf{R}_0\times\mathbf{p})+(\frac{ik}{R^2}-\frac{1}{R^3})(\mathbf{p}-3\mathbf{p}\cdot\mathbf{R}_0\mathbf{R}_0)\right\}$$

$$\mathbf{B}=\frac{\mu_0\omega}{4\pi c}(\frac{1}{R}-\frac{1}{ikR^2})e^{ikR}\mathbf{R}_0\times\mathbf{p}$$

其中 $\mathbf{R_0}=\frac{\mathbf{R}}{R}$，$\mathbf{p}$ 为电偶极矩。

(1) 试写出场源近区和远区的解所满足的条件，分别推出近区和远区的电磁场。指出近区场和远区场的主要差别。
(2) 试推出远区的电磁场。将 $\mathbf{p}$ 的位置选在坐标原点，的方向选为 z 方向，写出 $\mathbf{E}$ 和 $\mathbf{B}$ 的具体形式。试求辐射场的平均能流（辐射角分布）以及辐射功率。

习题 1.4.5 从麦克斯韦方程组出发引入变化电磁场的矢势 $\mathbf{A}$ 和标势 ϕ，推出 $\mathbf{A}$ 和 ϕ 满足的一般方程，并加入洛仑兹条件推出达朗伯方程。

习题 1.4.6 由电偶极矩 $\mathbf{p}$ 的定义及电荷连续性方程，证明：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \int_V \mathbf{J}\mathrm{d}V'$$

1.5 电磁波的传播

对应电动力学课本第六章，占分 10 分左右。

习题 1.5.1 写出矩形波导中的电场的解，并求矩形波导中的 TE_{22},TE_{10} 波的电磁场、截止频率及传输功率。设波导管的宽为 a，厚为 b，波导管是理想导体。

习题 1.5.2 从基本的麦克斯韦（*Maxwell*）方程组出发，推导出单色电磁波在导体中传播的基本方程。(需先推导出导体内电荷为零)

习题 1.5.3 从基本的麦克斯韦（*Maxwell*）方程组出发，推导出单色电磁波在介质中传播的基本方程。

习题 1.5.4 同轴线内半径为 a，外半径为 b，求沿同轴线传播的 *TEM* 波。（柱坐标系中，$\nabla^2\phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial\phi}{\partial r}) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}$ ）

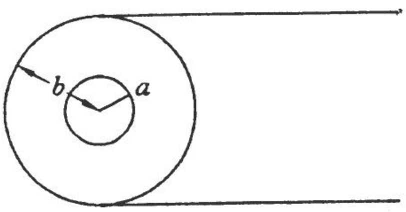

Figure 1.10: 题 1.5.4

习题 1.5.5 在电磁波传播问题中，试推出平面单色电磁波在两种介质交界面处的反射定律和折射定律。

习题 1.5.6 写出单色电磁波在导体中的透入深度 d。

1.6 狭义相对论

对应电动力学课本第七章，占分 20 分左右。

习题 1.6.1 用四维矢量写出电荷守恒定律，洛伦兹条件及势方程的相对论的协变形式。(需写出第四个分量的具体形式)

习题 1.6.2 在反应过程 $P+P \to P+P+\bar{P}+P$ 中，设靶粒子静止，计算能使此反应发生的入射粒子的最小动能（即阈能）是多少？

习题 1.6.3 两个惯性系 Σ 和 Σ' 中各放置若干时钟，同一惯性系中的诸时钟同步。Σ' 相对于 Σ 以速度 v 沿 x 轴方向运动。设两系原点相遇时 $t_0=t'_0=0$。问处于 Σ 系中某点 (x,y,z) 处的时钟与 Σ' 系中何处的时钟相遇时，指示的时刻相同？读数是多少？

习题 1.6.4 (*1*) 由关系式 $\mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$，$\mathbf{E}=-\nabla\phi-\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}$，引进电磁场张量，并写出此张量的矩阵形式。(*2*) 根据张量的变换关系，推导出不同坐标系间的电磁场的变换关系。

习题 1.6.5 由洛伦兹变换推出两个事件因果关系不被破坏的条件。由此推出对联系两个因果事件讯号速度的限制。

习题 1.6.6 实验证明，带电粒子的电荷与它的运动速度无关，即电荷 Q 是一个洛仑兹标量，由此推出电流密度 $\mathbf{J}$ 和电荷密度 ρ 构成四维矢量 $J_\mu(\mathbf{J}, ic\rho)$。

习题 1.6.7 写出两个电磁场理论和伽利略经典时空观之间的矛盾。

习题 1.6.8 写出四维速度和四维动量，写出相对论的牛顿第二定律的四维协变形式，并推出四维力的形式。

习题 1.6.9 S 系为一静止惯性系，S' 系以速度 v 沿 x 方向运动，有一棍固定在 S' 系上。观察者 A 和 B 分别静止于 S 系和 S' 系。在 t 时刻，A 对棍进行测量，得到棍的长度 $l=x_2-x_1=\sqrt{1-\beta^2}l_0$，小于棍的固有长度 l_0，其中 $\beta=v/c$。观察者 B 认为 A 的测量结果 l 有错误，为什么？并给出相应的数学推导。

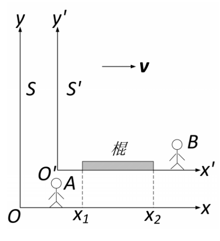

Figure 1.11: 题 1.6.9

习题 1.6.10 已知 $A_\mu(\mathbf{A}, i\phi/c)$ 是一个四维矢量。通过电磁场 $\mathbf{E}$、$\mathbf{B}$ 与 $\mathbf{A}$、ϕ 的关系推出电磁场张量 $F_{\mu\nu}$，并写出其矩阵表达式。利用电磁场张量 $F_{\mu\nu}$ 将麦克斯韦方程组表达成四维形式。

习题 1.6.11 在狭义相对论中，每个坐标系中的尺和钟都应相对于该坐标系处于静止状态。在同一惯性系内所有的钟都是校准同步的。任一物理事件的时空坐标就由该事件发生点的钟和尺的度数来确定。试提出一种在同一惯性参照系内钟的校准同步的方法。

习题 1.6.12 设 S' 系沿着 S 系的 x 轴以速度 v 运动，两个坐标系的轴互相平行，现发生了两个事件 *1* 和 *2*，在 S' 系中测得这两事件的时空坐标为 (x_1', t_1') 和 (x_2', t_2')，在 S 系中测得这两事件的时空坐标为 (x_1, t_1) 和 (x_2, t_2)，若在 S 系这两事件是在不同地点同时发生的，即 $t_2 = t_1$，$x_2 \neq x_1$ 那么这两个事件在 S' 系中是否同时？并从洛伦兹变换给出数学推导。

习题 1.6.13 写出狭义相对论的基本原理。

习题 1.6.14 一个质量为 M_0 的静止粒子衰变为静止质量为 m_1,m_2 的两个粒子，求这两个粒子各自的动能。

1.7 带电粒子和电磁场的相互作用

对应电动力学课本第四章，占分 10 分左右。

习题 1.7.1 当 s' 系相对 s 系的运动速度是任意方向时，四维时空的变换公式为：

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v}t + (\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1)\frac{\mathbf{v}}{v^2}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{r} - v^2 t)$$

$$t' = \frac{t - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{r}}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

其中 $\beta = v/c$ 用四维势矢量的洛仑兹变换来推出运动带电粒子李纳—维希势。

习题 1.7.2 什么是切仑科夫辐射？产生辐射的条件是什么？

习题 1.7.3 什么是轫致辐射和同步辐射？并写出轫致辐射的电磁场。

已知运动带电粒子的电磁场

$$\mathbf{E} = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 c^2 (r - \mathbf{r}\cdot\mathbf{v}/c)^3}\left\{c^2(1-\frac{v^2}{c^2})(\mathbf{r} - \frac{r\mathbf{v}}{c}) + \mathbf{r}\times\left[(\mathbf{r} - \frac{\mathbf{r}v}{c})\times\dot{\mathbf{v}}\right]\right\}$$

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{r}}{cr}\times\mathbf{E}$$

习题 1.7.4 什么是同步辐射？并推出同步辐射的辐射功率的角分布（取如图所示坐标）。

已知运动带电粒子的辐射功率的角分布

$$\frac{\mathrm{d}P(t')}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{e^2}{16\pi^2\varepsilon_0c^3}\frac{\left\{\frac{\mathbf{r}}{r}\times\left[\left(\frac{\mathbf{r}}{r}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}\right]\right\}^2}{\left(1-\frac{1}{c}\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{r}\right)^5}$$

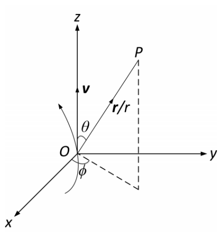

Figure 1.12: 题 1.7.4

习题 1.7.5 已知任意运动的带电粒子的电磁场为：

$$\mathbf{E}=\frac{e}{4\pi\varepsilon_0c^2(r-\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}/c)^3}\left\{c^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(\mathbf{r}-\frac{r\mathbf{v}}{c}\right)+\mathbf{r}\times\left[\left(\mathbf{r}-\frac{\mathbf{r}v}{c}\right)\times\dot{\mathbf{v}}\right]\right\}$$

$$\mathbf{B}=\frac{\mathbf{r}}{cr}\times\mathbf{E}$$

1）求低速运动带电粒子的自有场。*2*）求低速运动带电粒子的辐射场。（按 v/c 展开，保留到 v/c 的一次项）

习题 1.7.6 运动带电粒子辐射电磁波后，电磁波带走了能量，因此辐射场的反作用使带电粒子受到阻尼力，称为辐射阻尼力。在带电粒子作低速运动并且作周期运动的情况下，求对一个周期平均效应而言的辐射阻尼力。已知低速运动情况下粒子的辐射功率为

$$P(t')=\frac{e^2\dot{\mathbf{v}}^2}{6\pi\varepsilon_0c^3}$$