Autour des fonctions usuelles

23 novembre 2016

1 Valeur absolue

Définition 1.1. Soit x un nombre réel. On appelle valeur absolue de x le réel *positif*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Ainsi, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$...

La valeur absolue de x représente en fait *la distance de x à 0* sur la droite numérique. On peut donc représenter la distance entre deux nombres x et y sur la droite numérique par la quantité $|x - y|$.

Ceci, et les propriétés sur cette fonction, la rend fondamentale pour décrire certaines propriétés des nombres réels, et étudier des fonctions réelles.

Proposition 1.2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$|x| = \max(-x, x). \tag{1}$$

En effet, la définition précédente fait que la valeur absolue de x est toujours plus le plus grand nombre entre parmi x et $-x$.

Exemple 1.3. Par exemple, on a $|-2| = 2$ et $\max(-2, 2) = 2$...

Proposition 1.4. *Pour tout réel x, on a*

$$|x| = \sqrt{x^2}. \tag{2}$$

Cette deuxième représentation de la valeur absolue nous amène le résultat suivant :

Proposition 1.5. *Pour tous x et y réels,*

$$|xy| = |x||y|. \tag{3}$$

On peut en donner deux démonstrations : une qui utilise 1.4 et une autre qui revient à la définition.

Exemple 1.6. on a $|-6| = 6$ d'une part, et d'autre part $-6 = -2 \times 3$ puis $|-2| \times |3| = 2 \times 3 = 6$...

La propriété suivante est probablement l'une des inégalités les plus importantes de toutes les mathématiques.

Proposition 1.7 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,*

$$|x + y| \leq |x| + |y|. \tag{4}$$

Elle se généralise de la manière suivante : elle reste toujours valable si on remplace les nombres x et y par des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et la valeur absolue par la norme : $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Encore, on peut en donner deux démonstrations, qui utilisent les deux représentations de la valeur absolue données dans les propositions 1.2 et 1.4.