
DÉNOMBREMENT

« ...combinatorics, a sort of glorified dice-throwing. » — Robert Kanigel

« L'arithmétique, c'est être capable de compter jusqu'à vingt sans enlever ses chaussures. » — Walt Disney

« Tout ce dénombrement, madame, est inutile
Cent Hectors pourraient-ils me payer un Achille ? » — Jacques Pradon, *La Troade*

Table des matières

1	Introduction	2
2	Produit cartésien	2
3	Applications	4
4	Dénombrements classiques	6
4.1	Ensemble des applications, p -uplets	6
4.2	Nombre de parties	7
4.3	Nombre d'injections	7
4.4	Dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$	8
4.5	Nombre de parties de taille fixée	8
5	Exercices	9

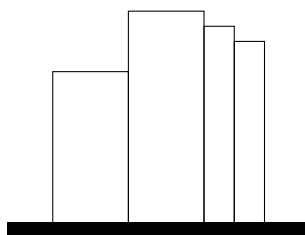
1 Introduction

Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments qu'il y a dans un ensemble, le plus souvent défini par une propriété qu'il vérifie (par exemple, ses éléments pourraient être les parties de $\llbracket 1, 12 \rrbracket$ qui ont 5...)

Savoir dénombrer permet notamment de faire des calculs de probabilité plus compliqués à la main, et a des applications en physique ou encore en informatique.

Pour démarrer, deux exemples introductifs :

Problème 1 On considère une étagère sur laquelle se situent 4 livres différents.



De combien de façons peut-on ranger ces livres ?

Problème 2 On considère maintenant un sac de 10 billes différentes. De combien de façons peut-on constituer un paquet de 4 billes parmi les 10 ?

2 Produit cartésien

Définition 2.1 (Couple de deux éléments). Soient x et y deux objets mathématiques. Le couple (x, y) est la donnée de x comme *première composante* et de y comme *deuxième composante*.

Il faut retenir la propriété caractéristique : Deux couples (a, b) et (x, y) sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales deux à deux :

$$(a, b) = (x, y) \iff (a = x \wedge b = y).$$

Définition 2.2 (Produit cartésien). Soient E et F deux ensembles. On appelle *produit cartésien de E et de F* , et on note $E \times F$ (lu « E croix F ») l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Remarque 2.3. En général, $E \times F \neq F \times E$! Pour avoir l'égalité, les deux ensembles doivent être égaux ou l'un des deux doit être vide.

Exemple 1.

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}\}$
- $(0, \pi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ mais $(0, \pi) \notin \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Proposition 2.4. Soient E et F des ensembles. Alors :

- $E \times \emptyset = \emptyset \times E = \emptyset$
- Si E et F sont **finis**, alors

$$\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \text{Card}(F).$$

Définition 2.5 (Généralisation).

1. Soient a_1, \dots, a_p des objets mathématiques. On définit le p -uplet (a_1, \dots, a_p) comme étant le couple ayant comme première composante le $p - 1$ -uplet (a_1, \dots, a_{p-1}) et comme deuxième composante a_p :

$$(a_1, \dots, a_p) := ((a_1, \dots, a_{p-1}), a_p)$$

Les $p - 1$ -uplets ayant été définis de la même manière à partir des $p - 2$ -uplets.

2. Soient E_1, \dots, E_p des ensembles, avec $p \in \mathbb{N}^*$. Le *produit cartésien* des ensembles $(E_i)_{1 \leq i \leq p}$ est l'ensemble des p -uplets

$$(x_1, \dots, x_p)$$

où pour tout i entre 1 et p , $x_i \in E_i$.

Lorsque tous les E_i sont égaux à un même ensemble E , on notera

$$\underbrace{E \times \dots \times E}_{p \text{ fois}} = E^p.$$

Exemple 2. Ainsi, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Proposition 2.6. Soient E , F et G trois ensembles. Par définition des n -uplets, on a

$$(E \times F) \times G = E \times (F \times G) = E \times F \times G.$$

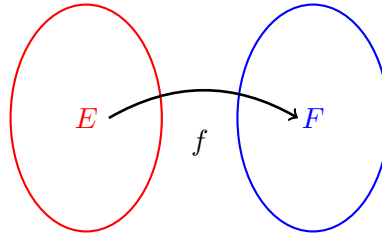


FIG. 1: Une application $f: E \longrightarrow F$.

3 Applications

Dans cette section, on définira de manière générale la notion d'*application* entre deux ensembles, une généralisation des fonctions que vous connaissez. E et F sont dans la suite deux ensembles.

Définition 3.1. Une application f de E vers F , notée $f: E \longrightarrow F$ est la donnée d'une partie G de $E \times F$, appelée *graphe de f* . Si $(x, y) \in G$, y est appelé *image de x par f* , x est appelé *antécédent de y par f* . De plus, G doit vérifier la propriété suivante : pour tout $(x, y) \in G$, et pour tout y' de F ,

$$(x, y') \in G \Rightarrow y = y'$$

c'est-à-dire qu'un élément $x \in E$ admet au plus une image. On adopte la notation des fonctions : si $(x, y) \in G$, alors

$$y = f(x).$$

L'ensemble des applications de E vers F est noté F^E ou encore $\mathcal{F}(E, F)$.

Bien sûr, la définition donnée ne garantit pas qu'une application $f: E \longrightarrow F$ est définie sur E tout entier. On définit alors la notion d'*ensemble de définition*:

Définition 3.2 (Ensemble de définition). Soit f une application de E vers F . L'*ensemble de définition* de f est l'ensemble des $x \in E$ qui admettent une image par f , c'est-à-dire tels qu'il existe un $y \in F$ tel que $(x, y) \in G$.

Des fois, il faut considérer non pas l'application f mais une application définie sur une partie E' de E prenant les mêmes valeurs, que l'on appelle la *restriction de f à E'* .

Pour dénombrer un ensemble, on essaiera souvent de faire correspondre chacun de ses éléments aux éléments d'un autre ensemble que l'on connaît mieux. Souvent cette correspondance est représentée par un type d'application particulière.

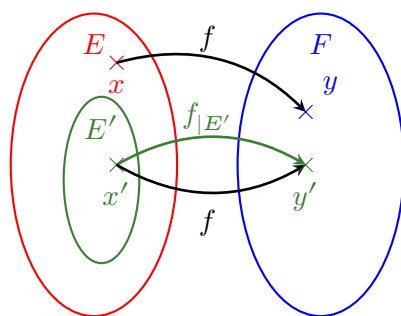


FIG. 2: Une application $f: E \longrightarrow F$ et sa restriction $f|_{E'}$ à $E' \subset E$.

Définition 3.3 (Injection, surjection, bijection). Soit $f: E \longrightarrow F$ une application. On dit que f est :

- une *injection* si tout $y \in F$ a au plus un antécédent. Autrement dit, si $x \in E$ et $x' \in E$ sont tels que $f(x) = f(x')$, alors $x = x'$ (sinon $y = f(x)$ a deux antécédents différents).
- une *surjection* si tout $y \in F$ admet un antécédent par f . Autrement dit, pour tout $y \in F$ il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
- une *bijection* si elle est injective et surjective en même temps. Autrement dit, tout $y \in F$ admet un **et un seul** élément antécédent x par f .

Si f est bijective, alors on peut définir une unique application g telle que si $y \in F$, l'antécédent de x par f est $g(y)$. L'application g est notée f^{-1} et est appelée *réciproque de f* .

Réciproquement, si une telle application g existe, alors f est bijective et g est sa réciproque.

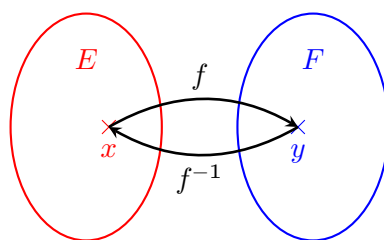
Il suffit donc souvent d'exhiber une réciproque à f pour montrer qu'elle est bijective.

Proposition 3.4 (Lien avec le cardinal). Soit $f: E \rightarrow F$ où E et F sont **finis**. Alors, si f est :

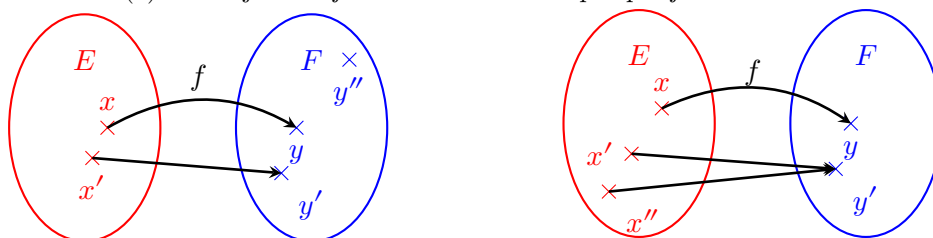
- **injective** alors $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$.
- **surjective** alors $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$.
- **bijjective** alors $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$.

Donc pour déterminer le cardinal d'un ensemble, il suffit d'exhiber une bijection entre lui et un autre ensemble de référence que l'on connaît.

Les réciproques de la proposition précédente sont vraies. Si $\text{Card}(E) \leq \text{Card}(F)$



(a) Une bijection $f: E \rightarrow F$ et sa réciproque $f^{-1}: F \rightarrow E$.



(b) Une injection $f: E \rightarrow F$. Remarquez que l'élément y'' **n'admet pas** d'antécédent par f . (c) Une surjection $f: E \rightarrow F$. Remarquez que l'élément y' admet **deux** antécédents par f .

alors il existe une injection $E \rightarrow F$. Si $\text{Card}(E) \geq \text{Card}(F)$ alors il existe une surjection $E \rightarrow F$. Si $\text{Card}(E) = \text{Card}(F)$ alors il existe une bijection entre E et F .

4 Dénombrements classiques

Dans cette section, on donne des résultats classiques de dénombrement d'ensembles. Dans toute la suite, on aura besoin de la notation suivante : si $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle *factorielle de n* (ou « n factorielle »), et on note $n!$ la quantité

$$n! := 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n.$$

On mélangera les arguments intuitifs, en parlant de « choix » d'éléments (pour construire des arrangements d'éléments par exemple), et les arguments formels qui font intervenir des bijections (souvent un peu difficiles à comprendre).

4.1 Ensemble des applications, p -uplets

Proposition 4.1 (Nombre total d'applications). *On suppose que E et F sont **finis**. Le nombre d'applications de E vers F est le cardinal de $\mathcal{F}(E, F)$, qui vaut*

$$\text{Card}(\mathcal{F}(E, F)) = \text{Card}(F)^{\text{Card}(E)}.$$

Proposition 4.2 (Nombre de p -uplets). *Soit E un ensemble fini, et $p \in \mathbb{N}^*$. Alors,*

le nombre de p -uplets

$$(x_1, \dots, x_p)$$

de l'ensemble E^p est $\text{Card}(E)^p$.

4.2 Nombre de parties

Proposition 4.3 (Ensemble des parties d'un ensemble). *Soit E un ensemble fini. Alors le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est*

$$\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^{\text{Card}(E)}.$$

Démonstration. Pour chaque partie A de E , on note $\mathbb{1}_A$ l'application de E vers $\{0, 1\}$ telle que pour tout x de E , $\mathbb{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$, et 0 si $x \notin A$.

L'application $A \mapsto \mathbb{1}_A$ va de $\mathcal{P}(E)$ vers $\{0, 1\}^E$ (ensemble des applications de E vers $\{0, 1\}$), et est bijective.

En effet, elle est injective : si A et B sont des parties de E telles que pour tout $x \in E$, $\mathbb{1}_A(x) = \mathbb{1}_B(x)$, on a que $\mathbb{1}_A(x) = 1$ (c'est-à-dire $x \in A$) si et seulement si $\mathbb{1}_B(x) = 1$ (c'est-à-dire $x \in B$). Donc $A = B$.

D'autre part, elle est surjective : si $u : E \rightarrow \{0, 1\}$, on peut poser C l'ensemble des $x \in E$ tels que $u(x) = 1$: alors $u(x) = 1$ si $x \in C$ et 0 sinon, donc $u = \mathbb{1}_C$ tout le temps. \square

4.3 Nombre d'injections

Soit E un ensemble de cardinal p , et F un ensemble de cardinal $n \geq p$. On cherche le nombre d'injections $E \rightarrow F$. Comme il s'agit d'applications entre les deux ensembles, on sait déjà qu'il y en a moins que $\text{Card}(F^E) = p^n$.

On trouve la solution en regardant comment sont construites les injections. Pour construire une injection $E \rightarrow F$, on procède comme suit : pour chacun des p éléments de E , on a une case, que l'on doit remplir avec un élément de F . Pour la première case, on a n choix pour prendre un élément de F . Pour la seconde, on a $n - 1$ choix. Pour la troisième, $n - 2$ choix. Et ainsi de suite, jusqu'à arriver à la p -ème case : on a rempli $p - 1$ cases auparavant, donc on ne peut plus choisir que $n - (p - 1) = n - p + 1$.

Ainsi, on a en tout

$$n \times (n - 1) \times \dots \times (n - p + 1) = \frac{n!}{(n - p)!}$$

choix possibles pour construire notre injection.

Remarque 4.4. Le résultat peut être formulé de la façon suivante : Soit F un ensemble de cardinal n . On appelle *arrangement de p éléments de F* la donnée d'une liste

x_1, \dots, x_p de p éléments **distincts** de F . Alors, il y a en tout

$$\frac{n!}{(n-p)!}$$

arrangements de p éléments.

4.4 Dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$

Soit n un entier naturel non nul. On appelle *dérangement* ou *permutation* de $\llbracket 1, n \rrbracket$ toute bijection de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même. Le nom a un sens : une telle application *dérange* ou *permut*e les éléments.

L'ensemble des dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$ est noté S_n (ou \mathfrak{S}_n). On cherche le nombre total de dérangements, c'est-à-dire le cardinal de S_n .

L'idée vient de la manière dont on peut construire une permutation : on se donne n cases différentes, que l'on remplit une par une avec les éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$. On commence par la première : on a d'abord n choix parmi les éléments à placer. Puis la seconde : il ne restait plus que $n-1$ éléments, donc on a $n-1$ choix. Pour la troisième case, il reste $n-2$ choix. Et ainsi de suite jusqu'à la dernière, n -ème case, pour laquelle il ne reste que 1 choix. Ainsi, on trouve qu'on a en tout

$$n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times 1 \text{ choix.}$$

4.5 Nombre de parties de taille fixée

Définition 4.5 (Coefficient binomial). Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et k un entier $0 \leq k \leq n$. Le *coefficient binomial*

$$\binom{n}{k}$$

est le nombre de parties de $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui ont k éléments.

C'est donc également le nombre de parties à k éléments d'un ensemble E qui en a n .

Ainsi, on a $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ puisqu'il n'y a qu'une partie avec 0 éléments, l'ensemble vide, et il n'y a qu'une seule partie de E avec autant d'éléments que lui : E lui-même.

Bien sûr, on cherche ici à exprimer les coefficients binomiaux explicitement (certainement avec des factorielles).

Proposition 4.6 (Expression des coefficients binomiaux). Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et k un entier entre 0 et n . Alors :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Démonstration. On va utiliser la même astuce que dans le **Problème 2** introductif. On va considérer le nombre de façons de dé ranger k éléments parmi les n éléments de $\llbracket 1, n \rrbracket$,

c'est-à-dire le nombre d'éléments de S_n qui ne dérangent que k éléments entre eux et laissent les autres éléments comme ils sont. On notera F cet ensemble.

Les éléments de F sont la donnée d'une partie $A \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ à k éléments et d'une permutation σ des éléments de A . Il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles pour la partie. Étant donnée la partie, il y a $k!$ choix possible pour la permutation. Ainsi,

$$\text{Card}(F) = k! \binom{n}{k}. \quad (1)$$

Exprimons $\text{Card}(F)$ d'une deuxième façon. Choisir un élément de F , revient à choisir une application injective de $\{1, \dots, k\}$ dans $\llbracket 1, n \rrbracket$ qui sélectionne les éléments de notre partie (on se donne k cases pour constituer la partie, et on remplit chacune d'entre elle par un élément de $\llbracket 1, n \rrbracket$...).

Combien y a-t-il de telles injections ? D'après la section 4.3, il y en a exactement $\frac{n!}{(n-k)!}$. Ainsi,

$$\text{Card}(F) = \frac{n!}{(n-k)!}. \quad (2)$$

Regrouper les résultats de (1) et (2) donne

$$k! \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!} \quad \text{soit} \quad \boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! (n-k)!}}.$$

□

Le coefficient binomial permet de représenter plusieurs choses : $\binom{n}{p}$ est le nombre de mots avec p lettres « a » et $n - p$ lettres « b » sur un alphabet où il n'y a que ces deux lettres. Il représente aussi le nombre de chemins avec p déplacements à droite et $n - p$ déplacement vers le haut permettant de traverser une grille $n \times n$.

5 Exercices

Exercice 1. On dispose d'une urne où se trouvent n boules numérotées de 1 à n . On tire successivement $p < n$ boules de l'urne, en les remettant à chaque fois. Combien de résultats différents peut-on obtenir ? Et sans remise ?

Exercice 2. On tire $p < n$ boules **en même temps** de notre urne de n boules. Combien de résultats différents peut-on obtenir ?

Exercice 3. On dispose de k urnes différentes contenant chacune n boules numérotées de 1 à n .

Exercice 4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre d'entiers strictement positifs k_1, \dots, k_p tels que $k_1 + \dots + k_p = n$.

Exercice 5 (Olympiades balkaniques, 1997). Soit E un ensemble de cardinal $n > 1$, et $m > 1$ un entier naturel. On suppose qu'il existe m parties A_1, \dots, A_m de E telles que si $x \neq y$ sont dans E , alors il y a au moins un des A_i tel que $x \in A_i$ et $y \notin A_i$ ou l'inverse. Montrer que $n \leq 2^m$.

Indication Dire que $n \leq 2^m$ revient à dire que S s'injecte dans un ensemble qui a 2^m éléments. Construire une injection de S dans $\{0, 1\}^m$.