Dénombrement

« *...combinatorics, a sort of glorified dice-throwing.* » — Robert Kanigel

« *L'arithmétique, c'est être capable de compter jusqu'à vingt sans enlever ses chaussures.* » — Walt Disney

« *Tout ce dénombrement, madame, est inutile*
Cent Hectors pourraient-ils me payer un Achille ? » — Jacques Pradon, *La Troade*

Table des matières

1 Introduction

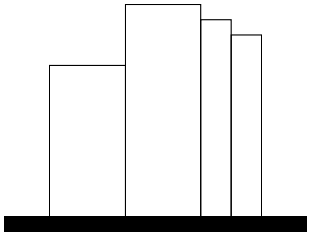
Dénombrer, c'est compter le nombre d'éléments qu'il y a dans un ensemble, le plus souvent défini par une propriété qu'il vérifie (par exemple, ses éléments pourraient être les parties de $[\![1, 12]\!]$ qui ont 5...)

Savoir dénombrer permet notamment de faire des calculs de probabilité plus compliquées à la main, et a des applications en physique ou encore en informatique.

Pour démarrer, deux exemples introductifs :

Problème 1 On considère une étagère sur laquelle se situent 4 livres différents.
De combien de façons peut-on ranger ces livres ?

Problème 2 On considère maintenant un sac de 10 billes différentes. De combien de façons peut-on constituer un paquet de 4 billes parmi les 10 ?



2 Produit cartésien

Définition 2.1 (Couple de deux éléments)**.** Soient x et y deux objets mathématiques. Le couple (x, y) est la donnée de x comme *première composante* et de y comme *deuxième composante.*

Il faut retenir la propriété caractéristique : Deux couples (a, b) et (x, y) sont égaux si et seulement si leurs composantes sont égales deux à deux :

$$(a, b) = (x, y) \iff (a = x \wedge b = y).$$

Définition 2.2 (Produit cartésien)**.** Soient E et F deux ensembles. On appelle *produit cartésien de E et de F*, et on note $E \times F$ (lu « E croix F ») l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Remarque 1. En général, $E \times F \neq F \times E$! Pour avoir l'égalité, les deux ensembles doivent être égaux ou l'un des deux doit être vide.

Exemple 1.

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R} \,\text{et}\, y \in \mathbb{R}\}$
- $(0, \pi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ mais $(0, \pi) \notin \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.

Proposition 2.3. Soient E et F des ensembles. Alors :

- $E \times \emptyset = \emptyset \times E = \emptyset$
- Si E et F sont **finis**, alors
$$\mathrm{Card}(E \times F) = \mathrm{Card}(E)\,\mathrm{Card}(F).$$

Définition 2.4 (Généralisation)**.**

1. Soient $a_1, \dots, a_n$ des objets mathématiques. On définit le n-uplet $(a_1, \dots, a_n)$ comme étant le couple ayant comme première composante le $n - 1$-uplet

$(a_1, \dots, a_{n-1})$ et comme deuxième composante a_n. Les $n-1$-uplets ayant été définis de la même manière à partir des $n-2$-uplets.

2. Soient $E_1, \dots, E_n$ des ensembles, avec $n \in \mathbb{N}^*$. Le *produit cartésien* des ensembles $(E_i)_{1 \le i \le n}$ est l'ensemble des *n-uplets*

$$(x_1, \dots, x_n)$$

où pour tout i entre 1 et n, $x_i \in E_i$.

Lorsque tous les E_i sont égaux à un même ensemble E, on notera

$$\underbrace{E \times \dots \times E}_{n \text{ fois}} = E^n.$$

Exemple 2. Ainsi, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$.

Proposition 2.5. Soient E, F et G trois ensembles. Par définition des n-uplets, on a

$$(E \times F) \times G = E \times (F \times G) = E \times F \times G.$$

3 Applications

Dans cette section, on définira de manière générale la notion d'*application* entre deux ensembles, une généralisation des fonctions que vous connaissez. E et F sont dans la suite deux ensembles.

3.1 Généralités

Définition 3.1. Une application f de E vers F, notée $f : E \longrightarrow F$ est la donnée d'une partie G de $E \times F$, appelée *graphe de f*. Si $(x, y) \in G$, y est appelé *image de x par f*, x est appelé *antécédent de y par f*. De plus, G doit vérifier la propriété suivante : pour tout $(x, y) \in G$, et pour tout y' de F,

$$(x, y') \in G \Rightarrow y = y'$$

c'est-à-dire qu'un élément $x \in E$ admet au plus une image. On adopte la notation des fonctions : si $(x, y) \in G$, alors

$$y = f(x).$$

L'ensemble des applications de E vers F est noté F^E ou encore $\mathscr{F}(E, F)$.

Bien sûr, la définition donnée ne garantit pas qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est définie sur E tout entier. On définit alors la notion d'*ensemble de définition*:

Définition 3.2 (Ensemble de définition)**.** Soit f une application de E vers F. L'*ensemble de définition* de f est l'ensemble des $x \in E$ qui admettent une image par f, c'est-à-dire tels qu'il existe un $y \in F$ tel que $(x, y) \in G$.

Des fois, il faut considérer non pas l'application f mais une application définie sur une partie de E prenant les mêmes valeurs que f.

Proposition 3.3 (Nombre d'applications)**.** On suppose que E et F sont **finis**. Le nombre d'applications de E vers F est le cardinal de $\mathscr{F}(E, F)$, qui vaut

$$\mathrm{Card}(\mathscr{F}(E, F)) = \mathrm{Card}(F)^{\mathrm{Card}(E)}.$$

3.2 Injection, surjection, bijection

Définition 3.4. Soit f une application de E vers F, que l'on suppose définie sur E tout entier. Elle est dite :

- *injective* si $f(x) = f(x')$ entraîne $x = x'$. Autrement dit, les éléments de F n'admettent au plus qu'un antécédent.
- *surjective* si tout $y \in F$ admet au moins un antécédent x par f.
- *bijective* si elle est à la fois injective **et** surjective. Autrement dit, tout élément y de F admet un *et un seul* antécédent par f.

Si f est bijective, alors pour tout $y \in F$ il existe un seul $x \in E$, que l'on peut noter $g(y)$ sans ambiguïté, tel que $y = f(x)$. L'application g ainsi définie est appelée *réciproque de* f et notée f^{-1}.

3.3 Lien avec le cardinal

Définition 3.5 (Cardinal, version propre)**.** L'ensemble E est fini et est de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ s'il existe une bijection $\varphi : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$, c'est-à-dire que l'on peut écrire $E = \{\varphi(1), \dots, \varphi(n)\}$.

Proposition 3.6. On suppose que E et F sont finis. Soit f une application de E vers F. Alors :

- Si f est injective alors $\mathrm{Card}\, E \leq \mathrm{Card}\, F$.
- Si f est surjective alors $\mathrm{Card}\, E \geq \mathrm{Card}\, F$.

- Si f est bijective alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$: les ensembles ont le même nombre d'éléments.

Le dernier point est particulièrement utile dans le cadre du dénombrement : en effet, si on peut mettre en bijection l'ensemble E dont on cherche le nombre d'éléments avec un ensemble F dont on connaît bien le cardinal, alors on en déduit que E a même cardinal de F.