Autour des fonctions usuelles

23 novembre 2016

1 Valeur absolue

Définition 1.1. Soit x un nombre réel. On appelle valeur absolue de x le réel *positif*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

Ainsi, $|x| = 0$ si et seulement si $x = 0$...

La valeur absolue de x représente en fait *la distance de x à 0* sur la droite numérique. On peut donc représenter la distance entre deux nombres x et y sur la droite numérique par la quantité $|x - y|$.

Ceci, et les propriétés sur cette fonction, la rend fondamentale pour décrire certaines propriétés des nombres réels, et étudier des fonctions réelles.

Proposition 1.2. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$$|x| = \max(-x, x). \tag{1}$$

En effet, la définition précédente fait que la valeur absolue de x est toujours plus le plus grand nombre entre parmi x et $-x$.

Exemple 1.3. Par exemple, on a $|-2| = 2$ et $\max(-2, 2) = 2$...

Proposition 1.4. *Pour tout réel x, on a*

$$|x| = \sqrt{x^2}. \tag{2}$$

Cette deuxième représentation de la valeur absolue nous amène le résultat suivant :

Proposition 1.5. *Pour tous x et y réels,*

$$|xy| = |x||y|. \tag{3}$$

On peut en donner deux démonstrations : une qui utilise 1.4 et une autre qui revient à la définition.

Exemple 1.6. on a $|-6| = 6$ d'une part, et d'autre part $-6 = -2 \times 3$ puis $|-2| \times |3| = 2 \times 3 = 6$...

La propriété suivante est probablement l'une des inégalités les plus importantes de toutes les mathématiques.

Proposition 1.7 (Inégalité triangulaire)**.** *Pour tous* $x, y \in \mathbb{R}$*,*

$$|x+y| \leq |x| + |y|. \tag{4}$$

Elle se généralise de la manière suivante : elle reste toujours valable si on remplace les nombres x et y par des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, et la valeur absolue par la norme : $\|\vec{u}+\vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$.

Encore, on peut en donner deux démonstrations, qui utilisent les deux représentations de la valeur absolue données dans les propositions 1.2 et 1.4.

2 Fonction partie entière

Définition 2.1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On appelle *partie entière de* x et on note $\lfloor x \rfloor$ l'unique entier tel que

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Exemple 2.2.

- $\lfloor 2 \rfloor = 2$
- $\lfloor 3,14 \rfloor = 3$
- $\lfloor -2,5 \rfloor = -3$

Exercice 1. Tracer la courbe représentative de la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.

Exercice 2. Montrer que pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lfloor x+n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n.$$

Exercice 3. En déduire que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a l'inégalité suivante :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor.$$

Corollaire 2.3. *Alors, pour tous* $x \in \mathbb{R}$ *et* $n \in \mathbb{N}$*,*

$$n\lfloor x \rfloor \leq \lfloor nx \rfloor.$$

Définition 2.4. Soit x un réel. On appelle *partie fractionnaire de* x et on note $\{x\}$ le réel de $[0,1[$ défini par :

$$\{x\} \coloneqq x - \lfloor x \rfloor.$$

Exemple 2.5.

- $\{2\} = 0$
- $\{3,14\} = 0,14$
- $\{-2,5\} = 0,5$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction 1-périodique, c'est-à-dire que pour tout réel x, $f(x+1) = f(x)$.

Montrer que pour tout réel x, $f(x) = f(\{x\})$.

3 Quelques inégalités

Exercice 5 (Moyennes usuelles)**.** Soient x et y deux réels avec $0 < x \leq y$. On pose les réels suivants :

$$m = \frac{x+y}{2} \text{ moyenne arithmétique}$$
$$g = \sqrt{xy} \text{ moyenne géométrique}$$
$$h = \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \text{ moyenne harmonique}$$

Montrer que $x \leq h \leq g \leq m \leq y$.

L'inégalité suivante est encore plus fondamentale que l'inégalité triangulaire présentée précédemment (elle sert même à démontrer sa version générale). Si je m'en rappelle bien, on peut utiliser cette inégalité pour montrer une partie des lois de la physique (plus précisément, les équations d'Euler-Lagrange).

Exercice 6 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** Soient $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_n$ des nombres réels. Montrer que

$$x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2} \sqrt{y_1^2 \dots y_n^2}.$$

Indication : Poser f le trinôme du second degré $f(t) = (x_1 + t y_1)^2 + \cdots + (x_n + t y_n)^2$ et calculer son discriminant.

Remarque 3.1. L'inégalité se reformule ainsi : si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs, on a

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|.$$

Exercice 7. En déduire que si $x_1, \dots, x_n > 0$ on a

$$(x_1 + \cdots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \cdots \frac{1}{x_n} \right) \geq n^2.$$

Exercice 8 (Application : inégalité triangulaire généralisée)**.** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. Montrer l'inégalité triangulaire généralisée

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$