

# ENSEMBLES, LOGIQUE

« *La logique est l'hygiène des mathématiques.* » — André Weil

« *Plus il y a de fromage, plus il y a de trous.*

*Plus il y a de trous, moins il y a de fromage.*

*Donc plus il y a de fromage, moins il y a de fromage.* »

— Paradoxe du gruyère

« *Tout ce qui est rare est super cher,*

*Une Maserati à 20 euros, c'est rare,*

*Donc une Maserati à 20 euros, c'est super cher* »

— Bruce Benamran

«La mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calculs.» — Galilée

## 1 Logique

### 1.1 Propositions, formules

**Définition 1.1** (Proposition). Une *proposition* est la donnée d'une affirmation  $P$ . Elle peut prendre deux valeurs de vérité : le *Vrai* ( $V$ ) et le *Faux* ( $F$ ).

**Exemple 1.**

1. « Aristote est mortel. »
2. « Aristote est un chat. »
3. « Les lois de la physique d'Aristote sont vraies. »

**Définition 1.2** (Formule propositionnelle). On peut partir des propositions de base dont on dispose pour construire des *formules*, en les combinant avec des symboles appelés *connecteurs logiques*.

C'est donc la donnée d'une expression où sont articulées des propositions à l'aide de connecteurs. Elles sont en soi des propositions.

On verra plus loin quels sont ces symboles qui permettent d'articuler des propositions pour créer une formule.

La logique usuelle obéit au principe suivant (on peut décider de ne pas l'adopter, ce qui donne lieu à d'autres systèmes de logique bizarres étudiés par des chercheurs en logique...) :

**Axiome 1.3** (Principe du tiers exclu). Une proposition prend la valeur *Vrai* ou la valeur *Faux*, jamais les deux.

**Définition 1.4** (Identité de deux propositions). Deux formules  $P$  et  $Q$  sont dites *équivalentes* ou *identiques* si elles ont toujours même valeur de vérité, quelles que soient les valeurs de vérité des variables qui y interviennent. On note

$$P \equiv Q$$

**Exemple 2.** « Aristote n'est pas mortel »  $\equiv$  « Aristote est immortel »

*Remarque 1.* Vous remarquerez qu'on ne se préoccupe pas de la véracité de ces propositions... Juste qu'elles reviennent à dire la même chose.

**Définition 1.5** (Table de vérité). La table de vérité d'une formule est un tableau dans lequel sont listées les valeurs de vérité de cette formule en fonction de celles des propositions qui y interviennent.

## 1.2 Opérateurs logiques

### 1.2.1 Négation

**Définition 1.6** (Négation). Soit  $P$  une proposition. On appelle *négation de  $P$*  et on note  $\neg P$  la proposition de valeur de vérité opposée à  $P$ : quand  $P$  est vraie,  $\neg P$  est fausse, et vice-versa. Sa table de vérité est donnée par

$P$	$\neg P$
$V$	$F$
$F$	$V$

**Proposition 1.7.** Soit  $P$  une proposition. Alors

$$\neg\neg P \equiv P.$$

**Exemple 3.**

1.  $\neg$ « Aristote est mortel »  $\equiv$  « Aristote est immortel »
2.  $\neg$ « Aristote est un chat »  $\equiv$  « Aristote n'est pas un chat »
3.  $\neg$ « J'aime les frites »  $\equiv$  «  
»

### 1.2.2 Conjonction

**Définition 1.8** (Conjonction). On appelle *conjonction* et on note  $\wedge$  l'opérateur dont la table est donnée par

$P \wedge Q$  se lit «  $P$  et  $Q$  ».

$P$	$Q$	$P \wedge Q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$

**Exemple 4.** « Aristote est mortel »  $\wedge$  « Aristote est un chat » est ...  
« Tous les hommes sont mortels »  $\wedge$  « Tous les hommes sont mortels »  $\equiv$  ...  
« Ce mammifère est un chat »  $\wedge$  « Ce mammifère n'est pas un chat » est...

*Remarque 2.* Observez que dans le dernier cas, on peut conclure sans rien vraiment savoir sur le mammifère en question !

**Proposition 1.9.** Soient  $P, Q, R$  des propositions.

1.  $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
2.  $P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
3.  $P \wedge P \equiv P$
4.  $P \wedge \neg P \equiv F$  (principe du tiers exclu)

### 1.2.3 Disjonction

**Définition 1.10** (Disjonction). On appelle *disjonction* et on note  $\vee$  l'opérateur dont la table est donnée par

$P$	$Q$	$P \vee Q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

$P \vee Q$  se lit «  $P$  ou  $Q$  ».

**Proposition 1.11.** Soient  $P, Q, R$  des propositions.

1.  $(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$
2.  $P \vee Q \equiv Q \vee P$
3.  $P \vee P \equiv P$
4.  $P \vee \neg P \equiv V$  (principe du tiers exclu, encore)

$P$	$Q$	$P \Rightarrow Q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$

### 1.2.4 Implication, équivalence

**Définition 1.12** (Implication). L'opérateur *implication*, noté  $\Rightarrow$ , a pour table de vérité  $P \Rightarrow Q$  se lit «  $P$  implique  $Q$  ».

**Exemple 5.** Tous les hommes sont mortels.  
Or Socrate est un homme.  
Donc Socrate est mortel.

**Définition 1.13** (Équivalence). L'opérateur *équivalence*, noté  $\Leftrightarrow$ , a pour table de vérité

$P$	$Q$	$P \Leftrightarrow Q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$V$

$P \Leftrightarrow Q$  se lit «  $P$  équivaut à  $Q$  »

### 1.2.5 Quelques équivalences de formules

**Proposition 1.14** (Distributivités).

1.  $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
2.  $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

**Proposition 1.15** (Négation d'une formule, lois de De Morgan).

1.  $\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P) \vee (\neg Q)$  (loi de De Morgan)
2.  $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$  (deuxième loi de De Morgan)
3.  $\neg(P \Rightarrow Q) \equiv P \wedge \neg Q$ .
4.  $\neg(P \Leftrightarrow Q) \equiv P \Leftrightarrow (\neg Q) \equiv (\neg P) \Leftrightarrow Q$

*Remarque 3.* Le point 3. donne un moyen simple de contredire une implication.

**Exemple 6.** On peut montrer que l'affirmation « si le sol est mouillé alors il pleut » est fausse. En effet, elle se réécrit « le sol est mouillé »  $\Rightarrow$  « il pleut », et comme on peut avoir « le sol est mouillé » et « il ne pleut pas » (il suffit d'arroser le sol quand il fait beau...), on a un contre-exemple.

**Proposition 1.16.**

1.  $P \implies Q \equiv (P \implies Q) \wedge (Q \implies P)$  (principe de double implication)
2.  $(P \implies Q) \equiv (\neg Q \implies \neg P)$  (principe de la contraposée)
3.  $(P \vee Q) \implies R \equiv (P \implies R) \wedge (Q \implies R)$  (disjonction de cas)
4.  $P \implies Q \equiv \neg P \vee Q$
5.  $(P \wedge (P \implies Q)) \implies Q \equiv V$  (*modus ponens*)
6.  $P \implies (Q \vee R) \equiv (P \wedge \neg Q) \implies R$

**Exercice 1 (D).** Niez :

1.  $((A \implies B) \wedge C) \vee \neg B$
2.  $((A \Leftrightarrow B) \vee C) \implies B \Leftrightarrow A$

**1.3 Formules quantifiées**

Maintenant, on va apprendre à manier des variables dans des formules logiques.

**Définition 1.17** (Prédicat). On appelle *prédicat* une articulation de relations faisant intervenir des variables.

**Définition 1.18** (Quantificateur universel). Le quantificateur universel  $\forall$ , lu « pour tout » ou « quel que soit », est défini comme suit : la proposition

$$\forall x, P(x)$$

est vrai si  $P(x)$  est vrai quelle que soit la valeur prise par  $x$ .

**Proposition 1.19.**  $\neg(\forall x, P(x)) \equiv \exists x, \neg P(x)$

**Exemple 7.**  $\neg(\text{« Tous les bretons sont des indépendantistes »}) \equiv \text{« Il existe un breton qui n'est pas indépendantiste »}.$

**Définition 1.20** (Quantificateur existentiel). Le quantificateur existentiel  $\exists$ , lu « il existe », est défini comme suit : le prédicat

$$\exists x, P(x)$$

est vrai si la proposition  $P(x)$  est vraie pour un certain  $x$ . Dans ce cas, on peut se donner un  $x$  qui vérifie  $P(x)$ , même si on ne peut pas l'explicitier...

*Remarque 4.* Quand une variable est quantifiée dans une expression, on dit qu'elle est *liée* ou *muette*. Sinon, elle est *libre*. Par exemple, dans

$$\forall x, x + y \geq 0,$$

$x$  est liée et  $y$  est libre.

On peut changer le nom d'une variable muette. En l'occurrence, on peut changer  $x$  par  $z$  dans ce qui précède :

$$\forall x, x + y \geq 0$$

est la même chose que

$$\forall z, z + y \geq 0.$$

**Proposition 1.21.**  $\neg(\exists x, P(x)) \equiv \forall x, \neg P(x)$ .

**Exemple 8.** 1.  $P(x) : \langle x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4 \rangle$  est un prédicat, faisant intervenir les relations  $\langle x^2 \leq 0 \rangle$  et  $\langle x = 0 \rangle$ .

On a que la proposition  $\forall x, P(x)$  est vraie. Elle s'écrit  $\forall x, x \geq 2 \Rightarrow x^2 \geq 4$ , ce qui se réécrit, par abus de notation,

$$\forall x \geq 2, x^2 \geq 4.$$

En général, une proposition de la forme  $\forall x, x \in E \Rightarrow Q(x)$ , peut se réécrire

$$\forall x \in E, Q(x).$$

2. La proposition  $\exists x, x \geq 0 \wedge x^2 = 4$ , où intervient le prédicat  $P(x) : \langle x \geq 0 \wedge x^2 = 4 \rangle$ , se réécrit

$$\exists x \geq 0, x^2 = 4.$$

**Proposition 1.22.**

1.  $\forall x, (P(x) \wedge Q(x)) \equiv (\forall x, P(x)) \wedge (\forall x, Q(x))$ .
2.  $\exists x, (P(x) \vee Q(x)) \equiv (\exists x, P(x)) \vee (\exists x, Q(x))$ .

## 2 Comment écrire une démonstration

Donnons quelques méthodes pour rédiger proprement une démonstration mathématique dans les règles de l'art — c'est-à-dire de façon correcte du point de vue logique, et structurée.

D'abord, il faut décomposer l'énoncé que l'on veut montrer en des propositions plus simples. D'habitude, l'énoncé s'écrit  $H \Rightarrow C$  où  $H$  contient les hypothèses,  $C$  les conclusions. Il faut donc déconstruire  $H$  et  $C$  en des blocs que l'on peut traiter séparément, et recoller pour montrer ce que l'on veut.

**Proposition 2.1** (Montrer  $A \wedge B$ ). Montrer séparément qu'on a  $A$ , et qu'on a  $B$ .

**Proposition 2.2** (Montrer une implication  $A \Rightarrow B$ ). D'abord supposer  $A$ , ce que l'on peut écrire « supposons  $A$  vraie », et ensuite montrer qu'on a  $B$  en utilisant les règles...

Cela s'appelle montrer l'implication directe. On peut aussi ruser, et démontrer que  $\neg B \Rightarrow \neg A$ , puisque c'est la même chose que  $A \Rightarrow B$ .

**Proposition 2.3** (Montrer une équivalence  $A \Leftrightarrow B$ ). Typiquement, on peut montrer que  $A \Rightarrow B$  (ce que l'on appelle le *sens direct*), puis que  $B \Rightarrow A$  (ce que l'on appelle le *sens réciproque*).

On peut aussi essayer d'enchaîner des équivalences assez évidentes, en justifiant éventuellement les moins évidentes par une précision entre parenthèses, un « puisque », ou encore un participe présent du style «  $x \mapsto x^2$  étant croissante sur  $\mathbb{R}^+$  »... Mais il faut faire attention à ce que cela ne nuise pas à la clarté de la démonstration.

**Proposition 2.4** (Montrer que  $\forall x, A(x)$ ). Il faut montrer que quel que soit  $x$ ,  $A(x)$  est vraie. Pour cela, on pose un  $x$  quelconque, on suppose qu'il vérifie les hypothèses de  $A(x)$  et on montre la conclusion.

**Proposition 2.5** (Montrer  $A \vee B$ ). Il faut montrer que l'on a soit  $A$ , soit  $B$ ... donc que si on n'a pas  $A$ , alors on aura nécessairement  $B$ . Il suffit donc de montrer l'implication  $\neg A \Rightarrow B$ .

**Proposition 2.6** (Montrer  $\exists x, A(x)$ ). On peut s'y prendre de plusieurs façons. On peut essayer d'exhiber un  $x$  qui vérifie  $A(x)$ . Par exemple, pour montrer qu'il existe  $x$  tel que  $x^2 = 4$ , on peut prendre  $x = 2$  et on a fini.

Si on n'y parvient pas, on peut essayer de le construire à la main. C'est loin d'être toujours facile.

On peut des fois conclure en utilisant des théorèmes du cours donnant l'existence directement.

**Exercice 2** (M). Montrer que si  $n$  est un entier,  $n$  est pair si et seulement si  $n^2$  est pair.

*Démonstration.* On décompose l'énoncé de la façon suivante :

$$\forall n, n \text{ entier} \Rightarrow (n \text{ pair} \Leftrightarrow n^2 \text{ pair})$$

ou encore, avec l'abus de notation usuel :

$$\forall n \text{ entier}, (n \text{ pair} \Leftrightarrow n^2 \text{ pair}).$$

Pour démontrer l'implication, il faut se donner son hypothèse : soit  $n$  un entier. Ensuite, il faut démontrer le deuxième bloc, le résultat «  $n \text{ pair} \Leftrightarrow n^2 \text{ pair}$  ».

Il s'agit d'une équivalence, donc on va procéder par double implication.

**Le sens direct.** On va montrer l'implication «  $n \text{ pair} \Rightarrow n^2 \text{ pair}$  ». On va utiliser la première méthode proposée. On suppose donc que  $n$  est pair : il existe un entier  $k$  tel

que  $n = 2k$  (c'est la définition d'être pair). Alors  $n^2 = (2k)^2 = 2^2 k^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$ , ce qui est pair.

**Le sens réciproque.** On va montrer l'autre sens : «  $n^2$  pair  $\Rightarrow n$  pair ». Cela semble un peu corsé, donc on va plutôt montrer la contraposée : «  $\neg(n \text{ pair}) \Rightarrow \neg(n^2 \text{ pair})$  ».

La négation de « être pair » étant « être impair », cela revient à montrer que «  $n$  impair  $\Rightarrow n^2$  impair ». Cette implication paraît plus simple à montrer, donc on peut tenter de le faire directement : supposons  $n$  impair. Alors il existe un entier  $k$  tel que  $n = 2k + 1$ , et alors  $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$ , ce qui est impair. D'où l'implication.

Par contraposée on a bien «  $n^2$  pair  $\Rightarrow n$  pair ». □

## 3 Ensembles

### 3.1 Définitions intuitives

**Définition 3.1.** Un ensemble  $E$  est une *collection* d'objets  $x$ , que l'on appelle *éléments* de  $E$ . Si  $x$  est un élément de  $E$ , on dit que «  $x$  appartient à  $E$  » et on note  $x \in E$ .