

COMPOSITION DE FONCTIONS

14 novembre 2016

1 Généralités

Définition 1.1. Soient $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions réelles. On suppose qu'on ait que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$.

Alors, pour tout $x \in D_f$, $g(f(x))$ existe. On peut donc définir la *composée de f par g* , notée $g \circ f$, par

$$g \circ f : \begin{cases} D_f & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto g(f(x)) \end{cases}$$

Ainsi, calculer $g \circ f(x)$ consiste en calculer $f(x)$ puis appliquer g au résultat.

Exemple 1.2. Soient

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto 1 + x^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad g : \begin{cases} \mathbb{R}^* & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}.$$

Alors la composée de f par g est

$$g \circ f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{1 + x^2} \end{cases}$$

Remarque 1.3. Calculez la composée de g par f , $f \circ g$: que remarquez-vous ?

Exercice 1. Dans chaque cas, dire si on peut définir, et le cas échéant calculer la composée de f par g :

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 + x^2$ et g la fonction racine carrée.
2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -x$ et g la fonction racine carrée.
3. $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x+1}$ et $g : \mathbb{R}/\{-1; 1\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{x^2 - 1}$
4. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\sqrt{x-5}}{x^2 - x - 6}$, $g :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, où il faut déterminer le domaine D de f (éventuellement le restreindre pour pouvoir composer...)

2 Variations

Théorème 2.1 (Sens de variation d'une composée). *Soient f et g deux fonctions telles que pour tout $x \in D_f$, $f(x) \in D_g$. Alors :*

- *Si f et g ont même sens de variation alors $g \circ f$ est **croissante**.*
- *Si f et g ont des sens de variation contraires alors $g \circ f$ est **décroissante**.*

Exercice 2. En écrivant les fonctions suivantes comme des composées de fonctions simples dont vous connaissez les sens de variation, établir les variations de

- $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur \mathbb{R} .
- $x \mapsto |x|$ sur \mathbb{R} .
- $x \mapsto \frac{1}{1-\sqrt{x-3}}$ sur son ensemble de définition, à préciser.

Exercice 3. Démontrer le théorème 2.1.