

# Oscillateurs

2 mars 2017

Les oscillateurs sont des systèmes physiques omniprésents dans notre monde moderne : les suspensions d'un véhicule, un pendule, l'horloge du microprocesseur d'un système informatique...

Ils sont caractérisés par un mouvement de va et vient d'une grandeur physique (position, vitesse, tension ou intensité électrique, angle) autour d'une ou plusieurs valeurs, souvent une valeur dite *d'équilibre*.

*Prérequis* : AP maths, équations différentielles.

## 1 Oscillateur harmonique

### 1.1 Loi de Hooke

Un ressort est un objet élastique utilisé pour emmagasiner de l'énergie mécanique, sous la forme d'énergie potentielle élastique, en jouant sur son élasticité pour le déformer et exercer une tension sur les liaisons entre les atomes du matériau.

La loi de Hooke est une modélisation possible de l'action mécanique d'un ressort, provenant de l'énergie potentielle emmagasinée. Ce modèle est applicable pour des systèmes physiques où la masse du ressort est négligeable devant celle du reste du système, et où le ressort n'est pas soumis à une déformation trop importante risquant de rompre certaines des liaisons inter-atomiques.

Deux paramètres interviennent dans ce modèle : la constante de raideur  $k$  du ressort, en  $\text{N.m}^{-1}$ , et sa longueur à vide  $\ell_0$ . En notant  $\Delta \ell$  le vecteur de déformation du ressort, la force dite *de rappel* qu'exerce le ressort idéal est

$$\mathbf{F} = -k\Delta \ell. \quad (\text{loi de Hooke})$$

### 1.2 Système masse-ressort

On considère maintenant qu'un objet de masse  $m$ , que l'on assimilera à un point matériel, est accroché à l'extrémité libre d'un ressort posé à l'horizontale sur un plan.

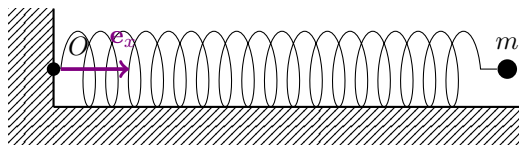


FIG. 1: Système masse-ressort

On suppose que le ressort ne peut se déformer que selon une direction donnée par un vecteur unitaire noté  $\mathbf{e}_x$ . La déformation s'écrit alors  $\Delta \ell = (\ell - \ell_0)\mathbf{e}_x$ . Le référentiel d'étude est le référentiel terrestre que l'on supposera galiléen.

La masse  $m$  est soumise à son poids, et l'exerce sur le support ; en vertu de la troisième loi de Newton, le support exerce sur la masse une réaction égale à l'opposée du poids qui le compense. Ne reste que la force de rappel.

Le système est donc à l'équilibre lorsque  $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ , i.e.  $\ell = \ell_0$ . On ramène l'espace au repère  $(O, \mathbf{e}_x)$  où  $O$  est la position d'équilibre de la masse. La position de la masse est donc  $\mathbf{r} = x\mathbf{e}_x$  où  $x = \ell - \ell_0$ .

D'après le principe fondamental de la dynamique, la position  $\mathbf{r}$  de la masse vérifie l'équation différentielle

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} = -k(\ell - \ell_0)\mathbf{e}_x.$$

Projeter selon  $\mathbf{e}_x$  fournit successivement :

$$m\ddot{x} = -k(\ell - \ell_0) = -kx \quad \text{puis} \quad m\ddot{x} + kx = 0. \quad (1)$$

On définit alors le paramètre  $\omega_0 := \sqrt{\frac{k}{m}}$ , appelé *pulsation propre*, et dont nous préciserons les sens mathématique et physique plus loin. Son unité est le  $\text{rad.s}^{-1}$ . L'équation (1) devient alors :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2)$$

Cette équation différentielle linéaire du deuxième ordre, appelée *équation de l'oscillateur harmonique*, est l'une des équations les plus fondamentales de la physique. On la retrouve dans l'étude de systèmes mécaniques ou électroniques, que cela soit l'équation d'évolution obtenue directement par modélisation ou le résultat d'une approximation visant à étudier les oscillations d'un système autour d'un équilibre.

Il existe deux réels  $A$  et  $B$  tels que

$$x(t) = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t.$$

On note  $x_0 = x(0)$  et  $v_0 = \dot{x}(0)$  la position et la vitesse initiale de la masse. En utilisant l'expression, en déduire les expressions de  $A$  et de  $B$ .

### 1.3 Aspects énergétiques

Le ressort emmagasine une énergie potentielle *élastique*

$$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2.$$

Et une énergie cinétique

$$E_k = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

L'énergie mécanique  $E_m$  est la somme des contributions cinétique et potentielle :

$$E_m = E_k + E_{pe} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \quad (3)$$

et est constante en l'absence de forces dissipatives (par exemple, des frottements).

### 1.4 Exercices

**Exercice 1.** Montrer qu'il existe deux réels  $X_m$  et  $\varphi$  tels que

$$x(t) = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi),$$

les exprimer en fonction de  $x_0$ ,  $v_0$  et  $\omega_0$ .

**Exercice 2.** On considère une masse  $m$  accrochée au bout d'un ressort pendant à la verticale, dont l'autre extrémité est retenue par un plan horizontal. On note  $z$  l'altitude de la masse  $m$ , avec  $z = 0$  au niveau du plan. Déterminer la position d'équilibre, l'équation du mouvement et la résoudre.

**Exercice 3.** On considère un pendule rigide, dont la tige est de longueur  $\ell$  et de masse négligeable devant une masse  $m$  accrochée à son bout. On note  $\theta$  l'angle entre la tige et la verticale, orienté comme sur le schéma suivant :

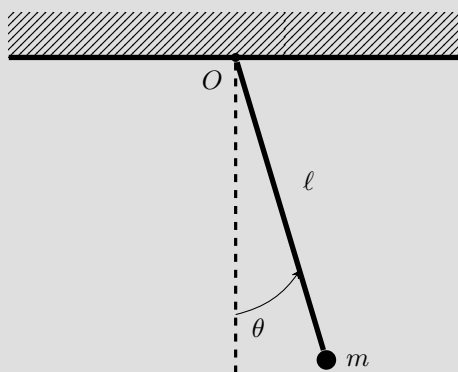


FIG. 2: Pendule simple

On lève le pendule jusqu'à un angle  $\theta_0$  petit, et on le lâche avec une vitesse initiale nulle.

1. Montrer que l'énergie cinétique du pendule est

$$E_k = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2,$$

que son énergie potentielle est

$$E_p = mgl(1 - \cos \theta)$$

2. Justifier que l'énergie mécanique

$$E_m = E_k + E_p$$

est constante. Exprimer sa dérivée en fonction de  $\theta(t)$  et ses dérivées.

3. En déduire l'équation différentielle vérifiée par  $\theta$ .
4. On suppose que  $\theta$  reste toujours petit. Simplifier l'équation différentielle en utilisant l'approximation

$$\sin \theta \simeq \theta \quad \text{pour } \theta \text{ petit}$$

et la résoudre.

## 2 Oscillateur amorti

### 2.1 Forces de frottement fluide

On modélise les forces de frottement par une relation linéaire avec la vitesse  $\mathbf{v}$ , de la forme :

$$\mathbf{F}_f = -\lambda \mathbf{v}.$$

### 2.2 Système masse-ressort amorti

On considère encore une fois le ressort astreint à se déplacer selon un axe horizontal  $(O, \mathbf{e}_x)$ .

Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -k(x(t) - l_0)\mathbf{e}_x - \lambda \mathbf{v} \quad (4)$$

donc en projetant selon  $\mathbf{e}_x$ , en faisant le changement de variable  $s = x - l_0$ :

$$m\ddot{s} + \lambda\dot{s} + ks(t) = 0 \quad (5)$$

soit

$$\ddot{s} + 2\beta\omega_0\dot{s} + \omega_0^2 s(t) = 0 \quad (6)$$

avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  la pulsation propre du ressort,  $\beta = \frac{\lambda}{2\omega_0}$  le facteur d'amortissement, quantité sans dimension.

L'équation caractéristique est alors

$$r^2 + 2\beta\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \quad (7)$$

dont le discriminant réduit (le discriminant normal divisé par 4) est  $\Delta = \beta^2\omega_0^2 - \omega_0^2 = \omega_0^2(\beta^2 - 1)$ .

**Rappel 1** (Discriminant réduit). Étant donné une équation du second degré

$$ar^2 + br + c = 0,$$

on pose  $b' = b/2$  la moitié du coefficient de degré 1, et on définit la quantité appelée *discriminant réduit*

$$\Delta' = b'^2 - ac$$

(noter l'absence du facteur 4 devant le produit  $ac$ ). On remarque alors que  $\Delta' = \Delta/4$ , où  $\Delta$  est le discriminant classique.

Les racines de l'équation s'écrivent alors

$$r_{1,2} = -\frac{b'}{a} \pm \frac{\sqrt{\Delta'}}{a}$$

(noter l'absence du facteur 2 aux dénominateurs), on prenant soit de remplacer  $\sqrt{\Delta'}$  par  $i\sqrt{-\Delta'}$  lorsque  $\Delta' < 0$ .

On distingue donc, en fonction du signe de  $\Delta$  trois cas différents :

- $\Delta > 0$  soit amortissement fort  $\beta > 1$ : alors le déplacement  $s$  s'écrit

$$s(t) = e^{-\beta t} (A \cosh(\gamma t) + B \sinh(\gamma t))$$

avec  $\gamma = \sqrt{\beta^2 - 1}$ .

- $\Delta > 0$  soit amortissement fort  $\beta < 1$ : le déplacement s'écrit

$$s(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\omega' t) + B \sin(\omega' t)), \quad \omega' = \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \tau = \beta\omega_0$$

où  $\omega'$  est appelée *pseudo-pulsation* du système et  $\tau$  est le *temps caractéristique d'amortissement* du système (pour  $t \geq 5\tau$  l'amplitude de  $s$  a diminué de 95% par rapport à son amplitude initiale).

- $\Delta = 0$  soit amortissement critique  $\beta = 1$ : alors

$$s(t) = e^{-t/\tau} (A + Bt)$$

Dans toutes les situations précédentes, on détermine les constantes  $A$  et  $B$  à l'aide des conditions initiales, sur la position  $s_0 = s(0) = x(0) - l_0 = x_0 - l_0$  et sur la vitesse  $\dot{s}(0) = \dot{x}(0) = v_0$ .

On introduit souvent une quantité sans dimension  $Q$ , appelée *facteur de qualité* et définie par

$$Q = \frac{m\omega_0}{\lambda}$$

de sorte que  $\frac{\lambda}{m} = \frac{\omega_0}{Q}$  et l'équation du mouvement se réécrit

$$\ddot{s} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{s} + ks(t) = 0.$$

### 3 Oscillateurs couplés

On considère ici un système constitué de deux masses identiques  $m$  et de deux ressorts identiques, de constantes de raideur  $k$  et longueur au repos  $\ell_0$  identiques, dont on note  $x_1 = \ell_1 - \ell_0$  et  $x_2 = \ell_2 - \ell_0$  leurs élongations.

Quand on fait l'expérience, on observe que le mouvement des deux ressorts est oscillatoire, et semble être périodique. On trouve même, en ajustant bien les positions et vitesses initiales des ressorts, que l'on peut les faire se déplacer dans le même sens ou encore dans des sens opposés.

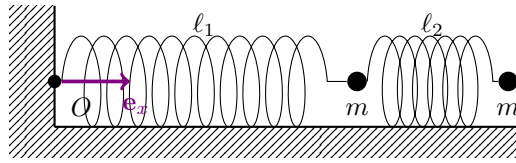


FIG. 3: Système d'oscillateurs couplés

**Exercice 4 (TD).** On va déterminer le mouvement de ce système.

- Déterminer les équations vérifiées par les élongations  $x_1$  et  $x_2$ .  
Résoudre le système (déterminer la pulsation propre et les expressions des élongations) dans les situations
- $x_1 = x_2$  (*mode symétrique*)
- $x_1 = -x_2$  (*mode antisymétrique*)

En général, les expressions de  $x_1$  et  $x_2$  sont des combinaisons des expressions correspondant aux deux modes, symétrique et antisymétrique.

Ce principe de résolution des systèmes d'équations différentielles, par *décomposition modale* en fonctions solutions élémentaires, est très utilisé en physique mathématique, notamment en physique des ondes.