In [1] :
```
%matplotlib inline
```

In [2] :
```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import sympy as sp
from numpy import linalg

from matplotlib import animation, rc
import matplotlib.ticker as mticker
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

In [3] :
```
from IPython.display import HTML, Image, set_matplotlib_formats
set_matplotlib_formats('png','pdf')

rc('animation', html='html5')
```

Étant donnée la nature numériquement intensive des calculs tensoriels en jeu, on aura besoin de la librairie `numba` qui passe par le langage `C` pour compiler des fonctions plus rapides *on the fly*:

In [4] :
```
import numba as nb
from numba import double, int32, float32
```

On cherche à résoudre l'équation de la chaleur en deux dimensions,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + q(x,y,t)$$

sur un domaine $\Omega = [-L_x, L_x] \times [-L_y, L_y]$.

Ce document sert de documentation pour les scripts Python permettant de simuler numériquement le transfert thermique dans un domaine bidimensionnel uniforme.

1 Schéma de résolution : différences finies

1.1 Discrétisation

On va chercher une solution approchée $\left(u_{i,j}^n\right)$ de l'EDP sur une grille (x_i, y_j), en temps discrétisé (t_n).

Il faut discrétiser les opérateurs différentiels. On discrétise la dérivée temporelle par

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

et le Laplacien par

$$\Delta u(x_i, y_j, t_n) \approx \frac{u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1}}{h^2}$$

Posons $r = \frac{D\Delta t}{h^2}$. On obtient alors le système linéaire :

$$(1+4r)u_{i,j}^{n+1} - ru_{i+1,j}^{n+1} - ru_{i,j+1}^{n+1} - ru_{i-1,j}^{n+1} - ru_{i,j-1}^{n+1} = u_{i,j}^n$$

Mais il n'a pas trop de sens au bord du domaine. Pour cela, on va utiliser nos conditions aux limites.

Pour imposer une condition aux limites de type Dirichlet $f : \partial\Omega \times I \to \mathbb{R}$, on la discrétise et on répercute en imposant les valeurs $u_{0,j}^n$, $u_{N-1,j}^n$, $u_{i,0}^n$ et $u_{i,N-1}^n$ dans le système d'équations.

1.2 Tenseurs d'état et de transition

On pose

$$\mathbf{U}^n = (u_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N-1}$$

la matrice d'état du système à l'instant t_n.

Le système linéaire précédent lie l'état du système à l'instant t_n, $\mathbf{U}^n$, à son état $\mathbf{U}^{n+1}$ à l'instant suivant. On va essayer de représenter cette relation d'une façon efficace du point de vue informatique.

On cherche un tenseur de « *transition* » $\mathbf{T} = \left(t_{i,j}^{k,l}\right)$ tel que

$$u_{i,j}^n = t_{i,j}^{k,l} u_{k,l}^{n+1}$$

pour (i,j) en dehors des bords, avec la convention de sommation d'Einstein.

On prend $t_{i,j}^{k,l} = -r$ si $(k,l) = (i \pm 1, j \pm 1)$, $1 + 4r$ si $(k,l) = (i,j)$ en dehors des bords, 1 aux bords et 0 ailleurs.

On imposera manuellement les conditions aux bords à chaque étape.

On munit $\mathcal{M}_J(\mathbb{R})$ de la base $(E_{i,j})$ organisée dans l'ordre lexicographique. Dans cette base, l'endomorphisme $\mathbf{U} \longmapsto \mathbf{TU}$ a pour matrice la matrice bloc

$$A = \begin{bmatrix} A_{0,0} & \cdots & A_{0,J-1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{J-1,0} & \cdots & A_{J-1,J-1} \end{bmatrix}$$

où les $A_{j,k} = \left(t_{i,j}^{k,l}\right)_{0 \leq i,l < J}$ pour tous $0 \leq j,k < J$.

2 Implémentation en Python

2.1 Discrétisation : Classe `Domain`

La classe suivante permet de représenter le domaine spatial et temporel discrétisé, avec les attributs relatifs aux paramètres de grille (nombre de points, pas, bornes…).

```
In [19] : class Domain():
              """
              Définit le domaine spatio-temporel du problème
              """
              def __init__(self, L, T, J = 64, N=250):
                  # Éléments spatiaux
                  self.L = L # intervalle où simuler
                  self.J = J # Taille des échantillons spatiaux
                  self.Xs = np.linspace(-L,L,J)
                  self.Ys = np.linspace(-L,L,J)
                  self.grid = np.meshgrid(self.Xs, self.Ys)
                  self.dx = 2*L/J

                  # Éléments temporels
                  self.T = T # temps de la simulation numérique
                  self.N = N # Taille des échantillons temporels
                  self.times = np.linspace(0,T,N)
```

```
            self.dt = T/N

        def __call__(self):
            return self.grid
```

2.2 Tenseur T

La fonction suivante calcule l'inverse du tenseur **T** permettant d'itérer la relation de récurrence précédente.

```
In [6] : def tenseur(J, dx, dt, diffus = 117e-6):
             """
             diffus : valeur du coefficient de diffusion
             valeur par défaut : cuivre, 117E-6 m²/s
             """
             tens = np.zeros((J,J,J,J))
             r = diffus*dt/dx**2
             for i in range(J):
                 for j in range(J):
                     a = i in [0,J-1]
                     b = j in [0,J-1]
                     if a or b:
                         tens[i][j][i][j] = 1
                     else:
                         tens[i][j][i][j] = 1+4*r
                         tens[i][j][i-1][j] = -r
                         tens[i][j][i+1][j] = -r
                         tens[i][j][i][j-1] = -r
                         tens[i][j][i][j+1] = -r
             return tens
```

Il faut maintenant construire la matrice A, qui sera bien plus rapide à inverser que le tenseur directement :

```
In [7] : def to_matrix(tens):
             J,_,_,_ = np.shape(tens)
             arr = np.zeros((J**2,J**2))
             for k in range(J):
                 for j in range(J):
                     arr[j*J:(j+1)*J,k*J:(k+1)*J] = tens[:,j,k,:]
             return arr
```

2.3 Fonction graphe

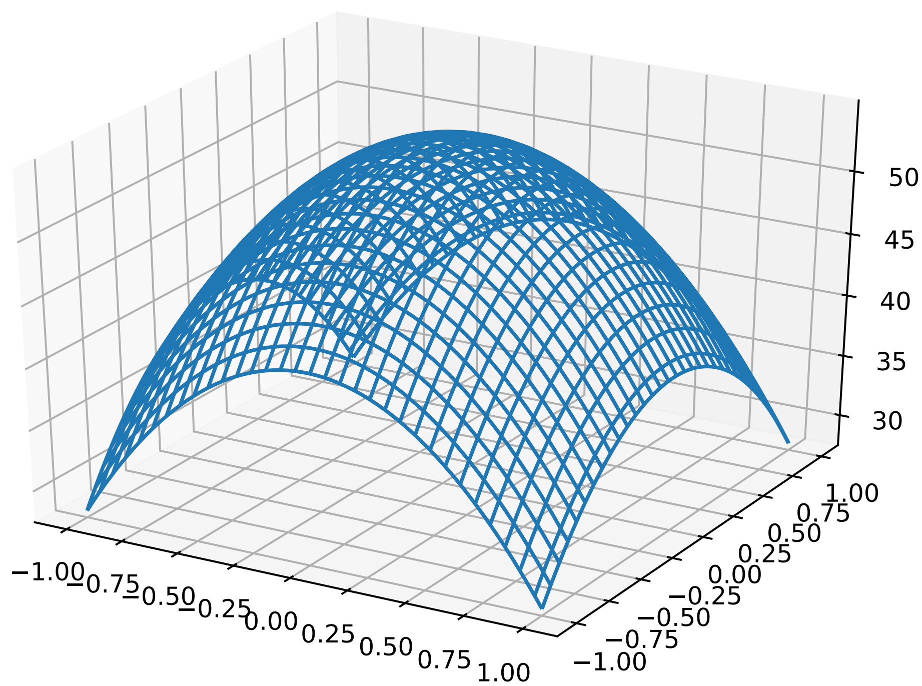
Simple fonction qui dessine le profil d'une fonction sur Ω.

```
In [8] : def graphe(Omega, U0):
             fig = plt.figure()
             ax = Axes3D(fig)
```

```
    ax.grid(True)
    ax.plot_wireframe(*Omega.grid, U0)
```

Un petit test :

```
In [9] : Omega = Domain(1,2,64,128)

         U0 = 25+3*(lambda x,y: 10-(5*x**2+4*y**2))(*Omega.grid)

         graphe(Omega, U0)
```



2.4 Conditions de Dirichlet

Une fonction qui prend une matrice d'état et impose ses valeurs au bord.

```
In [10] : def enforceDirich(Omega, state, f, n):
              """
              Impose les conditions aux limites de Dirichlet à l'instant t_n
              """
              J = Omega.J
              Xs = Omega.Xs
              Ys = Omega.Ys
              times = Omega.times
              for i in range(J):
```

```
        state[i][0] = f(Xs[i], Ys[0], times[n])
        state[i][J-1] = f(Xs[i], Ys[J-1], times[n])
    for j in range(J):
        state[0][j] = f(Xs[0], Ys[j], times[n])
        state[J-1][j] = f(Xs[J-1], Ys[j], times[n])
```

2.5 Itération de la relation de récurrence

Il s'agit d'un simple passage dans une boucle en itérant sur les temps discrets, donnés par l'attribut `times` du domaine passé en argument. Pour ça, on va utiliser une classe `Solver` dont la méthode `solve` effectue la résolution.

```
In [11] : class Solver:

              def __init__(self, Omega, U0, f):
                  self.domain = Omega
                  self.initial = U0
                  self.boundfunc = f
                  J = Omega.J
                  dx = Omega.dx
                  dt = Omega.dt
                  self.tensor = tenseur(J,dx,dt)
                  self.matrix = linalg.inv(to_matrix(self.tensor))

              def solve(self):
                  times = self.domain.times
                  Omega = self.domain
                  J = Omega.J
                  N = Omega.N
                  dx = Omega.dx
                  dt = Omega.dt
                  U0 = self.initial
                  f = self.boundfunc
                  mat = self.matrix
                  enforceDirich(Omega, U0, f, 0)
                  record = [U0]

                  def _basis_expr(U, p):
                      arrl = np.hsplit(U,p)
                      return np.vstack(arrl)

                  def _from_basis(U, p):
                      arl = np.vsplit(U, p)
                      return np.hstack(arl)

                  for n in range(1,N):
                      curstate = record[-1]
                      curstate = _basis_expr(curstate, J)
```

```
            nextstate = np.dot(mat, curstate)
            nextstate = _from_basis(nextstate, J)
            nextstate = np.asarray(nextstate)
            enforceDirich(Omega, nextstate, f, n)
            record.append(nextstate)
        self.states = record
        return record
```

2.6 Animation

On implémente les animations via une classe nommée `HeatAnimation`. Le constructeur associé prend en argument le domaine, la distribution initiale de température, et la fonction décrivant la condition aux limites.

```
In [46] : class HeatAnimation(Solver):

              def _formatAxes(self, ax):
                  ax.set_xlabel(r"$x$ ($\mathrm{m}$)")
                  ax.set_ylabel(r"$y$ ($\mathrm{m}$)")

              def _timeText(self, t):
                  return "$t={:.2f}$".format(t) + r'$\mathrm{s}$'

              def evolSurface(self, fps=25):
                  grd = self.domain.grid

                  N = self.domain.N
                  fig = plt.figure()
                  ax = Axes3D(fig)
                  try:
                      self.states
                  except AttributeError:
                      self.solve()

                  self._formatAxes(ax)
                  data = ax.plot_wireframe(*grd, self.states[0])
                  zlims = ax.get_zlim()

                  time_text = ax.text2D(0.02,0.95, self._timeText(0),
                      transform=ax.transAxes)

                  def animate(i, data):
                      ti = i*self.domain.dt
                      ax.clear()
                      ax.set_zlim(zlims)
                      data = ax.plot_wireframe(*grd, self.states[i])
                      self._formatAxes(ax)
                      time_text = ax.text2D(0.02,0.97, self._timeText(ti),
```

```
            transform=ax.transAxes)
        return data, time_text

    anim = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=N,
            interval=1000/fps,
            fargs=(data,))
    self.surface = anim
    return self.surface

def evolHeat(self, fps=25):
    J = self.domain.J
    N = self.domain.N
    x0,x1 = self.domain.Xs[0],self.domain.Xs[J-1]
    y0,y1 = self.domain.Ys[0],self.domain.Xs[J-1]
    cmap = 'inferno'

    fig,ax = plt.subplots(1,1, figsize=(6,6))
    try:
        self.states
    except AttributeError:
        self.solve()
    data = ax.imshow(self.states[0],
            interpolation='lanczos',
            extent=[x0,x1,y0,y1],
            cmap=cmap)
    self._formatAxes(ax)
    time_text = ax.text(0.5,1, self._timeText(0),
        horizontalalignment='center',
        transform=ax.transAxes)
    bar = fig.colorbar(data)
    bar.set_label(r"Température (°C)")
    fig.tight_layout()

    def animate(i, data):
        ti = i*self.domain.dt
        data.set_data(self.states[i])
        self._formatAxes(ax)
        time_text.set_text(self._timeText(ti))
        return data, time_text

    anim = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=N,
            interval=1000/fps,
            fargs=(data,))
    self.heatmap = anim
    return self.heatmap
```

2.7 Distribution gaussienne

La fonction suivante représente la fonction gaussienne

$$(x, y) \longmapsto e^{-\beta((x-v)^2+(y-w)^2)}$$

avec β un paramètre et (v, w) la position de la cloche.

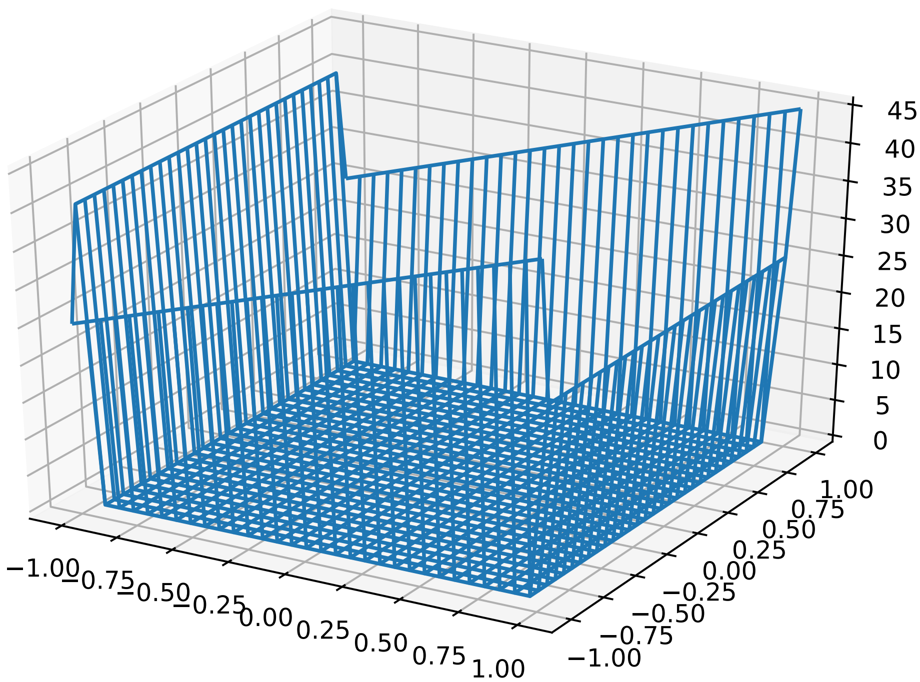
```
In [39] : def distrib(x,y, beta = 2, pos=(0,0)):
              v,w = pos
              return np.exp(-beta*((x-v)**2+(y-w)**2))
```

3 Tests

Attention Assurez-vous que la fonction de la condition aux limites $f : \partial\Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie au moins au bord de votre domaine…

```
In [40] : def f(x, y, t):
              if x==1 or x==-1:
                  return 35+10*y
              elif y==-1:
                  return 40
              else:
                  return 26
```

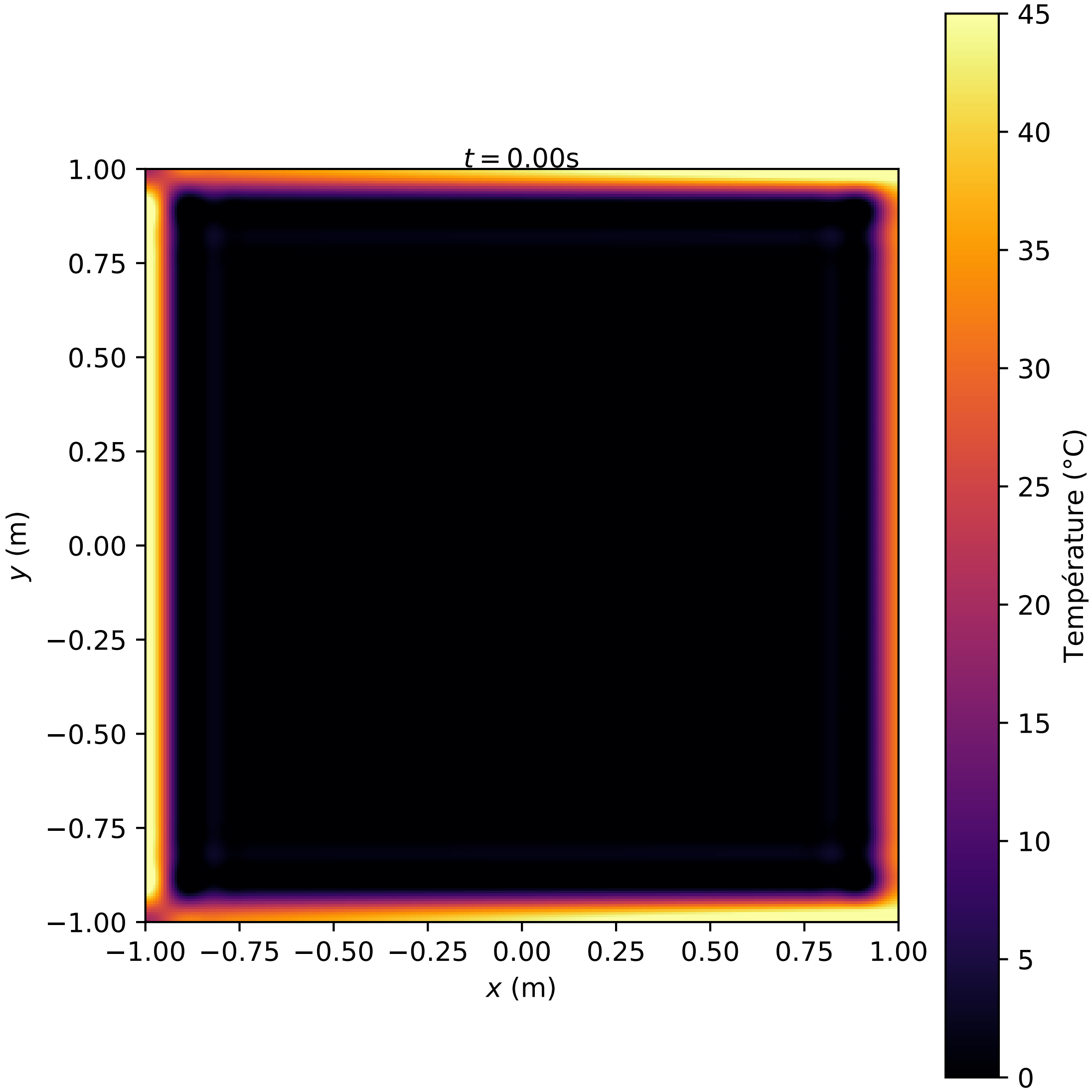
```
In [41] : Omega = Domain(1,1800, J=32, N=300)

         U0 = np.zeros((32,32))

         enforceDirich(Omega, U0, f, 1)
         graphe(Omega, U0)
```




```
In [42] : anim = HeatAnimation(Omega, U0, f)
```

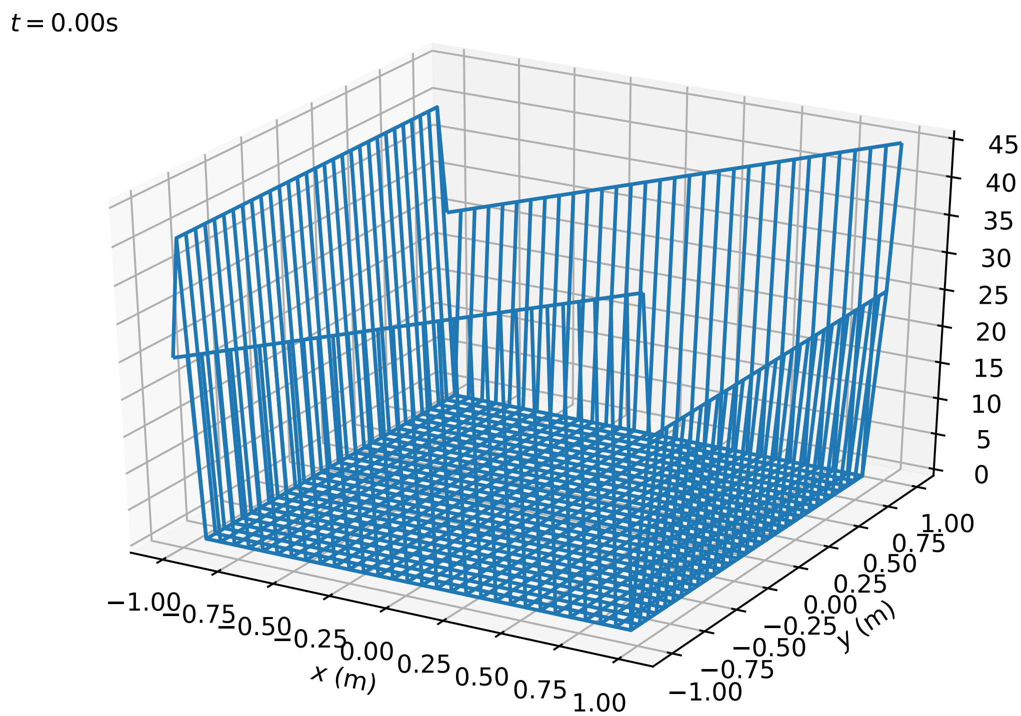
```
In [43] : anim.evolHeat()
```

```
Out[43] : <matplotlib.animation.FuncAnimation at 0x14ecb4bd048>
```



In [18] : anim.evolSurface()

Out[18] : <matplotlib.animation.FuncAnimation at 0x14ecb049a20>



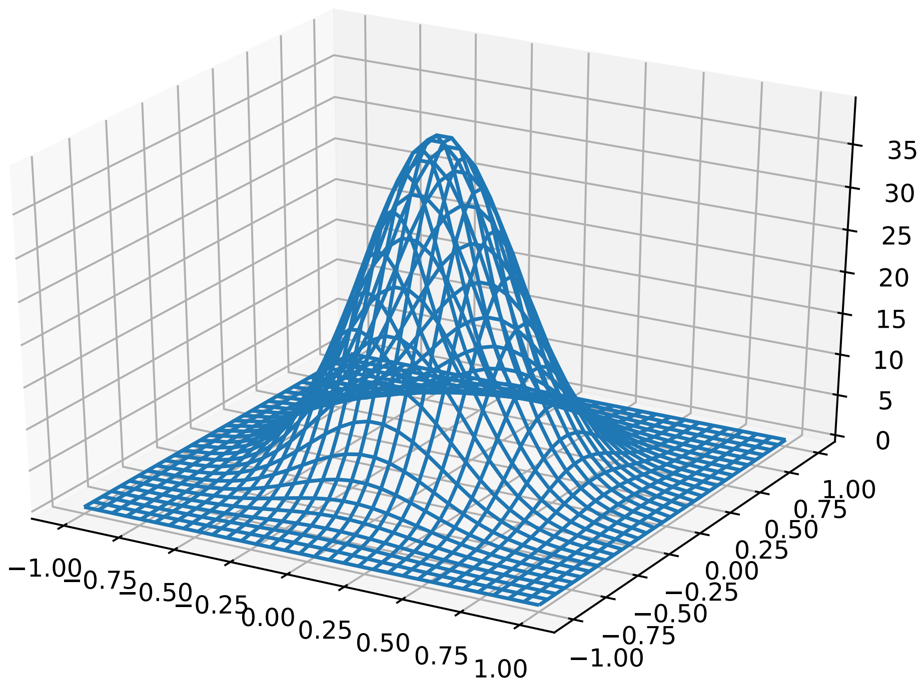
4 Test 2 : distribution en cloche

Avec condition initiale

$$u_0(x,y) = T \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\gamma^2}\right),$$

où $\gamma > 0$ est le rayon à mi-hauteur de la cloche.

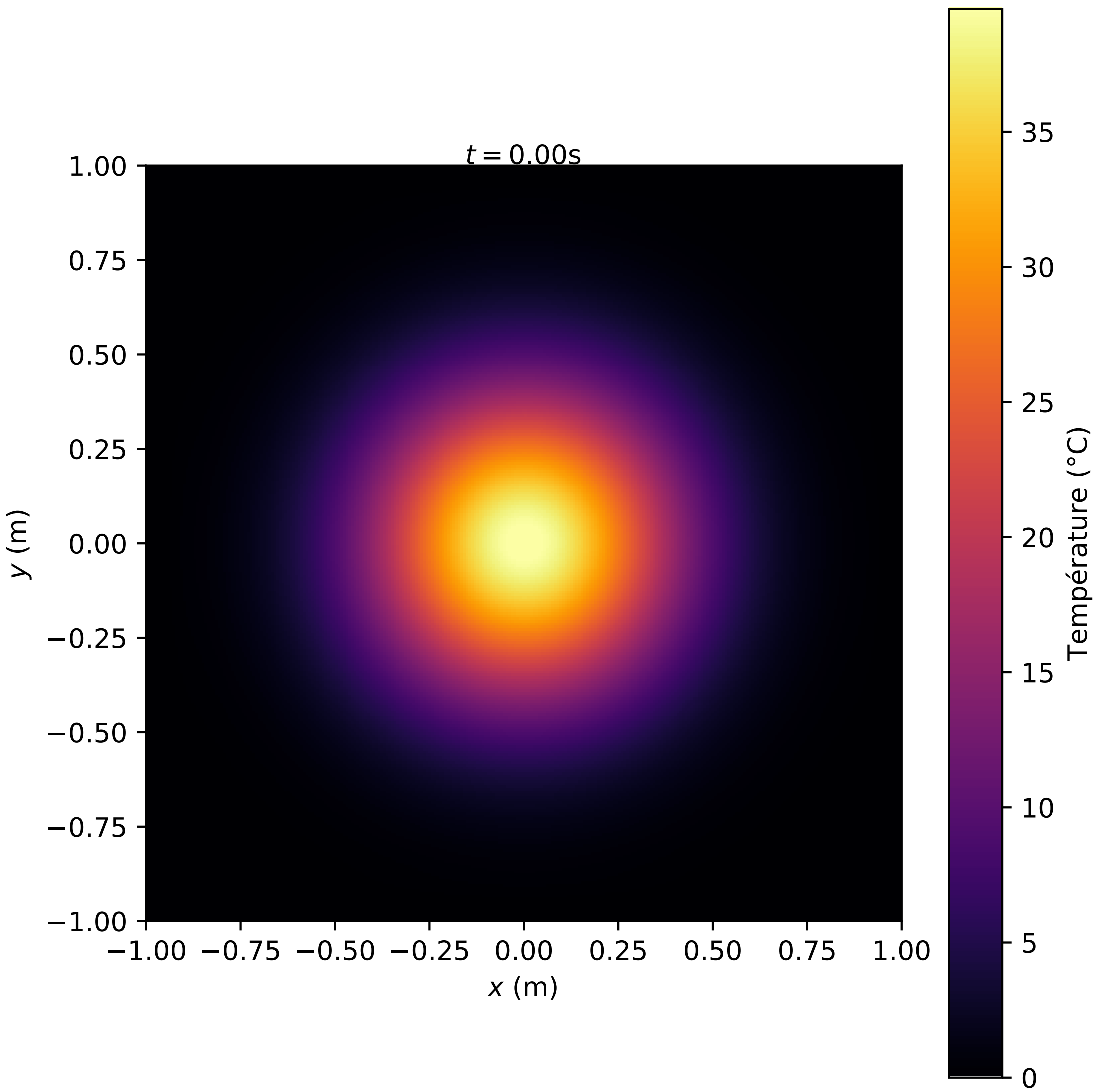
```
In [47] : Omega = Domain(1,1800, J=32, N=300)
          gamma = 0.3
          U0 = 40*distrib(*Omega(), beta = 1/(2*gamma**2))

          condBord = (lambda x, y,t : 0)
          enforceDirich(Omega, U0, condBord, 1)

          graphe(Omega,U0)
```



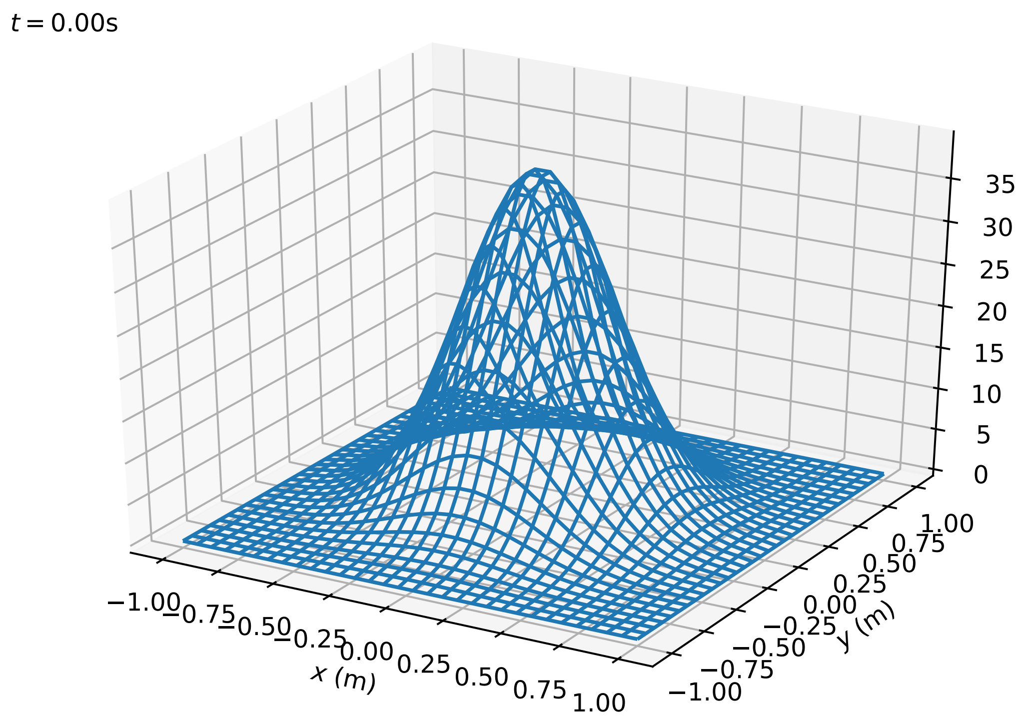

```
In [48] : animG = HeatAnimation(Omega, U0, condBord)
```

```
In [49] : animG.evolHeat()
```

```
Out[49] : <matplotlib.animation.FuncAnimation at 0x14ed582d630>
```




```
In [37] : anim.evolSurface()

Out[37] : <matplotlib.animation.FuncAnimation at 0x14eca3bb908>
```



$t = 0.00$s
35
30
25
20
15
10
5
0
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
x (m)
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
y (m)