```
In [11]: %matplotlib inline
```

```
In [57]: import matplotlib.pyplot as plt
         import numpy as np
         import sympy as sp
         sp.init_printing()

         from matplotlib import animation, rc
         from IPython.display import HTML, Image, clear_output
```

```
In [13]: rc('animation', html='html5')
```

1 Résolution numérique d'EDP

Ici, on s'intéresse à la résolution de l'*équation de la chaleur*

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \\
u(x,0) &= 25 + 10\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right) && \text{(Conditions initiales)} \\
\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}u(L,t) = 0 && \text{(Conditions aux limites de Neumann)}
\end{aligned}$$

sur un domaine $\Omega = [0, L] \times [0, T]$, avec $0 < a < L$.

Pour cela, on va discrétiser Ω sous la forme $(x_j, t_n) = (j\Delta x, n\Delta t)_{j,n}$, $0 \leq j < J$ et $0 \leq n < N$.

```
In [37]: T = 180 # temps de la simulation numérique
         L = 0.25

         Nmax = 500
         time_s = np.linspace(0,T,Nmax)
         dt = T/Nmax

         Jmax = 200
         X_s = np.linspace(0,L,Jmax)
         dx = 1/Jmax

         spacetime = np.meshgrid(X_s, time_s)
```

On pose, pour tout $(j, n) \in [\![0, J-1]\!] \times [\![0, N-1]\!]$, $u_j^n := u(j\Delta x, n\Delta t)$. Alors, en discrétisant les dérivées,

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\Delta t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{2(\Delta x)^2}.$$

On pose $r := \frac{D\Delta t}{(\Delta x)^2}$; alors on est amené au système d'équations

$$-ru_{j+1}^{n+1} + (1+2r)u_j^{n+1} - ru_{j-1}^{n+1} = (1-2r)u_j^n + r\left(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n\right) \quad \forall (j,n) \in [\![0, J-1]\!] \times [\![0, N-1]\!].$$

Le problème ici c'est que u_{-1}^n et u_J^n ne sont pas définis. Avec les conditions aux limites

$$\partial_x u(0,t) = \partial_x u(1,t) = 0$$

on a

$$u_{-1}^n = u_0^n \quad \text{et} \quad u_J^n = u_{J-1}^n \quad \forall n$$

ce qui conduit à

$$\begin{aligned}
-ru_1^{n+1} + (1+r)u_0^{n+1} &= (1-r)u_0^n + ru_1^n \\
(1+r)u_{J-1}^{n+1} - ru_{J-2}^{n+1} &= (1-r)u_{J-1}^n + ru_{J-2}^n
\end{aligned}$$

On pose $\mathbf{U}^n = \begin{bmatrix} u_0^n \\ \vdots \\ u_{J-1}^n \end{bmatrix}$ le vecteur d'état du système à l'instant $t_n = n□t $ et les matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1+r & -r & & & \\ -r & 1+2r & -r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -r & 1+2r & -r \\ & & & -r & 1+r \end{bmatrix}$$

et

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1-r & r & & & \\ r & 1-2r & r & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & r & 1-2r & r \\ & & & r & 1-r \end{bmatrix}.$$

On a donc la relation de passage d'un état au suivant :

$$\mathbf{A}\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{B}\mathbf{U}^n,$$

mais $\mathbf{A}$ étant inversible,

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}^n$$

La fonction `process_matrix` définit les matrices **A** et **B**.

```
In [44]: def process_matrix(J):
             r = 22.9e-5*dt/(dx*dx)
             A = np.zeros((J,J))
             B = np.zeros((J,J))
             for j in range(0,J):
                 if j == 0 or j== J-1:
                     A[j][j] = 1 + r
                     B[j][j] = 1 - r
                 else:
                     A[j][j] = 1 + 2* r
                     B[j][j] = 1 - 2*r
                 if j > 0:
                     A[j][j-1] = -r
                     B[j][j-1] = r
                 if j < J-1:
                     A[j][j+1] = -r
                     B[j][j+1] = r
             return A,B
```

On définit les matrices **A** et **B**, ainsi que $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$ de sorte que

$$\mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{C}\mathbf{U}^n.$$

```
In [45]: A,B = process_matrix(Jmax)
         C = np.matmul(np.linalg.inv(A),B)
```

La fonction suivante applique la méthode de Crank-Nicolson, trace les graphes des solutions :

```
In [55]: def solvaro(U0, animate = False):
             # Condition initiale
             A,B = process_matrix(Jmax)
             C = np.matmul(np.linalg.inv(A),B)

             sol = [U0]
             for t in time_s:
                 sol.append(np.matmul(sol[-1],C))
```

```
    fig, ax = plt.subplots(1,1,figsize=(8,5))
    ax.grid(True)
    ax.set_xlabel(r"Position $x$ ($m$)")
    ax.set_ylabel(r"Température $u(x,t)$ ($°C$)")

    ax.set_xlim((0,L))
    ymin, ymax = U0.min(), U0.max()
    ax.set_ylim((ymin,ymax))

    if animate:
        line, = ax.plot([], [], lw = 2)
        time_text = ax.text(0.4,1.1, '',transform=ax.transAxes)

        time_window = T
        fps = 30
        dt = 1000/fps
        frames = len(time_s)

        def init():
            line.set_data([],[])
            time_text.set_text(r'$t=0$ $\mathrm{s}$')
            return line,

        def animate(i):
            ti = time_window*i/frames
            line.set_data(X_s,sol[i])
            time_text.set_text(r'$t={:.1e}$'.format(ti)+r' $\mathrm{s}$')
            return line,

        anim = animation.FuncAnimation(fig, animate, init_func=init,
                                       frames=frames, interval=dt, blit=True)
        return anim
    else:
        for n in [0,10,50,100,250,450]:
            ax.plot(X_s,sol[n])
```

La condition initiale $u(x,0)$ se discrétise en

$$\mathbf{U}^0 = \left(25 + 10\exp\left(-\frac{(x_j - x_0)^2}{\sigma^2}\right)\right)_{j\in[\![0,N-1]\!]}$$

In [46]:
```
sigma = 0.3
x0 = 0.12

U0 = 25+10*np.exp(-25*(X_s-x0)**2/sigma**2)
```

On oeyt

In [ ]:
```
solvaro(U0, True)
```

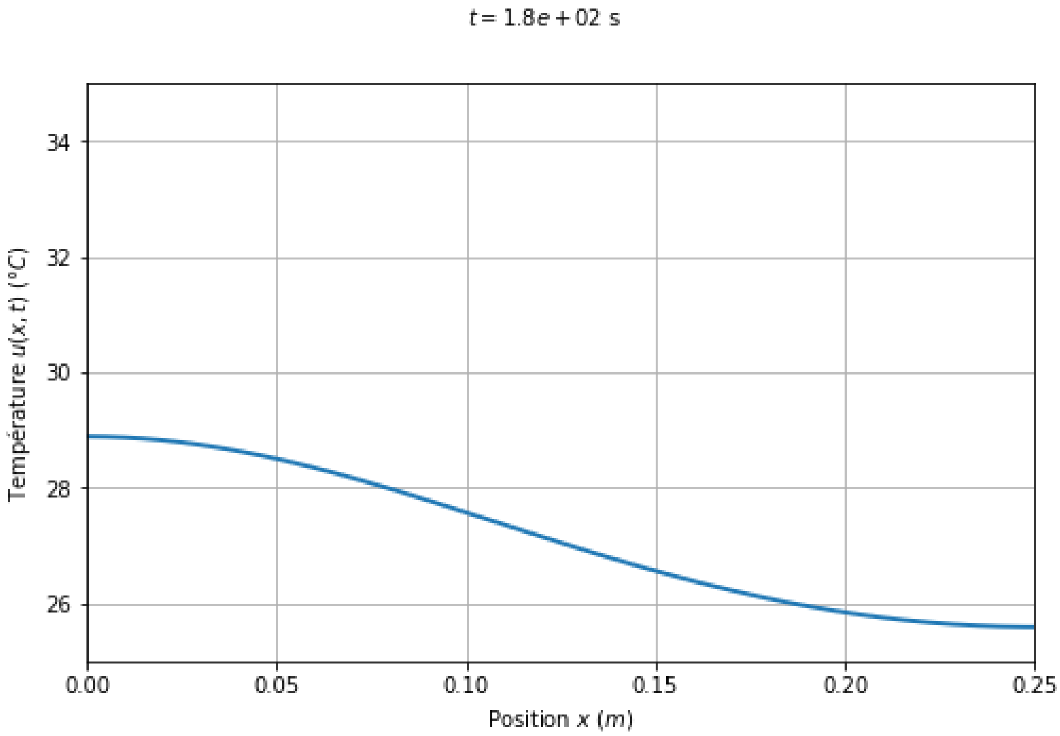
Une autre simulation, avec $x_0 = 0$:

In [52]:
```
sigma = 0.3
x0 = 0.

U0 = 25+10*np.exp(-25*(X_s-x0)**2/sigma**2)

solvaro(U0, True)
```

Out[52]: <matplotlib.animation.FuncAnimation at 0x19056034160>



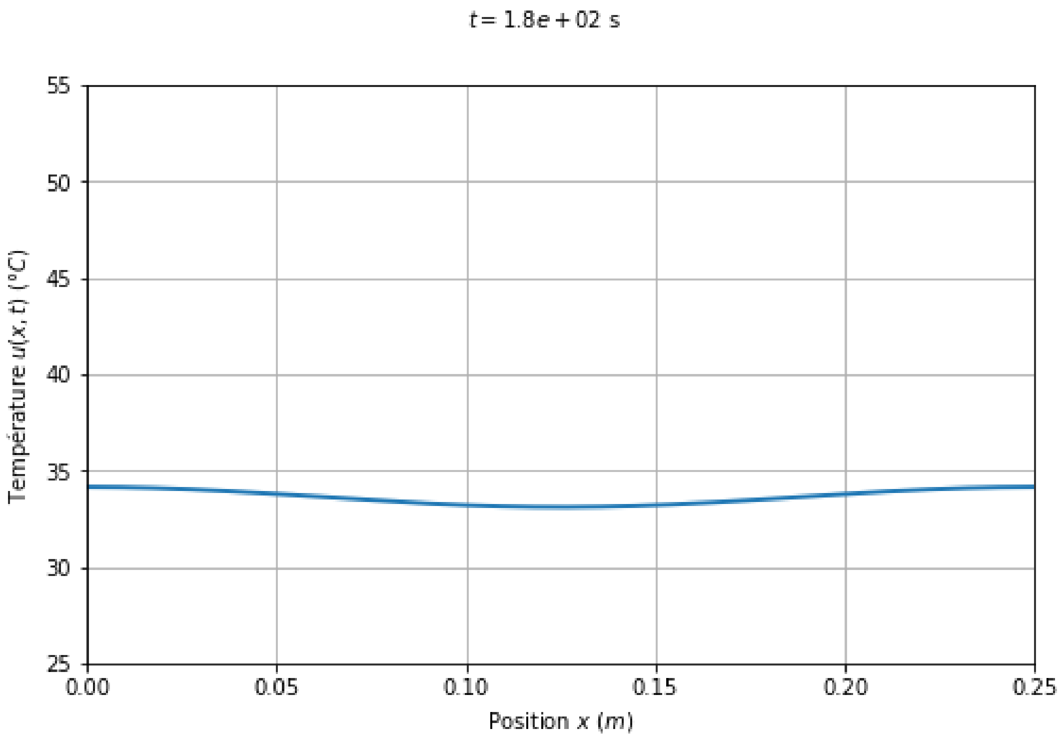
Encore une autre, avec une << cuve >> de température

$$u(x, 0) = 25 + 30\left(\exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right) + \exp\left(-\frac{(x-L)^2}{\sigma^2}\right)\right)$$

```
In [54]: sigma = 0.2
         x0 = 0.
         x1 = L
         U0 = 25+30*(np.exp(-25*(X_s-x0)**2/sigma**2)+np.exp(-25*(X_s-x1)**2/sigma**2))

         solvaro(U0, True)
```

Out[54]: <matplotlib.animation.FuncAnimation at 0x19055024e48>


$t = 1.8e+02$ s
Température $u(x,t)$ (^oC)
Position x (m)
55
50
45
40
35
30
25
0.00
0.05
0.10
0.15
0.20
0.25