```
In [2]: %matplotlib inline
```

```
In [3]: import matplotlib.pyplot as plt
        import numpy as np
        import sympy as sp
        from numpy import linalg

        from matplotlib import animation, rc
        import matplotlib.ticker as mticker
        from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
```

```
In [4]: from IPython.display import HTML, Image, set_matplotlib_formats
        set_matplotlib_formats('png','pdf')

        rc('animation', html='html5')
```

Étant donnée la nature numériquement intensive des calculs tensoriels en jeu, on aura besoin de la librairie `numba` qui passe par le langage `C` pour compiler des fonctions plus rapides on the fly:

```
In [5]: import numba as nb
        from numba import double, int32, float32
```

On cherche à résoudre l'équation de la chaleur en deux dimensions,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + q(x,y,t)$$

sur un domaine $\Omega = [-L_x, L_x] \times [-L_y, L_y]$.

Ce document sert de documentation pour les scripts Python permettant de simuler numériquement le transfert thermique dans un domaine bidimensionnel uniforme.

# 1 Schéma de résolution : différences finies

## 1.1 Discrétisation

On va chercher une solution approchée $\left(u_{i,j}^n\right)$ de l'EDP sur une grille $(x_i, y_j)$, en temps discrétisé $(t_n)$.

Il faut discrétiser les opérateurs différentiels. On discrétise la dérivée temporelle par

$$\frac{\partial u}{\partial t} \approx \frac{u_{i,j}^{n+1} - u_{i,j}^n}{\Delta t}$$

et le Laplacien par

$$\Delta u(x_i, y_j, t_n) \approx \frac{u_{i+1,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1} + u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j-1}^{n+1} - 4u_{i,j}^{n+1}}{h^2}$$

Posons $r = \frac{D\Delta t}{h^2}$. On obtient alors le système linéaire:

$$(1+4r)u_{i,j}^{n+1} - ru_{i+1,j}^{n+1} - ru_{i,j+1}^{n+1} - ru_{i-1,j}^{n+1} - ru_{i,j-1}^{n+1} = u_{i,j}^n$$

Mais il n'a pas trop de sens au bord du domaine. Pour cela, on va utiliser nos conditions aux limites.

Pour imposer une condition aux limites de type Dirichlet $f : \partial\Omega \times I \to \mathbb{R}$, on la discrétise et on répercute en imposant les valeurs $u_{0,j}^n$, $u_{N-1,j}^n$, $u_{i,0}^n$ et $u_{i,N-1}^n$ dans le système d'équations.

## 1.2 Tenseurs d'état et de transition

On pose

$$\mathbf{U}^n = (u_{i,j})_{0 \leq i,j \leq N-1}$$

la matrice d'état du système à l'instant $t_n$.

Le système linéaire précédent lie l'état du système à l'instant $t_n$, $\mathbf{U}^n$, à son état $\mathbf{U}^{n+1}$ à l'instant suivant. On va essayer de représenter cette relation d'une façon efficace du point de vue informatique.

On cherche un tenseur de « transition » $\mathbf{T} = \left(t_{i,j}^{k,l}\right)$ tel que

$$u_{i,j}^n = t_{i,j}^{k,l} u_{k,l}^{n+1}$$

pour $(i,j)$ en dehors des bords, avec la convention de sommation d'Einstein.

On prend $t_{i,j}^{k,l} = -r$ si $(k,l) = (i \pm 1, j \pm 1)$, $1 + 4r$ si $(k,l) = (i,j)$ en dehors des bords, 1 aux bords et 0 ailleurs.

On imposera manuellement les conditions aux bords à chaque étape.

On munit $\mathcal{M}_J(\mathbb{R})$ de la base $\left(E_{i,j}\right)$ organisée dans l'ordre lexicographique. Dans cette base, l'endomorphisme $\mathbf{U} \longmapsto \mathbf{TU}$ a pour matrice la matrice bloc

$$A = \begin{bmatrix} A_{0,0} & \cdots & A_{0,J-1} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{J-1,0} & \cdots & A_{J-1,J-1} \end{bmatrix}$$

où les $A_{j,k} = \left(t_{i,j}^{k,l}\right)_{0 \le i,l < J}$ pour tous $0 \le j,k < J$.

# 2 Implémentation en Python

## 2.1 Discrétisation : Classe `Domain`

La classe suivante permet de représenter le domaine spatial et temporel discrétisé, avec les attributs relatifs aux paramètres de grille (nombre de points, pas, bornes…).

In [6]:
```
class Domain():
    """
    Définit le domaine spatio-temporel du problème
    """
    def __init__(self, L, T, J = 64, N=250):
        # Éléments spatiaux
        self.L = L # intervalle où simuler
        self.J = J # Taille des échantillons spatiaux
        self.Xs = np.linspace(-L,L,J)
        self.Ys = np.linspace(-L,L,J)
        self.grid = np.meshgrid(self.Xs, self.Ys)
        self.dx = 2*L/J

        # Éléments temporels
        self.T = T # temps de la simulation numérique
        self.N = N # Taille des échantillons temporels
        self.times = np.linspace(0,T,N)
        self.dt = T/N
```

## 2.2 Tenseur T

La fonction suivante calcule l'inverse du tenseur $\mathbf{T}$ permettant d'itérer la relation de récurrence précédente.

In [7]:
```
def tenseur(J, dx, dt, diffus = 117e-6):
    """
    diffus : valeur du coefficient de diffusion
    valeur par défaut: cuivre, 117E-6 m²/s
    """
    tens = np.zeros((J,J,J,J))
    r = diffus*dt/dx**2
    for i in range(J):
        for j in range(J):
            a = i in [0,J-1]
            b = j in [0,J-1]
```

```
                if a or b:
                    tens[i][j][i][j] = 1
                else:
                    tens[i][j][i][j] = 1+4*r
                    tens[i][j][i-1][j] = -r
                    tens[i][j][i+1][j] = -r
                    tens[i][j][i][j-1] = -r
                    tens[i][j][i][j+1] = -r
        return tens
```

Il faut maintenant construire la matrice $A$, qui sera bien plus rapide à inverser que le tenseur directement :

```
In [8]: def to_matrix(tens):
            J,_,_,_ = np.shape(tens)
            arr = np.zeros((J**2,J**2))
            for k in range(J):
                for j in range(J):
                    arr[j*J:(j+1)*J,k*J:(k+1)*J] = tens[:,j,k,:]
            return arr
```

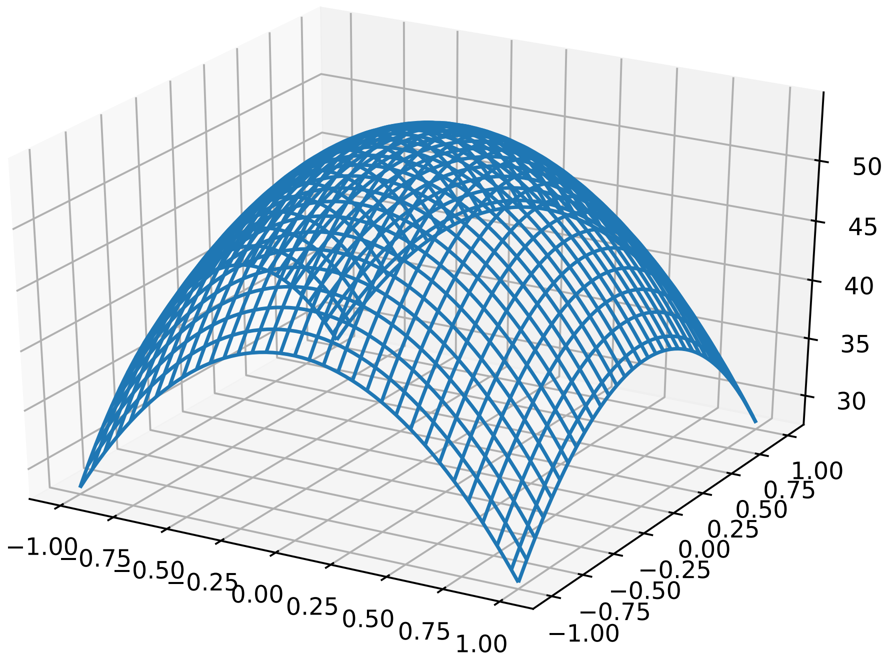
### 2.3 Fonction graphe

Simple fonction qui dessine le profil d'une fonction sur $\Omega$.

```
In [9]: def graphe(Omega, U0):
            fig = plt.figure()
            ax = Axes3D(fig)
            ax.grid(True)
            ax.plot_wireframe(*Omega.grid, U0)
```

Un petit test:

```
In [10]: Omega = Domain(1,2,64,128)

         U0 = 25+3*(lambda x,y: 10-(5*x**2+4*y**2))(*Omega.grid)

         graphe(Omega, U0)
```




## 2.4 Conditions de Dirichlet

Une fonction qui prend une matrice d'état et impose ses valeurs au bord.

In [11]:
```
def enforceDirich(Omega, state, f, n):
    """
    Impose les conditions aux limites de Dirichlet à l'instant t
    """
    J = Omega.J
    Xs = Omega.Xs
    Ys = Omega.Ys
    times = Omega.times
    for i in range(J):
        state[i][0] = f(Xs[i], Ys[0], times[n])
        state[i][J-1] = f(Xs[i], Ys[J-1], times[n])
    for j in range(J):
        state[0][j] = f(Xs[0], Ys[j], times[n])
        state[J-1][j] = f(Xs[J-1], Ys[j], times[n])
```

## 2.5 Itération de la relation de récurrence

Il s'agit d'un simple passage dans une boucle en itérant sur les temps discrets, donnés par l'attribut `times` du domaine passé en argument. Pour ça, on va utiliser une classe `Solver` dont la méthode `solve` effectue la résolution.

In [12]:
```
class Solver:

    def __init__(self, Omega, U0, f):
        self.domain = Omega
        self.initial = U0
        self.boundfunc = f
        J = Omega.J
```

```
        dx = Omega.dx
        dt = Omega.dt
        self.tensor = tenseur(J,dx,dt)
        self.matrix = linalg.inv(to_matrix(self.tensor))

    def solve(self):
        times = self.domain.times
        Omega = self.domain
        J = Omega.J
        N = Omega.N
        dx = Omega.dx
        dt = Omega.dt
        U0 = self.initial
        f = self.boundfunc
        mat = self.matrix
        enforceDirich(Omega, U0, f, 0)
        record = [U0]

        def _basis_expr(U, p):
            arrl = np.hsplit(U,p)
            return np.vstack(arrl)

        def _from_basis(U, p):
            arl = np.vsplit(U, p)
            return np.hstack(arl)

        for n in range(1,N):
            curstate = record[-1]
            curstate = _basis_expr(curstate, J)
            nextstate = np.dot(mat, curstate)
            nextstate = _from_basis(nextstate, J)
            nextstate = np.asarray(nextstate)
            enforceDirich(Omega, nextstate, f, n)
            record.append(nextstate)
        self.states = record
        return record
```

### 2.6 Animation

On implémente les animations via une classe nommée `HeatAnimation`. Le constructeur associé prend en argument le domaine, la distribution initiale de température, et la fonction décrivant la condition aux limites.

```
In [13]: class HeatAnimation(Solver):

    def _formatAxes(self, ax):
        ax.set_xlabel(r"$x$ ($\mathrm{m}$)")
        ax.set_ylabel(r"$y$ ($\mathrm{m}$)")

    def _timeText(self, t):
        return "$t={:.2f}$".format(t) + r'$\mathrm{s}$'

    def evolSurface(self, fps=25):
        grd = self.domain.grid

        N = self.domain.N
        fig = plt.figure()
        ax = Axes3D(fig)
        try:
```

```python
            self.states
        except AttributeError:
            self.solve()

        self._formatAxes(ax)
        data = ax.plot_wireframe(*grd, self.states[0])
        zlims = ax.get_zlim()

        time_text = ax.text2D(0.02,0.95, self._timeText(0),
            transform=ax.transAxes)

        def animate(i, data):
            ti = i*self.domain.dt
            ax.clear()
            ax.set_zlim(zlims)
            data = ax.plot_wireframe(*grd, self.states[i])
            self._formatAxes(ax)
            time_text = ax.text2D(0.02,0.95, self._timeText(ti),
                transform=ax.transAxes)
            return data, time_text

        anim = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=N,
                interval=1000/fps,
                fargs=(data,))
        self.surface = anim
        return self.surface

    def evolHeat(self, fps=25):
        J = self.domain.J
        N = self.domain.N
        x0,x1 = self.domain.Xs[0],self.domain.Xs[J-1]
        y0,y1 = self.domain.Ys[0],self.domain.Xs[J-1]
        cmap = 'inferno'

        fig,ax = plt.subplots(1,1, figsize=(6,6))
        try:
            self.states
        except AttributeError:
            self.solve()
        data = ax.imshow(self.states[0],
                interpolation='sinc',
                extent=[x0,x1,y0,y1],
                cmap=cmap)
        self._formatAxes(ax)
        time_text = ax.text(0.5,1, self._timeText(0),
            horizontalalignment='center',
            transform=ax.transAxes)
        bar = fig.colorbar(data)
        bar.set_label(r"Température (°C)")
        fig.tight_layout()

        def animate(i, data):
            ti = i*self.domain.dt
            data.set_data(self.states[i])
            self._formatAxes(ax)
            time_text.set_text(self._timeText(ti))
            return data, time_text
```

```
anim = animation.FuncAnimation(fig, animate, frames=N,
        interval=1000/fps,
        fargs=(data,))
self.heatmap = anim
return self.heatmap
```

### 2.7 Distribution gaussienne

La fonction suivante représente la fonction gaussienne

$$(x, y) \longmapsto e^{-\beta((x-v)^2+(y-w)^2)}$$

avec $\beta$ un paramètre et $(v, w)$ la position de la cloche.

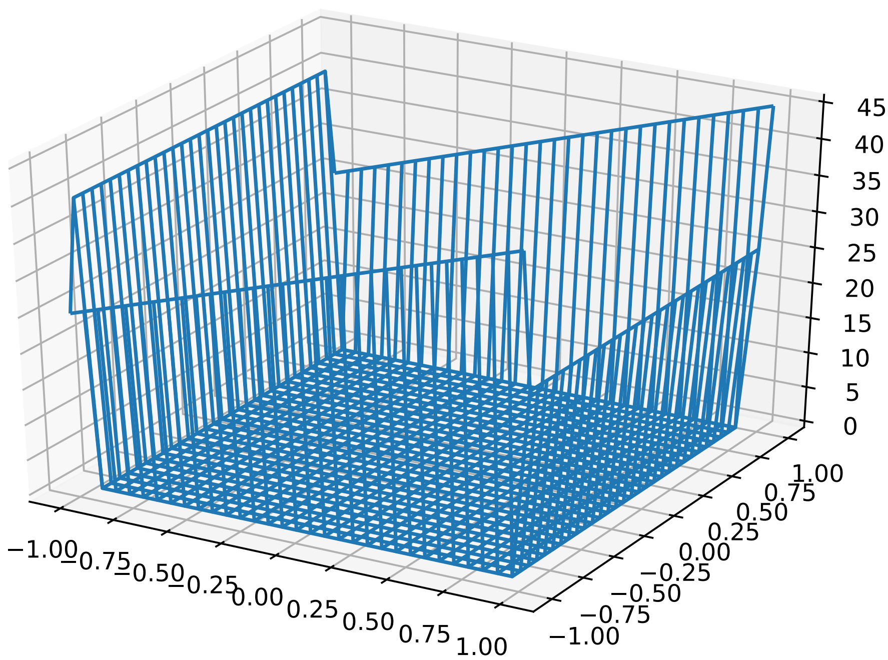
```
In [14]: def distrib(x,y, beta = 2, pos=(0,0)):
             v,w = pos
             return np.exp(-beta*((x-v)**2+(y-w)**2))
```

## 3 Tests

**Attention** Assurez-vous que la fonction de la condition aux limites $f : \partial\Omega \times I \longrightarrow \mathbb{R}$ est définie au moins au bord de votre domaine...

```
In [15]: def f(x, y, t):
             if x==1 or x==-1:
                 return 35+10*y
             elif y==-1:
                 return 40
             else:
                 return 26
```

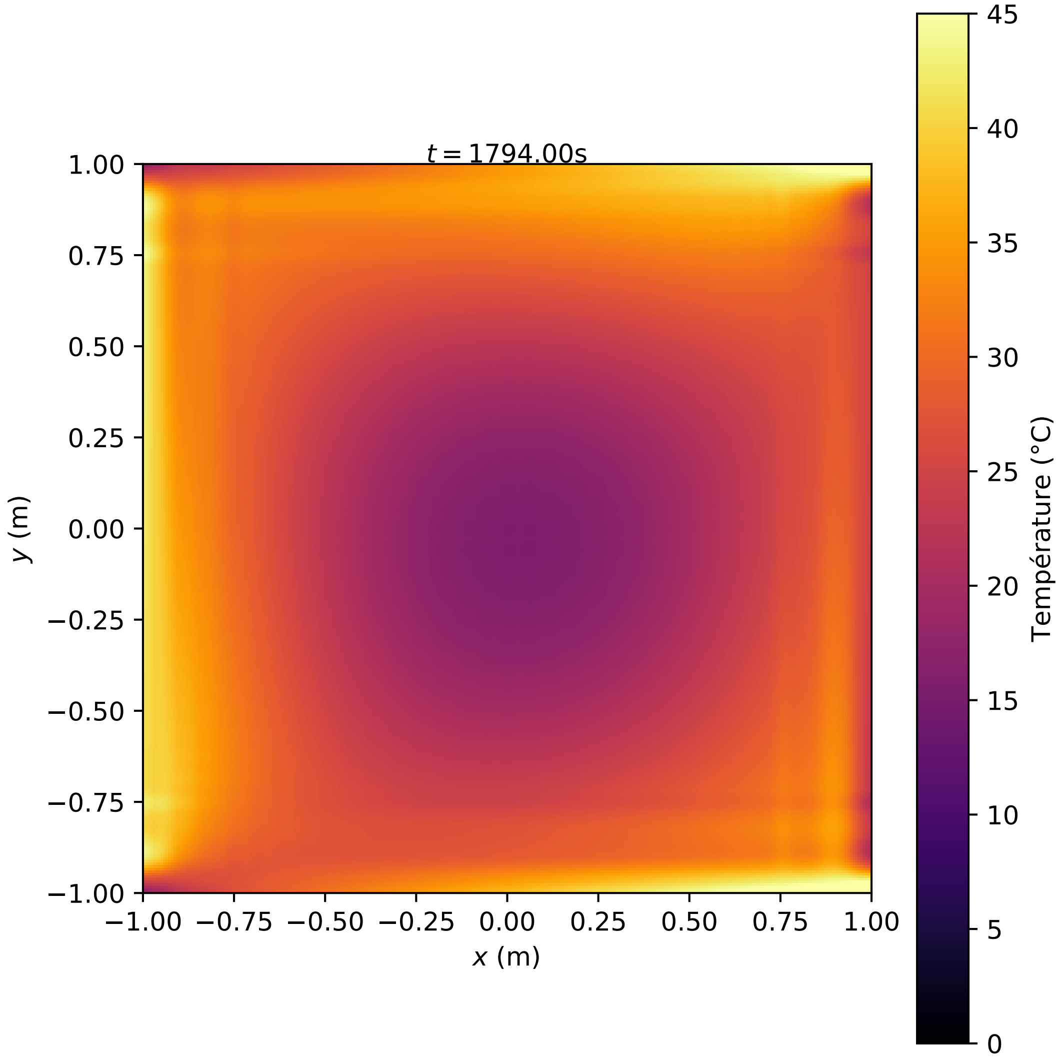
```
In [16]: Omega = Domain(1,1800, J=32, N=300)

         U0 = np.zeros((32,32))

         enforceDirich(Omega, U0, f, 1)
         graphe(Omega, U0)
```



```
In [17]: anim = HeatAnimation(Omega, U0, f)
```

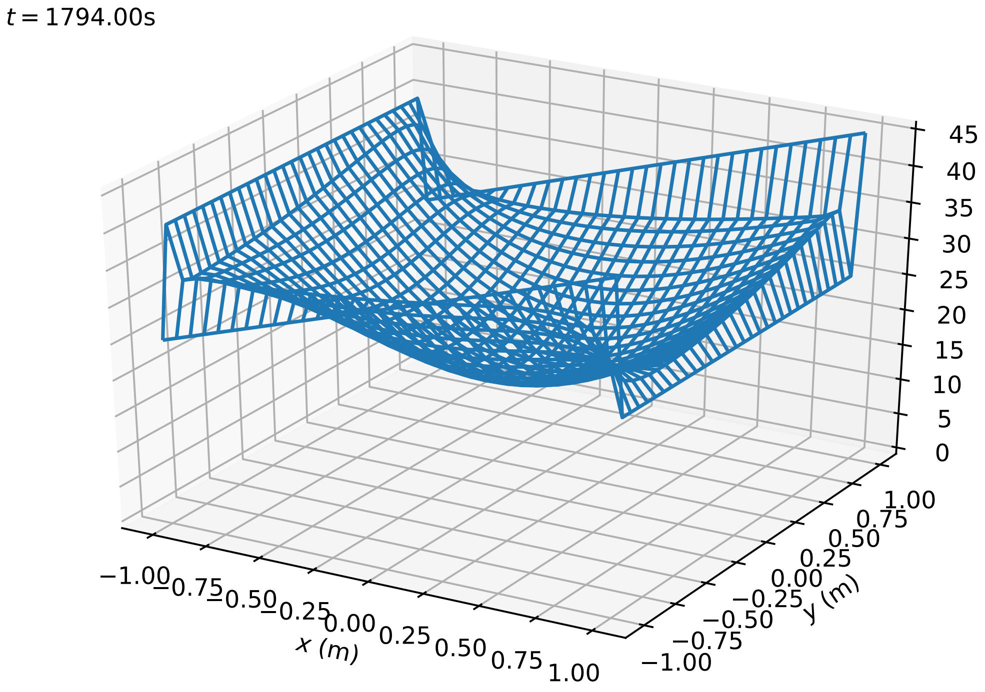
```
In [18]: anim.evolHeat()
```

```
Out[18]: <matplotlib.animation.FuncAnimation at 0x18b1552b6d8>
```




```
In [19]: anim.evolSurface()
```

```
Out[19]: <matplotlib.animation.FuncAnimation at 0x18b1494fdd8>
```



$t = 1794.00$s
45
40
35
30
25
20
15
10
5
0
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
x (m)
−1.00
−0.75
−0.50
−0.25
0.00
0.25
0.50
0.75
1.00
y (m)