
TREMLIN : SÉANCE 4

Topologie de \mathbb{R} , Théorème des valeurs intermédiaires

7 décembre 2017

Suites adjacentes

Les suites adjacentes, en plus d'être un excellent cas d'application du théorème de la limite monotone que vous connaissez pour les suites réelles, sont un outil très pratique en analyse réelle pour démontrer l'existence de limite pour des suites ou des fonctions.

Définition 1 (Suites adjacentes). On dit que deux suites de nombres réels (u_n) et (v_n) sont *adjacentes* lorsque :

- u est croissante,
- v est décroissante,
- $u_n - v_n \longrightarrow 0$

Le *lemme*¹ suivant sera très utile pour démontrer le théorème des suites adjacentes.

1. Un *lemme*, en mathématiques et en logique mathématique, est un résultat intermédiaire sur lequel on s'appuie pour conduire la démonstration d'un théorème plus important. Synonyme [prépa] : « énorme astuuuuce ».

Exercice 1. Montrer qu'alors, pour tous entiers p et q ,

$$u_p \leq v_q$$

Toute la construction des suites adjacentes n'est faite que pour obtenir le théorème suivant :

Théorème 1 (Suites adjacentes, auteur inconnu). *Si u et v sont adjacentes, alors u et v convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$.*

Exercice 2. Démontrer le théorème en utilisant l'Exercice 1.

Théorème des valeurs intermédiaires

Le théorème des valeurs intermédiaires est lui aussi fondamental, en analyse réelle, pour démontrer l'existence de solutions à des équations dont on ne peut pas forcément expliciter une solution (ou dont il faut prouver l'existence avant le calcul).

Théorème 2 (des valeurs intermédiaires, Bolzano, 1817). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de la variable réelle définie sur un segment $[a, b]$ non réduit à un point (i.e. $a < b$).*

Supposons que $f(a) < 0$ et $f(b) > 0$. Alors, il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$f(c) = 0.$$

Nous allons le démontrer au cours de cette séance à l'aide des suites adjacentes vues plus haut. Mais avant cela, quelques applications...

Théorème du point fixe

Les théorèmes de point fixe sont omniprésents en analyse, et permet notamment de démontrer en utilisant des récurrences et des itérations l'existence de solutions à des problèmes qui peuvent être complexes, comme par exemple l'existence de solutions à des équations différentielles. (Un problème de la forme $y'(x) = f(y(x))$)

Exercice 3 (Point fixe de Brouwer-Hadamard, 1910, version simple). Soit $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ une fonction **continue**. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$f(c) = c.$$

Il existe des variantes plus compliquées du théorème de point de fixe de Brouwer, par exemple dans les espaces de vecteurs ou des espaces de fonctions...

Un résultat peu important mais très utile

Le résultat suivant sur les polynômes est un grand classique en analyse réelle. Il intervient notamment lors de la démonstration que tout polynôme réel s'écrit comme produit de fonctions affines et de trinômes du second degré à discriminants négatifs.

Exercice 4. Soit P une fonction polynomiale à coefficients réels **de degré impair**. Montrer que P admet une racine réelle (c'est-à-dire s'annule au moins une fois sur \mathbb{R}).

Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires

Rappel. Si f est une fonction **continue** sur un intervalle réel I , et x_n une suite d'éléments de I convergeant vers $x \in I$, alors

$$f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x).$$

Exercice 5. Démontrer le théorème des valeurs intermédiaires à l'aide des suites adjacentes.

L'idée est la suivante : on essaie d'approcher c par des suites adjacentes, définies par récurrence. La construction est la suivante :

On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$. Introduisons la suite $f(d_n)$ où $d_n := \frac{a_n + b_n}{2}$. Si $f(d_n) \leq 0$, alors :

$$a_{n+1} = d_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = b_n$$

sinon

$$a_{n+1} = a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = d_n$$

Il existe une autre démonstration du théorème des valeurs intermédiaires qui fait intervenir la notion de *borne supérieure* d'une partie de \mathbb{R} plutôt que les suites adjacentes.

En effet, on considère l'ensemble

$$X = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}.$$

et sa borne supérieure $c = \sup X$. D'après les propriétés de la borne supérieure dans \mathbb{R} , il existe une suite strictement croissante (c_n) d'éléments de X telle que $c_n < c$ et $c_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} c$. Elle vérifie $f(c_n) < 0$ pour tout entier n , et la conservation des inégalités donne $f(c) \leq 0$.

De même, il existe une suite (d_n) convergeant vers c telle que $d_n > c$, donc $d_n \notin X$ et $f(d_n) \geq 0$. Par conservation des inégalités, on obtient donc $f(c) \geq 0$.

Ainsi, on en déduit que $f(c) = 0$.

Théorème de Rolle²

Le théorème de Rolle est un autre grand classique de l'analyse réelle, vu en première année de classe préparatoire ou de licence de mathématiques. Il a des conséquences dramatiques, notamment le théorème et l'inégalité des accroissements finis (ou TAF/IAF, qui se généralise à des fonctions à des plusieurs variables), le théorème de la moyenne de Cauchy...

On admettra le théorème suivant, qui est un résultat lui aussi classique en analyse réelle, mais qui se démontre avec des concepts plus sophistiqués que nous n'avons pas vu ensemble.

Théorème 3 (des bornes, Weierstrass, 1861). *Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **continue** définie sur le segment $[a, b]$. Alors, la fonction f est bornée **et atteint ses bornes**: il existe $c, d \in [a, b]$ tels que*

$$f(c) = \min_{x \in [a, b]} f(x) \quad \text{et} \quad f(d) = \max_{x \in [a, b]} f(x).$$

Dans ce cas, c est un point de minimum de f et d est un point de maximum.

Sa démonstration se fait par un simple raisonnement par l'absurde, mais fait intervenir simultanément le concept de *continuité uniforme* et le théorème de Bolzano-Weierstrass sur les suites extraites.

2. Fils d'un marchand de Basse-Auvergne, Michel Rolle est d'abord clerc chez divers magistrats de cette région. En 1675, il s'installe à Paris, où il devient élève astronome de l'Académie royale des sciences [...]. Il reçoit une pension de Jean-Baptiste Colbert en 1682...

Théorème 4 (de Rolle, 1691). Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$, dérivable sur son intérieur $]a, b[$.

On suppose que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = 0.$$

Maintenant, démontrons-le à l'aide des théorèmes vus précédemment :

Exercice 6. Démontrer le théorème de Rolle en considérant les points de minimum ou de maximum de f sur $[a, b]$. Que se passe-t-il quand ils sont confondus ?

À l'aide du théorème de Rolle, on démontre assez facilement le théorème des accroissements finis :

Théorème 5 (des accroissements finis, ou TAF). Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, dérivable sur $]a, b[$. Alors, il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$