Tremplin : Séance 2

18 janvier 2018

Énoncés

Exercice 1. Un espion cherche à s'introduire dans les réseaux informatiques de l'entreprise Thalès, en travaillant avec un groupe de pirates basé à Hong Kong.

Il communique avec lui via une suite de messages encodés sur 2 bits (0 ou 1), mais il doit passer par une suite de N terminaux « zombifiés » différents. Pour un message donné, chaque ordinateur intermédiaire a une probabilité $q \in]0,1[$ de le modifier (0 est changé en 1 et réciproquement).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité que le n-ème ordinateur renvoie le bon message. Déterminer une relation entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la probabilité que son collègue, sur le N-ème ordinateur, reçoive la bonne information.
3. Que dire lorsque N est très grand ? Pourquoi est-ce logique ?

Exercice de probabilité et de suites. Fait intervenir la notion de limite.

Exercice 2 (Une introduction au théorème de Hahn-Banach)**.** On se place dans l'espace euclidien à trois dimensions $\mathbb{R}^3$.

1. Soient A et B deux points distincts de l'espace. Montrer qu'il existe un plan $(\mathcal{P})$ qui les sépare. On en explicitera l'équation cartésienne à partir des coordonnées des points A et B dans le repère orthonormé canonique $(0, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.
2. On considère désormais deux droites disjointes (Δ_1) et (Δ_2). Montrer qu'il existe un plan qui les sépare.

3. Même question avec deux sphères $(\mathcal{S}_1)$ et $(\mathcal{S}_2)$ de l'espace.

Exercice de géométrie analytique. Formalise une notion de séparation d'objets géométriques. Le théorème de Hahn-Banach est un des théorèmes fondamentaux de l'analyse fonctionnelle, branche des mathématiques qui étudie les fonctions prenant en argument... des fonctions !

Exercice 3 (Il y a une infinité de nombre premiers)**.** Démontrer qu'il y a une infinité de nombre premiers.

Exercice d'arithmétique. Réintroduit la notion de nombre premier. Fait appel à des notions de logique, notamment le raisonnement par l'absurde.

Exercice 4 (La mourre)**.** Deux joueurs ont chacun une main dans le dos, avec un certain nombres de doigts dressés. Chacun annonce un nombre entre 0 et 10, puis ils présentent leur main cachée : celui qui a deviné le nombre total de doigts dressés gagne.

Pourquoi certains totaux arrivent plus souvent que d'autres alors qu'on peut considérer que le nombre de doigts est aléatoire ?

Exercice de dénombrement et probabilités.

Exercice 5 (Marche aléatoire)**.** Jean-Michel est saoul et revient du bistrot. À chaque pas, il a une chance sur deux d'aller vers l'avant ou vers l'arrière. On suppose que sa maison est située à l'infini vers l'avant.

1. Jean-Michel peut-il espérer rentrer chez lui ?
2. La police est à la recherche de Jean-Michel, sachant qu'il a déjà effectué t pas. Dans quelle zone autour du bar doit-elle chercher pour trouver Jean-Michel avec une certitude de 95% ?

Il s'agit évidemment d'un exercice de probabilités sur les variables aléatoires. L'effort de formalisation porte surtout sur modéliser correctement le déplacement de l'ivrogne par une suite de variables de Rademacher.

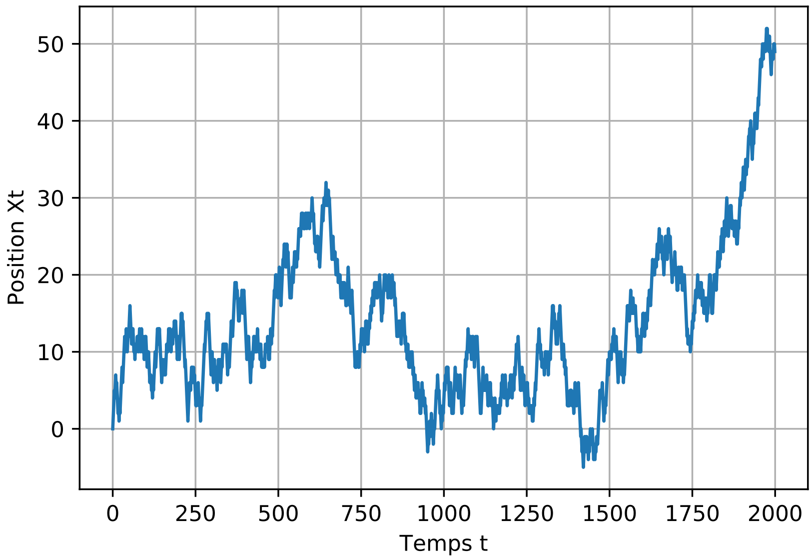

FIG. 1: La marche de Jean-Michel

Correction

Exercice 1

1) Quand le message arrive dans l'ordinateur $N+1$, deux cas de figure se présentent :

- soit le message sortant du N-ème ordinateur était le bon (avec probabilité p_n), dans lequel cas l'ordinateur suivant ne l'a pas modifié avec probabilité $1-q$
- soit il était altéré (avec probabilité $1-p_n$) mais le terminal $N+1$ le ré-inverse pour redonner le bon avec probabilité q.

La probabilité que le message sortant du $N+1$-ème terminal soit correct est donc donné par

$$p_{n+1} = (1-q)p_n + q(1-p_n) = (1-2q)p_n + q. \tag{E}$$

2) En disant que le 0-ème terminal est le poste de notre espion, la probabilité p_0 que le message en sortant soit correct est 1. Le point fixe de la relation (E) est $c = \frac{1}{2}$, est on en déduit la solution :

$$p_n = \left(p_0 - \frac{1}{2}\right)(1-2q)^n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1-2q)^n + \frac{1}{2}.$$

3) D'après la relation précédente, comme $-1 < 1-2q < 1$ quel que soit $q \in]0,1[$, on en déduit

$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{1}{2}.$$

La chose surprenante est bien évidemment le fait que la probabilité que le dernier ordinateur reçoive le bon est message est *toujours* égale à $\frac{1}{2}$, quel que soit la probabilité q que le message soit conservé à chaque fois !

Exercice 5

On note X_t la position de Jean-Michel à l'instant $t \in \mathbb{N}$: c'est une variable aléatoire réelle discrète puisqu'il se déplace d'une unité à chaque instant.

Le déplacement entre les instants $t-1$ et t est la variable aléatoire $\xi_t := X_t - X_{t-1}$. Cette variable aléatoire suit la loi de probabilité

$$\mathbb{P}(\xi_t = 1) = \mathbb{P}(\xi_t = -1) = \frac{1}{2}.$$

Cette variable aléatoire finie admet pour espérance $\mathbb{E}(\xi_t) = 0$, et les variables $(\xi_t)_{t\geq 0}$ suivent la même loi et sont indépendantes.

Un calcul simple montre que la position de Jean-Michel à l'instant t est :

$$X_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_k,$$

donc que son espérance mathématique, la position moyenne de Jean-Michel, est $\mathbb{E}(X_t) = 0$.

La deuxième question, plus ambiguë, fait appel à quelques notions de statistiques, et peut servir d'introduction au théorème central limite pour faire le pont entre les probabilités et la maigre introduction aux statistiques en classe de Seconde.

On cherche à donner un encadrement des positions successives X_t de Jean-Michel qui soit vérifié dans la majeure partie des cas.

La variance de X_t est donnée par la somme des variances des $(\xi_t)_{t\geq 0}$, qui valent 1 :

$$\mathbb{V}(X_t) = \sum_{k=1}^{t} \mathbb{V}(\xi_k) = t.$$

L'écart-type est donc $\sigma(X_t) = \sqrt{t}$.

L'intuition suggère qu'après t pas, la position de Jean-Michel serait bornée par l'écart-type $\sigma(X_t)$. On pourrait donc chercher une constante positive $c > 0$ telle que $|X_t| \leq c\sqrt{t}$ avec une « bonne certitude » :

$$\mathbb{P}\left(|X_t| \leq c\sqrt{t}\right) = \mathbb{P}\left(-c\sqrt{t} \leq X_t \leq c\sqrt{t}\right) = 0{,}95.$$

On présente ensuite aux élèves ce qu'est la loi normale et son usage en statistiques.

Le théorème central limite dit que le $X_t/\sqrt{t}$ devient, en probabilité, proche d'une loi normale :

$$\frac{X_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{loi}} N$$

où N est une variable normale centrée réduite.

Il faut donc introduire la notion de convergence en loi d'une variable aléatoire. L'équation précédente donne pour t grand $\mathbb{P}(-c \leq N \leq c) = 0{,}95$ soit $2\Phi(c) - 1 = 0{,}95$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On obtient alors $c \approx 3{,}16$.

Pratique des probabilités ; Effort de formalisation ; Notion de convergence ; Résultats classiques : Jean-Michel va passer une infinité de fois par tous les points du plan.