Tremplin : Séance 3

24 mai 2018

Énoncés

Autour des suites

On se propose dans cette section d'étudier plus finement la notion de convergence de suites dans le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.

Tout d'abord, donnons une autre définition, plus formelle (celle qui vous sera introduite dans le supérieur), de la convergence de suites.

Définition 1 (Convergence d'une suite)**.** Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que la suite u *converge* s'il existe un nombre réel ℓ tel que pour toute « marge d'erreur » $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \quad |u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

ou, autrement dit, tel que tout les termes de la suite à partir du rang n_0 restent à ε près du réel ℓ.

Le cas échéant, on dira que (u_n) converge vers ℓ (quand n tend vers l'infini), et on notera

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \ell \quad \text{ou} \quad u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.$$

On omettra souvent la mention que n tend vers l'infini, sans ambigüité. Dans le cas contraire, on dira que u *diverge*.

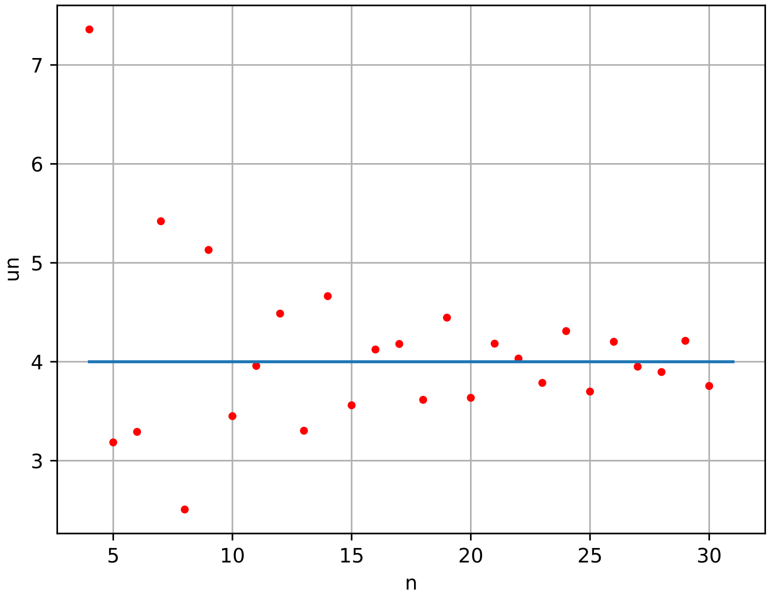


FIG. 1 : Un exemple de suite convergente.

Exercice 1. Les suites suivantes convergent-elles ?

- $u_n = \dfrac{1}{n} + 1$
- $u_n = \dfrac{1}{n} \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
- $u_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$
- $u_n = \begin{cases} 1 & \text{si } \sqrt{n} \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Définition 2 (Divergence vers l'infini)**.** Soit (u_n) une suite de nombres réels. On dit que u *tend vers* $+\infty$ si pour tout $A \in \mathbb{R}$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \quad u_n \geq A$$

ou, autrement dit, pour toute borne A que l'on peut se fixer, tous les termes de la suite après n_0 dépassent A.

Exercice 2. Écrire une définition tendre vers $-\infty$.

On remarquera qu'une suite qui tend vers l'infini ne converge pas.

Exercice 3. Les suites suivantes tendent-elles vers $\pm\infty$?

- $u_n = n\frac{\pi}{2}$
- $u_n = n \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$
- $u_n = n\left(2 + \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$

Définition 3. Une suite (u_n) est dite *bornée* s'il existe un réel $B > 0$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq B$$

Propriété 1. *Soient u et v deux suites de nombres réels. On suppose que u est bornée et que v tend vers 0. Alors :*

$$u_n v_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Exercice 4 (Formes indéterminées)**.** On se propose d'étudier la convergence de suites définies par des fractions dont les numérateurs et dénominateurs divergent.

Tout d'abord,

$$\frac{5n^2 + 4n - 5}{3n^2 + 2n}$$

Ensuite,

$$\frac{5\sqrt{n} + 4}{6n + 2\sqrt{n}}$$

Exercice 5 (Une approximation de la racine carrée de 2)**.** On considère la suite de nombres réels (u_n) de premier terme un entier $u_0 \geq 2$, vérifiant la relation de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2}{2u_n}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que cette suite constitue une approximation de $\sqrt{2}$.

1. Montrer que (u_n) est une suite de nombres rationnels.
   Indication On montrera que les termes de la suite s'écrivent $u_n = p_n/q_n$ où (p_n) et (q_n) sont des suites de nombres entiers.

2. Montrer que pour tout n, $u_n \geq \sqrt{2}$.

3. En étudiant le signe de $u_{n+1} - u_n$, montrer que (u_n) est décroissante.

4. Conclure.

Suites de nombres complexes

Vous connaissez déjà la notion de suite de nombres réels. On définit ci-après la notion de suite de nombres complexes :

Définition 4 (Suite complexe)**.** Une *suite de nombres complexes* est une application de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Étant donné une suite u, on appelle *terme* les images $u(n)$ des entiers n par u, et on les note plutôt u_n. La suite u se note alors classiquement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1. La suite définie par $u_n = (2+i)^n$ est une suite de nombres complexes. Il en est de même de la suite $((1/2)^n)$ (en effet, toute suite de nombres réels est aussi une suite de nombres complexes puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Pour analyser le comportement d'une suite de réels, vous avez défini en cours les notions de *convergence* et de *limite*. La définition suivante étend alors le concept à une suite de complexes.

Définition 5. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que *la suite* (z_n) *converge vers* ℓ lorsque la suite de nombres réels $(|z_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro. On notera comme dans le cas réel

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \ell \quad \text{ou} \quad z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.$$

Exercice 6. Soit (z_n) une suite de nombres complexes.

1. Montrer qu'il existe deux suites de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = a_n + ib_n.$$

2. Montrer que si (z_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$, alors les suites (a_n) et (b_n) également, et exprimer leurs limites.

3. Montrer réciproquement que si les suites (a_n) et (b_n) convergent vers des réels a et b, alors (z_n) converge vers une limite qu'on exprimera.

Indication On remarquera l'inégalité suivante (démonstration ?) :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |\Re(z)| \leq |z| \text{ et } |\Im(z)| \leq |z|$$

Exercice 7. Cet exercice s'intéresse aux conditions de convergence et de périodicité de suites complexes définies par une relation de récurrence simple.

1. Soient $a \in \mathbb{C}$. Déterminer une condition suffisante sur a pour que la suite de relation de récurrence
$$\begin{cases} z_{n+1} & = & az_n \\ z_0 & \in & \mathbb{C} \end{cases}$$
converge.

2. Que peut-il se passer si cette condition n'est pas vérifiée ? Distinguer le cas $|a| = 1$.

On dit qu'une suite de complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *périodique* s'il existe un entier $T \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+T} = z_n.$$

On dira alors que (z_n) est *T-périodique*. Ainsi, les suites constantes sont périodiques (de toute période), mais ce ne sont pas les seules.

3. On considère encore une suite définie par une relation de récurrence linéaire $z_{n+1} = az_n$. Trouver une condition sur a pour que (z_n) soit périodique et non nulle.

Indication On montrera qu'alors $|a| = 1$, et on remarquera que les nombres complexes de module 1 s'écrivent sous la forme $a = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

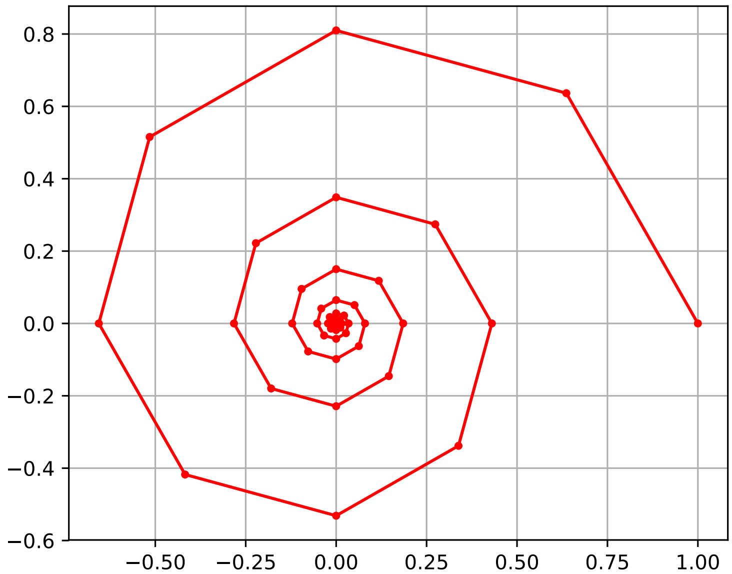
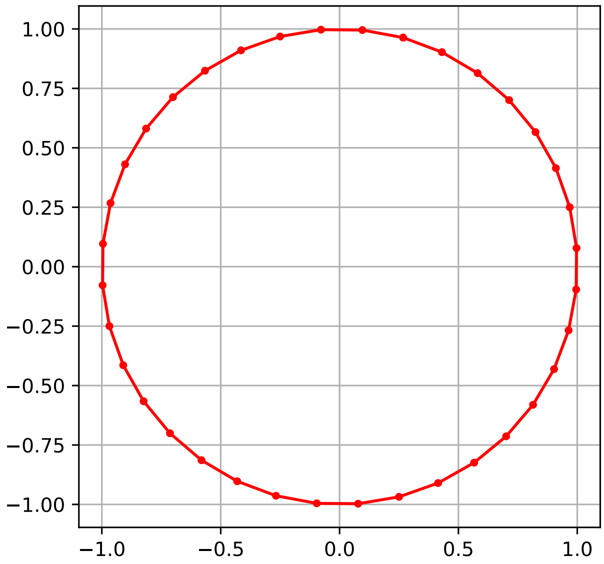
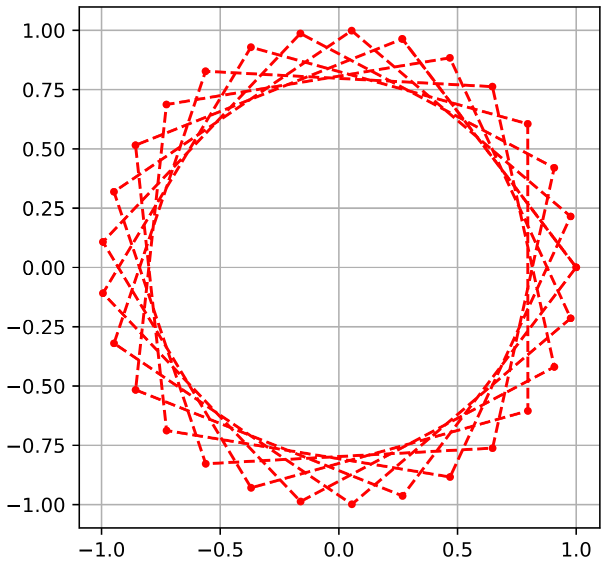


FIG. 2 : Une spirale logarithmique **convergente**, avec la relation de récurrence $z_{n+1} = 0{,}9e^{i\pi/4}z_n$. Simulation sous Python avec $N = 100$ points.



(a) Une suite périodique, avec la relation de récurrence $z_{n+1} = e^{i\pi/18} z_n$. $N = 36$ points.



(b) Un... truc ? avec la relation de récurrence $z_{n+1} = e^{1,3i} z_n$. $N = 30$ points.

Fig. 3 : Simulations sous Python de suites $z_{n+1} = a_n^z$ avec $|a| = 1$.

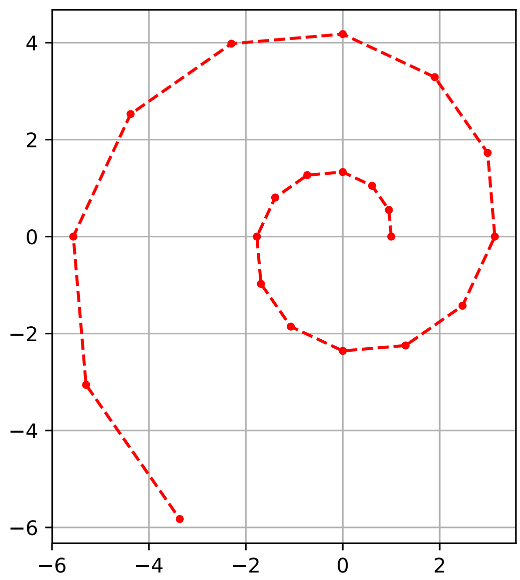


FIG. 4 : Une spirale logarithmique **divergente**, avec la relation de récurrence $z_{n+1} = 1{,}1e^{i\pi/6}z_n$. Simulation sous Python avec $N = 20$ points.