Tremplin : Séance 3

9 novembre 2017

Énoncés

Autour des suites

Exercice 1.

Suites de nombres complexes

Vous connaissez déjà la notion de suite de nombres réels. On définit ci-après la notion de suite de nombres complexes :

Définition 1 (Suite complexe)**.** Une *suite de nombres complexes* est une application de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. Étant donné une suite u, on appelle *terme* les images $u(n)$ des entiers n par u, et on les note plutôt u_n. La suite u se note alors classiquement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemple 1. La suite définie par $u_n = (2+i)^n$ est une suite de nombres complexes. Il en est de même de la suite $((1/2)^n)$ (en effet, toute suite de nombres réels est aussi une suite de nombres complexes puisque $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Pour analyser le comportement d'une suite de réels, vous avez défini en cours les notions de *convergence* et de *limite*. La définition suivante étend alors le concept à une suite de complexes.

Définition 2. Soit $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes. Soit $\ell \in \mathbb{C}$. On dit que *la suite* (z_n) *converge vers* ℓ lorsque la suite de nombres réels $(|z_n - \ell|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers zéro. On notera comme dans le cas réel

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \ell \quad \text{ou} \quad z_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \ell.$$

Exercice 2. Soit (z_n) une suite de nombres complexes.

1. Montrer qu'il existe deux suites de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_n = a_n + ib_n.$$
2. Montrer que si (z_n) converge vers une limite $\ell \in \mathbb{C}$, alors les suites (a_n) et (b_n) également, et exprimer leurs limites.
3. Montrer réciproquement que si les suites (a_n) et (b_n) convergent vers des réels a et b, alors (z_n) converge vers une limite qu'on exprimera.

Indication On remarquera l'inégalité suivante (démonstration ?) :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad |\Re(z)| \leq |z| \text{ et } |\Im(z)| \leq |z|$$

Exercice 3. Cet exercice s'intéresse aux conditions de convergence et de périodicité de suites complexes définies par une relation de récurrence simple.

1. Soient $a \in \mathbb{C}$. Déterminer une condition suffisante sur a pour que la suite de relation de récurrence
$$\begin{cases} z_{n+1} & = & az_n \\ z_0 & \in & \mathbb{C} \end{cases}$$
converge.
2. Que peut-il se passer si cette condition n'est pas vérifiée ? Distinguer le cas $|a| = 1$.

On dit qu'une suite de complexes $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est *périodique* s'il existe un entier $T \in \mathbb{N}$ tel que
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad z_{n+T} = z_n.$$

On dira alors que (z_n) est *T-périodique*. Ainsi, les suites constantes sont périodiques (de toute période), mais ce ne sont pas les seules.

3. On considère encore une suite définie par une relation de récurrence linéaire $z_{n+1} = az_n$. Trouver une condition sur a pour que (z_n) soit périodique et non nulle.

Indication On montrera qu'alors $|a| = 1$, et on remarquera que les nombres complexes de module 1 s'écrivent sous la forme $a = e^{i\theta}$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

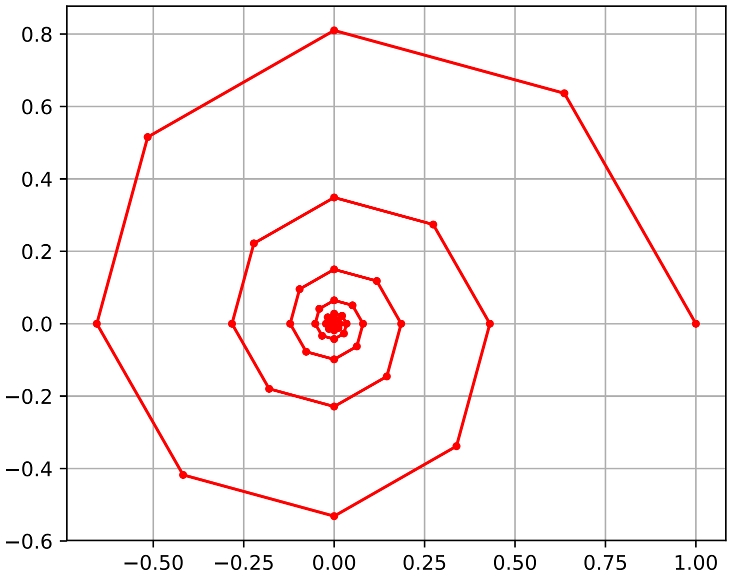
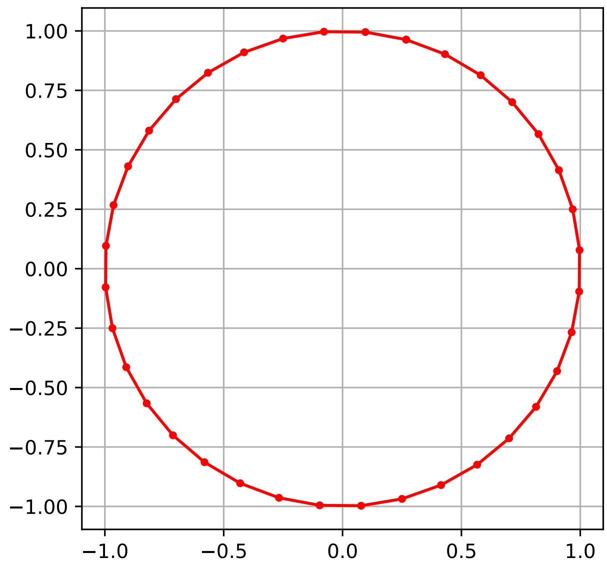
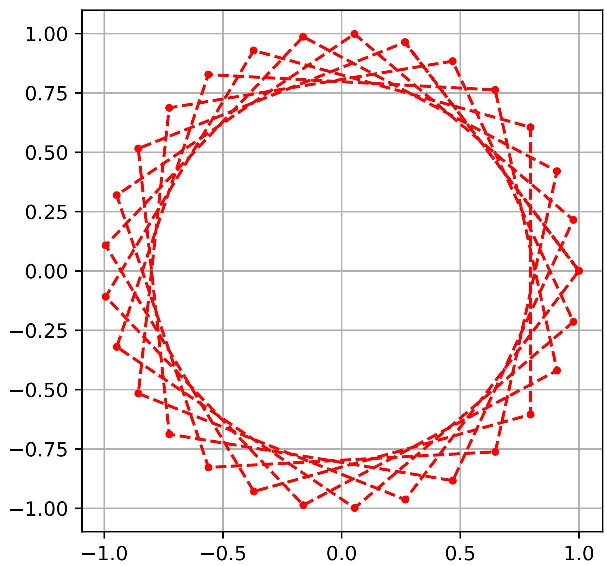


FIG. 1: Une spirale logarithmique **convergente**, avec la relation de récurrence $z_{n+1} = 0{,}9e^{i\pi/4}z_n$. Simulation sous Python avec $N = 100$ points.



(a) Une suite périodique, avec la relation de récurrence $z_{n+1} = e^{i\pi/18} z_n$. $N = 36$ points.



(b) Un... truc ? avec la relation de récurrence $z_{n+1} = e^{1,3i} z_n$. $N = 30$ points.

FIG. 2: Simulations sous Python de suites $z_{n+1} = a_n^z$ avec $|a| = 1$.

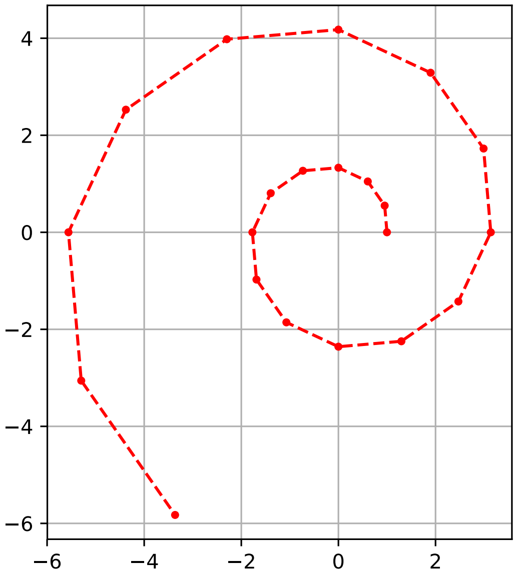


FIG. 3: Une spirale logarithmique **divergente**, avec la relation de récurrence $z_{n+1} = 1{,}1e^{i\pi/6}z_n$. Simulation sous Python avec $N = 20$ points.