Tremplin : Séance 2

15 octobre 2017

Exercice 1. Un hacker cherche à s'introduire dans les réseaux informatiques de l'entreprise Thalès, en travaillant avec un collègue en Russie (toute ressemblance avec des évènements réels est entièrement fortuite...).

Il communique avec lui via une suite de messages encodés sur 2 bits (0 ou 1), mais il doit passer par une suite de N ordinateurs différents. Pour un message donné, chaque ordinateur intermédiaire à une probabilité $q \in]0,1[$ de le modifier (0 est changé en 1 et réciproquement).

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note p_n la probabilité que le n-ème ordinateur reçoive le bon message. Déterminer une relation entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire la probabilité que son collègue, sur le N-ème ordinateur, reçoive la bonne information.
3. Que dire lorsque N est très grand ? Pourquoi est-ce logique ?

Exercice de probabilité et de suites. Fait intervenir la notion de limite.

Exercice 2 (Une introduction au théorème de Hahn-Banach)**.** On note $\mathbb{R}^3$ l'espace euclidien à trois dimensions.

1. Soient A et B deux points distincts de l'espace. Montrer qu'il existe un plan $(\mathcal{P})$ qui les sépare.
2. On considère désormais deux droites disjointes (Δ_1) et (Δ_2). Montrer qu'il existe un plan qui les sépare.
3. Même question avec deux sphères $(\mathcal{S}_1)$ et $(\mathcal{S}_2)$ de l'espace.

Exercice de géométrie analytique. Formalise une notion de séparation d'objets géométriques.

Exercice 3 (Il y a une infinité de nombre premiers)**.** Démontrer qu'il y a une infinité de nombre premiers.

Exercice d'arithmétique. Réintroduit la notion de nombre premier. Fait appel à des notions de logique, notamment le raisonnement par l'absurde.

Exercice 4 (La mourre)**.** Deux joueurs ont chacun une main dans le dos, avec un certain nombres de doigts dressés. Chacun annonce un nombre entre 0 et 10, puis ils présent leur main cachée : celui qui a deviné le nombre total de doigts dressés gagne.

Pourquoi certains totaux arrivent plus souvent que d'autres alors qu'on peut considérer que le nombre de doigts est aléatoire ?

Exercice de dénombrement et probabilités.

Exercice 5 (Marche aléatoire)**.** Jean-Michel est saoul et revient du bistrot. À chaque pas, il a une chance sur deux d'aller vers l'avant ou vers l'arrière. On suppose que sa maison est située à l'infini vers l'avant.

1. Jean-Michel peut-il espérer rentrer chez lui ?
2. La police est à la recherche de Jean-Michel, sachant qu'il a déjà effectué t pas. Dans quelle zone autour du bar doit-elle chercher pour trouver Jean-Michel avec une certitude de 95% ?

Il s'agit évidemment d'un exercice de probabilités sur les variables aléatoires. L'effort de formalisation porte surtout sur modéliser correctement le déplacement de l'ivrogne par une suite de variables de Rademacher.

On note X_t la position de Jean-Michel à l'instant $t \in \mathbb{N}$: c'est une variable aléatoire réelle discrète puisqu'il se déplace d'une unité à chaque instant.

Le déplacement entre les instants $t-1$ et t est la variable aléatoire $\xi_t := X_t - X_{t-1}$. Cette variable aléatoire suit la loi de probabilité

$$\mathbb{P}(\xi_t = 1) = \mathbb{P}(\xi_t = -1) = \frac{1}{2}.$$

Cette variable aléatoire finie admet pour espérance $\mathbb{E}(\xi_t) = 0$, et les variables $(\xi_t)_{t \geq 0}$ suivent la même loi et sont indépendantes.

Un calcul simple montre que la position de Jean-Michel à l'instant t est :

$$X_t = \sum_{k=1}^{t} \xi_k,$$

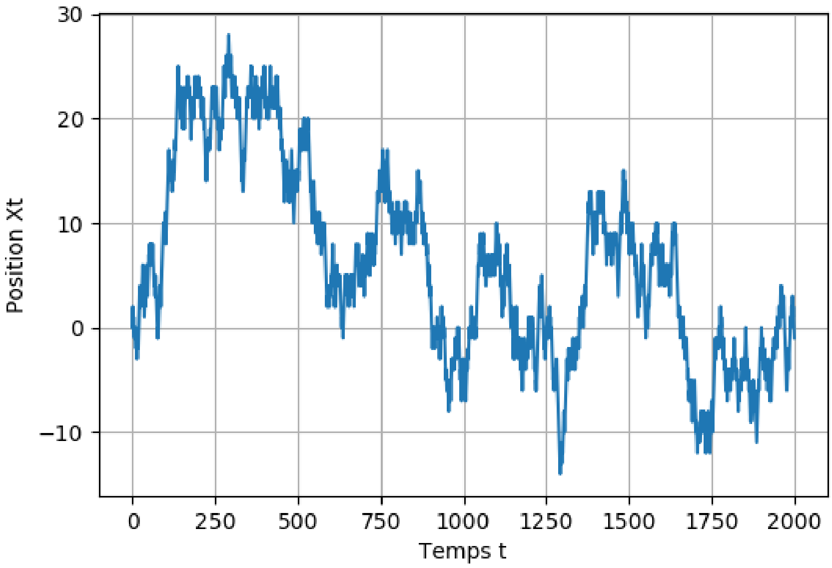

FIG. 1: La marche de Jean-Michel

donc que son espérance mathématique, la position moyenne de Jean-Michel, est $\mathbb{E}(X_t) = 0$.

La deuxième question, plus ambiguë, fait appel à quelques notions de statistiques, et peut servir d'introduction au théorème central limite pour faire le pont entre les probabilités et la maigre introduction aux statistiques en classe de Seconde.

On cherche à donner un encadrement des positions successives X_t de Jean-Michel qui soit vérifié dans la majeure partie des cas.

La variance de X_t est donnée par la somme des variances des $(\xi_t)_{t\geq 0}$, qui valent 1 :

$$\mathbb{V}(X_t) = \sum_{k=1}^{t} \mathbb{V}(\xi_k) = t.$$

L'écart-type est donc $\sigma(X_t) = \sqrt{t}$.

L'intuition suggère qu'après t pas, la position de Jean-Michel serait bornée par l'écart-type $\sigma(X_t)$. On pourrait donc chercher une constante positive $c > 0$ telle que $|X_t| \leq c\sqrt{t}$ avec une « bonne certitude » :

$$\mathbb{P}\left(|X_t| \leq c\sqrt{t}\right) = \mathbb{P}\left(-c\sqrt{t} \leq X_t \leq c\sqrt{t}\right) = 0{,}95.$$

On présente ensuite aux élèves ce qu'est la loi normale et son usage en statistiques.

Le théorème central limite dit que le $X_t/\sqrt{t}$ devient, en probabilité, proche d'une loi normale :

$$\frac{X_t}{\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{\text{loi}} N$$

où N est une variable normale centrée réduite.

Il faut donc introduire la notion de convergence en loi d'une variable aléatoire. L'équation précédente donne pour t grand $\mathbb{P}(-c \leq N \leq c) = 0{,}95$ soit $2\Phi(c) - 1 = 0{,}95$ où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. On obtient alors $c \approx 3{,}16$.

Pratique des probabilités ; Effort de formalisation ; Notion de convergence ; Résultats classiques : Jean-Michel va passer une infinité de fois par tous les points du plan.