Tremplin : Séance 6

W. Jallet

29 mars 2018

Combiner suites et fonctions

Vous connaissez les suites, vous connaissez les intégrales… et les suites d'intégrales ?

L'*intégrale* d'une fonction continue f sur un segment $[a, b]$ de la droite réelle $\mathbb{R}$ est le nombre réel noté

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Il représente l'aire *algébrique* sous la courbe de la fonction f : comptée *positivement* là où f est positive et *négativement* là où elle est négative.

Une *suite* n'est rien d'autre qu'une succession de nombres réels $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_0, u_1, \ldots)$, qui peut se définir par une *formule explicite* pour chaque terme ou par une *relation de récurrence*.

Question

« Est-ce qu'on peut combiner les suites et les intégrales, du coup ? »

La notion se généralise lorsque l'intervalle d'intégration n'est pas un segment, notamment lorsqu'il est infini ou lorsque la fonction n'est pas défini en son bord.

Soit $a > 0$. Montrer l'existence de la limite (et la calculer)

$$\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

Cette limite est appelée *intégrale **impropre** sur l'intervalle* $]0, 1]$, et elle est notée sans surprise

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

Globalement, les opérations que vous connaissez sur les intégrales restent les mêmes.

En quoi n’est-ce pas la même notion d’intégrale que celle que vous connaissez ?

En quoi n'est-ce pas la même notion d'intégrale que celle que vous connaissez ?

En effet, la fonction $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ n'est **pas** continue en 0 !

Mais… **est-ce grave** ?

L’intégrale classique fait des trucs cools

Considérons la suite d’intégrales définie **explicitement**[1] par

$$I_n = \int_0^1 x^n \, dx$$

1. la plupart du temps, on a affaire à des suites d’intégrales qui est définie explicitement… sauf dans la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz.

L'intégrale classique fait des trucs cools

Considérons la suite d'intégrales définie **explicitement**[1]par

$$I_n = \int_0^1 x^n \, dx$$

Question
Calculer la limite de I_n.

1. la plupart du temps, on a affaire à des suites d'intégrales qui est définie explicitement... sauf dans la preuve du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Question
Si on note pour tout n

$$f_n : x \in [0,1] \longmapsto x^n$$

déterminer la limite de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *pour chaque x.*

C’était prévisible…

2. `https://wikipedia.org/Théorème_de_convergence_dominée`

C’était prévisible…

Il existe même un théorème qui démontre que c’est vrai avec n’importe quelle suite de **fonctions continues** f_n ![2]

2. `https://wikipedia.org/Théorème_de_convergence_dominée`

Et avec des intégrales *impropres* ?

On va regarder la suite

$$J_n = \int_0^{+\infty} e^{-nx}\, dx$$

d'intégrales des fonctions

$$g_n \colon x \in [0, +\infty[\longmapsto e^{-nx}.$$

Des suites de nombres complexes