Rapport de projet MAP411:
Résolution des problèmes elliptiques symétriques en grande dimension

Cheikh Fall
Wilson Jallet
Promotion X2016

24 novembre 2017

1 L'algorithme glouton

Question 1. On rappelle l'équation de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u \in C^2(\overline{\Omega}) \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega = (0,1)^2$.

Supposons que la fonction $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit une solution de (1). Soit $v \in V$. Par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta u \, v &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{d'après (1)} \end{aligned}$$

puis en utilisant que $-\Delta u = f - u$

$$-\int_\Omega uv + \int_\Omega fv = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

et

$$\forall v \in V \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv. \tag{2}$$

Réciproquement, si u est une fonction de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$ qui vérifie (2) et $\partial u/\partial n = 0$ sur le bord de Ω, une intégration par parties permet de retrouver

$$\forall v \in V \quad -\int_\Omega \Delta u \, v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv \text{ donc } \int_\Omega (-\Delta u + u - f)v = 0.$$

D'après un lemme du cours, cela entraîne que

$$-\Delta u + u - f = 0$$

donc u est solution de (1).

Question 2. Pour tous i et j de $[\![0, I]\!]$,

$$\nabla \phi_i \otimes \phi_j(x,y) = \big(\phi_i'(x)\phi_j(y), \phi_i(x)\phi_j'(y)\big)$$

donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(\phi_i \otimes \phi_j) \cdot \nabla(\phi_k \otimes \phi_l) &= \int_\Omega \phi_i'(x)\phi_j(y)\phi_k'(x)\phi_l(y) + \phi_i(x)\phi_j'(y)\phi_k(x)\phi_l'(y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \phi_i'\phi_k'\,dx \int_0^1 \phi_j\phi_l\,dy + \int_0^1 \phi_i\phi_k\,dx \int_0^1 \phi_j'\phi_l'\,dy \text{ (théorème de Fubini)} \\ &= D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l}.\end{aligned}$$

Ainsi, avec $u_h = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j}\phi_i \otimes \phi_j$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u_h(x,y) \cdot \nabla \phi_k \otimes \phi_l(x,y)\,dx\,dy &= \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} \int_\Omega \nabla(\phi_i \otimes \phi_j) \cdot \nabla(\phi_k \otimes \phi_l) \qquad \text{(a)} \\ &= \sum_{i,j=0}^I U_{i,j}(D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l}).\end{aligned}$$

On a de plus

$$\int_\Omega (\phi_i \otimes \phi_j)(x,y)(\phi_k \otimes \phi_l)(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \phi_i\phi_k\,dx \int_0^1 \phi_j\phi_l\,dy = M_{i,k}M_{k,l}$$

d'où

$$\int_\Omega u_h(x,y)\phi_k \otimes \phi_l = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j}M_{i,k}M_{j,l} \qquad \text{(b)}$$

En supposant que u_h est une solution de (2), sommer (a) et (b) donne pour tous $k, l \in [\![0, I]\!]$

$$\sum_{i,j=0}^I U_{i,j}(D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l} + M_{i,k}M_{j,l}) = \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla \phi_k \otimes \phi_l + \int_\Omega u_h(\phi_k \otimes \phi_l) = F_{k,l}. \quad (3)$$

On notera cela sous la forme $T(U) = F$ dans la suite, où T est un endomorphisme de $\mathbb{R}^{(I+1)^2}$. On remarquera que T est symétrique.

Réciproquement, si le vecteur U vérifie le système linéaire (3), alors la fonction $u_h = \sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j}\phi_i \otimes \phi_j$ vérifie (2) pour $v \in V_h$.

Le problème (3) est bien posé puisque (2) l'est : si u_1 et u_2 vérifient (2), alors $w := u_2 - u_1$ vérifie

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 + \int_\Omega w^2 = \|w\|^2_{H^1(\Omega)} = 0$$

donc $w = 0$, $u_2 = u_1$.

Si on travaille sur un pavé $\Omega = (0,1)^d$ en dimension d avec la même méthode, la base tensorielle est $\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_d}$ et on travaille avec des données $U \in \mathbb{R}^{(I+1)^d}$.

Question 3. Si $U \in \mathbb{R}^{(I+1)^2}$ et $u_h = \sum_{i,j=0}^{I} \phi_i \otimes \phi_j$, remarquons qu'avec la notation introduite plus haut

$$\mathcal{E}(u_h) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_h|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega u_h^2 - \int_\Omega f u_h = \frac{1}{2}\langle U, T(U)\rangle - \langle U, F\rangle =: \mathcal{J}(U).$$

Le membre de droite est une fonction $\mathcal{J}$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{(I+1)^2}$ dont le gradient est $\nabla\mathcal{J}(U) = T(U) - F$ ce qui garantit qu'un minimum de l'énergie $\mathcal{E}$ vérifie (3). De plus, la dérivée seconde de $\mathcal{J}$ est l'application bilinéaire

$$\mathrm{d}^2\mathcal{J}(U) : (X, Y) \longmapsto \langle T(X), Y\rangle$$

symétrique positive, ce qui prouve la convexité de $\mathcal{J}$.

Réciproquement, si U est solution de (3) c'est-à-dire si U est un point critique de $\mathcal{J}$, sa convexité donne que U en est un minimum local donc que $u_h = \sum_{i,j} U_{i,j}\phi_i \otimes \phi_j$ est un minimum local de $\mathcal{E}$.

Question 4. L'algorithme est glouton puisqu'il consiste à faire une optimisation locale à chaque étape afin de trouver ce qui sera un optimum local de la fonction $\mathcal{E}$.

Si N est le numéro de la dernière itération, il faut stocker les en mémoire les fonctions $r_n, i \in V_h$, $i \in [\![1, d]\!]$ et $1 \leq n \leq N$, ce qui donne, en supposant les éléments de V_h représentés selon leur coordonnées avec $I+1$ réels, $(I+1)Nd$ nombres réels à stocker.

2 Équations d'Euler et convergence de l'algorithme