Rapport de projet MAP411:
Résolution des problèmes elliptiques symétriques en grande dimension

Cheikh Fall
Wilson Jallet
Promotion X2016

November 17, 2017

1 L'algorithme glouton

Question 1. On rappelle l'équation de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u \in C^2(\overline{\Omega}) \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega = (0,1)^2$.
Supposons que la fonction $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit une solution de (1). Soit $v \in V$. Par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta u \, v &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{d'après (1)} \end{aligned}$$

puis en utilisant que $-\Delta u = f - u$

$$-\int_\Omega uv + \int_\Omega fv = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

et

$$\forall v \in V \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv. \tag{2}$$

Réciproquement, si u est une fonction de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$ qui vérifie (2) et $\partial u/\partial n = 0$ sur le bord de Ω, une intégration par parties permet de retrouver

$$\forall v \in V \quad -\int_\Omega \Delta u \, v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

Question 2. Pour tous i et j de $[\![0, I]\!]$,

$$\nabla\phi_i \otimes \phi_j(x,y) = \big(\phi_i'(x)\phi_j(y), \phi_i(x)\phi_j'(y)\big)$$

donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(\phi_i \otimes \phi_j)\cdot\nabla(\phi_k \otimes \phi_l) &= \int_\Omega \phi_i'(x)\phi_j(y)\phi_k'(x)\phi_l(y) + \phi_i(x)\phi_j'(y)\phi_k(x)\phi_l'(y)\,dx\,dy \\ &= \int_0^1 \phi_i'\phi_k'\,dx \int_0^1 \phi_j\phi_l\,dy + \int_0^1 \phi_i\phi_k\,dx\int_0^1 \phi_j'\phi_l'\,dy \text{ (théorème de Fubini)} \\ &= D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l}.\end{aligned}$$

Ainsi, avec

$$u_h = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j}\phi_i \otimes \phi_j$$

on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u_h(x,y)\cdot\nabla\phi_k\otimes\phi_l(x,y)\,dx\,dy &= \sum_{i,j=0}^I U_{i,j}\int_\Omega \nabla(\phi_i\otimes\phi_j)\cdot\nabla(\phi_k\otimes\phi_l) \qquad \text{(a)} \\ &= \sum_{i,j=0}^I U_{i,j}(D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l}).\end{aligned}$$

On a de plus

$$\int_\Omega (\phi_i\otimes\phi_j)(x,y)(\phi_k\otimes\phi_l)(x,y)\,dx\,dy = \int_0^1 \phi_i\phi_k\,dx\int_0^1\phi_j\phi_l\,dy = M_{i,k}M_{k,l}$$

d'où

$$\int_\Omega u_h(x,y)\phi_k\otimes\phi_l = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j}M_{i,k}M_{j,l} \qquad \text{(b)}$$

En supposant que u_h est une solution de (2), sommer (a) et (b) donne

$$\begin{aligned}\forall (k,l)\in[\![0,I]\!]^2 \quad \sum_{i,j=0}^I U_{i,j}(D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l} + M_{i,k}M_{j,l}) &= \int_\Omega \nabla u_h\cdot\nabla\phi_k\otimes\phi_l + \int_\Omega u_h(\phi_k\otimes\phi_l) \\ &= F_{k,l}. \qquad (3)\end{aligned}$$

Réciproquement, si le vecteur U vérifie le système linéaire (3), alors la fonction $u_h = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j}\phi_i\otimes\phi_j$ vérifie (2) pour v dans l'espace engendré par les $\phi_i\otimes\phi_j$.

2 Équations d'Euler et convergence de l'algorithme