Rapport de projet MAP411: *Résolution des problèmes elliptiques symétriques en grande dimension*

Cheikh Fall
Wilson Jallet
Promotion X2016

November 17, 2017

Question 1. On rappelle l'équation de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u \in C^2(\overline{\Omega}) \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega = (0,1)^2$.
Supposons que la fonction $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit une solution de (1). Soit $v \in V$. Par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta u\, v &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{d'après (1)} \end{aligned}$$

puis en utilisant que $-\Delta u = f - u$

$$-\int_\Omega uv + \int_\Omega fv = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

et

$$\forall v \in V \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv. \tag{2}$$

Réciproquement, si u est une fonction de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$ qui vérifie (2) et $\partial u/\partial n = 0$ sur le bord de Ω, une intégration par parties permet de retrouver

$$\forall v \in V \quad -\int_\Omega \Delta u\, v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$