
Rapport de projet MAP411:

Résolution des problèmes elliptiques symétriques en grande dimension

Cheikh Fall
Wilson Jallet
Promotion X2016

2 décembre 2017

1 L'algorithme glouton

Question 1. On rappelle l'équation de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

où $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\Omega = (0, 1)^2$.

Supposons que la fonction $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ soit une solution de (1). Soit $v \in V$. Par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u v &= - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{d'après (1)} \end{aligned}$$

puis en utilisant que $-\Delta u = f - u$

$$- \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} fv = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

et

$$\forall v \in V \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv. \quad (2)$$

Réciproquement, si u est une fonction de classe C^2 sur $\bar{\Omega}$ qui vérifie (2), une intégration par parties permet de retrouver

$$\forall v \in V \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v - \int_{\Omega} \Delta u v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v$$

En particulier $-\int_{\Omega} \Delta u v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v$ quand $v = 0$ sur $\partial\Omega$. D'après un lemme du cours, cela entraîne que

$$-\Delta u + u - f = 0$$

et en réinjectant dans l'équation intégrale plus haut

$$\forall v \in V \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

et u est solution de (1).

Question 2. Pour tous i et j de $\llbracket 0, I \rrbracket$,

$$\nabla \phi_i \otimes \phi_j(x, y) = (\phi'_i(x)\phi_j(y), \phi_i(x)\phi'_j(y))$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(\phi_i \otimes \phi_j) \cdot \nabla(\phi_k \otimes \phi_l) &= \int_{\Omega} \phi'_i(x)\phi_j(y)\phi'_k(x)\phi_l(y) + \phi_i(x)\phi'_j(y)\phi_k(x)\phi'_l(y) dx dy \\ &= \int_0^1 \phi'_i \phi'_k \int_0^1 \phi_j \phi_l + \int_0^1 \phi_i \phi_k \int_0^1 \phi'_j \phi'_l \quad (\text{théorème de Fubini}) \\ &= D_{i,k} M_{j,l} + M_{i,k} D_{j,l}. \end{aligned}$$

Ainsi, avec $u_h = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} \phi_i \otimes \phi_j$ on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_h(x, y) \cdot \nabla \phi_k \otimes \phi_l(x, y) dx dy &= \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} \int_{\Omega} \nabla(\phi_i \otimes \phi_j) \cdot \nabla(\phi_k \otimes \phi_l) \quad (\text{a}) \\ &= \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} (D_{i,k} M_{j,l} + M_{i,k} D_{j,l}). \end{aligned}$$

On a de plus

$$\int_{\Omega} (\phi_i \otimes \phi_j)(x, y) (\phi_k \otimes \phi_l)(x, y) dx dy = \int_0^1 \phi_i \phi_k \int_0^1 \phi_j \phi_l = M_{i,k} M_{j,l}$$

d'où

$$\int_{\Omega} u_h(x, y) \phi_k \otimes \phi_l = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} M_{i,k} M_{j,l} \quad (\text{b})$$

En supposant que u_h est une solution de (2), sommer (a) et (b) donne pour tous $k, l \in \llbracket 0, I \rrbracket$

$$\sum_{i,j=0}^I U_{i,j} (D_{i,k} M_{j,l} + M_{i,k} D_{j,l} + M_{i,k} M_{j,l}) = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \phi_k \otimes \phi_l + \int_{\Omega} u_h (\phi_k \otimes \phi_l) = F_{k,l}. \quad (3)$$

On notera cela sous la forme $TU_h = F$ dans la suite.

Réciproquement, si le vecteur U vérifie le système linéaire (3), alors la fonction $u_h = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} \phi_i \otimes \phi_j$ vérifie (2) pour $v \in V_h$.

Le problème (3) est bien posé puisque (2) l'est : si u_1 et u_2 vérifient (2), alors $w := u_2 - u_1$ vérifie

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 + \int_{\Omega} w^2 = \|w\|_{H^1(\Omega)}^2 = 0$$

donc $w = 0$, $u_2 = u_1$.

Si on travaille sur un pavé $\Omega = (0, 1)^d$ en dimension d avec la même méthode, la base tensorielle est $\phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_d}$ et on travaille avec des données $U \in \mathbb{R}^{(I+1)^d}$.

Question 3. Si $U_h \in \mathbb{R}^{(I+1)^2}$ et $u_h = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} \phi_i \otimes \phi_j$, remarquons qu'avec la notation introduite plus haut

$$\mathcal{E}(u_h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_h|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_h^2 - \int_{\Omega} f u_h = \frac{1}{2} \langle TU_h, U_h \rangle - \langle U_h, F \rangle.$$

Le membre de droite est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{(I+1)^2}$ dont le gradient est $TU_h - F$, sa dérivée seconde est l'application bilinéaire définie positive

$$(X, Y) \in \mathbb{R}^{(I+1)^2} \times \mathbb{R}^{(I+1)^2} \longmapsto \langle TX, Y \rangle$$

On en tire que U_h vérifie (3) si et seulement si c'est un minimum du membre de droite, donc si et seulement si u_h est un minimum de \mathcal{E} restreint à $V_h \otimes V_h$:

$$u_h = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} \phi_i \otimes \phi_j = \arg \min_{v_h \in V_h \otimes V_h} \mathcal{E}(v_h) \quad (4)$$

Question 4. L'algorithme est glouton puisqu'il consiste à faire une optimisation locale à chaque étape afin de trouver ce qui sera un optimum local de la fonction \mathcal{E} .

Si N est le numéro de la dernière itération, il faut stocker les en mémoire les fonctions $r_n, i \in V_h, i \in \llbracket 1, d \rrbracket$ et $1 \leq n \leq N$, ce qui donne, en supposant les éléments de V_h représentés selon leur coordonnées avec $I + 1$ réels, $(I + 1)Nd$ nombres réels à stocker.

Supposons une représentation séparée de la fonction f

$$f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{p=1}^P f_1^p(x_1) \dots f_d^p(x_d)$$

Alors, les coefficients du vecteur $F = (\int_{\Omega} f \phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_d})$ s'écrivent grâce au théorème de Fubini

$$F_{i_1, \dots, i_d} = \sum_{p=1}^P \prod_{j=1}^d \int_0^1 f_j^p(x) \phi_{i_j}(x) dx$$

et pour les obtenir, il suffit de calculer et stocker les $Pd(I+1)$ intégrales

$$\int_0^1 f_j^p \phi_i, \quad j \in \llbracket 1, d \rrbracket, i \in \llbracket 0, I \rrbracket, p \in \llbracket 1, P \rrbracket.$$

Si f n'admet pas de représentation séparée, il faut alors calculer et stocker les $(I+1)^d$ intégrales $\int_{\Omega} f \phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_d}$, ce qui fait nettement plus de données.

On considère le problème de minimisation

$$(r_n, s_n) \in \arg \min_{(r,s) \in V_h \times V_h} \mathcal{E}(u_{n-1} + r \otimes s). \quad (5)$$

2 Équations d'Euler et convergence de l'algorithme

Question 5. On a montré plus haut que la restriction de l'énergie $\mathcal{E} : C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ à l'espace $V_h \otimes V_h$ admet un minimum. Il en est donc de même de $\mathcal{J} : (r, s) \in V_h \times V_h \mapsto \mathcal{E}(u_{n-1} + r \otimes s)$ quel que soit u dans V (puisque $r \otimes s \in V_h \otimes V_h$), et (r, s) en est un minimum si et seulement si c'en est un point critique.

La différentielle de \mathcal{J} est

$$\begin{aligned} d_{(r,s)} \mathcal{J}(\delta r, \delta s) &= d\mathcal{E}(u_{n-1} + r \otimes s) \cdot \underbrace{(d_{(r,s)}(u_{n-1} + r \otimes s)(\delta r, \delta s))}_{=\delta r \otimes s + r \otimes \delta s} \\ &= \int_{\Omega} \nabla(u_{n-1} + r \otimes s) \cdot \nabla(\delta r \otimes s + r \otimes \delta s) + \int_{\Omega} (u_{n-1} + r \otimes s)(\delta r \otimes s + r \otimes \delta s) \\ &\quad - \int_{\Omega} f(\delta r \otimes s + r \otimes \delta s). \end{aligned}$$

On en déduit que (r_n, s_n) est un point critique de \mathcal{J} si et seulement si $d_{(r_n, s_n)} \mathcal{J}(\delta r, \delta s) = 0$ pour tout $(\delta r, \delta s) \in V_h \times V_h$, soit

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) + \int_{\Omega} (r_n \otimes s_n)(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) \\ &= \int_{\Omega} f(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) - \int_{\Omega} \nabla u_{n-1} \cdot \nabla(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) - \int_{\Omega} u_{n-1}(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
-r_n''(x) \int_0^1 s_n^2 + r_n(x) \int_0^1 s_n'^2 &= \int_0^1 (f(x, y) + \Delta u_{n-1}(x, y) - u_{n-1}(x, y)) s_n(y) dy \\
-s_n''(y) \int_0^1 r_n^2 + s_n(y) \int_0^1 r_n'^2 &= \int_0^1 (f(x, y) + \Delta u_{n-1}(x, y) - u_{n-1}(x, y)) r_n(x) dx
\end{aligned}$$