Rapport de projet MAP411:
Résolution des problèmes elliptiques symétriques en grande dimension

Cheikh Fall
Wilson Jallet
Promotion X2016

3 décembre 2017

1 L'algorithme glouton

Question 1. On rappelle l'équation de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ sur } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

où $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $\Omega = (0,1)^2$.

Supposons que la fonction $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit une solution de (1). Soit $v \in V$. Par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta u\, v &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{d'après (1)} \end{aligned}$$

puis en utilisant que $-\Delta u = f - u$

$$-\int_\Omega uv + \int_\Omega fv = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

et

$$\forall v \in V \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv. \tag{2}$$

Réciproquement, si u est une fonction de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$ qui vérifie (2), une intégration par parties permet de retrouver

$$\forall v \in V \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v - \int_\Omega \Delta u\, v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

En particulier $-\int_\Omega \Delta u\, v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$ quand $v = 0$ sur $\partial\Omega$. D'après un lemme du cours, cela entraîne que

$$-\Delta u + u - f = 0$$

et en réinjectant dans l'équation intégrale plus haut

$$\forall v \in V \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

et u est solution de (1).

Question 2. Pour tous i et j de $[\![0, I]\!]$,

$$\nabla\phi_i \otimes \phi_j(x,y) = \big(\phi_i'(x)\phi_j(y), \phi_i(x)\phi_j'(y)\big)$$

donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(\phi_i \otimes \phi_j) \cdot \nabla(\phi_k \otimes \phi_l) &= \int_\Omega \phi_i'(x)\phi_j(y)\phi_k'(x)\phi_l(y) + \phi_i(x)\phi_j'(y)\phi_k(x)\phi_l'(y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \phi_i'\phi_k' \int_0^1 \phi_j\phi_l + \int_0^1 \phi_i\phi_k \int_0^1 \phi_j'\phi_l' \text{ (théorème de Fubini)} \\ &= D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l}.\end{aligned}$$

Ainsi, avec $u_h = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j}\phi_i \otimes \phi_j$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u_h(x,y) \cdot \nabla\phi_k \otimes \phi_l(x,y)\, dx\, dy &= \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} \int_\Omega \nabla(\phi_i \otimes \phi_j) \cdot \nabla(\phi_k \otimes \phi_l) \qquad \text{(a)} \\ &= \sum_{i,j=0}^I U_{i,j}(D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l}).\end{aligned}$$

On a de plus

$$\int_\Omega (\phi_i \otimes \phi_j)(x,y)(\phi_k \otimes \phi_l)(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \phi_i\phi_k \int_0^1 \phi_j\phi_l = M_{i,k}M_{k,l}$$

d'où

$$\int_\Omega u_h(x,y)\phi_k \otimes \phi_l = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j}M_{i,k}M_{j,l} \qquad \text{(b)}$$

En supposant que u_h est une solution de (2), sommer (a) et (b) donne pour tous $k, l \in [\![0, I]\!]$

$$\sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j}(D_{i,k}M_{j,l}+M_{i,k}D_{j,l}+M_{i,k}M_{j,l}) = \int_\Omega \nabla u_h\cdot\nabla\phi_k\otimes\phi_l+\int_\Omega u_h(\phi_k\otimes\phi_l) = F_{k,l}. \quad (3)$$

On notera cela sous la forme $TU_h = F$ dans la suite.

Réciproquement, si le vecteur U vérifie le système linéaire (3), alors la fonction $u_h = \sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j}\phi_i \otimes \phi_j$ vérifie (2) pour $v \in V_h$.

Le problème (3) est bien posé puisque (2) l'est : si u_1 et u_2 vérifient (2), alors $w := u_2 - u_1$ vérifie

$$\int_\Omega |\nabla w|^2 + \int_\Omega w^2 = \|w\|^2_{H^1(\Omega)} = 0$$

donc $w = 0$, $u_2 = u_1$.

Si on travaille sur un pavé $\Omega = (0,1)^d$ en dimension d avec la même méthode, la base tensorielle est $\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_d}$ et on travaille avec des données $U \in \mathbb{R}^{(I+1)^d}$.

Question 3. Si $U_h \in \mathbb{R}^{(I+1)^2}$ et $u_h = \sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j}\phi_i \otimes \phi_j$, remarquons qu'avec la notation introduite plus haut

$$\mathcal{E}(u_h) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_h|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega u_h^2 - \int_\Omega f u_h = \frac{1}{2}\langle TU_h, U_h\rangle - \langle U_h, F\rangle.$$

Le membre de droite est une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^{(I+1)^2}$ dont le gradient est $TU_h - F$, sa dérivée seconde est l'application bilinéaire définie positive

$$(X,Y) \in \mathbb{R}^{(I+1)^2} \times \mathbb{R}^{(I+1)^2} \longmapsto \langle TX, Y\rangle$$

On en tire que U_h est solution de (3) si et seulement si c'est un minimum du membre de droite, $\boxed{\text{si et seulement si } u_h \text{ est un minimum de } \mathcal{E} \text{ restreint à } V_h \otimes V_h}$:

$$u_h = \sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j}\phi_i \otimes \phi_j = \arg\min_{v_h \in V_h\otimes V_h} \mathcal{E}(v_h) \quad (4)$$

Question 4. L'algorithme est glouton puisqu'il consiste à faire une optimisation locale à chaque étape afin de trouver ce qui sera un optimum local de la fonction $\mathcal{E}$.

Si N est le numéro de la dernière itération, il faut stocker les en mémoire les fonctions $r_n, i \in V_h$, $i \in [\![1, d]\!]$ et $1 \leq n \leq N$, ce qui donne, en supposant les éléments de V_h représentés selon leur coordonnées avec $I + 1$ réels, $(I + 1)Nd$ nombres réels à stocker.

Supposons une représentation séparée de la fonction f

$$f(x_1, \ldots, x_d) = \sum_{p=1}^{P} f_1^p(x_1)\ldots f_d^p(x_d)$$

Alors, les coefficients du vecteur $F = \left(\int_\Omega f\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_d}\right)$ s'écrivent grâce au théorème de Fubini

$$F_{i_1,\dots,i_d} = \sum_{p=1}^{P} \prod_{j=1}^{d} \int_0^1 f_j^p(x)\phi_{i_j}(x)\,dx$$

et pour les obtenir, il suffit de calculer et stocker les $Pd(I+1)$ intégrales

$$\int_0^1 f_j^p \phi_i, \quad j \in [\![1,d]\!],\ i \in [\![0,I]\!],\ p \in [\![1,P]\!].$$

Si f n'admet pas de représentation séparée, il faut alors calculer et stocker les $(I+1)^d$ intégrales $\int_\Omega f\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_d}$, ce qui fait nettement plus de données.

2 Équations d'Euler et convergence de l'algorithme

On considère le problème de minimisation

$$(r_n, s_n) \in \arg \min_{(r,s)\in V_h \times V_h} \mathcal{E}(u_{n-1} + r \otimes s). \tag{5}$$

Question 5. On a montré plus haut que la restriction de l'énergie $\mathcal{E} : C^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow \mathbb{R}$ à l'espace $V_h \otimes V_h$ admet un minimum. Il en est donc de même de $\mathcal{J} : (r,s) \in V_h \times V_h \longmapsto \mathcal{E}(u_{n-1} + r\otimes s)$ quel que soit u dans V (puisque $r \otimes s \in V_h \otimes V_h$), et (r,s) en est un minimum si et seulement si c'en est un point critique.

La différentielle de $\mathcal{J}$ est

$$\begin{aligned} d_{(r,s)}\mathcal{J}(\delta r, \delta s) &= d\mathcal{E}_{u_{n-1}+r\otimes s} \cdot \underbrace{\big(d_{(r,s)}(u_{n-1} + r \otimes s)(\delta r, \delta s)\big)}_{=\delta r \otimes s + r \otimes \delta s} \\ &= \int_\Omega \nabla(u_{n-1} + r\otimes s) \cdot \nabla(\delta r \otimes s + r \otimes \delta s) + \int_\Omega (u_{n-1} + r \otimes s)(\delta r \otimes s + r \otimes \delta s) \\ &\quad - \int_\Omega f(\delta r \otimes s + r \otimes \delta s). \end{aligned}$$

On en déduit que (r_n, s_n) est un point critique de $\mathcal{J}$ si et seulement si $d_{(r_n,s_n)}\mathcal{J}(\delta r, \delta s) = 0$ pour tout $(\delta r, \delta s) \in V_h \times V_h$, soit

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) + \int_\Omega (r_n \otimes s_n)(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) \\ &\quad = \int_\Omega f(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) - \int_\Omega \nabla u_{n-1} \cdot \nabla(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) - \int_\Omega u_{n-1}(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) \end{aligned} \tag{6}$$

Réécrire cela en $\delta r = 0$ et $\delta s = 0$ et intégrer par parties mène au système d'équations différentielles couplées

$$-r_n''(x) \int_0^1 s_n^2 + r_n(x) \int_0^1 {s_n'}^2 = \int_0^1 (f(x,y) + \Delta u_{n-1}(x,y) - u_{n-1}(x,y)) s_n(y)\, dy$$
$$-s_n''(y) \int_0^1 r_n^2 + s_n(y) \int_0^1 {r_n'}^2 = \int_0^1 (f(x,y) + \Delta u_{n-1}(x,y) - u_{n-1}(x,y)) r_n(x)\, dx$$

Question 6. Comme u_h est solution du problème variationnel (3), nous avons

$$a(u_h, \delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) = \int_\Omega f(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s)$$

d'une part. D'autre part, remarquons que la différentielle de $\mathcal{E}$ se réécrit

$$d\mathcal{E}_u(v) = a(u,v) - \int_\Omega fv$$

donc la condition d'extremum portant sur (r_n, s_n) se réécrit, en remarquant que $u_n = u_{n-1} + r_n \otimes s_n$

$$\begin{aligned} a(u_n, \delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) &= a(u_{n-1} + r_n \otimes s_n, \delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) \\ &= \int_\Omega f(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{a(g_n, \delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) = a(u_h - u_n, \delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) = 0.}$$

En particulier, avec $\delta r = r_n$ et $\delta s = s_n$

$$2a(g_n, r_n \otimes s_n) = 0.$$

Remarquons que $g_n + r_n \otimes s_n = u_h - (u_n - r_n \otimes s_n) = u_h - u_{n-1} = g_{n-1}$, d'où par bilinéarité et symétrie de a

$$\begin{aligned} \boxed{a(g_{n-1}, g_{n-1})} &= a(g_n, g_n) + \underbrace{2a(g_n, r_n \otimes s_n)}_{=0} + a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n) \\ &\boxed{= a(g_n, g_n) + a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n).} \end{aligned}$$

La remarque plus haut permet d'écrire

$$\begin{aligned} \boxed{E_n = \mathcal{E}(u_n) - \mathcal{E}(u_{n-1})} &= \frac{1}{2} a(u_n, u_n) - \frac{1}{2} a(u_{n-1}, u_{n-1}) - \int_\Omega f(r_n \otimes s_n) \\ &= \frac{1}{2} a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n) + a(u_{n-1}, r_n \otimes s_n) - \int_\Omega f(r_n \otimes s_n) \\ &\boxed{= \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2 + \frac{1}{2} \int_\Omega |r_n \otimes s_n|^2 - \int_\Omega f(r_n \otimes s_n) + a(u_{n-1}, r_n \otimes s_n).} \end{aligned} \tag{d}$$

Il est immédiat que les deux premiers termes du membre de droite valent $\frac{1}{2}a(r_n \otimes s_n)$.

Remarquons que le membre de gauche de (6) est $2a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n)$ en $\delta r = r_n, \delta s = s_n$. Les deux derniers termes du membre de droite de (d) vérifient donc :

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega f(r_n \otimes s_n) + a(u_{n-1}, r_n \otimes s_n) &= -\int_\Omega f(r_n \otimes s_n) + \int_\Omega \nabla u_{n-1} \cdot \nabla(r_n \otimes s_n) + \int_\Omega u_{n-1}(r_n \otimes s_n) \\
&= -a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n)
\end{aligned}$$

On en déduit donc que (d) se réécrit

$$\boxed{E_n = -\frac{1}{2}a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n).}$$

On a montré plus haut que $a(g_{n-1}, g_{n-1}) = a(g_n, g_n) + a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n)$ ce qui entraîne puisque $a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n) \geq 0$ que la suite de réels positifs $(a(g_n, g_n))_n$ est décroissante, donc converge. On en tire que la série télescopique $\sum_{n\geq 1} (a(g_{n-1}, g_{n-1}) - a(g_n, g_n))$ converge. Or c'est exactement la série

$$\sum_{n\geq 1} a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n),$$

dont on déduit la convergence, puis celle de la série $-2\sum_{n\geq 1} E_n$ et l'égalité de leurs sommes d'après l'identité plus haut.

Question 7. Le raisonnement précédent montre que la suite $(g_n)_{n\geq 1}$ de $V_h \otimes V_h$ est bornée en norme H^1 (la norme $v \longmapsto \sqrt{a(v,v)}$). Notons que cette norme équipe l'espace de dimension finie $V_h \otimes V_h$ d'une structure d'espace normé de dimension finie. Le théorème de Bolzano-Weierstrass que (g_n) admet une valeur d'adhérence g_∞ dans $V_h \otimes V_h$.