Rapport de projet MAP411:
Résolution des problèmes elliptiques symétriques en grande dimension

Cheikh Fall
Wilson Jallet
Promotion X2016

18 novembre 2017

1 L'algorithme glouton

Question 1. On rappelle l'équation de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \\ u \in C^2(\overline{\Omega}) \end{cases} \tag{1}$$

où $\Omega = (0,1)^2$.

Supposons que la fonction $u : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ soit une solution de (1). Soit $v \in V$. Par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta u\, v &= -\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \\ &= \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{d'après (1)} \end{aligned}$$

puis en utilisant que $-\Delta u = f - u$

$$-\int_\Omega uv + \int_\Omega fv = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v$$

et

$$\forall v \in V \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv. \tag{2}$$

Réciproquement, si u est une fonction de classe C^2 sur $\overline{\Omega}$ qui vérifie (2) et $\partial u/\partial n = 0$ sur le bord de Ω, une intégration par parties permet de retrouver

$$\forall v \in V \quad -\int_\Omega \Delta u\, v + \int_\Omega uv = \int_\Omega fv$$

donc

$$\forall v \in V \quad \int_\Omega (-\Delta u + u - f)v = 0.$$

D'après un lemme du cours, cela entraîne que

$$-\Delta u + u - f = 0$$

donc u est solution de (1).

Question 2. Pour tous i et j de $[\![0, I]\!]$,

$$\nabla \phi_i \otimes \phi_j(x,y) = \big(\phi_i'(x)\phi_j(y), \phi_i(x)\phi_j'(y)\big)$$

donc

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla(\phi_i \otimes \phi_j) \cdot \nabla(\phi_k \otimes \phi_l) &= \int_\Omega \phi_i'(x)\phi_j(y)\phi_k'(x)\phi_l(y) + \phi_i(x)\phi_j'(y)\phi_k(x)\phi_l'(y)\, dx\, dy \\ &= \int_0^1 \phi_i'\phi_k'\, dx \int_0^1 \phi_j\phi_l\, dy + \int_0^1 \phi_i\phi_k\, dx \int_0^1 \phi_j'\phi_l'\, dy \text{ (théorème de Fubini)} \\ &= D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l}.\end{aligned}$$

Ainsi, avec $u_h = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j}\phi_i \otimes \phi_j$ on obtient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla u_h(x,y) \cdot \nabla \phi_k \otimes \phi_l(x,y)\, dx\, dy &= \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} \int_\Omega \nabla(\phi_i \otimes \phi_j) \cdot \nabla(\phi_k \otimes \phi_l) \qquad \text{(a)} \\ &= \sum_{i,j=0}^I U_{i,j}(D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l}).\end{aligned}$$

On a de plus

$$\int_\Omega (\phi_i \otimes \phi_j)(x,y)(\phi_k \otimes \phi_l)(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1 \phi_i\phi_k\, dx \int_0^1 \phi_j\phi_l\, dy = M_{i,k}M_{k,l}$$

d'où

$$\int_\Omega u_h(x,y)\phi_k \otimes \phi_l = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j}M_{i,k}M_{j,l} \qquad \text{(b)}$$

En supposant que u_h est une solution de (2), sommer (a) et (b) donne

$$\begin{aligned}\forall (k,l) \in [\![0,I]\!]^2 \quad \sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j}(D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l} + M_{i,k}M_{j,l}) &= \int_\Omega \nabla u_h \cdot \nabla \phi_k \otimes \phi_l + \int_\Omega u_h(\phi_k \otimes \phi_l) \\ &= F_{k,l}. \end{aligned} \tag{3}$$

Réciproquement, si le vecteur U vérifie le système linéaire (3), alors la fonction $u_h = \sum_{i,j=0}^{I} U_{i,j}\phi_i \otimes \phi_j$ vérifie (2) pour v dans l'espace engendré par les $\phi_i \otimes \phi_j$.

Montrons que (3) est bien posé. On le réécrit sous la forme

$$T(X) = F \tag{c}$$

où T est un endomorphisme sur l'espace $E = \mathbb{R}^{(I+1)\times(I+1)}$, dont la matrice est

$$T_{k,l}^{i,j} = D_{i,k}M_{j,l} + M_{i,k}D_{j,l} + M_{i,k}M_{j,l}$$

ce qui montre que T est symétrique. Il est positif pour le produit scalaire $\langle X, Y\rangle = \mathrm{Tr}(X^t Y)$: si $X \in E$ et $f = \sum_{i,j=0} X_{i,j}\phi_i \otimes \phi_j$, on a d'après les calculs précédents

$$\begin{aligned}\langle X, T(X)\rangle = \sum_{k,l=0}^{I} X_{k,l} \sum_{i,j=0}^{I} X_{i,j} T_{k,l}^{i,j} &= \sum_{k,l=0}^{I} X_{k,l}\left[\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla \phi_i \otimes \phi_j + \int_\Omega f(\phi_i \otimes \phi_j)\right] \\ &= \int_\Omega |\nabla f|^2 + \int_\Omega f^2 \geq 0,\end{aligned}$$

et l'égalité entraîne par continuité de f que $f = 0$ puis $X = 0$ par liberté de la famille $(\phi_i \otimes \phi_j)_{0\leq i,j\leq I}$. On en déduit donc que $T : E \to E$ est injectif, puis est un isomorphisme.

Si on travaille sur un pavé $\Omega = (0,1)^d$ en dimension d avec la même méthode, la base tensorielle est $\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_d}$ et on travaille avec des données $U \in \mathbb{R}^{(I+1)^d}$.

Question 3. Si $U \in E = \mathbb{R}^{(I+1)^2}$ et $u_h = \sum_{i,j=0}^{I} \phi_i \otimes \phi_j$, remarquons qu'avec les notations introduites dans (c)

$$\mathcal{E}(u_h) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_h|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega u_h^2 - \int_\Omega f u_h = \frac{1}{2}\langle U, T(U)\rangle - \langle U, F\rangle.$$

Le membre de droite est une application de classe C^1 sur l'espace E dont le gradient en tout point U est

$$T(U) - F$$

Question 4.

2 Équations d'Euler et convergence de l'algorithme