

---

# Rapport de projet MAP411:

## *Résolution des problèmes elliptiques symétriques en grande dimension*

---

*Cheikh Fall*  
*Wilson Jallet*  
Promotion X2016

3 décembre 2017

### 1 L'algorithme glouton

**Question 1.** On rappelle l'équation de Laplace

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f \text{ sur } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

où  $u \in C^2(\overline{\Omega})$ ,  $\Omega = (0, 1)^2$ .

Supposons que la fonction  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  soit une solution de (1). Soit  $v \in V$ . Par une intégration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} \Delta u v &= - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \\ &= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \quad \text{d'après (1)} \end{aligned}$$

puis en utilisant que  $-\Delta u = f - u$

$$- \int_{\Omega} uv + \int_{\Omega} fv = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$$

et

$$\forall v \in V \quad \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} fv. \quad (2)$$

Réciproquement, si  $u$  est une fonction de classe  $C^2$  sur  $\overline{\Omega}$  qui vérifie (2), une intégration par parties permet de retrouver

$$\forall v \in V \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v - \int_{\Omega} \Delta u v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v$$

En particulier  $-\int_{\Omega} \Delta u v + \int_{\Omega} uv = \int_{\Omega} f v$  quand  $v = 0$  sur  $\partial\Omega$ . D'après un lemme du cours, cela entraîne que

$$-\Delta u + u - f = 0$$

et en réinjectant dans l'équation intégrale plus haut

$$\forall v \in V \quad \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v = 0 \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0$$

et  $u$  est solution de (1).

**Question 2.** Pour tous  $i$  et  $j$  de  $\llbracket 0, I \rrbracket$ ,

$$\nabla \phi_i \otimes \phi_j(x, y) = (\phi'_i(x) \phi_j(y), \phi_i(x) \phi'_j(y))$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla(\phi_i \otimes \phi_j) \cdot \nabla(\phi_k \otimes \phi_\ell) &= \int_{\Omega} \phi'_i(x) \phi_j(y) \phi'_k(x) \phi_\ell(y) + \phi_i(x) \phi'_j(y) \phi_k(x) \phi'_\ell(y) dx dy \\ &= \int_0^1 \phi'_i \phi'_k \int_0^1 \phi_j \phi_\ell + \int_0^1 \phi_i \phi_k \int_0^1 \phi'_j \phi'_\ell \quad (\text{théorème de Fubini}) \\ &= D_{i,k} M_{j,\ell} + M_{i,k} D_{j,\ell}. \end{aligned}$$

Ainsi, avec  $u_h = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} \phi_i \otimes \phi_j$  on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u_h(x, y) \cdot \nabla \phi_k \otimes \phi_\ell(x, y) dx dy &= \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} \int_{\Omega} \nabla(\phi_i \otimes \phi_j) \cdot \nabla(\phi_k \otimes \phi_\ell) \quad (\text{a}) \\ &= \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} (D_{i,k} M_{j,\ell} + M_{i,k} D_{j,\ell}). \end{aligned}$$

On a de plus

$$\int_{\Omega} (\phi_i \otimes \phi_j)(x, y) (\phi_k \otimes \phi_\ell)(x, y) dx dy = \int_0^1 \phi_i \phi_k \int_0^1 \phi_j \phi_\ell = M_{i,k} M_{j,\ell}$$

d'où

$$\int_{\Omega} u_h(x, y) \phi_k \otimes \phi_\ell = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} M_{i,k} M_{j,\ell} \quad (\text{b})$$

En supposant que  $u_h$  est une solution de (2), sommer (a) et (b) donne pour tous  $k, \ell \in \llbracket 0, I \rrbracket$

$$\sum_{i,j=0}^I U_{i,j} (D_{i,k} M_{j,\ell} + M_{i,k} D_{j,\ell} + M_{i,k} M_{j,\ell}) = \int_{\Omega} \nabla u_h \cdot \nabla \phi_k \otimes \phi_{\ell} + \int_{\Omega} u_h (\phi_k \otimes \phi_{\ell}) = F_{k,\ell}. \quad (3)$$

On notera cela sous la forme  $TU_h = F$  dans la suite.

Réciproquement, si le vecteur  $U$  vérifie le système linéaire (3), alors la fonction  $u_h = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} \phi_i \otimes \phi_j$  vérifie (2) pour  $v \in V_h$ .

Le problème (3) est bien posé puisque (2) l'est : si  $u_1$  et  $u_2$  vérifient (2), alors  $w := u_2 - u_1$  vérifie

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 + \int_{\Omega} w^2 = \|w\|_{H^1(\Omega)}^2 = 0$$

donc  $w = 0$ ,  $u_2 = u_1$ .

Si on travaille sur un pavé  $\Omega = (0, 1)^d$  en dimension  $d$  avec la même méthode, la base tensorielle est  $\phi_{i_1} \otimes \cdots \otimes \phi_{i_d}$  et on travaille avec des données  $U \in \mathbb{R}^{(I+1)^d}$ .

**Question 3.** Si  $U_h \in \mathbb{R}^{(I+1)^2}$  et  $u_h = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} \phi_i \otimes \phi_j$ , remarquons qu'avec la notation introduite plus haut

$$\mathcal{E}(u_h) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_h|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} u_h^2 - \int_{\Omega} f u_h = \frac{1}{2} \langle TU_h, U_h \rangle - \langle U_h, F \rangle.$$

Le membre de droite est une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^{(I+1)^2}$  dont le gradient est  $TU_h - F$ , sa dérivée seconde est l'application bilinéaire définie positive

$$(X, Y) \in \mathbb{R}^{(I+1)^2} \times \mathbb{R}^{(I+1)^2} \longmapsto \langle TX, Y \rangle$$

On en tire que  $U_h$  est solution de (3) si et seulement si c'est un minimum du membre de droite, si et seulement si  $u_h$  est un minimum de  $\mathcal{E}$  restreint à  $V_h \otimes V_h$ :

$$u_h = \sum_{i,j=0}^I U_{i,j} \phi_i \otimes \phi_j = \arg \min_{v_h \in V_h \otimes V_h} \mathcal{E}(v_h) \quad (4)$$

**Question 4.** L'algorithme est glouton puisqu'il consiste à faire une optimisation locale à chaque étape afin de trouver ce qui sera un optimum local de la fonction  $\mathcal{E}$ .

Si  $N$  est le numéro de la dernière itération, il faut stocker les en mémoire les fonctions  $r_n, i \in V_h, i \in \llbracket 1, d \rrbracket$  et  $1 \leq n \leq N$ , ce qui donne, en supposant les éléments de  $V_h$  représentés selon leur coordonnées avec  $I + 1$  réels,  $(I + 1)Nd$  nombres réels à stocker.

Supposons une représentation séparée de la fonction  $f$

$$f(x_1, \dots, x_d) = \sum_{p=1}^P f_1^p(x_1) \dots f_d^p(x_d)$$

Alors, les coefficients du vecteur  $F = (\int_{\Omega} f \phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_d})$  s'écrivent grâce au théorème de Fubini

$$F_{i_1, \dots, i_d} = \sum_{p=1}^P \prod_{j=1}^d \int_0^1 f_j^p(x) \phi_{i_j}(x) dx$$

et pour les obtenir, il suffit de calculer et stocker les  $Pd(I+1)$  intégrales

$$\int_0^1 f_j^p \phi_i, \quad j \in \llbracket 1, d \rrbracket, i \in \llbracket 0, I \rrbracket, p \in \llbracket 1, P \rrbracket.$$

Si  $f$  n'admet pas de représentation séparée, il faut alors calculer et stocker les  $(I+1)^d$  intégrales  $\int_{\Omega} f \phi_{i_1} \otimes \dots \otimes \phi_{i_d}$ , ce qui fait nettement plus de données.

## 2 Équations d'Euler et convergence de l'algorithme

On considère le problème de minimisation

$$(r_n, s_n) \in \arg \min_{(r,s) \in V_h \times V_h} \mathcal{E}(u_{n-1} + r \otimes s). \quad (5)$$

**Question 5.** On a montré plus haut que la restriction de l'énergie  $\mathcal{E} : C^1(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$  à l'espace  $V_h \otimes V_h$  admet un minimum. Il en est donc de même de  $\mathcal{J} : (r, s) \in V_h \times V_h \mapsto \mathcal{E}(u_{n-1} + r \otimes s)$  quel que soit  $u$  dans  $V$  (puisque  $r \otimes s \in V_h \otimes V_h$ ), et  $(r, s)$  en est un minimum si et seulement si c'en est un point critique.

La différentielle de  $\mathcal{J}$  est

$$\begin{aligned} d_{(r,s)} \mathcal{J}(\delta r, \delta s) &= d\mathcal{E}_{u_{n-1}+r \otimes s} \cdot \underbrace{(d_{(r,s)}(u_{n-1} + r \otimes s)(\delta r, \delta s))}_{=\delta r \otimes s + r \otimes \delta s} \\ &= \int_{\Omega} \nabla(u_{n-1} + r \otimes s) \cdot \nabla(\delta r \otimes s + r \otimes \delta s) + \int_{\Omega} (u_{n-1} + r \otimes s)(\delta r \otimes s + r \otimes \delta s) \\ &\quad - \int_{\Omega} f(\delta r \otimes s + r \otimes \delta s). \end{aligned}$$

On en déduit que  $(r_n, s_n)$  est un point critique de  $\mathcal{J}$  si et seulement si  $d_{(r_n, s_n)} \mathcal{J}(\delta r, \delta s) =$

0 pour tout  $(\delta r, \delta s) \in V_h \times V_h$ , soit

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) + \int_{\Omega} (r_n \otimes s_n)(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) \\ &= \int_{\Omega} f(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) - \int_{\Omega} \nabla u_{n-1} \cdot \nabla(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) - \int_{\Omega} u_{n-1}(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) \end{aligned} \quad (6)$$

Réécrire cela en  $\delta s = 0$  puis  $\delta r = 0$  mène au système

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla(\delta r \otimes s_n) + \int_{\Omega} (r_n \otimes s_n)(\delta r \otimes s_n) &= \int_{\Omega} (f - u_{n-1})(\delta r \otimes s_n) - \int_{\Omega} \nabla u_{n-1} \cdot \nabla(\delta r \otimes s_n) \\ \int_{\Omega} \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla(r_n \otimes \delta s) + \int_{\Omega} (r_n \otimes s_n)(r_n \otimes \delta s) &= \int_{\Omega} (f - u_{n-1})(r_n \otimes \delta s) - \int_{\Omega} \nabla u_{n-1} \cdot \nabla(r_n \otimes \delta s) \end{cases} \quad (d)$$

Intégrer par parties donne alors le système d'équations différentielles couplées

$$\begin{aligned} -r_n''(x) \int_0^1 s_n^2 + r_n(x) \int_0^1 s_n'^2 &= \int_0^1 (f(x, y) + \Delta u_{n-1}(x, y) - u_{n-1}(x, y)) s_n(y) dy \\ -s_n''(y) \int_0^1 r_n^2 + s_n(y) \int_0^1 r_n'^2 &= \int_0^1 (f(x, y) + \Delta u_{n-1}(x, y) - u_{n-1}(x, y)) r_n(x) dx \end{aligned}$$

**Question 6.** Remarquons tout de suite que d'après ce qui précède,  $a$  est un produit scalaire.

- Comme  $u_h$  est solution du problème variationnel (2), nous avons

$$a(u_h, \delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) = \int_{\Omega} f(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s)$$

d'une part. D'autre part, remarquons que la différentielle de  $\mathcal{E}$  se réécrit

$$d\mathcal{E}_u(v) = a(u, v) - \int_{\Omega} f v$$

donc la condition d'extremum portant sur  $(r_n, s_n)$  se réécrit, en remarquant que  $u_n = u_{n-1} + r_n \otimes s_n$

$$\begin{aligned} a(u_n, \delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) &= a(u_{n-1} + r_n \otimes s_n, \delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) \\ &= \int_{\Omega} f(\delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{a(g_n, \delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) = a(u_h - u_n, \delta r \otimes s_n + r_n \otimes \delta s) = 0.}$$

En particulier, avec  $\delta r = r_n$  et  $\delta s = s_n$

$$2a(g_n, r_n \otimes s_n) = 0.$$

- Remarquons que  $g_n + r_n \otimes s_n = u_h - (u_n - r_n \otimes s_n) = u_h - u_{n-1} = g_{n-1}$ , d'où par bilinéarité et symétrie de  $a$

$$\begin{aligned} \boxed{a(g_{n-1}, g_{n-1})} &= a(g_n, g_n) + \underbrace{2a(g_n, r_n \otimes s_n)}_{=0} + a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n) \\ &= \boxed{a(g_n, g_n) + a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n)}. \end{aligned}$$

- La remarque plus haut permet d'écrire

$$\begin{aligned} \boxed{E_n = \mathcal{E}(u_n) - \mathcal{E}(u_{n-1})} &= \frac{1}{2}a(u_n, u_n) - \frac{1}{2}a(u_{n-1}, u_{n-1}) - \int_{\Omega} f(r_n \otimes s_n) \\ &= \frac{1}{2}a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n) + a(u_{n-1}, r_n \otimes s_n) - \int_{\Omega} f(r_n \otimes s_n) \\ &= \boxed{\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(r_n \otimes s_n)|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |r_n \otimes s_n|^2 - \int_{\Omega} f(r_n \otimes s_n) + a(u_{n-1}, r_n \otimes s_n)}. \end{aligned} \tag{e}$$

Il est immédiat que les deux premiers termes du membre de droite valent  $\frac{1}{2}a(r_n \otimes s_n)$ . Remarquons que le membre de gauche de (6) est  $2a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n)$  en  $\delta r = r_n$ ,  $\delta s = s_n$ . Les deux derniers termes du membre de droite de (e) vérifient donc :

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega} f(r_n \otimes s_n) + a(u_{n-1}, r_n \otimes s_n) &= - \int_{\Omega} f(r_n \otimes s_n) + \int_{\Omega} \nabla u_{n-1} \cdot \nabla(r_n \otimes s_n) + \int_{\Omega} u_{n-1}(r_n \otimes s_n) \\ &= -a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n) \end{aligned}$$

On en déduit donc que (e) se réécrit

$$\boxed{E_n = -\frac{1}{2}a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n)}.$$

- On a montré plus haut que  $a(g_{n-1}, g_{n-1}) = a(g_n, g_n) + a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n)$  ce qui entraîne la décroissance, puis la convergence, de la suite de réels positifs  $(a(g_n, g_n))_n$  (puisque  $a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n) \geq 0$ ). Ainsi, la série télescopique  $\sum_{n \geq 1} (a(g_{n-1}, g_{n-1}) - a(g_n, g_n))$ , c'est-à-dire la série

$$\sum_{n \geq 1} a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n),$$

converge. D'après l'identité plus haut, on en déduit la convergence de la série  $-2 \sum_{n \geq 1} E_n$  et l'égalité des sommes.

**Question 7.** Le raisonnement précédent montre que la suite  $(g_n)_{n \geq 1}$  de  $V_h \otimes V_h$  est bornée en norme  $H^1$  (la norme  $v \mapsto \sqrt{a(v, v)}$ ). Notons que cette norme équipe l'espace vectoriel  $V_h \otimes V_h$  d'une structure d'espace normé de dimension finie. D'après théorème de Bolzano-Weierstrass,  $(g_n)$  admet une valeur d'adhérence  $g_{\infty}$  dans  $V_h \otimes V_h$ .

- Comme  $r_n, s_n$  réalise l'optimum (5), on a, pour tous  $(\delta r, \delta s) \in V_h \times V_h$

$$\begin{aligned}
E_n &= \mathcal{E}(u_n) - \mathcal{E}(u_{n-1}) = \mathcal{E}(u_{n-1} + r_n \otimes s_n) - \mathcal{E}(u_{n-1}) \\
&\leq \mathcal{E}(u_{n-1} + \delta r \otimes \delta s) - \mathcal{E}(u_{n-1}) \\
&\leq \frac{1}{2}a(u_{n-1} + \delta r, \delta s, u_{n-1} + \delta r \otimes \delta s) - \frac{1}{2}a(u_{n-1}, u_{n-1}) - \int_{\Omega} f(\delta r \otimes \delta s) \\
&\leq \frac{1}{2}a(\delta r \otimes \delta s, \delta r \otimes \delta s) + a(u_{n-1}, \delta r \otimes \delta s) - \int_{\Omega} f(\delta r \otimes \delta s)
\end{aligned}$$

Notons par ailleurs que comme  $\delta r \otimes \delta s \in V_h \otimes V_h$  et  $u_h$  est solution de (2),

$$a(u_{n-1}, \delta r \otimes \delta s) - \underbrace{\int_{\Omega} f(\delta r \otimes \delta s)}_{=a(u_h, \delta r \otimes \delta s)} = -a(\underbrace{u_h - u_{n-1}}_{=g_{n-1}}, \delta r \otimes \delta s)$$

Enfin, en utilisant l'expression de  $a$

$$E_n \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla(\delta r \otimes \delta s)|^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \delta r \otimes \delta s - a(g_{n-1}, \delta r \otimes \delta s).$$

- Remarquons tout de suite que comme le carré  $a(r_n \otimes s_n, r_n \otimes s_n)$  de la norme  $H^1$  de  $r_n \otimes s_n$  est le terme général d'une série convergente, on a  $r_n \otimes s_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Alors, puisque

$$g_{\varphi(n)-1} = g_{\varphi(n)} + r_{\varphi(n)} \otimes s_{\varphi(n)}$$

on obtient que  $g_{\varphi(n)-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g_{\infty}$ .

De plus,  $E_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$  par convergence de sa série.

Ainsi, l'inégalité démontrée plus haut donne en prenant la sous-suite d'extractrice  $\varphi$

$$\forall (\delta r, \delta s) \in V_h \times V_h \quad 0 \leq -a(g_{n-1}, \delta r \otimes \delta s).$$

Or  $v \mapsto a(g_{n-1}, v)$  est linéaire ; c'est donc une égalité :

$$a(g_{n-1}, \delta r \otimes \delta s) = 0.$$

- Par combinaison linéaire, on en déduit donc que

$$\forall v_h \in V_h \otimes V_h \quad a(g_{\infty}, v_h) = 0$$

donc  $u_{\infty} = u_h - g_{\infty} \in V_h \otimes V_h$  vérifie

$$\forall v_h \in V_h \otimes V_h \quad a(u_{\infty}, v_h) = a(u_h, v_h)$$

d'où  $\boxed{u_{\infty} = u_h}$  puisque  $a$  est un produit scalaire : la méthode converge.

### 3 Implémentation et tests numériques

**Question 8.** On reprend donc le système d'équations d'Euler (d).

- D'abord, la **première équation d'Euler** :

- Les termes du membre de gauche se développent, en utilisant les calculs de la question (2), avec  $\delta r = \phi_k$ :

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \nabla(r_n \otimes s_n) \cdot \nabla(\phi_k \otimes s_n) + \int_{\Omega} (r_n \otimes s_n)(\phi_k \otimes s_n) &= \\
 &= \sum_{i,j=0}^I [R_n]_i [S_n]_j \sum_{\ell=0}^I [S_n]_{\ell} \left( \int_{\Omega} \nabla(\phi_i \otimes \phi_j) \cdot \nabla(\underbrace{\phi_k}_{\delta r} \otimes \phi_{\ell}) + \int_{\Omega} (\phi_i \otimes \phi_j)(\underbrace{\phi_k}_{\delta r} \otimes \phi_{\ell}) \right) \\
 &= \sum_{i=0}^I [R_n]_i \sum_{j,\ell} [S_n]_j [S_n]_{\ell} (D_{i,k} M_{j,\ell} + M_{i,k} D_{j,\ell} + M_{i,k} M_{j,\ell}) \\
 &= [\widetilde{\mathcal{M}} R_n]_k
 \end{aligned}$$

avec la matrice

$$\widehat{\mathcal{M}}_{k,i} = \sum_{j,\ell} [S_n]_j [S_n]_k (D_{i,k} M_{j,\ell} + M_{i,k} D_{j,\ell} + M_{i,k} M_{j,\ell})$$

On remarquera que pour tout  $V \in \mathbb{R}^{I+1}$  on a

$$V^T D V = \sum_{j,\ell} V_j D_{j,\ell} V_{\ell}$$

et quelque chose de semblable pour  $V^T M V$ , d'où

$$\widehat{\mathcal{M}}_{\ell,i} = (S_n^T M S_n) D_{i,k} + (S_n^T D S_n) M_{i,k} + (S_n^T M S_n) M_{i,k} = [\mathcal{M}(S_n)]_{\ell,i}$$

et  $\widehat{\mathcal{M}} = \mathcal{M}(S_n)$ :

le membre de gauche est  $\mathcal{M}(S_n) R_n$ .



– Quant au membre de droite. En  $\delta r = \phi_k$ , toujours, le premier terme est

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f \phi_k \otimes s_n &= \sum_{p=1}^P \int_{\Omega} f_1^p(x) f^p(y) \sum_{i=0}^I [S_n]_i \phi_k \otimes \phi_i \\
&= \sum_{p=1}^P \sum_{i=0}^I [S_n]_i \int_0^1 f_1^p \phi_k \int_0^1 f_2^p \phi_i \\
&= \sum_{p=1}^P \sum_{i=0}^I [S_n]_i [F_1^p]_k [F_2^p]_i \\
&= \sum_{p=1}^P (S_n^T F_2^p) [F_1^p]_k
\end{aligned}$$

Les deux autres termes s'écrivent

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \nabla u_{n-1} \cdot \nabla (\phi_k \otimes s_n) + \int_{\Omega} u_{n-1} (\phi_k \otimes s_n) &= \sum_{t=1}^{n-1} \left( \int_{\Omega} \nabla (r_t \otimes s_t) \cdot \nabla (\phi_k \otimes s_n) + \int_{\Omega} (r_t \otimes s_t) (\phi_k \otimes s_n) \right) \\
&= \sum_{t=1}^{n-1} ((S_n^T D S_k) M + (S_n^T M S_k) D + (S_n^T M S_k) M) R_k
\end{aligned}$$

en réutilisant les calculs précédents.

On en déduit ainsi que le membre de droite s'écrit

$$\sum_{p=1}^P (S_n^T F_2^p) F_1^p - \sum_{t=1}^{n-1} ((S_n^T D S_k) M + (S_n^T M S_k) D + (S_n^T M S_k) M) R_k = \boxed{\mathcal{F}_n(S_n)}$$

En conclusion, la première équation d'Euler se réécrit sous forme matricielle :

$$\boxed{\mathcal{M}(S_n) R_n = \mathcal{F}_n(S_n)}$$

- Le raisonnement est parfaitement analogue pour la seconde équation d'Euler :

$$\boxed{\mathcal{M}(R_n) S_n = \mathcal{G}_n(R_n)}$$

**Question 9.**