Introduction au calcul stochastique.
Modèles stochastiques en finance.

PC 2 - 26 septembre 2018

Aurélien Alfonsi—Thibaut Mastrolia

Mouvement brownien

Dans toute la feuille, W est un mouvement brownien standard.

EXERCICE 1 - Encore une définition du mouvement Brownien

1. Soit W un mouvement brownien standard. Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le processus

$$M_t^\alpha = \exp\left(\alpha W_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)$$

   est une $\mathbb{F}^W$-martingale, où $\mathbb{F}^W$ est la filtration naturelle engendrée par le processus W.

2. Soit X un processus continu avec $X_0 = 0$ et tel que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, le processus

$$M_t^\alpha = \exp\left(\alpha X_t - \frac{\alpha^2}{2}t\right)$$

   est une $\mathbb{F}^X$-martingale (où $\mathbb{F}^X$ est la filtration naturelle engendrée par le processus X). Montrer que X est un mouvement brownien standard.

EXERCICE 2 - Trajectoires du mouvement brownien

1. On cherche à démontrer que le mouvement brownien est récurrent à l'infini avec des excursions de plus en plus grandes : $\limsup_{t\to\infty} W_t = +\infty$ et $\liminf_{t\to\infty} W_t = -\infty$.
   (a) On pose $S_t := \sup_{u\geq t} W_u$, montrer que $S_t - W_t$ a même loi que S_0 et est indépendante de W_t.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}(S_0 \geq x) = 1$.
   (c) Conclure que $\limsup_{t\to\infty} W_t = +\infty$ puis que $\liminf_{t\to\infty} W_t = -\infty$.
2. En utilisant l'inversion du temps vu en PC1, déduire que pour presque toutes les trajectoires, l'équation $W_t = 0$ a une infinité de solutions dans tout voisinage de $t = 0$.
3. Soit W un mouvement Brownien, $A > 0$ et $\tau := \inf\{t : W_t \geq A\}$. En utilisant la propriété de Markov forte et le résultat précédent, décrire le comportement de W immédiatement après τ. En déduire que le dernier temps d'atteinte de A sur l'intervalle $[0, 1]$ ne peut pas être un temps d'arrêt.

EXERCICE 3 - L'objectif de cet exercice est de montrer que $\frac{W_t}{t}$ converge presque sûrement vers 0 lorsque t tend vers l'infini.

1. Pourquoi la suite $\left(\frac{W_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle presque sûrement vers 0 lorsque n tend vers l'infini ?
2. Vérifier que pour $t \in [n, n+1]$,

$$\left|\frac{W_t}{t}\right| \leq \left|\frac{W_n}{n}\right| + \frac{\sup_{t\in[n,n+1]} |W_t - W_n|}{n}.$$

3. Pourquoi les variables aléatoires $\left(X_n = \sup_{t\in[n,n+1]}(W_t - W_n)^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sont-elles identiquement distribuées ?
   Vérifier que $X_0 \le (\sup_{t\in[0,1]} W_t)^2 + (\sup_{t\in[0,1]} -W_t)^2$ et en déduire que $\mathbb{E}(X_0) \le 2$.
4. Montrer que $\mathbb{E}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{X_n}{n^2}\right) < +\infty$. En déduire que la suite $\left(\frac{X_n}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge presque sûrement vers 0 et conclure.

EXERCICE 4 - Les trajectoires browniennes sont höldériennes d'exposant $\frac{1}{2}^-$.
Nous allons justifier que pour tout $\alpha < \frac{1}{2}$, il existe une variable aléatoire C_α (positive et finie), telle que

$$|W_t - W_s| \le C_\alpha |t-s|^\alpha, \quad \forall (s,t) \in [0,1]. \tag{1}$$

Pour cela, nous rappelons le lemme (de nature déterministe) de Garsia-Rodemich-Rumsey (*Indiana University Mathematics Journal*, 20(6) :565–578, 1970). Pour une fonction continue f, posons $A_f = \int_0^1\int_0^1 \frac{|f(s)-f(u)|^\gamma}{|s-u|^{m+2}}\, ds\, du$ avec $m > 0$ et $\gamma > 0$. Alors

$$|f(t) - f(s)| \le 8A_f^{1/\gamma}\frac{m+2}{m}\,|t-s|^{m/\gamma}, \quad \forall (s,t) \in [0,1].$$

1. Donner une condition suffisante sur m et γ pour que la variable aléatoire A_W prenne presque sûrement des valeurs finies.
2. En déduire le résultat (1) cherché.

EXERCICE 5 - Soit $t_i^{(n)} = \{\frac{it}{2^n}, 0 \le i \le 2^n\}$ la subdivision dyadique de $[0,t]$ d'ordre n. Les deux limites suivantes S_1 et S_2 sont des candidats naturels pour définir $\int_0^t W_s\, dW_s$.

1. Calculer
$$\mathcal{S}_1 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{2^n-1} W_{t_i^{(n)}}(W_{t_{i+1}^{(n)}} - W_{t_i^{(n)}}).$$
2. Calculer
$$\mathcal{S}_2 = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{2^n-1} W_{t_{i+1}^{(n)}}(W_{t_{i+1}^{(n)}} - W_{t_i^{(n)}}).$$
3. En considérant les espérances, montrer que l'on pouvait s'attendre à ces résultats différents.