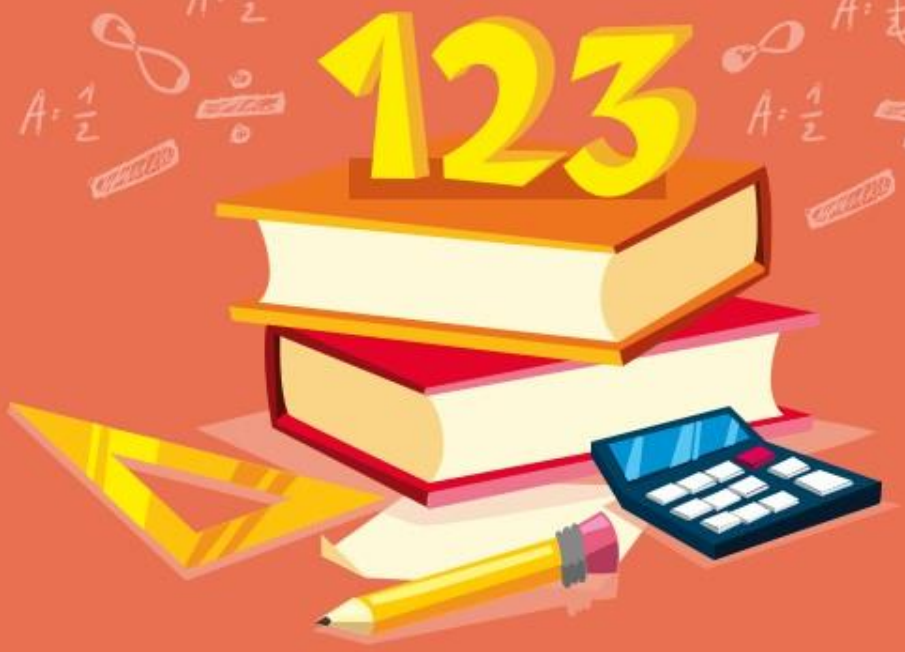
৯ম শ্রেণি একাডেমিক প্রোগ্রাম ২০২০

সাধারণ গণিত

লেকচার : M-31

অধ্যায় ১২ : দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ



সরল সহসমীকরণ

সমীকরণ জিনিসটি সম্পর্কে আমরা আগেও অনেক জেনেছি। তাই ছোট করে আরেকবার মনে করে নেওয়া যাক। আমরা জানি, রাশি হলো একাধিক পদের সমাবেশ। অর্থাৎ অনেকগুলো পদ মিলে রাশি গঠন করে। ঠিক তেমনই, সমীকরণ হলো দুটি রাশির সমাবেশ। শুধু একটি শর্ত থাকে, রাশি দুটিকে সমান চিহ্নের মাধ্যমে আলাদা থাকা লাগে। আমরা সবসময় সমীকরণ থেকে চলক বা চলকগুলোর সমাধান বা মান বের করার চেষ্টা করি। এটাই মূলত সমীকরণের মাহাত্ম্য।

এখন দুই চলকবিশিষ্ট সরল সহসমীকরণ নামটি থেকেই আমরা কিছু জিনিস বুঝতে পারি। এমন ধরনের সমীকরণে চলক থাকে 2 টি। যেহেতু দুইটি চলক, তাই বুঝতে পারি যে এখানে একটি সমীকরণের ক্ষেত্রে চলকের হাজার হাজার মান হতে পারে।

যেমন একটি উদাহরণ দেওয়া যাক। ধরি, $2x + y = 12$ একটি দুই চলকের সমীকরণ। এখানে আমরা x, y এর অসংখ্য মান বসিয়ে দুপাশকে সত্য বলতে পারবো। যেমন, $x = 3, y = 6$ কিংবা $x = 9, y = -6$। এভাবে হাজারটা বলা যায়। আবার, আরেক যেকোনো সমীকরণ $x - y = 3$ এর ক্ষেত্রেও এমন হাজার মান পাওয়া যায় দুই চলকের। অর্থাৎ, এই সমীকরণগুলো আলাদা আলাদা ভাবে স্বাধীন ও চলকের কোনো নির্দিষ্টমান থাকে না। কিন্তু যখন এই দুইটি জোড়ায় থাকবে, অর্থাৎ এদের চলকগুলো দুটির ক্ষেত্রেই একই হলে সব মানই কিন্তু একইসাথে দুইটিকে সন্তুষ্ট করতে পারে না, শুধুমাত্র $x = 5, y = 2$ ছাড়া। এজন্যই ওদের সরল সহসমীকরণ বলা হয়ে থাকে।

সরল সহসমীকরণ সমাধানের যোগ্যতা

আমরা দেখলাম, যদি কোনো দুই চলকের সমীকরণ জোড়ায় রাখা হয়, তাহলে তা দুটি চলকেরই একটি সমাধান দেয়। কিন্তু এটা সবসময় না। তাই সমাধান দেওয়ার যোগ্যতার উপরে সমীকরণকে তিন ভাগে ভাগ করা যায়।

সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীলঃ এমন ধরনের সমীকরণগুলো সম্পর্কে আমরা বেশি পরিচিত, একটু আগে যে সমীকরণ দুইটি সম্পর্কে বলা হয়েছে, তারা এমন ধরনের। সমঞ্জস বলার কারণ হলো, তারা সমাধান দিতে পারে। আর অনির্ভরশীল বলার কারণ হলো, তারা একে অপরের উপর নির্ভর করে তৈরি হয় না। এমন সমীকরণদ্বয়ের একটাই সমাধান থাকে।

সমঞ্জস ও পরস্পর নির্ভরশীলঃ উদাহরণ হিসেবে $2x - y = 6$ এবং $4x - y = 12$ এই দুটি সমীকরণ ধরা যাক। এই দুইটি সমীকরণ থেকে কিন্তু আমরা একটা জিনিস লক্ষ্য করতে পারি। এখানে প্রথম সমীকরণের দুইপাশ দ্বিগুণ করলেই কিন্তু দ্বিতীয় সমীকরণটি পাওয়া যায়। মানে, আমরা কিন্তু ঘুরেফিরে একটা সমীকরণেরই সমাধান করছি। আর আমরা জানি, দুই চলকের একটি সমীকরণ সমাধান করা মানে অসংখ্য সমাধান পাওয়া। এমন সমীকরণকে সমঞ্জস ও নির্ভরশীল বলা হয়, আর এমন সমীকরণদ্বয়ের অসংখ্য সমাধান থাকে।

অসমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীলঃ এখন $2x + y = 12$ ও $4x + 2y = 5$ নিয়ে ভাবা যাক। এটার প্রথমটার দুপাশকে দ্বিগুণ করলে সমীকরণ দুটির বামপাশ সমান হয়ে গেলেও কখনো ডানপাশ সমান হয় না। এটা থেকে একটি জিনিস বুঝা যায় যে, এই সমীকরণ দুটি থেকে কোনো ধরনের সমাধান আমরা পাবো না। এ ধরনের সমীকরণদ্বয়কে অসমঞ্জস ও অনির্ভরশীল বলা হয়। এ ধরনের সমীকরণের কোনো সমাধান নেই।

Case: 01

$$2x+3y=5 \quad \text{(i)}$$
$$4x+6y=9 \quad \text{(ii)}$$

(i) $\times 2$ − (ii)

$$\cancel{4x}+\cancel{6y}=10$$
$$\cancel{4x}+\cancel{6y}=9$$

$$0=1$$

~~সমাধান নাই~~

Case: 02

$$x+3y=11 \quad \text{(i)}$$
$$3x+9y=33 \quad \text{(ii)}$$

(i) $\times 3$ − (ii)

$$\cancel{3x}+\cancel{9y}=\cancel{33}$$
$$\cancel{3x}+\cancel{9y}=\cancel{33}$$

$$0=0$$

~~সমাধানের সেট~~

Case: 03

$$2x+5y=3 \quad \text{(i)}$$
$$5x+2y=1 \quad \text{(ii)}$$

(i) $\times 5$ − (ii) $\times 2$

$$10x+25y=15$$
$$10x+4y=2$$

$$21y=13$$
$$y=\frac{13}{21}$$

$$5x+2\cdot\frac{13}{21}=1$$

বা, $5x+\frac{26}{21}=1$

বা, $5x=\frac{5}{21}$

$\therefore x=\frac{5}{105}$

সমাধান আছে

সরল সহসমীকরণ সমাধানের যোগ্যতা

এখন আমরা নাহয় সমীকরণগুলোকে আলাদা ভাগে ভাগ করলাম। কিন্তু কোনো সমীকরণ দেওয়া থাকলে তারা কোন ভাগে পড়বে, তা বের করাটা সময়সাপেক্ষ। তাই খুব সহজে এদেরকে বের করার একটি উপায় আছে। যদি আমাদের সমীকরণ $a_1x + b_1y = c_1$ ও $a_2x + b_2y = c_2$ আকারের হয়, তাহলেঃ

	সমীকরণজোট	সহগ ও ধ্রুবক পদ তুলনা	সমঞ্জস/ অসমঞ্জস	পরস্পর নির্ভরশীল/ অনির্ভরশীল	সমাধান আছে (কয়টি)/নেই
(i)	$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	সমঞ্জস	অনির্ভরশীল	আছে (একটিমাত্র)
(ii)	$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$	সমঞ্জস	নির্ভরশীল	আছে (অসংখ্য)
(iii)	$a_1x + b_1y = c_1$ $a_2x + b_2y = c_2$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	অসমঞ্জস	অনির্ভরশীল	নেই

এবার আমরা আমাদের দেওয়া উদাহরণগুলোর সাথে মিলাই। ১ম ক্ষেত্রে অনুপাত হয় $\frac{2}{1} \neq \frac{1}{-1}$, যা সমঞ্জস ও অনির্ভরশীল ২য় ক্ষেত্রে অনুপাত হয় $\frac{2}{4} = \frac{-1}{-2} = \frac{6}{12}$, যা সমঞ্জস ও নির্ভরশীল ৩য় ক্ষেত্রে অনুপাত হয় $\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \neq \frac{12}{5}$, যা অসমঞ্জস ও অনির্ভরশীল।

Case : 01

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$a_1 \quad b_1 \quad c_1$

$4x + 6y = 10 \rightarrow 4$

$4x + 6y = 9 \rightarrow 11$

$a_2 \quad c_2$

$0 = 1$

ধ্রুবক

চলক

$a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$a_2x + b_2y + c_2 = 0$

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}}$$

সমাধান → অসামঞ্জস্য → কোনো সমাধান নাই

$$\frac{4}{4} = \frac{6}{6} \neq \frac{10}{9}$$

Case : 02

$x + 3y = 11 \quad \times 3$

$3x + 9y = 33$

$0 = 0$

সমীকরণ দুইটি

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$

সমাধান → সামঞ্জস্য → সমাধান আছে

অসংখ্য আছে

সমাধান - পরস্পর নির্ভরশীল

Case : 03

$\cancel{\frac{c_1}{c_2}}$

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

সমাধান

সামঞ্জস্য

১টি সমাধান

অনির্ভরশীল

Poll Question- 01

- $2x + y = 6, 6x - ay = 5$ সমীকরণদ্বয়ের কোনো সমাধান না থাকলে a এর মান কত?

(a) 3

(b) -6

(c) -3

(d) 6

$a_1 - 2x + 1y = 6$ (b_1)

$a_2 - 6x - ay = 5$ (b_2)

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$

$\frac{2}{6} = \frac{1}{-a}$

$\frac{1}{3} = \frac{1}{-a}$

$-a = 3$

$\therefore a = -3$

অনুশীলনী ১২.১

নিচের সমীকরণগুলো কেমন ও তাদের কয়টি সমাধান থাকবে?

$a_1 \quad b_1 \quad c_1$

$2x + y = 3$

$4x + 2y = 6$

$a_2 \quad b_2 \quad c_2$

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$

ক, $\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

খ, $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$

সমঞ্জস
নির্ভরশীল
অসংখ্য

$x - y - 4 = 0$

$3x - 3y - 10 = 0$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$

$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5}$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ অসমঞ্জস

$3x + 2y = 0$

$9x - 6y = 0$

$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$

$\frac{b_1}{b_2} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3}$

$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$

সমঞ্জস
১টি
অনির্ভরশীল

সরল সহসমীকরণ সমাধান পদ্ধতি

আমরা এর আগে দুই চলকের সমীকরণ সমাধান করা শিখেছি। প্রতিস্থাপন ও অপনয়ন পদ্ধতি নিয়ে যেহেতু আগেও আমরা শিখে এসেছি, তাই ছোট করে আরেকবার বলা যাক।

প্রতিস্থাপন পদ্ধতিঃ এই পদ্ধতিতে যেকোনো একটি সমীকরণ থেকে যেকোনো এক চলকের মান অন্য চলকের মাধ্যমে বের করে নেওয়া হয়। এরপর অন্য সমীকরণে প্রথম চলকের প্রকাশিত মানটি প্রতিস্থাপিত করলে সমীকরণে শুধু একটিই চলক থাকে, এতে খুব সহজে চলকগুলোর মান বের করা যায়।

অপনয়ন পদ্ধতিঃ এই পদ্ধতিতে দুইটি সমীকরণেই যেকোনো একটি চলকের সহগ সমান করতে হবে। অর্থাৎ যেকোনো একটি চলকের সহগ যেন দুইটি সমীকরণেই সমান হবে। গুণ বা ভাগের মাধ্যমে এই সহগ সমান করা হয়। এই সহগ সমান করার ফলে একটি সুবিধা হয়, সেটা হলো এখন সমীকরণ দুটিকে একটি থেকে আরেকটি বিয়োগ করলে সমান সহগযুক্ত চলক বাদ পড়ে যায়, আর আবারো শুধু একটি চলকই থাকে সমীকরণে। এতে খুব সহজেই চলকগুলোর মান বের করা যায়।

Poll Question- 02

- $\frac{1}{3(x+y)} = \frac{1}{5(x-y)}, 3x - 11y = 4$ সমীকরণ দুটির সমাধান কী হবে?

(a) (1, 4)

(b) (5, 6)

(c) (4, 16)

(d) (16, 4)

$$\frac{1}{3(x+y)} = \frac{1}{5(x-y)}$$

বা, $3(x+y) = 5(x-y)$

বা, $3x+3y = 5x-5y$

বা, $8y-2x=0$

$\therefore x = 4y$

$= 4\times 4$

$= 16$

$3x - 11y = 4$

$3.(4y) - 11y = 4$

$12y - 11y = 4$

$\therefore y = 4$

আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান

এই পদ্ধতি মূলত একটি সূত্রের মতো। আগের দুটি পদ্ধতিতে আমরা সমীকরণকে কেটে ছেটে আমাদের মনমতো আকৃতিতে নিয়ে সমাধান করতাম। এক্ষেত্রে আমাদের সমীকরণকে খুব একটা বদলাতে হবে না। শুধু আমাদের সাধারণ সমীকরণের চেহারাটা কিছুটা বদলাবে।

এক্ষেত্রে আমাদের সাধারণ সমীকরণ হবে $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ এবং $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

তাই সমীকরণ এই পদ্ধতিতে সমাধান করতে হলে সমীকরণ দুটিকে এই সাধারণ সমীকরণের আকৃতিতে নিয়ে যেতে হবে।

তাহলে এমন সাধারণ সমীকরণের জন্য সূত্র হলোঃ $\frac{x}{b_1c_2 - b_2c_1} = \frac{y}{c_1a_2 - c_2a_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

এখান সূত্রের প্রথম ও তৃতীয় অংশ থেকে পাই, $x = \frac{b_1c_2 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

আবার সূত্রের দ্বিতীয় ও তৃতীয় অংশ থেকে পাই, $y = \frac{c_1a_2 - c_2a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$

এটা অনেকাংশে অপনয়নের মতোই।

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \quad \text{--- (i)}$$
$$a_2x + b_2y + c_2 = 0 \quad \text{--- (ii)}$$

(i) $\times b_2$ $-$ (ii) $\times b_1$

$$a_1b_2x + \cancel{b_1b_2y} + c_1b_2 = 0$$
$$a_2b_1x + \cancel{b_1b_2y} + c_2b_1 = 0$$

$$x(a_1b_2 - a_2b_1) + (c_1b_2 - c_2b_1) = 0$$

$$x(a_1b_2 - a_2b_1) = b_1c_2 - c_1b_2$$

$$\frac{x}{b_1c_2 - c_1b_2} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

(i) $\times a_2$ $-$ (ii) $\times a_1$

$$\cancel{a_1a_2x} + b_1a_2y + c_1a_2 = 0$$
$$\cancel{a_2a_1x} + a_1b_2y + c_2a_1 = 0$$

$$y(b_1a_2 - a_1b_2) + (c_1a_2 - c_2a_1) = 0$$

$$\frac{y}{a_1c_2 - a_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$\boxed{\frac{x}{b_1c_2 - c_1b_2} = \frac{y}{a_1c_2 - a_2c_1} = \frac{1}{a_1b_2 - a_2b_1}}$$

আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান

$6x - y = 1$
$3x + 2y = 13$

$$\underset{a_1}{6}\cdot x - \underset{b_1}{1}\,y \underset{c_1}{-1} = 0$$

$$\underset{a_2}{3}\cdot x + \underset{b_2}{2}\cdot y \underset{c_2}{-13} = 0$$

$$x = \frac{b_1c_2 - c_1b_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$y = \frac{c_1a_2 - a_1c_2}{a_1b_2 - a_2b_1}$$

$$x = \frac{(-1\times-13) - (-1\times2)}{6\times2 - (-1\times3)} = \frac{13+2}{12+3} = \frac{\cancel{15}}{\cancel{15}} = 1$$

$$y = \frac{(-1\times3) - (6\times-13)}{15} = \frac{-3+78}{15} = \frac{\cancel{75}\,5}{\cancel{15}} = 5$$

$x = 1,\quad y = 5$

Poll Question- 03

- $3x + 2y = 13, 4x - 9y = -6$ সমীকরণ দুটির ক্ষেত্রে নিচের কোনটি সঠিক?

(a) $\frac{x}{2} = \frac{y}{3}$

(b) $\frac{x}{4} = \frac{y}{9}$

(c) $\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$

(d) $\frac{x}{9} = \frac{y}{4}$

$3x + 2y = 13$ — (i)
$4x - 9y = -6$ — (ii)

(i) $\times 4$ − (ii) $\times 3$

$12x + 8y = 52$
$12x - 27y = -18$

$35y = 70$

$y = \frac{70}{35} = 2$

$3 \cdot x + 2 \cdot 2 = 13$
$3x = 13 - 4$
$3x = 9$
$x = 3$

$x = 3$
$y = 2$

$\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$

$\frac{x}{3} = \frac{y}{2}$

না বুঝে
মুখস্থ করার
অভ্যাস প্রতিভাকে
ধ্বংস করে