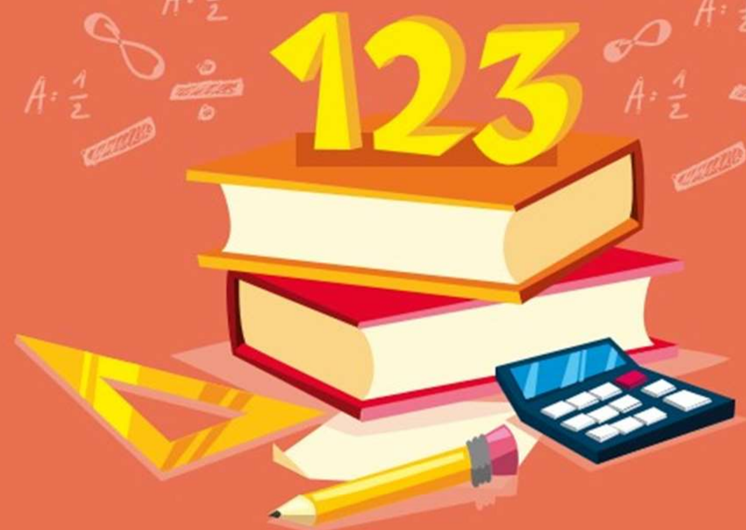
৯ম শ্রেণি একাডেমিক প্রোগ্রাম ২০২০

উচ্চতর গণিত

লেকচার : HM-33

অধ্যায় ১১ : স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

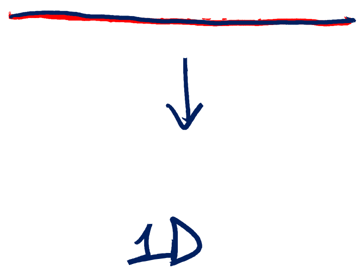
Hello!

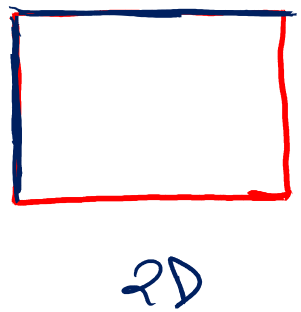


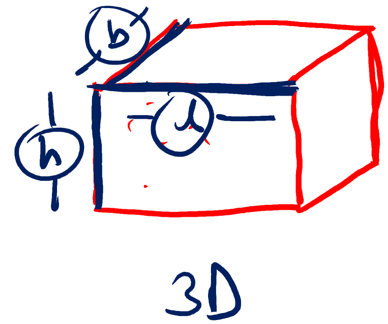
উদ্ভাস
একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

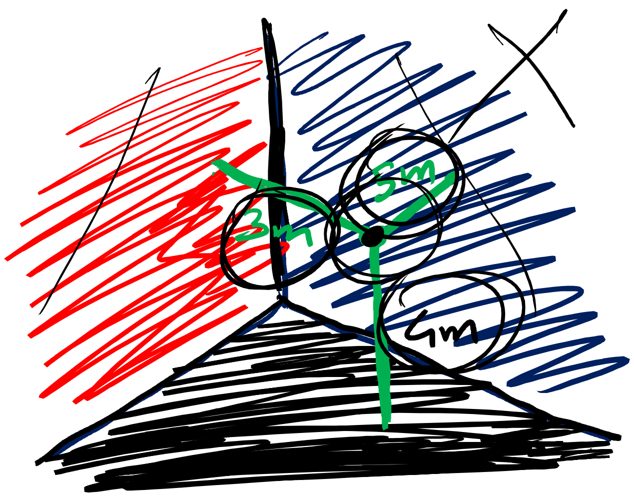
www.udvash.com

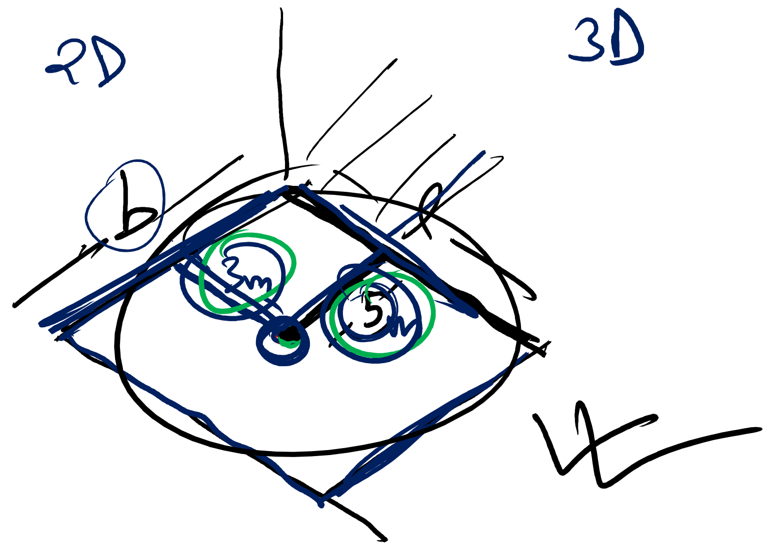
WHITEBOARD











আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

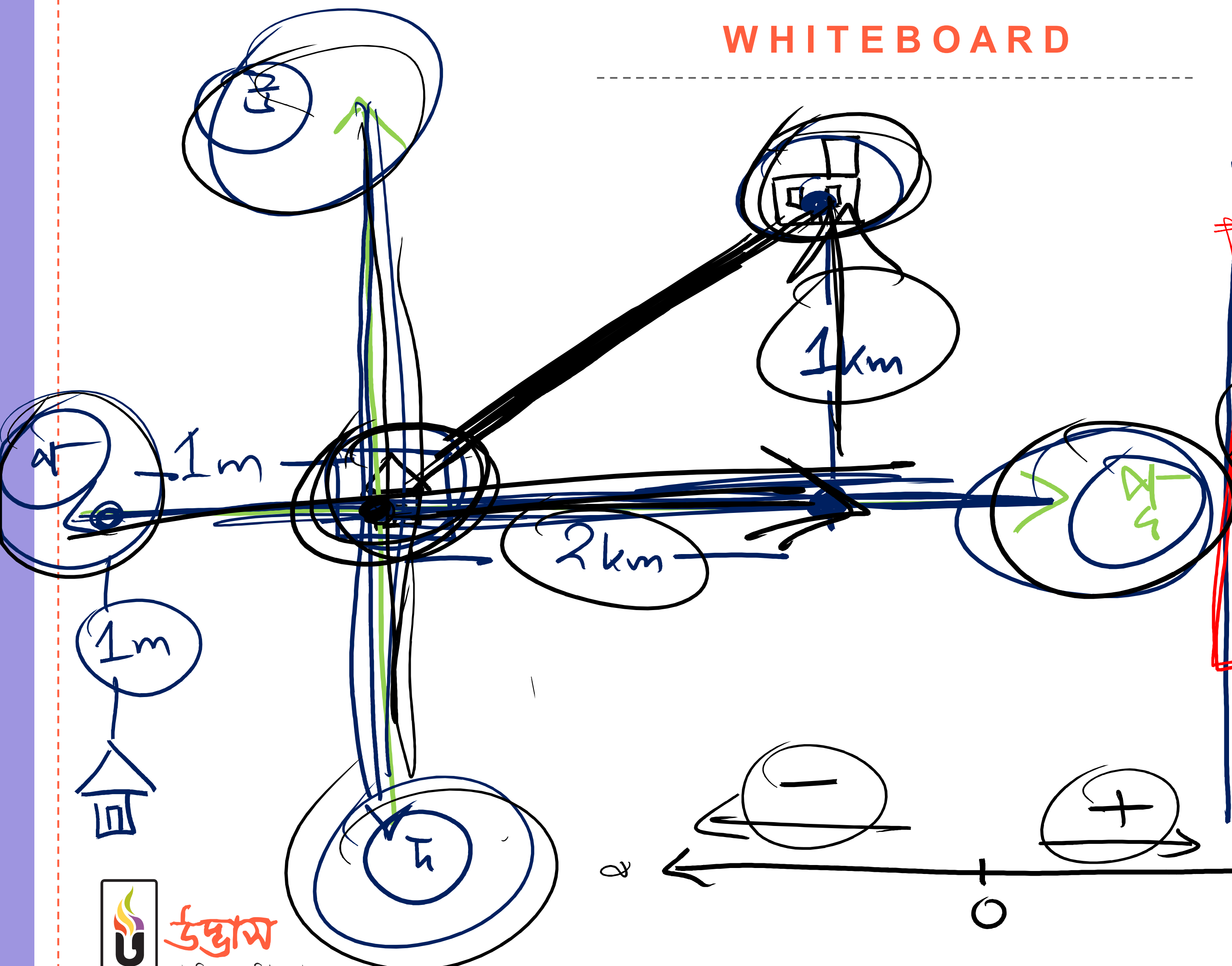
আমরা জানি, আমাদের জ্যামিতিক ক্ষেত্রে সবচেয়ে ছোট একক হলো বিন্দু। অর্থাৎ, অসংখ্য বিন্দু মিলে এক রেখা তৈরি করে, এরকম অসংখ্য রেখা মিলে তৈরি করে একটা তল, আর এরকম অসংখ্য তল পাশাপাশি একসাথে তৈরি করে শূন্য বা স্পেস। এখন, সবকিছুর মূলে যেহেতু একটা বিন্দু রয়েছে, তাহলে এত রেখা, এত তল, এত শূন্যের মাঝে একটা বিন্দুকে আলাদাভাবে কীভাবে চিহ্নিত করা যায়? ফরাসী গণিতবিদ "রেনে দেকার্তে" এই বিন্দু চিহ্নিত করার একটা সহজ পদ্ধতি বের করেছিলেন।

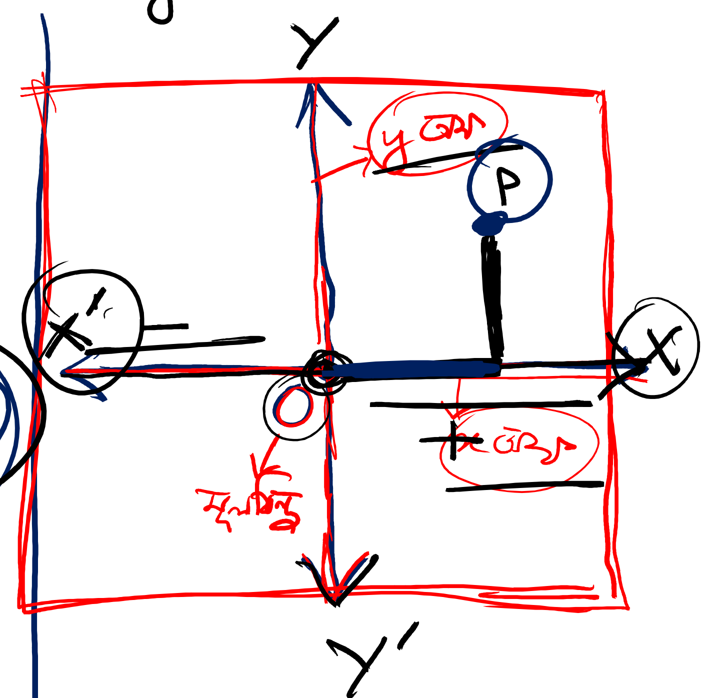
কোনো বিন্দুকে একটা তলের মধ্যে চিহ্নিত করার জন্য আমাদের একটা আদর্শ বিন্দু বা রেখা ধরতে হবে। আদর্শ রেখা ধরার কারণ হলো, সেই রেখা বা বিন্দুর সাথে দুরত্ব তুলনা করে আমরা সেই বিন্দুটাকে সঠিকভাবে চিহ্নিত করতে পারবো। সহজ কথায়, যদি অজানা বিন্দুটা কোনো অচেনা শহর হয়, তাহলে রেখা বা পরিচিত বিন্দুটা হবে একটা সেন্টার পয়েন্টের মতো, যেখান থেকে বাকি সব জায়গার দুরত্ব মাপা হয়।

"রেনে দেকার্তেকে" সম্মান জানিয়ে এই পদ্ধতিকে বলা হয় আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক।

x অক্ষ = XOX'

y অক্ষ = YOY'

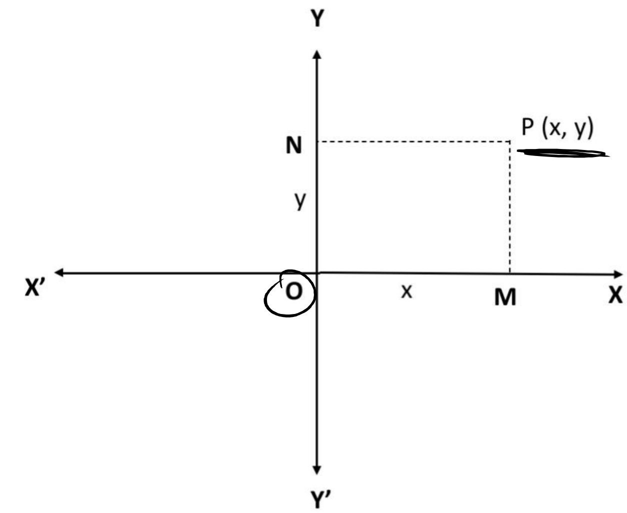




আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

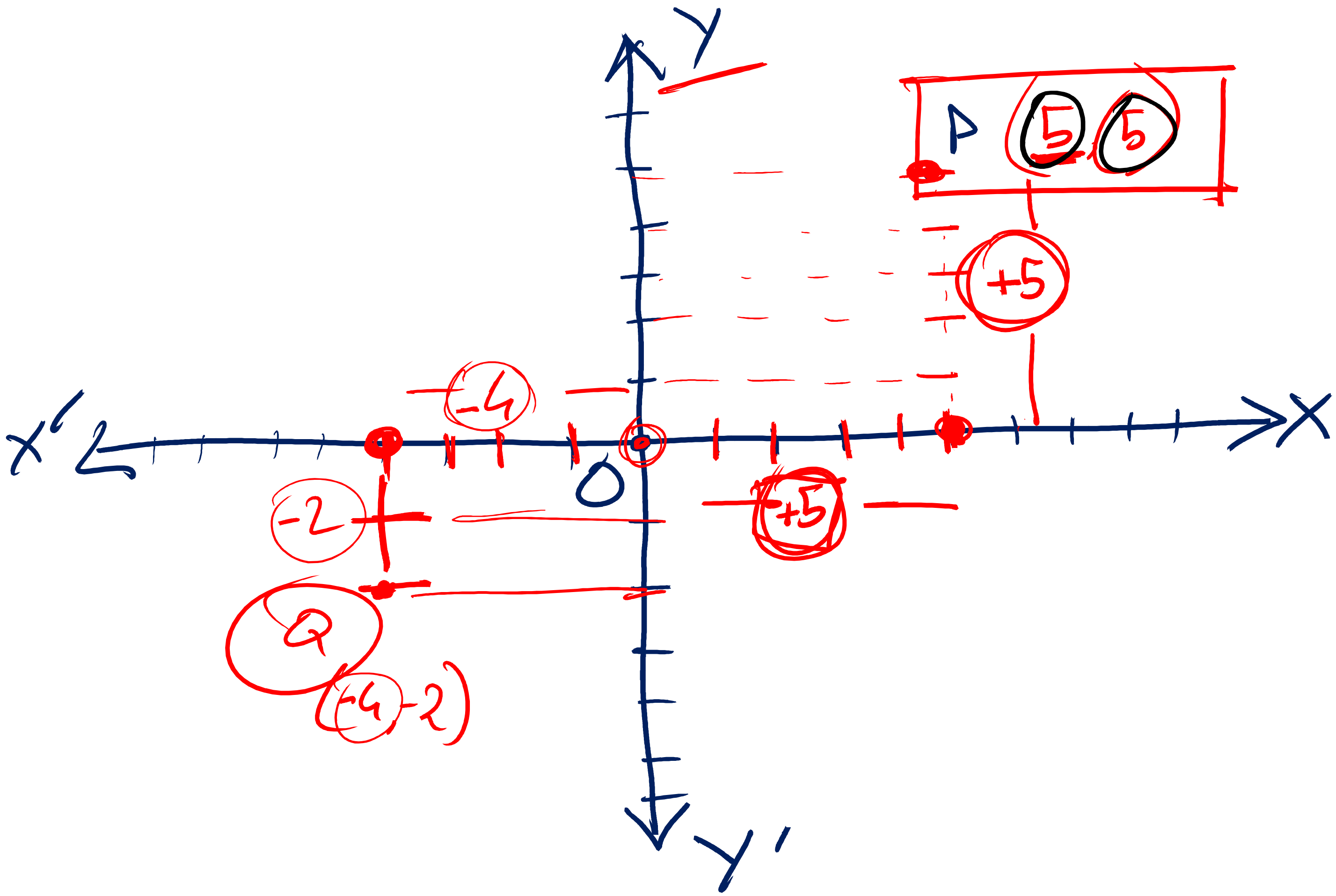
দেকার্তেকে সম্মান করে কার্তেসীয় নাম দেওয়া হয়েছে, এটা আমরা বুঝলাম, কিন্তু আয়তাকার কেন? সেটা বুঝা যাক।

আমরা জানি, একটা দ্বিমাত্রিক তলের জন্য মাত্রা দুটি হলো দৈর্ঘ্য বরাবর এবং প্রস্থ বরাবর। অর্থাৎ আমাদের দুটো আদর্শ রেখা লাগবে, যারা দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বরাবর অবস্থান বের করতে সাহায্য করবে। একটিকে ধরে নিই XX' রেখা, যেখান থেকে আনুভূমিক অবস্থানের শুরু। অর্থাৎ, এই রেখার ডানপাশের সব ধনাত্মক অবস্থান, ও বামপাশের অংশে ঋণাত্মক অবস্থান, সংখ্যা রেখার মতো। একইভাবে, আরেকটা মাত্রার জন্য YY' আরেকটা রেখা, যার উপরের অংশ ধনাত্মক ও নিচেরটা ঋণাত্মক। এরা O বিন্দুতে ছেদ করে।



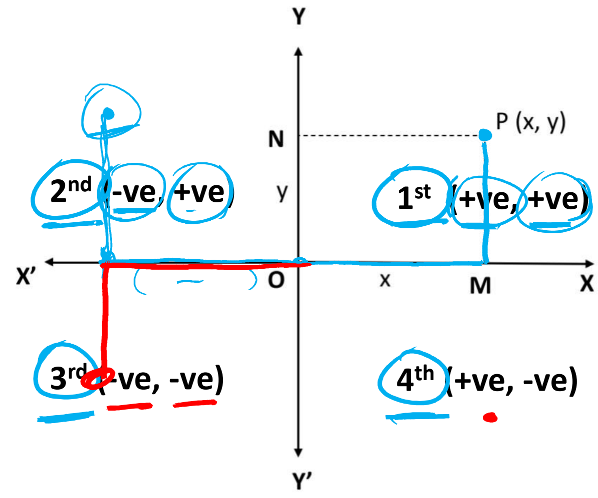
মজার কথা হলো, এখানে একটা রেখা অন্যটার জন্য সীমান্ত হিসেবে কাজ করছে। যেমন, XX' এর মাঝ বরাবর YY' রেখাটার কারণে XX' এর ধনাত্মক ও ঋণাত্মক অংশ আলাদা আছে। আবার XX' এর কারণেও YY' এর অংশগুলো আলাদা আছে। যেকোনো একটা বিন্দুর অবস্থান জানতে হলে এই দুটি রেখা থেকে বিন্দুর দুরত্ব জানলেই হবে।

WHITEBOARD



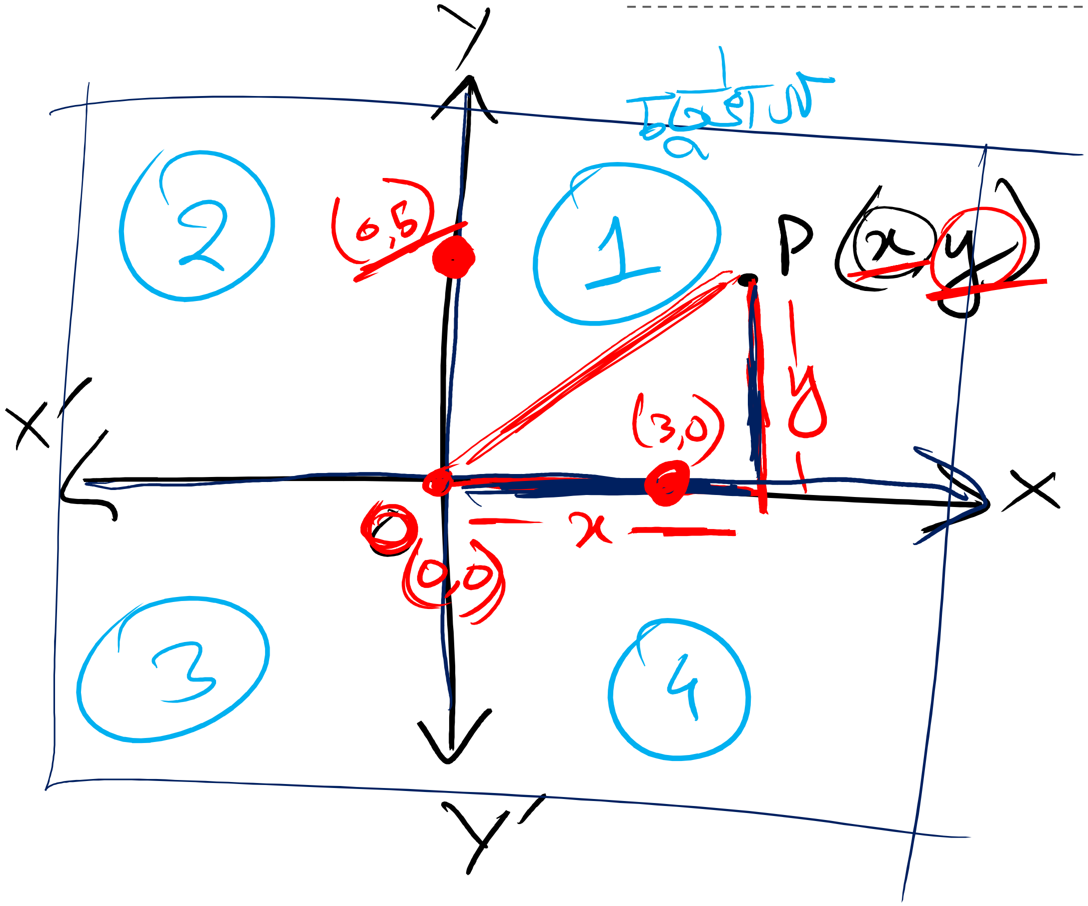
আয়তাকার কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক

যেমন, পাশের চিত্রে P একটি বিন্দু। আমরা এটার অবস্থান বের করতে চাই।
এখন XX' (যাকে X অক্ষ বা আনুভূমিক অক্ষ বলা হয়) থেকে এটার দুরত্ব হলো PM, এবং, YY' (যাকে Y অক্ষ বা উল্লম্ব অক্ষ বলা হয়) থেকে এটার দুরত্ব PN।
এখন, যেহেতু অক্ষ দুইটা O বিন্দুতে লম্বভাবে ছেদ করেছে, তাই PMON কে আয়তক্ষেত্র বলা যায়।
তাহলে আমরা বলতে পারি, PN = OM এবং PM = ON



অর্থাৎ, ঐ বিন্দু থেকে Y অক্ষের দুরত্ব যা, O বিন্দু (যাকে মূলবিন্দু বলা হয়) থেকে M পর্যন্ত একই মান পাওয়া যায়, এই মানটিকে **ভূজ** বলে।
আবার, ঐ বিন্দু থেকে X অক্ষের দুরত্ব যা, মূলবিন্দু থেকে N পর্যন্ত একই মান পাওয়া যায়, এই মানটিকে **কোটি** বলে।
এই ভূজ ও কোটি দিয়ে কার্তেসীয় স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় বিন্দুর অবস্থান প্রকাশ করা হয়।
যদি OM = x একক ও ON = y একক হয়, তাহলে P বিন্দুর স্থানাঙ্ক হলো (x, y)
[দ্রষ্টব্য, অক্ষ দুটি তলকে চারটি চতুর্ভাগে ভাগ করে (চিত্রে ক্রম দেওয়া আছে)। এবং এই ভাগগুলোর ভূজ ও কোটির মান ধনাত্মক হবে না ঋণাত্মক হবে তা নির্ভর করে।]

WHITEBOARD



P (x, y)

x → ভুজ

y → কোটি

A (0, 5)

B (3, 0)

Poll Question- 01

$P(1, 5)$

$Q(-3, 5)$

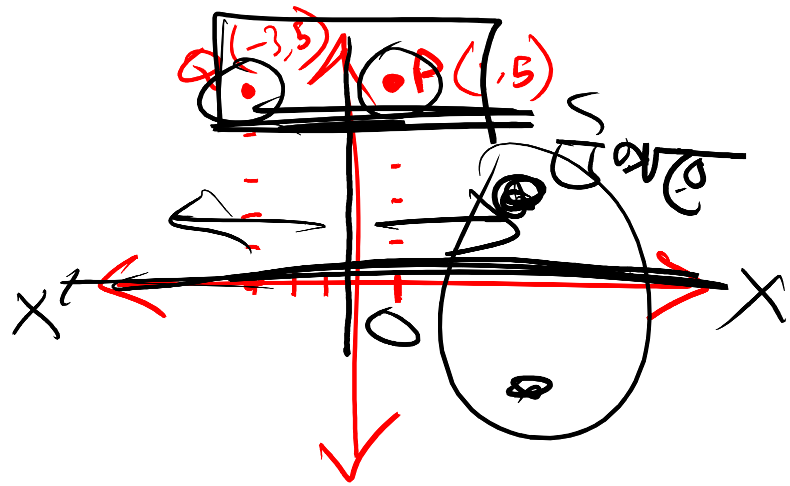
দুটি বিন্দুর কোটির মান একই হলে নিচের কোনটি সর্বদা সঠিক?

(a) বিন্দু দুটি x অক্ষের একই দিক (উপরে/নিচে) আছে

(b) বিন্দু দুটি y অক্ষের একই দিক (ডানে/বামে) আছে

(c) বিন্দু দুটি একই বিন্দু

(d) কোনোটিই নয়



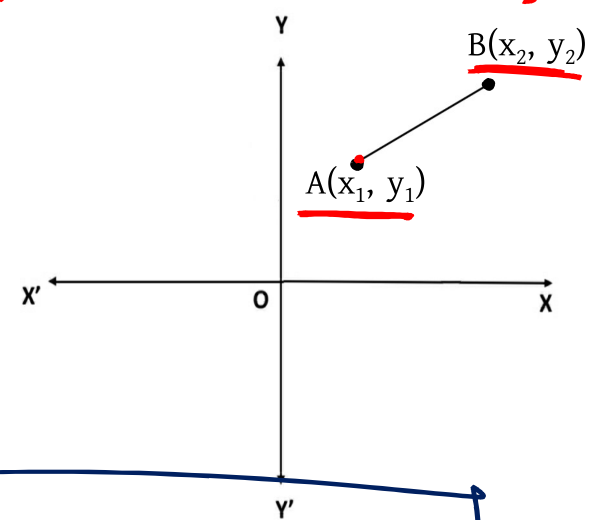
দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব

যদি স্থানাঙ্কে দুটি বিন্দু হয় A ও B হয়,

এবং তাদের স্থানাঙ্ক যদি হয় $A(x_1, y_1)$ ও $B(x_2, y_2)$,

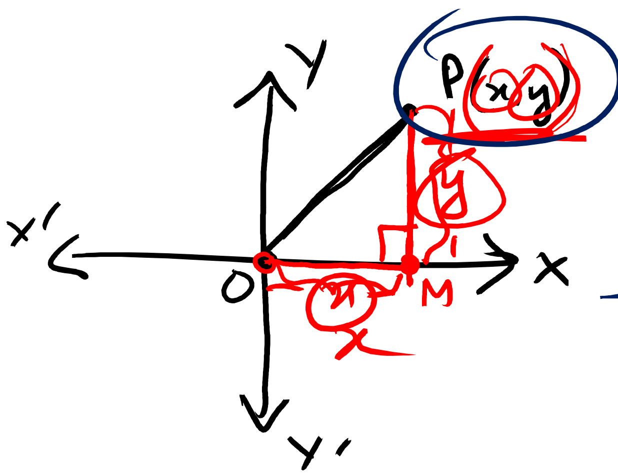
তাহলে তাদের মধ্যবর্তী দুরত্ব হলো, $\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$ একক

$AB = ?$



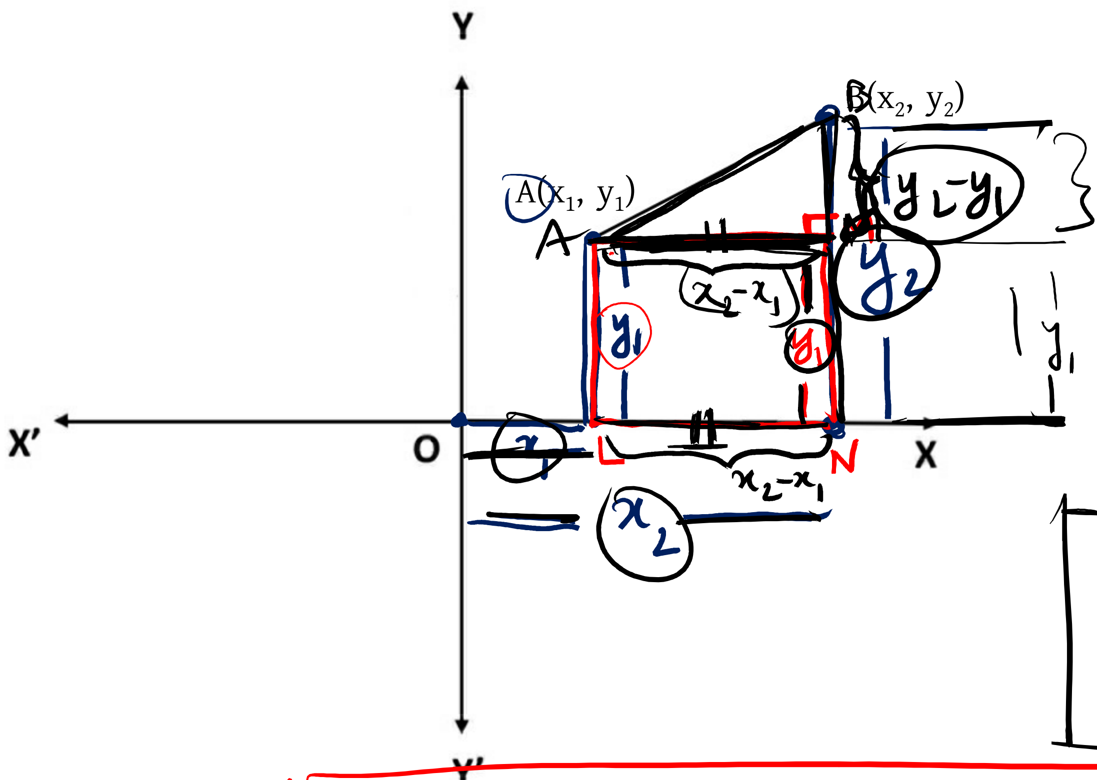
মূলবিন্দু (0,0) থেকে কোনো বিন্দু A এর দুরত্ব হবে,

$AO = \sqrt{(x_1)^2 + (y_1)^2}$ একক



$$\boxed{OP = \sqrt{OM^2 + PM^2} = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

দুইটি বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (প্রমাণ)



$AB =$

$\triangle ABM$ সমকোণী

$AB^2 = AM^2 + BM^2$

$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

$(x_1 - x_2)^2$

$$AB = \sqrt{(\text{ভুজের বিয়োগ})^2 + (\text{কোটির বিয়োগ})^2}$$

Poll Question- 02

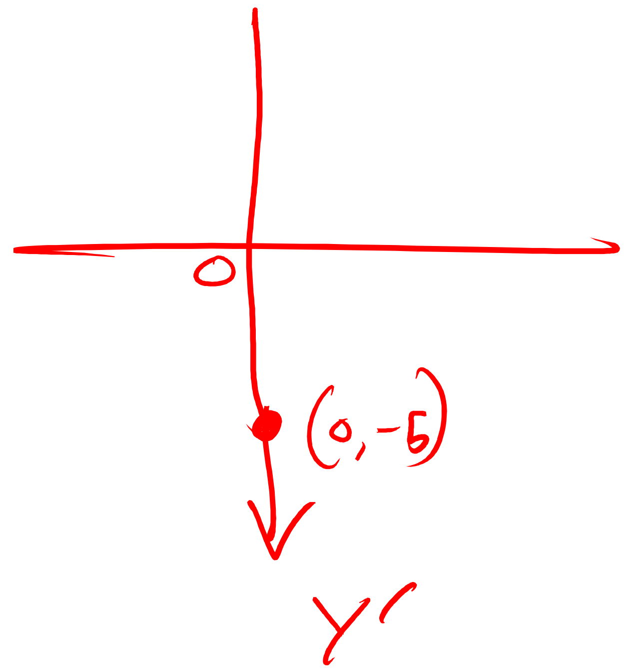
(0, –5) বিন্দুটার অবস্থান কোথায়?

(a) X অক্ষের উপরে

(b) Y অক্ষের উপরে

(c) ১ম চতুর্ভাগে

(d) ৪র্থ চতুর্ভাগে



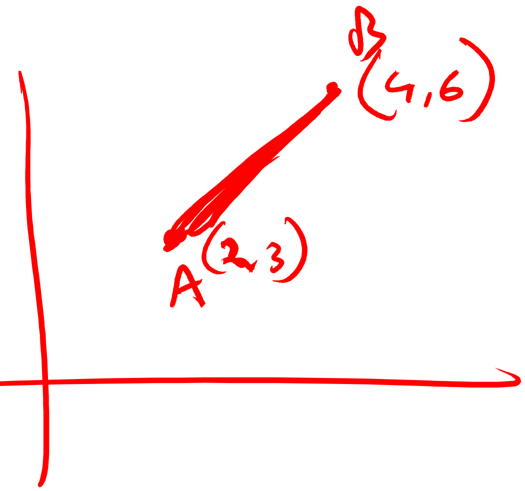
অনুশীলনী ১১.১

A (2, 3) ও B (4, 6) বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো।

$$AB = \sqrt{(2-4)^2 + (3-6)^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2}$$

$$= \sqrt{4+9} = \sqrt{13} \ \boxed{\text{একক}}$$



অনুশীলনী ১১.১

A (a, b) ও B (b, a) বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো।

$(a-b)^2 = (b-a)^2$

$$AB = \sqrt{(a-b)^2 + (b-a)^2}$$

$$= \sqrt{(a-b)^2 + (a-b)^2}$$

$$= \sqrt{2(a-b)^2}$$

$$= \sqrt{2}\sqrt{(a-b)^{\cancel{2}}} = \sqrt{2}(a-b)$$

অনুশীলনী ১১.১

$A(-\frac{3}{2}, -1)$ ও $B(\frac{1}{2}, 2)$ বিন্দু দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব নির্ণয় করো।

$$AB = \sqrt{\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + (-1-2)^2}$$

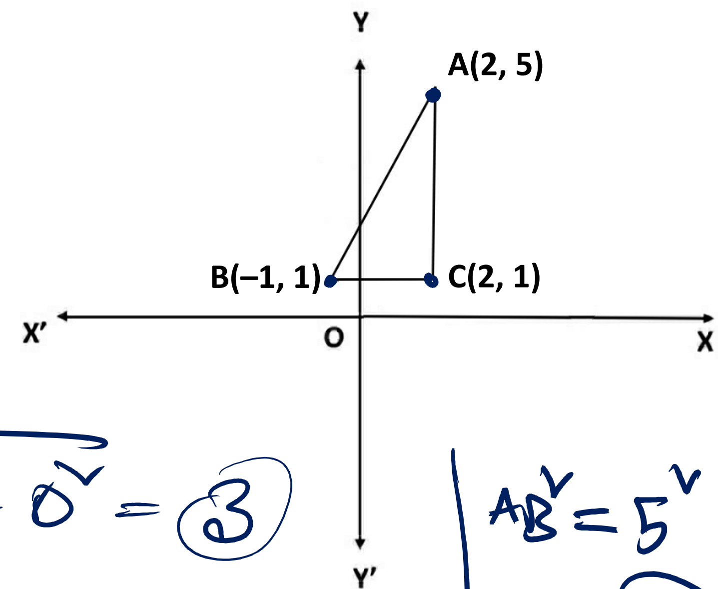
$$= \sqrt{\left(\frac{-3-1}{2}\right)^2 - (-3)^2}$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (-3)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

অনুশীলনী ১১.১

$A(2, 5)$, $B(-1, 1)$ ও $C(2, 1)$ কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু হলে, ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে ও দেখাতে হবে যে, এটি সমকোণী ত্রিভুজ।

$\boxed{AB^2} = AC^2 + BC^2$



$AB = \sqrt{(2+1)^2 + (5-1)^2}$

$= \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$BC = \sqrt{(-1-2)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$

$CA = \sqrt{(2-2)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = 4$

$AB^2 = 5^2 = \boxed{25}$

$\therefore CA^2 + BC^2 = 4^2 + 3^2 = \boxed{25}$

Poll Question- 03

নিচের কোন বিন্দু ও (5, –5) বিন্দুটি মূলবিন্দু থেকে সমদূরবর্তী?

(0, 0)

$$\sqrt{(5-0)^2+(-5-0)^2} = \sqrt{5^2+(-5)^2} = \sqrt{50}$$

(a) (0, 5) $\longrightarrow \sqrt{0^2+5^2} = \sqrt{25}$ ✗

(b) (6, –2) $\longrightarrow \sqrt{6^2+(-2)^2} = \sqrt{40}$ ✗

(c) (–7, –1) $\longrightarrow \sqrt{(-7)^2+(-1)^2} = \sqrt{50}$ ✓

(d) কোনোটিই নয়

অনুশীলনী ১১.১

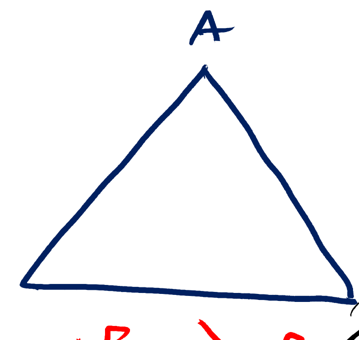
যাচাই করতে হবে, $A(1,2)$, $B(-3,5)$ ও $C(5,-1)$ বিন্দু তিনটি দ্বারা ত্রিভুজ গঠন করা যায় কিনা।

$$AB=\sqrt{(1+3)^2+(2-5)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

$$BC=\sqrt{(-3-5)^2+(5+1)^2}=\sqrt{64+36}=10$$

$$AC=\sqrt{(1-5)^2+(2+1)^2}=\sqrt{16+9}=5$$

ত্রিভুজ গঠন করা যায় না,



$15>5$

$AB+BC>AC$

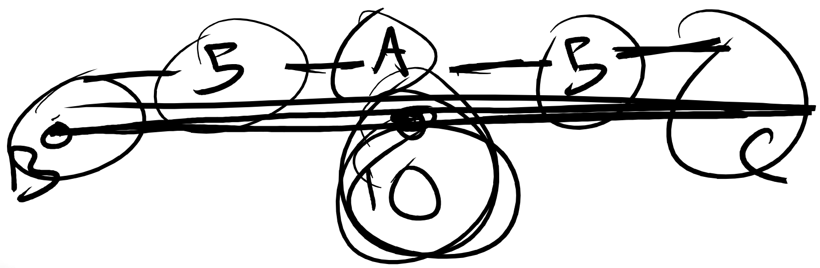
$5+5=10>10$

$AB+AC>BC$

$AC+BC>AB$

$10+5>5$

$15>5$



অনুশীলনী ১১.১

মূলবিন্দু থেকে $(-5, 5)$ ও $(5, k)$ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান হলে k এর মান নির্ণয় করতে হবে।

O A B

$(0, 0)$

$$OA = \sqrt{(0+5)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{5^2 + (-5)^2} = \sqrt{50}$$

$$OB = \sqrt{(0-5)^2 + (0-k)^2} = \sqrt{(-5)^2 + (-k)^2} = \sqrt{25 + k^2}$$

প্রশ্নমতে,

$$OA = OB$$

$$\sqrt{50} = \sqrt{25 + k^2}$$

$$\Rightarrow 50 = 25 + k^2$$

$$\Rightarrow k^2 = 50 - 25$$

$$\Rightarrow k^2 = 25$$

$$\Rightarrow k = \pm 5$$

না বুঝে
মুখস্থ করার
অভ্যাস প্রতিভাকে
ধ্বংস করে