



Hello!!!

৯ম শ্রেণি একাডেমিক প্রোগ্রাম ২০২০

উচ্চতর গণিত

লেকচার : HM-38

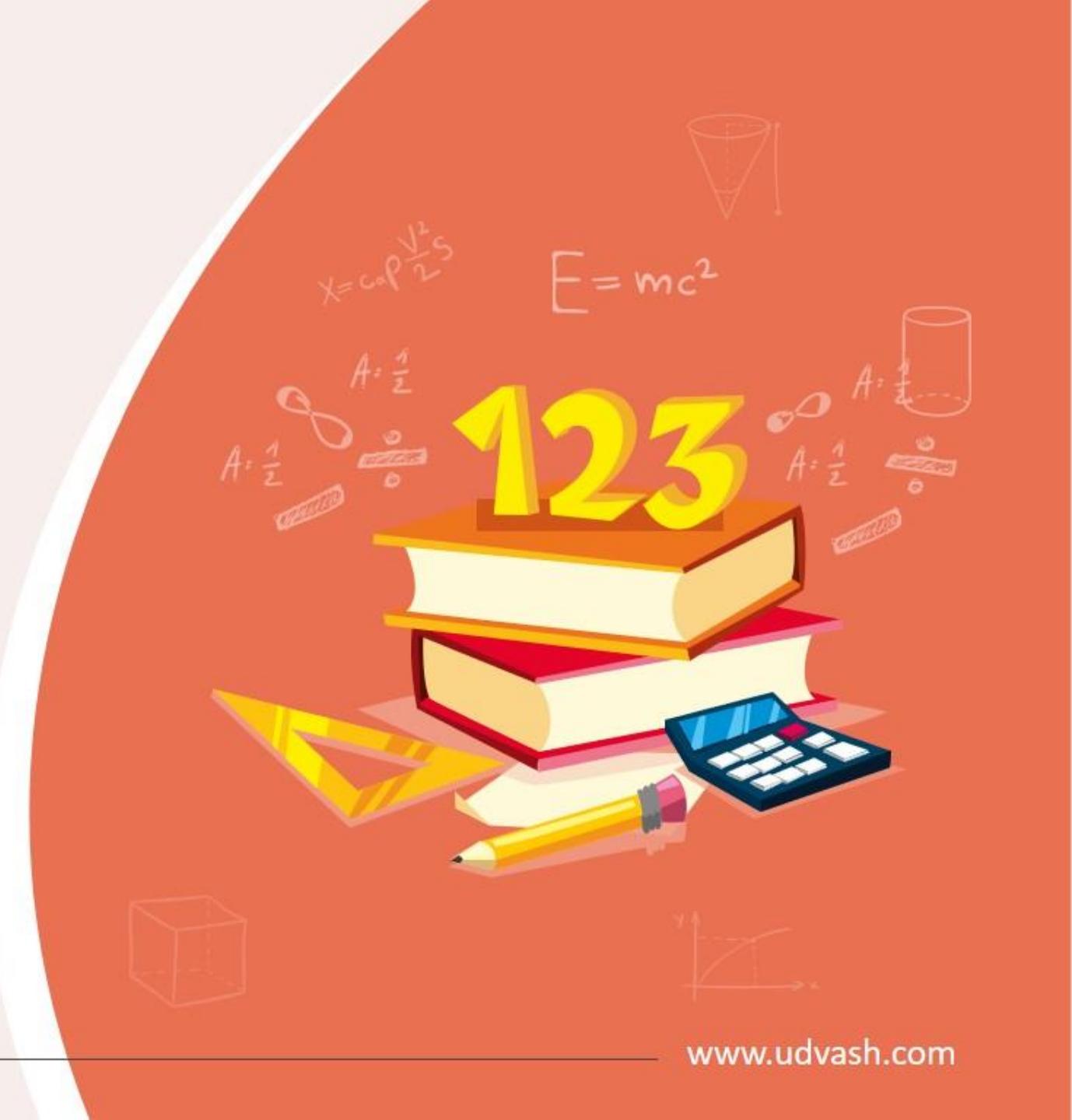
অধ্যায় ১২: সমতলীয় ভেক্টর



উদ্বাশ

একাডেমিক এবং প্রার্থনা কেন্দ্র

$$x = \sqrt{\frac{b^2}{c}} + c - \frac{b}{2}$$



www.udvash.com

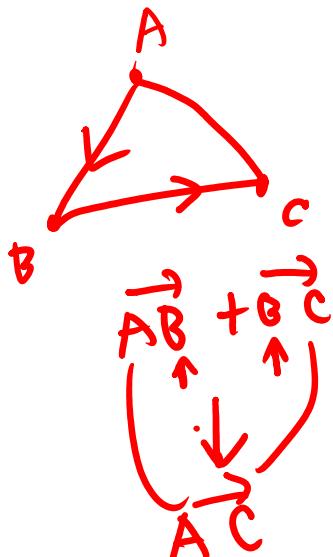
ভেক্টর সম্পর্কিত আলোচনা

ক্রস প্রুদ, দূরত্ব
বৃত্তান্ত, মাত্রা

$$\vec{AB}$$

বর্ণনা
পদ্ধতি

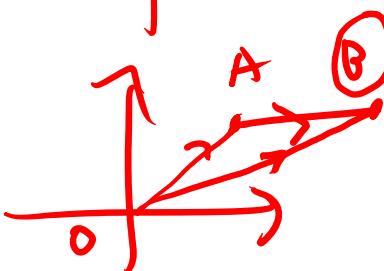
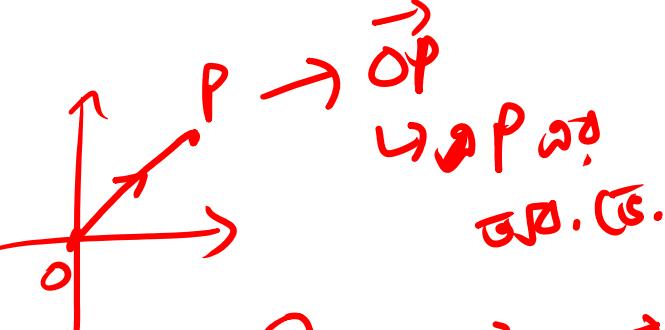
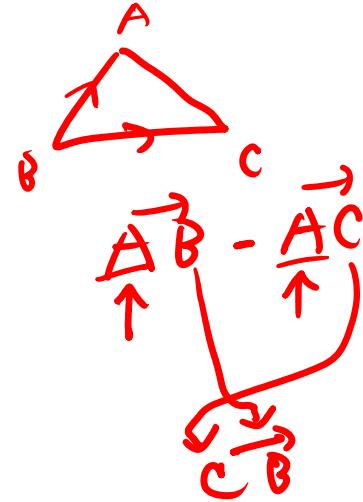
গুরুত্ব
বৰ্তমান



জ্যগ
বৃত্তান্ত
যামন্ত্রিক

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$$

বিয়োগ
বৃত্তান্ত



- i) ক্রস প্রুদ পদ্ধতি
- ii) Boring পদ্ধতি
- iii) জ্যামিতি

গাণিতিক সমস্যা-অনুঃ ১২ (৬)

❖ ABCD সামান্তরিকের দুটি কর্ণ যদি \overrightarrow{AC} ও \overrightarrow{BD} হয়, তাহলে-

\overrightarrow{AB} ও \overrightarrow{CD} ভেক্টরদ্বয়কে \overrightarrow{AD} ও \overrightarrow{BD} ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে

$$\overrightarrow{AB}$$

$$\Delta ABD$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}}$$

$$\overrightarrow{CD}$$

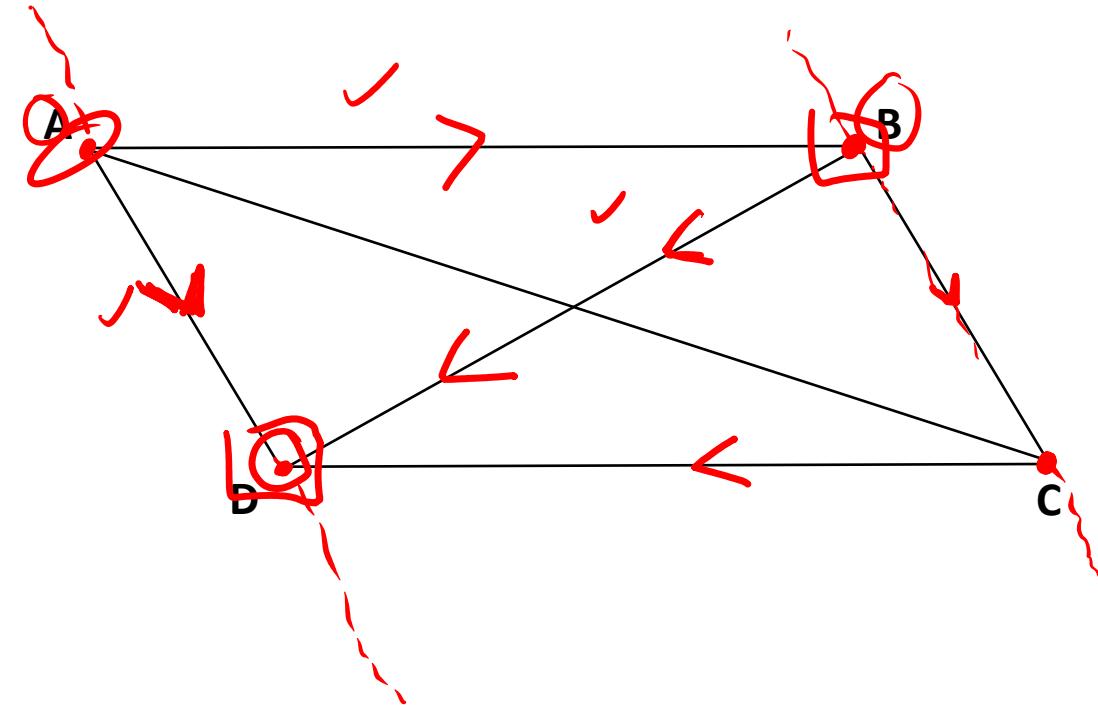
$$\Delta BCD$$

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$$

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AD}}$$

$$\begin{aligned} & \checkmark AD \parallel BC \\ & \checkmark AD = BC \\ & \boxed{\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}} \end{aligned}$$



গাণিতিক সমস্যা-অনুঃ ১২ (৬)

❖ ABCD সামান্তরিকের দুটি কর্ণ যদি \overrightarrow{AC} ও \overrightarrow{BD} হয়, তাহলে- দেখাতে হবে,

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC} \text{ এবং } \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$$

\vec{BC} $\triangle BOC$, $\overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}$

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{BO} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$$

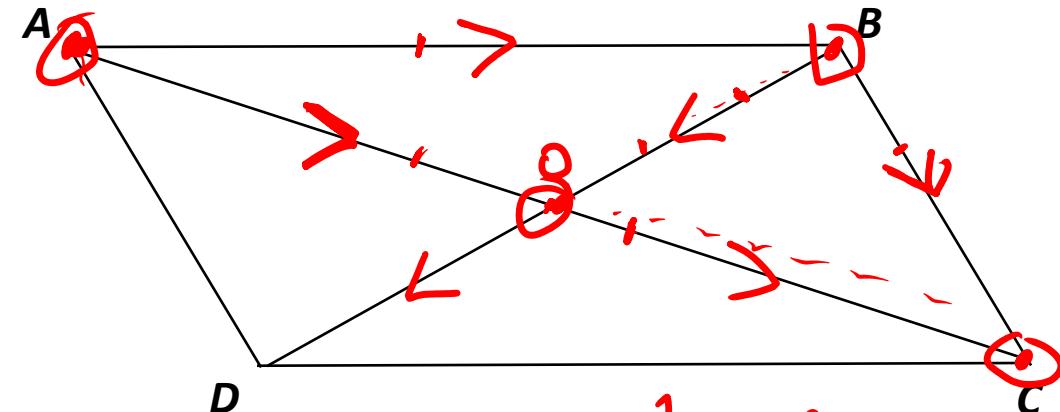
$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{BC}$$

$$\boxed{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}}$$

\vec{AB} $\triangle AOB$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{AO}$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$$

কর্ণগুলো যথেষ্টভাবে
সমান



$$\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{CO}$$

$$\overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \overline{DO}$$

$$\overline{AO} = \frac{1}{2}\overline{AC} = \overline{OC}$$

$$\overline{BO} = \frac{1}{2}\overline{BD} = \overline{OD}$$

উচ্চতর গণিত

অধ্যায় ১২ : সমতলীয় ভেক্টর

গাণিতিক সমস্যা-অনুঃ ১২ (৭)

$$m(\underline{a} + \underline{b}) = m\underline{a} + m\underline{b}$$

$$\begin{aligned}\underline{a} + \underline{b} &= \underline{a} + \underline{c} \\ \underline{b} &= \underline{c}\end{aligned}$$

❖ দেখাতে হবে যে,

$$\begin{aligned}i) \quad -(\underline{a} + \underline{b}) &= -\underline{a} - \underline{b} \\ ii) \quad \underline{a} + \underline{b} &= \underline{c} \text{ হলে, } \underline{a} = \underline{c} - \underline{b}\end{aligned}$$

$$i) \quad -(\underline{a} + \underline{b})$$

$$= (-1)(\underline{a} + \underline{b})$$

$$= (-1)\underline{a} + (-1)\underline{b} \quad [\text{সূচনা ফর্মুলা}]$$

$$= -\underline{a} - \underline{b} \quad \checkmark$$

$$ii) \quad \underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$$

$$\underline{a} + \underline{b} + (-\underline{b}) = \underline{c} + (-\underline{b}) \quad [\text{পর্যবেক্ষণ ফর্মুলা}]$$

$$\underline{a} + \underline{b} - \underline{b} = \underline{c} - \underline{b}$$

$$\underline{a} + \underline{0} = \underline{c} - \underline{b}$$

$$\underline{a} = \underline{c} - \underline{b} \quad \checkmark$$

$$[\underline{a} - \underline{a} = 0]$$

গাণিতিক সমস্যা-অনুঃ ১২ (৯)

Contradiction

❖ দেখাতে হবে যে,

i) \underline{a} ও \underline{b} উভয়েই অশূন্য ভেক্টর হলে, $\underline{a} = m\underline{b}$ হবে যদি ভেক্টর দুটি সমান্তরাল হয়।

ii) \underline{a} ও \underline{b} উভয়েই অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর হলে এবং $m\underline{a} + n\underline{b} = \underline{0}$ হলে, $m = n = 0$

i) $\underline{a} \neq \underline{0}$, $\underline{b} \neq \underline{0}$

$$\underline{a} = m\underline{b}$$

$\underline{a} \parallel m\underline{b}$ ক্রমাগত ভেক্টর?

i) $\underline{a} = m\underline{b}$ ✓

ii) $\underline{a} \parallel \underline{b}$ হওয়া প্রমাণ দর্শন

iii) সঠিক দেখা প্রয়োজন নয় তা সমান্তরাল

$\therefore \underline{a} \parallel \underline{b}$ সমান্তরাল ✓

$\underline{a} \parallel \underline{b}$ প্রমাণ দেখা করা হয়

ii) $m\underline{a} + n\underline{b} = \underline{0}$ $m, n \neq 0$ $\underline{a} \parallel \underline{n}\underline{b}$ প্রমাণ করা হবে

$$\underline{a} = -\frac{n}{m}\underline{b}$$

$\underline{a} \parallel -\frac{n}{m}\underline{b}$ সমান্তরাল

i) $\underline{a} = \frac{n}{m}\underline{b}$ ✗

ii) $\underline{a} \parallel -\frac{n}{m}\underline{b}$ হওয়া প্রমাণ

iii) সঠিক দেখা প্রয়োজন নয় তা সমান্তরাল

সুতরাং $\underline{a} \parallel \underline{b}$ সমান্তরাল না

$m = n = 0$



উক্তি

একাডেমিক এবং আডিমিশন কেন্দ্র

উচ্চতর গণিত

অধ্যায় ১২ : সমতলীয় ভেক্টর

Poll Question-01

সামান্তরিকের দুই সন্ধিতি বাহতে দুটি ভেক্টর বসালে সামান্তরিকের কর্ণ দুটি হবে ভেক্টর দুটির-

(a) যোগফল ও বিয়োগফল ভেক্টর

~~95%~~ (b) যোগফল ও যোগফলের বিপরীত ভেক্টর

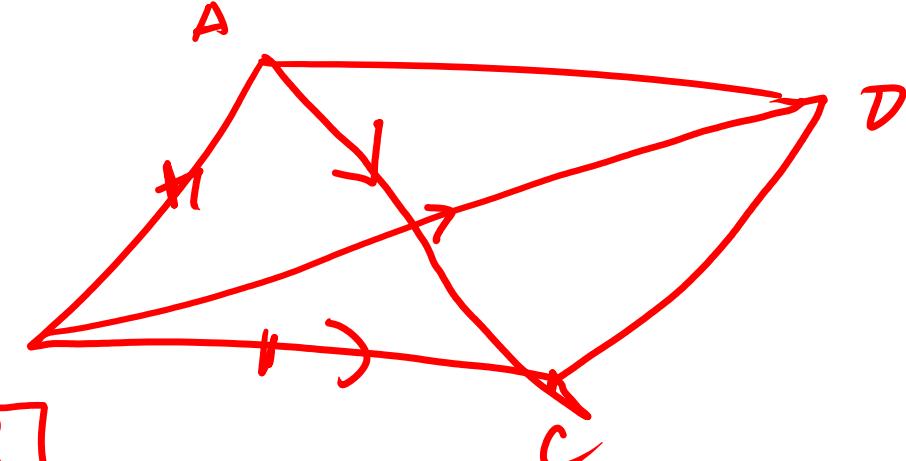
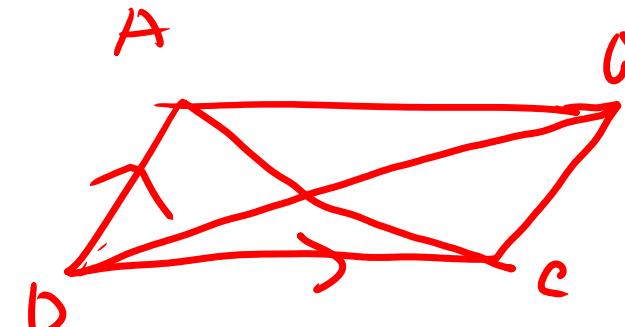
~~(c)~~ বিয়োগফল ও বিয়োগফলের বিপরীত ভেক্টর

(d) কোনোটিই নয়

$$\boxed{\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{BC}}$$

$$\triangle ABC, \quad \vec{BA} + \vec{AC} = \vec{BC}$$

$$\boxed{\vec{AC} = \vec{BC} - \vec{BA}}$$





08:22
08.30

গাণিতিক সমস্যা-অনুঃ ১২ (১০)

- ❖ A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান যথাক্রমে a, b, c, d হলে দেখাতে হবে যে, ABCD সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

$$\overrightarrow{AB} = \underline{B} - \underline{A} \text{ অ.টি. } - \underline{A} \text{ অ.টি.}$$

$$= \underline{b} - \underline{a}$$

$$\overrightarrow{DC} = \underline{C} - \underline{D} \text{ অ.টি. } - \underline{D} \text{ অ.টি.}$$

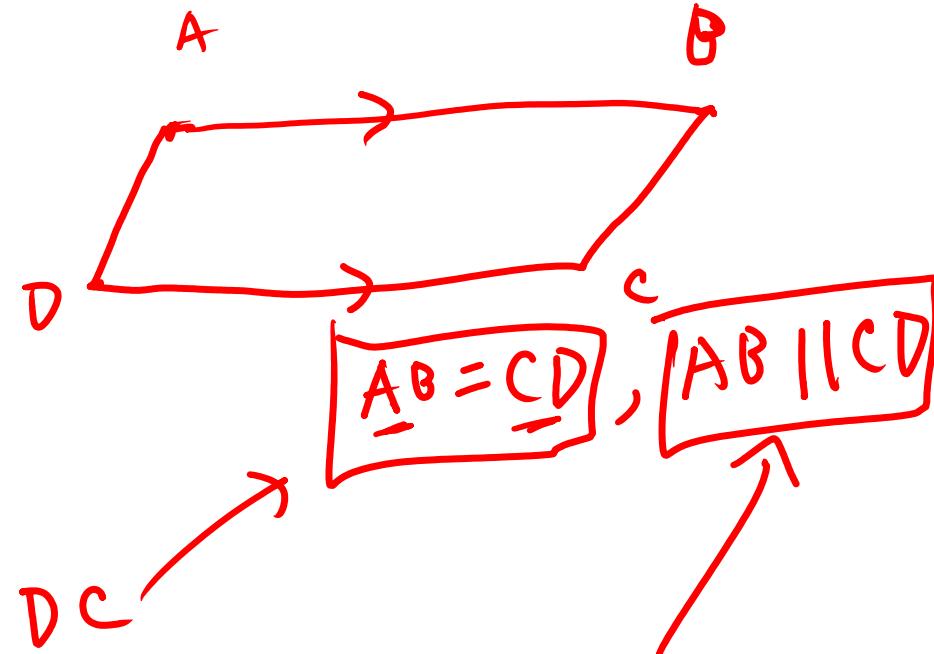
$$= \underline{c} - \underline{d}$$

প্রমত,

$$\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

প্রমাণ করো!



i) $AB = DC$

ii) দ্রষ্টব্য

iii) সংজ্ঞা প্রযোগ

ক্ষেত্র / প্রযোগ গাল

$$AB \parallel DC$$

$ABCD$
যুক্তিপূর্ণ

উচ্চতর গণিত

অধ্যায় ১২ : সমতলীয় ভেক্টর

গাণিতিক সমস্যা-অনুঃ ১২ (১২)

❖ ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্যরিক হয়।

$$\begin{aligned} \Delta AOB, \\ \vec{AB} + \vec{BO} &= \vec{AO} \\ \vec{AB} &= \vec{AO} - \vec{BO} \\ \vec{AB} &= \vec{OC} - \vec{OD} \\ \vec{AB} &= \vec{DC} \end{aligned}$$

→ ফল

$$AD = OC = \frac{1}{2} AC$$

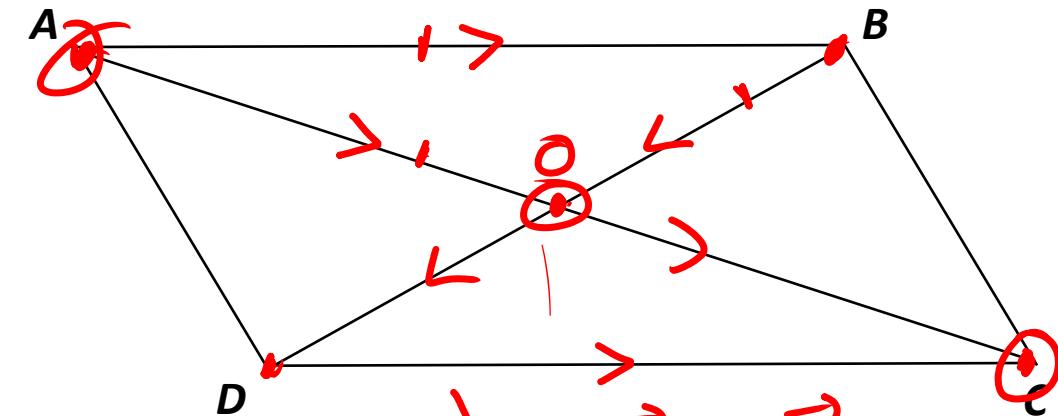
$$BD = OD = \frac{1}{2} BD$$

$$\begin{aligned} \vec{AD} &= \vec{OC} = \frac{1}{2} \vec{AC} \\ \vec{BD} &= \vec{OD} = \frac{1}{2} \vec{BD} \end{aligned}$$

- i) $\vec{AB} = \vec{DC}$
- ii) দ্রষ্টব্য
- iii) সাধক ফেছা

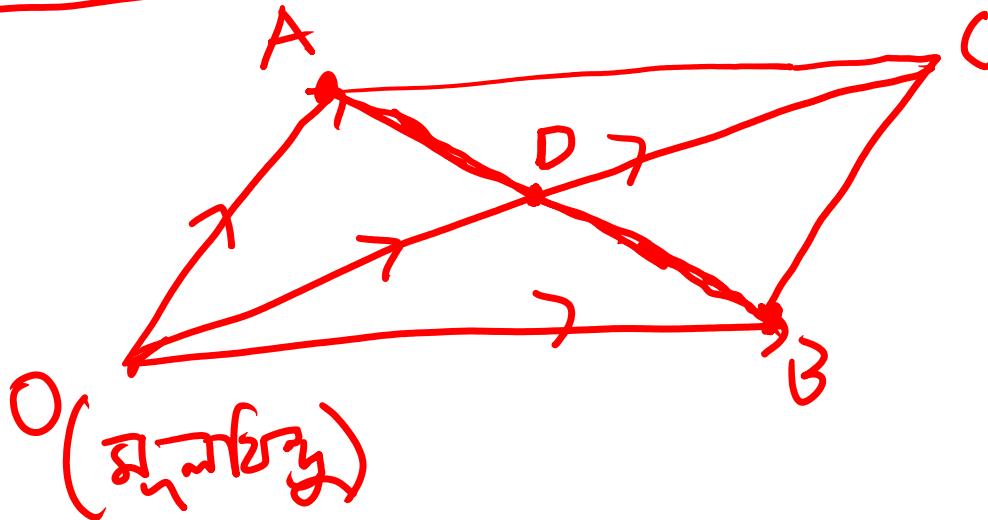
ফল / ঝোটান্তর

$\boxed{\vec{AB} = \vec{CD}}, \boxed{AB \parallel CD}$



$$\begin{aligned} \vec{OD} + \vec{DC} &= \vec{OC} \\ \vec{DC} &= \vec{OC} - \vec{OD} \end{aligned}$$

অর্ধ বৃক্ষাকৃতির পরিম:



$$\vec{OC} = \vec{OA} + \vec{OB}$$

$$\frac{1}{2}\vec{OC} = \frac{1}{2}\vec{OA} + \frac{1}{2}\vec{OB} \quad \boxed{\vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{OC}}$$

$$\vec{OD} = \frac{1}{2}(\vec{OA} + \vec{OB}) \quad \boxed{\vec{OD} = \frac{1}{2}\vec{OC}}$$

D, AB এবং OC মিডপিন্ট

$$D \text{ এবং } \text{অ.ভ.} = \frac{1}{2}(\text{A এবং } \text{অ.ভ.} + \text{B এবং } \text{অ.ভ.})$$

(যেন দ্বিতীয় মিডপিন্ট অবস্থান কর্তৃত হলে ক্ষেত্র দ্বিতীয় গুরুত্বপূর্ণ
ব্রহ্মাণ্ড ক্ষেত্রের জ্যামিতিক অনুরূপ)

গাণিতিক সমস্যা-অনুঃ ১২ (১৩)

$$\vec{AB} = \underline{b} - \underline{a} = \overset{\vec{DC}}{\underline{c}} - \underline{d}$$

- ❖ ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

প্রf,

$$A \text{ এর অ. ত্র.} \rightarrow \underline{a} \quad D \text{ এর অ. ত্র.} \rightarrow \underline{d}$$

$$B \text{ " " } \rightarrow \underline{b} \quad E \text{ " " } \rightarrow \underline{e}$$

$$C \text{ " " } \rightarrow \underline{c} \quad F \text{ " " } \rightarrow \underline{f}$$

$$\vec{EF} = F \text{ এর অ. ত্র.} - E \text{ এর অ. ত্র.}$$

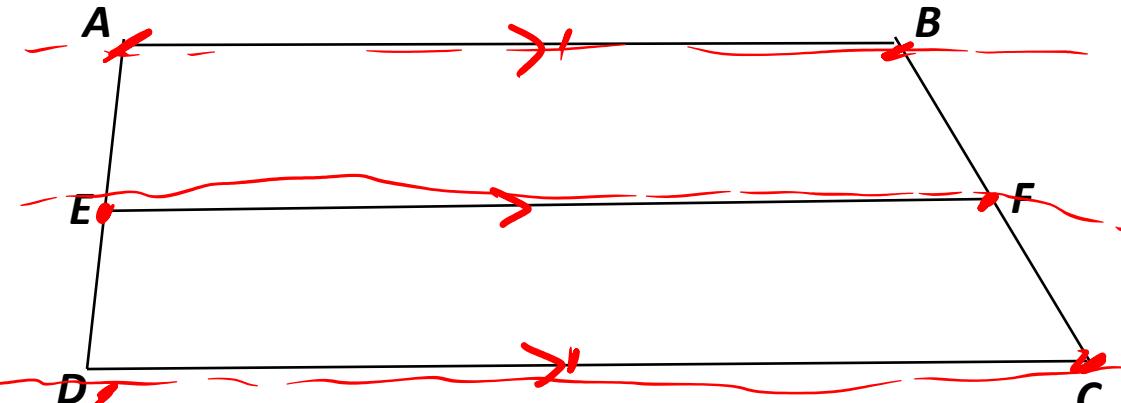
$$= \underline{f} - \underline{e} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c} - \underline{a} - \underline{d})$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a} + \underline{c} - \underline{d})$$

$$\vec{EF} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{DC})$$

সমস্যা



$$EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$$

E, AD এর মিঠি খিন্ডু $EF \parallel AB \parallel DC$

$$\hookrightarrow \underline{e} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$$

i) $EF = \frac{1}{2}(AB + DC) = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c})$

iii) $EF \parallel AB \parallel DC$



উক্তি

একাডেমিক এবং আড়ম্বন কেন্দ্র

উচ্চতর গণিত

অধ্যায় ১২ : সমতলীয় ভেক্টর

গাণিতিক সমস্যা-অনুঃ ১২ (১৪)

- ❖ ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহ্যদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের বিয়োগফলের অর্ধেক।

$$A \text{ এবং } O. \text{ তে. } \underline{a}$$

$$B \text{ " " " } \underline{b}$$

$$C \text{ " " " } \underline{c}$$

$$D \text{ " " " } \underline{d}$$

$$\overrightarrow{FE} = \underline{e} - \underline{f} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c} - \underline{b} - \underline{d})$$

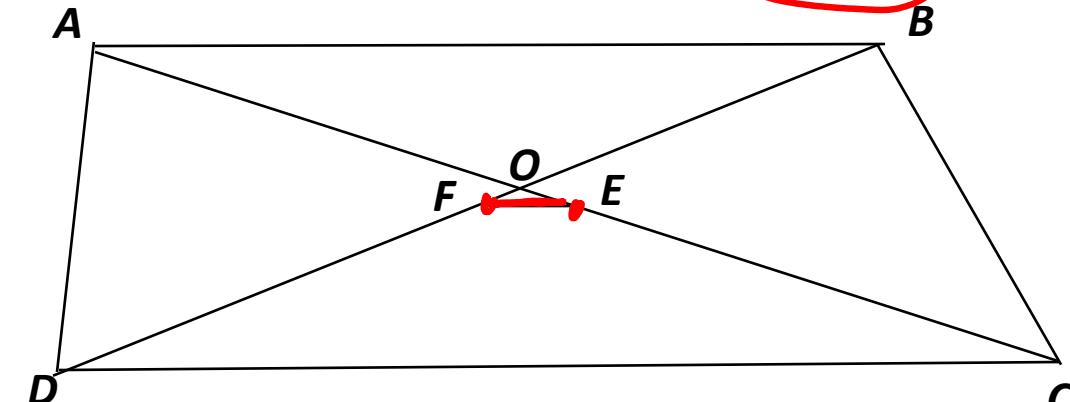
$$= \frac{1}{2}(\underline{c} - \underline{d} + \underline{a} - \underline{b})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BA})$$

$$\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{AB})$$

$$E \text{ এবং } O. \text{ তে. } \underline{e}$$

$$F \text{ " " " } \underline{f}$$



$$FE = \frac{1}{2}(DC - AB) \quad A \xrightarrow{\hspace{2cm}} B$$

$$\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$$

E, AC এবং মুক্তিরেখা

$$\underline{e} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$$

$$\underline{f} = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$$

উচ্চতর গণিত

অধ্যায় ১২ : সমতলীয় ভেক্টর

গাণিতিক সমস্যা-অনুঃ ১২ (১৫)

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = 0$$

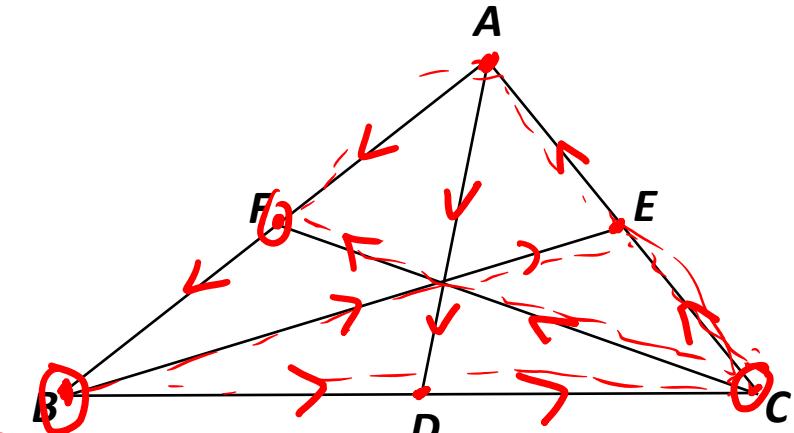
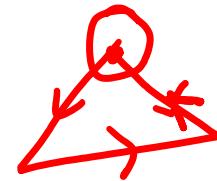
- ❖ ABC ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি যথাক্রমে AD, BE, CF হলে প্রমাণ করতে হবে যে,

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$$

$$\triangle ABD, \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$$

$$\triangle BCE, \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{BE}$$

$$\triangle AFC, \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CF}$$



$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} + \overrightarrow{AF}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$$

$$(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$$

$$\textcircled{1} + \frac{1}{2} \times \textcircled{2} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = 0$$

$$\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$$

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CA}$$

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$$

Poll Question-02

± 5

a এবং b/ ফর্মুলা

$m(\underline{a} + \underline{b}) + m(\underline{a} - \underline{b})$ এর দিক হবে-

(a) $\underline{a} + \underline{b}$ এর দিকে

(b) $\underline{a} - \underline{b}$ এর দিকে

সার্বান্ধ \checkmark \underline{a} এর দিকে $\cancel{\checkmark}$

(d) \underline{b} এর দিকে

$$m(\underline{a} + \underline{b}) + m(\underline{a} - \underline{b})$$

$$= m\underline{a} + m\underline{b} + m\underline{a} - m\underline{b}$$

$$= m\underline{a} + m\underline{a}$$

$$= [2m\underline{a}] \rightarrow$$

$$mLQ \rightarrow$$

$$2ma$$

\underline{a} এবং ফর্মুলা

না বুঝে
মুখস্ত করার
অভ্যাস প্রতিভাকে
ধ্বংস করে



উদ্বাশ

একাডেমিক এবং এডুকেশন কেন্দ্র

www.udvash.com