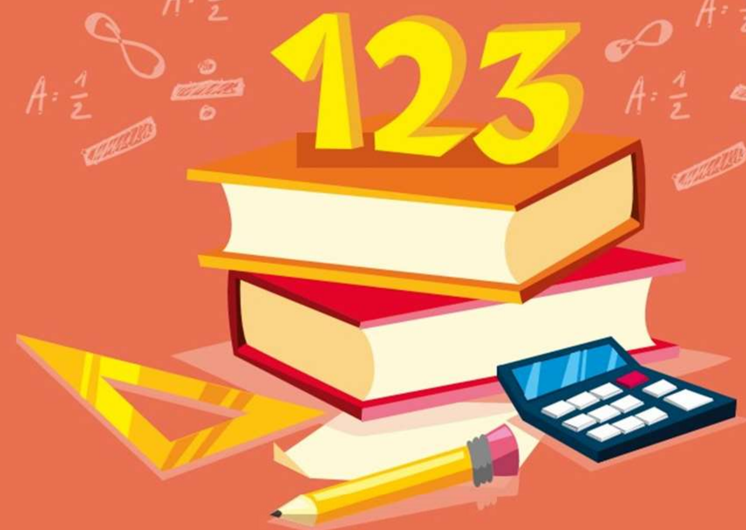
৯ম শ্রেণি একাডেমিক প্রোগ্রাম ২০২০

# উচ্চতর গণিত

লেকচার : HM-42

অধ্যায় ১৪ : সম্ভাবনা (Probability)

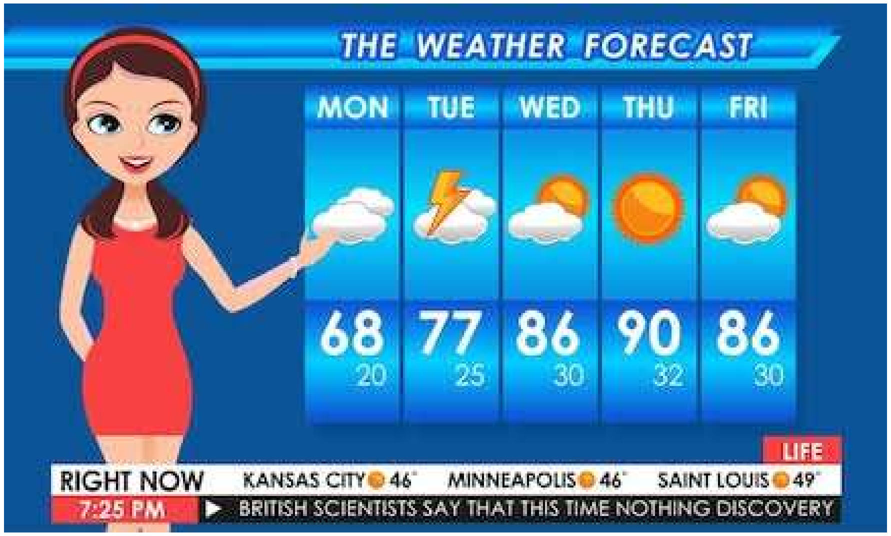
Hello!



# সম্ভাবনা

সম্ভাবনা শব্দটার সাথে আমরা সকলেই পরিচিত, দৈনন্দিন জীবনে এটার ব্যবহার করি। কিন্তু গণিতের ক্ষেত্রে সম্ভাবনার বিষয়টা কিছুটা অন্যরকম।

পাশের উদাহরণ থেকেই বুঝা যাক। এখানে আবহাওয়ার পূর্বাভাস নিয়ে বলা হচ্ছে, আমরা বিভিন্ন সময়ে খবরে এমনটা দেখি। সাধারণত দেখা যায় বেশিরভাগ সময় এই পূর্বাভাসগুলো সঠিক অনুমানই দেয়। এর কারণ কিন্তু এটা না যে তাদের কাছে কোনো ভবিষ্যদ্বাণী আছে। তারা কিন্তু আমাদের মতোই খেয়ে পরে বেচে থাকা মানুষ। কিন্তু তাদের অনুমানগুলো ঠিক হওয়ার কারণ হলো তাদের ভাবার ক্ষমতা।
ধরি, আজ খবরে বলেছে যে কাল বৃষ্টি হবে, এবং পরের দিন তাই হলো। সে কীভাবে জানলো? সে কিন্তু আন্দাজে ঢিল মেরে পার পেয়ে যায়নি। সে দুটো জিনিসের সাহায্য নিয়েছে, যুক্তি ও তথ্য। হয়তো তার কাছে এই মাস ও আগের মাসের প্রতিদিনের আবহাওয়ার তথ্য ছিলো। সে হয়তো ওগুলো ব্যবহার করেছে আর সাম্প্রতিক সময়ের আবহাওয়া নিয়ে চিন্তা করেছে এবং একটা গোছানো অনুমান করেছে।




**এই জিনিসটাই সম্ভাবনা। অর্থাৎ, কোনো ঘটনার ফলাফলগুলোর প্রত্যেকটা সম্পর্কে অবগত হয়ে, ঘটনার পারিপার্শ্বিক এবং ঘটনার উপর পরিপার্শ্বের প্রভাব নিয়ে ভেবে, যুক্তি ও তথ্যের মাধ্যমে এক নির্দিষ্ট ফলাফল ঘটার পরিমাপকে সম্ভাবনা বলে।**

# সম্ভাবনা সম্পর্কিত কিছু বিষয়

যখন কোনো পরীক্ষার সম্ভাব্য ফলাফল আগে থেকে জানা থাকে কিন্তু পরীক্ষাটিতে কোনো এক নির্দিষ্ট চেষ্টায় কী ফলাফল আসবে তা নিশ্চিত করে বলা যায় না, তাকে দৈব পরীক্ষা বলে। আচ্ছা, সহজ ভাষায় বলা যাক। ধরি, একটা ফুটবল ম্যাচ, লাল দল আর নীল দলের মাঝে। এই খেলার ফলাফল কী কী হতে পারে, সেটা কিন্তু আমরা জানি। লাল দল জিতবে, নীল দল জিতবে, অথবা ম্যাচ ড্র। আমরা জানি এই তিনটার একটা হবে, কিন্তু কোনটা হবে, আমরা আগে থেকে নিশ্চিতভাবে বলতে পারি না। এই ফুটবল ম্যাচ হলো এক প্রকার দৈব পরীক্ষা।

কোনো দৈব পরীক্ষার ফলাফলগুলোকে ঘটনা বলে। যেমন, ফুটবল ম্যাচে জিতে যাওয়াটা একটা ঘটনা, হেরে যাওয়াটাও।

যদি কোনো পরীক্ষার ঘটনাগুলো ঘটার সম্ভাবনা সমান হয়, অর্থাৎএকটার বেশি বা কম সম্ভাবনা না থাকে, তাহলে সেই ঘটনাগুলোকে সমসম্ভাব্য ঘটনাবলী বলে। মানে যেসব ঘটনায় যেকোনো কিছুই হতে পারে, সেগুলো।

কোনো পরীক্ষায় যদি একটা ঘটনা ঘটলে অন্যগুলো ঘটার কোনো সুযোগ থাকে না, সেগুলোকে পরস্পর বিচ্ছিন্ন ঘটনা বলে। ফুটবল ম্যাচে যদি কোনো দল জিতে, তাহলে তাদের হারার বা ড্র করার কোনো সম্ভাবনাই থাকে না। একইসাথে তো আর কেউ হারতে বা জিততে পারে না।

কোনো পরীক্ষায় কোনো নির্দিষ্ট ঘটনার স্বপক্ষের ফলাফলগুলো হলো অনুকূল ফলাফল। এক্ষেত্রে নির্দিষ্ট কোনো শর্ত দেওয়া থাকে। যেমন, একটা ছক্কা নিয়ে সাধারণ ভাবে নিক্ষেপ করলে মোট ৬ টা ঘটনা হয়। যদি একটা নির্দিষ্ট শর্ত দেওয়া থাকে যে বিজোড় সংখ্যক সংখ্যা উঠা লাগবে, তাহলে এটার অনুকূলে ফলাফল থাকে ৩ টা।

কোনো পরীক্ষার সকল ফলাফল নিয়ে গঠিত সেটকে নমুনাক্ষেত্র এবং এর উপাদানগুলোকে নমুনা বিন্দু বলে। যেমন, ফুটবল ম্যাচের জন্য নমুনাক্ষেত্র হতে পারে { জিতা, হারা, ড্র } আর জিতা হলো এই ক্ষেত্রের এক নমুনা বিন্দু।

# WHITEBOARD

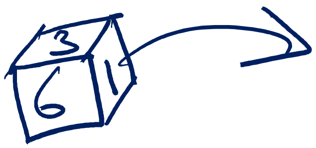
দৈব পরীক্ষা : যে পরীক্ষার ফলাফল জানা থাকে না,

ঘটনা : পরীক্ষার ফলাফলকে ঘটনা।

$\boxed{\text{সমসম্ভাব্য ঘটনা}}$ :

H / T → 2 টি ঘটনা।

50% - 50%




→ মোট ঘটনা - 6টি

জোড় সংখ্যা = 3 টি

বিজোড় " = 3 টি

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$

$\frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 50\%$

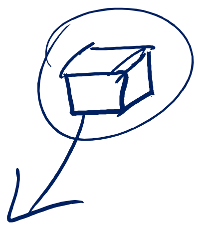
# WHITEBOARD

বিচ্ছিন্ন ঘটনা : দৈব পরীক্ষায় 2টি ঘটনার মধ্যে কোনো সম্পর্ক নেই,

জোড় সম্ভাবনা → $\{2,4,6\}$ $\cap$ বিজোড় → $\{1,3,5\}$ $= \phi$

অনুকূল ফলাফল : → প্রশ্নের উপর নির্ভরশীল

অবিচ্ছিন্ন " :



4

জোড় (2) → $\{2,4,6\}$ $\cap$ 3 অপেক্ষা বড় সংখ্যা → $\{4,5,6\}$ $= \{4,6\}$

→ নমুনাক্ষেত্র $= \{H, T\}$

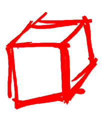
নমুনাক্ষেত্র $= \{1,2,3,4,5,6\}$

# যুক্তিভিত্তিক ও তথ্যভিত্তিক সম্ভাবনা

আগে বলে রাখা দরকার, সম্ভাবনা হলো এক গাণিতিক অনুপাত। যেহেতু কোনো ঘটনা আমরা ১০০% অনুমান করতে পারি না, আমরা আমাদের অনুকূল ফলাফল সংখ্যা ও মোট নমুনাক্ষেত্রের সংখ্যার অনুপাত নিয়ে আমাদের সম্ভাবনা দাড় করাতে পারি।

তাহলে, $\boxed{\text{সম্ভাবনা} = \dfrac{\text{উক্ত ঘটনার অনুকূল ফলাফল}}{\text{সমগ্র সম্ভাব্য ফলাফল}}}$

এখন, **যুক্তিভিত্তিক সম্ভাবনা** হলো এমন ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয়, যেক্ষেত্রে কোনো তথ্য বা পরিসংখ্যান দেওয়া থাকে না, আমাদের নিজে থেকে সব যৌক্তিক ফলাফল ভেবে নিয়ে নমুনাক্ষেত্র বের করতে হয়, এবং সম্ভাবনা নির্ণয় করতে হয় এবং **তথ্যভিত্তিক সম্ভাবনা** হলো এমন ঘটনার সম্ভাবনা নির্ণয়, যেক্ষেত্রে আমাদেরকে কিছু প্রয়োজনীয় তথ্য দেওয়া হয়, যার সাহায্য নিয়ে আমরা অনুকূল ফলাফলগুলো বের করে সম্ভাবনা নির্ণয় করতে পারি।



মৌলিক সংখ্যা = $\boxed{\{2, 3, 5\}}$

সম্ভাবনা = $\dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$

# WHITEBOARD

$$P = \frac{\text{অনুকূল ফলাফল}}{\text{মোট সম্ভাব্য ফলাফল}}$$

$$P(1-6) = \frac{6}{6} = 1$$

$$P(7) = \frac{\boxed{0}}{6} = 0$$

$$P(\text{ছক্কাতে } 1) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{ছক্কাতে } 2) = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{ছক্কাতে জোড়}) = \frac{1}{2}$$

$$P(\text{ছক্কাতে } 2 \text{ এর বেশি}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\boxed{0 \leq \text{অনুকূল ফলাফল} \leq \text{মোট ফলাফল}}$$

$$\Rightarrow \frac{0}{\text{মোট ফলাফল}} \leq \frac{\text{অনু. ফলা.}}{\text{মোট ফলা.}} \leq \frac{\text{মোট ফলা.}}{\text{মোট ফলা}}$$

$$* \Rightarrow \boxed{0 \leq P \leq 1}$$

## Poll Question-01

➢ ২০ টা কাগজে প্রথম ২০ টা স্বাভাবিক সংখ্যা লিখে একটি বাক্সে রাখা হলো। বাক্স থেকে যদি একটা কাগজ দৈবভাবে (না দেখে) বের করা হয়, তাহলে সে কাগজের সংখ্যাটি বর্গসংখ্যা হওয়ার অনুকূল ফলাফল কয়টি?

(a) ২ টি

(b) ৪ টি

(c) ৩ টি

(d) কোনো ফলাফল নেই

নমুনাক্ষেত্র $= \{1, 2, 3, 4, 9, 16, 19, 20\}$ → $\boxed{20}$

বর্গ $= \underbrace{\{1, 4, 9, 16\}}_{4}$

$P(\text{বর্গ}) = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}$

# যুক্তিভিত্তিক সম্ভাবনার উদাহরণ

আমাদেরকে একটা ছক্কা একবার নিক্ষেপ করতে বলা হলো। আমাদেরকে জিজ্ঞেস করা হলো যে, এই ছক্কা একবার নিক্ষেপ করলে যেই সংখ্যাটা উঠবে, সেই সংখ্যাটা 4 বা তার বেশি হওয়ার সম্ভাবনা কত?

এখন, আমাদেরকে কিন্তু ছক্কা সম্পর্কে কোনো তথ্য বা কোনো নতুন পরিসংখ্যান দেওয়া হয়নি। কিন্তু, আমরা জানি যে একটা ছক্কাতে 1 থেকে 6 এর মধ্যে যেকোনো সংখ্যা উঠতে পারে,

সুতরাং, আমাদের নমুনাক্ষেত্র হলো {1, 2, 3, 4, 5, 6}, অর্থাৎ সম্ভাব্য ফলাফল মোট 6 টি

এখন অনুকূল ফলাফলের শর্ত হলো সংখ্যাটা 4 বা তার থেকে বড় হতে হবে। তাহলে অনুকূল ফলাফলের সেট হলো {4, 5, 6} এবং অনুকূল ফলাফল 3 টি

সুতরাং, সম্ভাবনা = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

অনুকূল ফলাফল → {4, 5, 6} → 3 টি

মোট " → 6 টি

$P = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ //

# WHITEBOARD

$P(6) = \frac{1}{6}$

$\frac{100}{600}$

$\frac{100 \text{ কোটি}}{600 \text{ কোটি}}$

91

126

$\frac{1}{6}$

# তথ্যভিত্তিক সম্ভাবনার উদাহরণ

ধরি, আমাদের সামনে একটা থলেতে 6 টা কালো বল, 5 টা লাল বল ও 8 টা সাদা বল রেখে সব মিশিয়ে দেওয়া হলো। আমাদেরকে জিজ্ঞেস করা হলো যে, এখান থেকে না দেখে একটা বল বের করলে বলটা কালো না হওয়ার সম্ভাবনা কত?

এখন, আমাদেরকে ঘটনা সম্পর্কে কিছু প্রয়োজনীয় তথ্য দিয়েছে। আমাদের বলে দিয়েছে যে থলের মধ্যে 19 টা বল আছে, যার মধ্যে 6 টা কালো, 5 টা লাল ও 8 টা সাদা।
সুতরাং, আমাদের নমুনাক্ষেত্র হলো {6 টা কালো বল, 5 টা লাল বল, 8 টা সাদা বল}, অর্থাৎ সম্ভাব্য ফলাফল মোট 19 টি

এখন অনুকূল ফলাফলের শর্ত হলো বলটা কালো বাদে অন্য রঙের হতে হবে। তাহলে অনুকূল ফলাফলের সেট হলো {5 টা লাল বল, 8 টা সাদা বল} এবং অনুকূল ফলাফল 13 টি

মোট বল = 19টি

সুতরাং, সম্ভাবনা $= \frac{13}{19}$

কালো না = 13টি

অনুকূল ফলাফল


মোট ফলাফল

$P(Black) = \frac{6}{19}$

# WHITEBOARD

3 min break!
till 8:41 pm

3 Red
1 Blue

$P(\text{Blue}) = \frac{1}{4}$

2B
2B

$P(\text{Blue}) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

4 Red

$P(\text{Red}) = \boxed{1}$

$P(\text{Blue}) = \frac{0}{4} = 0$

অসম্ভব ঘটনার সম্ভাবনা $= 0$

নিশ্চিত " " $= 1$

## কিছু বিশেষ ধারণা

ধরি, ফলাফলের ধারণা থেকে আমরা বলতে পারি, অনুকূল ফলাফলগুলো সবসময় সমগ্র ফলাফলের মধ্য থেকেই আসে। অর্থাৎ অনুকূল ফলাফল সংখ্যা সাধারণত সমগ্র ফলাফল সংখ্যা থেকে ছোট হয়।

অর্থাৎ, যেকোনো সম্ভাবনার মান সাধারণত 1 থেকে ছোট হয়।

$\boxed{0 \leq P \leq 1}$

এখন, কিছু বিশেষ শর্তে অনুকূল ফলাফল সংখ্যা ও সমগ্র ফলাফল সংখ্যা সমান হয়। এমন ঘটনাকে নিশ্চিত ঘটনা বলে। যেমন, সকালে সূর্য উঠলে পূর্বদিকে উঠার ঘটনা সম্ভব ঘটনা, কারণ আমরা জানি, সূর্য পূর্বদিকে উঠবেই। নিশ্চিত ঘটনার সম্ভাবনা 1।

আবার, কিছু বিশেষ শর্তে কোনো অনুকূল ফলাফল পাওয়া যায় না। এমন ঘটনাকে অসম্ভব ঘটনা বলে। যেমন, ছক্কা একবার নিক্ষেপ করে ৭ উঠানো, কারণ ছক্কায় ৭ থাকে না। অসম্ভব ঘটনার সম্ভাবনা 0।

এখান থেকে আমরা বলতে পারি, সম্ভাবনা 0 থেকে 1 এর মধ্যে যেকোনো সংখ্যা হতে পারে।

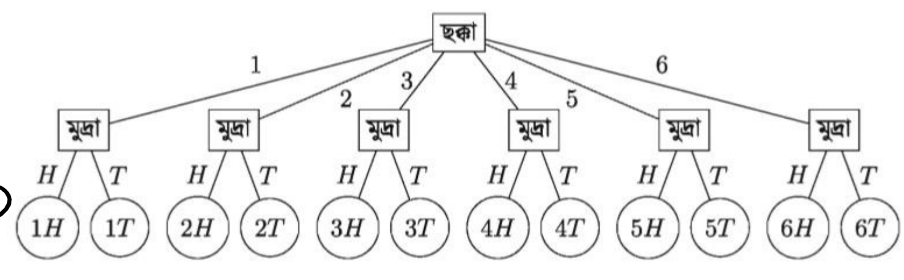
## Probability Tree দ্বারা সম্ভাবনা নির্ণয়

কিছু কিছু পরীক্ষার ক্ষেত্রে একেকটা ফলাফল অন্যটার দ্বারা প্রভাবিত হয়, এর ফলে অনেক বেশি পরিমাণ ফলাফল পাওয়া যায় যে, সবগুলোর হিসাব রাখা কঠিন হয়ে পড়ে। এক্ষেত্রে আমাদের সাহায্যে আসে **Probability Tree**।

Probabilty Tree হলো একটা শাখা প্রশাখার মতো হিসাবক্ষেত্র। এখানে সবার উপরে থাকে স্বাধীন ফলাফলগুলো। এসব ফলাফলগুলো থেকে শাখার মতো বের হয় এদের উপর নির্ভরশীল ফলাফলগুলো। এভাবে সব ধরনের ফলাফল গোছানো অবস্থায় পাওয়া যায়।

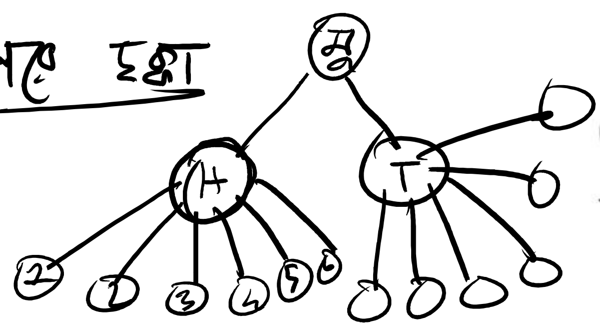
একটা উদাহরণ দিয়ে বোঝানো যাক। ধরি, আমাদেরকে একটা ছক্কা ও একটা মুদ্রা একত্রে নিক্ষেপ করতে বলা হলো। যেহেতু এখানে দুটো ঘটনা পরপর সঙ্ঘটিত হয়েছে, তাই আমরা এটার Probability Tree আঁকবো।

এভাবে খুব সহজে ফলাফলগুলো সাজানো যায়।

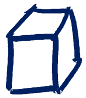



তাহলে নমুনাক্ষেত্রটি হবে: $\{1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T\}$।

প্রথমে মুদ্রা পরে ছক্কা

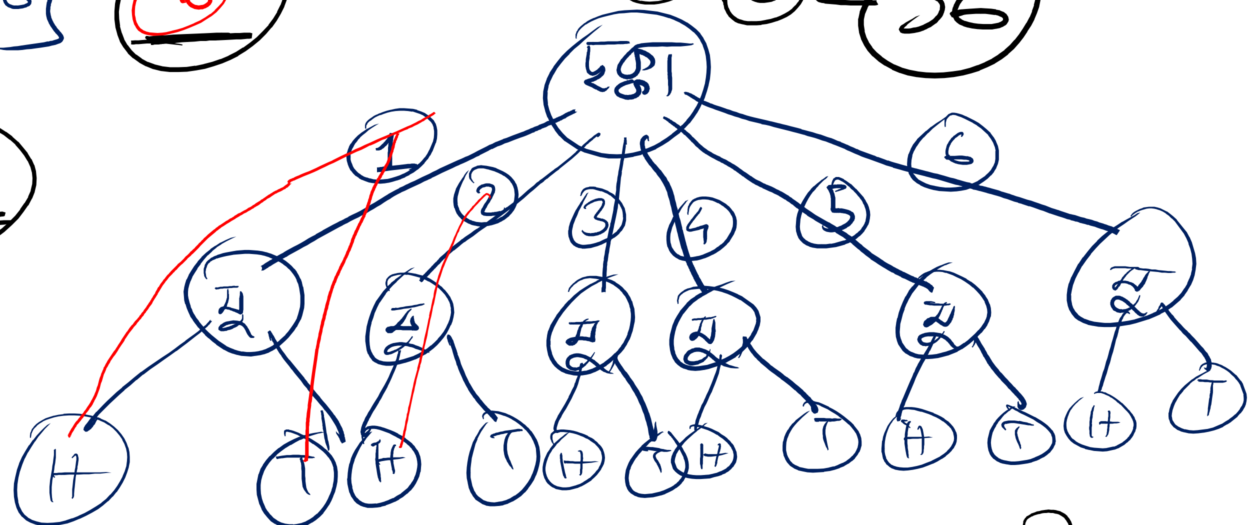


2টি ছক্কা ক্ষেত্রে

1  → {1, 2, 3, 4, 5, 6}  6

2  → {H, T}  2

$6 \times 6 = 36$




$\boxed{6 \times 2 = 12}$

{(6, 1), (6, 2), (4, 3), ...... ( ...... }

নমুনা ক্ষেত্র = {1H, 1T, 2H, 2T, 3H, 3T, 4H, 4T, 5H, 5T, 6H, 6T}

12

# Poll Question-02

➤ পরপর দুইটা ছক্কা নিক্ষেপ করা হলো। এক্ষেত্রে প্রথম ছক্কায় উঠা সংখ্যাটির দ্বিগুণ সংখ্যা দ্বিতীয় ছক্কায় উঠার সম্ভাবনা কত?

(a) $\frac{1}{36}$

(b) $\frac{1}{18}$

(c) $\frac{1}{12}$

(d) $\frac{1}{9}$

১ম →

২য় ↓

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1,1 | 2,1 | | | | |
| 2 | 1,2 | | | | | |
| 3 | | | | | | |
| 4 | | 2,4 | 3,4 | | | |
| 5 | | | | | | |
| 6 | | | 3,6 | | | |

১ম ছক্কা = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 6

২য় " = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ 6

× = 36

অনুকূল ফলাফল = 3টি

পরপর নিক্ষেপে মোট নমুনাক্ষেত্র = $\{(1,1)$ $\boxed{(1,2)}$ $\boxed{(2,4)}$ $(3,6)\}$

36 টি

$P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

না বুঝে
মুখস্থ করার
অভ্যাস প্রতিভাকে
ধ্বংস করে