



৯ম শ্রেণি একাডেমিক প্রোগ্রাম ২০২০

সাধারণ গণিত

লেকচার : M-11

অধ্যায় ৪ : সূচক ও লগারিদম

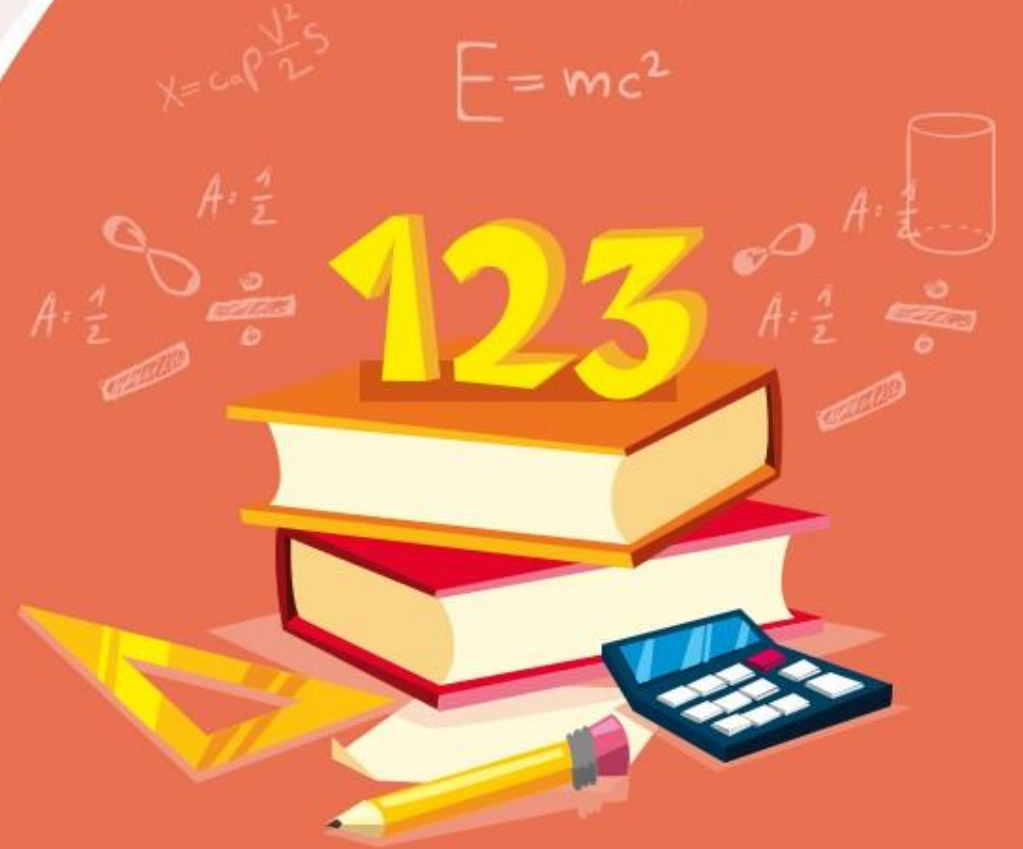


$$x = \sqrt{\frac{a^2}{c} + c} - \frac{b}{2}$$



উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার



www.udvash.com

লগারিদম

মূলত লগারিদম হলো সূচকের ঠিক বিপরীত একটা অপারেটর।
সূচকে যেমন ভিত্তি ও ঘাত থেকে সূচকীয় সংখ্যা নির্ণয় করা হয়,
তেমনই লগারিদম দিয়ে ভিত্তি ও সূচকীয় সংখ্যা থেকে ঘাত নির্ণয়
করা যায়।

$n = \text{power (result obtained by raising } b \text{ to the power of } a)$

$$\log_b n = a \text{ and } b^a = n$$

$b = \text{base}$

$a = \text{exponent}$

উদাহরণ হিসেবে, যদি $2^3 = 8$ হয়, তাহলে বলা যায়, $\log_2 8 = 3$

$$2^3 = 8$$
$$\log_2 8 = 3$$

২^৩ = ৮

২ → ভিত্তি
৩ → ঘাত
৮ → value
log

$$\log_2 8 = 3$$

লগারিদমের সূত্রাবলী

ধরি, $a > 0, a \neq 1; b > 0, b \neq 1$ এবং $M > 0, N > 0$

সূত্র ৬ (শূন্য ও এক লগ). $a > 0, a \neq 1$ হলে ক) $\log_a 1 = 0$ খ) $\log_a a = 1$

$$\log_2 1 = 0$$

$$\log_2 2 = 1$$

সূত্র ৭ (গুণফলের লগ). $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

$$\log_8 (8 \times 9) = \log_8 8 + \log_8 9$$

সূত্র ৮ (ভাগফলের লগ). $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

$$\log_2 \left(\frac{3}{2}\right) = \log_2 3 - \log_2 2$$

সূত্র ৯ (ঘাতের লগ). $\log_a M^r = r \log_a M$

$$\log_2 3^4 = 4 \times \log_2 3$$

* সূত্র ১০ (ভিত্তি পরিবর্তন). $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$

$$\log_a M = \log_b M \times \log_a b$$

$$\log_2 5 = \log_3 5 \times \log_2 3$$

অনুসিদ্ধান্ত ১. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ অথবা $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$

সূত্রাবলীর প্রমাণ

ধরি, $a > 0, a \neq 1; b > 0, b \neq 1$ এবং $M > 0, N > 0$

সূত্র ৬ (শূন্য ও এক লগ). $a > 0, a \neq 1$ হলে

(ক) $\log_a 1 = 0$ (খ) $\log_a a = 1$

$$a^x = M$$

$$\log_a M = x$$

$$a^0 = 1$$

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a a = 1$$

$$a^1 = a$$

$$\log_a a = 1$$

সূত্র ৭ (গুণফলের লগ). $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$

$$\log_a(MN) \text{ বিধি, } \log_a M = x, a^x = M$$

$$\log_a N = y, a^y = N$$

$$a^x = M, a^y = N$$

$$M \times N = a^x \times a^y$$

$$\text{অ, } \log_a(MN) = x + y$$

$$\log_a MN = x + y$$

$$\therefore \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

সূত্রাবলীর প্রমাণ

সূত্র ৯ (ঘাতের লগ). $\log_a M^r = r \log_a M$

ধরি, $\log_a M = k$

$$a^k = M$$

$$\therefore, (a^k)^r = (M)^r$$

$$\therefore, a^{kr} = M^r$$

$$\log_a M^r = k \cdot r$$

$$\log_a M^r = r \cdot \log_a M$$

সূত্র ১০ (ভিত্তি পরিবর্তন). $\log_a M = \log_b M \times \log_a b$

$$\log_a M = x \quad \therefore, a^x = M$$

$$\log_b M = y \quad \therefore, b^y = M$$

$$\therefore a^x = b^y$$

$$\therefore, (a^x)^{\frac{1}{y}} = (b^y)^{\frac{1}{y}}$$

$$\therefore, a^{\frac{x}{y}} = b$$

$$\log_a b = \frac{x}{y}$$

$$\therefore, x = y \times \log_a b$$

$$\log_a M = \log_b M \times \log_a b$$

[Proved]

$$a^x = M$$

$$\log_a M = x$$

Poll Question- 01

□ নিচের কোনটি সঠিক নয়?

(a) $\log_{10} 10 = 1$ ✓

✓ (b) $\log_{10}(2 \times 3) = \log_{10}(2 + 3)$ ✗

(c) $\log_{10} 1 = 0$ ✓

(d) কোনটিই নয়

$$\log_{10}(2 \times 3) = \log_{10}(6)$$

$$\log_{10}(2 + 3) = \log_{10}(5)$$

$$\log_{10} 10 = 1 \quad | \quad \log_a a = 1$$
$$\log_a 1 = 0 \quad | \quad \log_{10} 1 = 0$$

$$\log_{10}(2 \times 3)$$
$$= \log_{10} 2 + \log_{10} 3$$

Practice Problem

➤ মান নির্ণয় করঃ $\log_3 81$

Practice Problem

➤ মান নির্ণয় করঃ $\log_{2\sqrt{5}} 400$

গাণিতিক সমস্যা

➤ মান নির্ণয় করঃ $\log_5(\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5})$

$$\begin{aligned}\log_5(\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5}) \\&= \log_5(5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}) \\&= \log_5(5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}) \\&= \log_5 5^{\frac{5}{6}} \\&= \frac{5}{6} \times \frac{\log 5}{\log 5} \\&= \frac{5}{6} \times 1 \\&= \frac{5}{6}\end{aligned}$$

$$\textcircled{1} \log_a M^n = n \cdot \log_a M$$

$$\textcircled{1} \log_a a = \underline{\underline{1}}$$

$$= \frac{5}{6} \times 1 = \frac{5}{6} \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

Practice Problem

➤ সমাধান করঃ $\log_5 x = 3$

গাণিতিক সমস্যা

➤ সমাধান করঃ $\log_x \frac{1}{16} = -2$

$$\log_x \frac{1}{16} = -2$$

$$\text{স, } \log_x 2^{\textcircled{-4}} = -2$$

$$\text{স, } -4 \cdot \log_x 2 = -2$$

$$\text{স, } \log_x 2 = \frac{-2}{-4}$$

$$\text{স, } \log_x 2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{স, } \log_x 2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{স, } x^{\frac{1}{2}} = 2$$

$$\text{স, } \sqrt{x} = 2$$

$$\text{স, } (\sqrt{x})^2 = 2^2$$

$$\text{স, } \boxed{x = 4}$$

(Ans)

$$\frac{16}{16} = 2^4$$

$$\frac{1}{16} = 2^{-4}$$

$$\log_a M = x$$

$$\text{স, } a^x = M$$



উদ্ভাস

একাত্মিক এন্ড এডভান্সড কেরার

সাধারণ গণিত

অধ্যায় ৪ : সূচক ও লগারিদম

গাণিতিক সমস্যা

➤ দেখাও যে,

$$5\log_{10} 5 - \log_{10} 25 = \log_{10} 125$$

$$\text{LHS} = 5\log_{10} 5 - \log_{10} 25$$

$$= \log_{10} 5^5 - \log_{10} 5^2$$

$$= \log_{10} \left(\frac{5^5}{5^2} \right)$$

$$= \log_{10} (5^{5-2})$$

$$= \log_{10} 5^3$$

$$= \log_{10} 125$$

$$= \text{RHS}$$

[Proved]

$$\log_a M^r = r \cdot \log_a M$$
$$\log_a \left(\frac{M}{N} \right) = \log_a M - \log_a N$$

Practice Problem

➤ দেখাও যে,

$$\log_{10} \frac{50}{147} = \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2 \log_{10} 7$$

গাণিতিক সমস্যা

➤ দেখাও যে,

$$3 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 360$$

$$\text{LHS} = \log_{10} 2^3 + \log_{10} 3^2 + \log_{10} 5$$

$$= \log_{10} (2^3 \times 3^2 \times 5)$$

$$= \log_{10} (8 \times 9 \times 5)$$

$$= \log_{10} 360$$

$$= \text{RHS} \quad [\text{proved}]$$

$$\log_a M^r = r \cdot \log_a M$$

$$\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$\log_a (M.N.O.P. \dots)$$

$$= \log_a M + \log_a N + \log_a O + \log_a P + \dots$$



উদ্দাম

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেন্দ্র

সাধারণ গণিত

অধ্যায় ৪ : সূচক ও লগারিদম

Poll Question- 02

□ যদি $\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) + \log_{10}\left(\frac{b}{a}\right) = \log_{10}(a+b)$ হয়, তাহলে-

✓ (a) $a+b=1$

(b) $a-b=-1$

(c) $a=b$

(d) কোনোটিই নয়

$$\log_{10}\left(\frac{a}{b}\right) + \log_{10}\left(\frac{b}{a}\right) = \log_{10}(a+b)$$

$$\text{ক, } \log_{10} a - \log_{10} b + \log_{10} b - \log_{10} a = \log_{10}(a+b)$$

$$\text{ক, } 0 = \log_{10}(a+b)$$

$$10^0 = a+b$$

$$\text{ক, } 1 = a+b$$

$$\frac{a \neq M}{\log M = 2}$$

Practice Problem

➤ সরল করোঃ

$$7\log_{10} \frac{10}{9} - 2\log_{10} \frac{25}{24} + 3\log_{10} \frac{81}{80}$$

গাণিতিক সমস্যা

➤ সরল করোঃ

$$\log_7(\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt{7}) - \log_3(\sqrt[3]{3}) + \log_4 2$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$$

$$= \log_7(7^{\frac{1}{5}} \cdot 7^{\frac{1}{2}}) - \log_3(3^{\frac{1}{3}}) + \log_4 \sqrt{4}$$

$$= \log_7(7^{\frac{1}{5} + \frac{1}{2}}) - \log_3 3^{\frac{1}{3}} + \log_4 4^{\frac{1}{2}}$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a a^r = r \log_a a$$

$$= \frac{7}{10} \cdot \log_7 7 - \frac{1}{3} \cdot \log_3 3 + \frac{1}{2} \cdot \log_4 4$$

$$= \frac{7}{10} \cdot 1 - \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1$$

$$= \frac{13}{15} \quad (\text{Ans})$$



উদ্দাম

একাডেমিক এন্ড আর্টসিশন কেন্দ্র

সাধারণ গণিত

অধ্যায় ৪ : সূচক ও লগারিদম

গাণিতিক সমস্যা

➤ সরল করোঃ

$$\log_e \left(\frac{a^3 b^3}{c^3} \right) + \log_e \left(\frac{b^3 c^3}{d^3} \right) + \log_e \left(\frac{c^3 d^3}{a^3} \right) - 3 \log_e b^2 c$$

$$= \cancel{\log_e a^3} + \log_e b^3 - \cancel{\log_e c^3} + \log_e b^3 + \cancel{\log_e c^3} - \cancel{\log_e d^3} + \log_e c^3 + \cancel{\log_e d^3} - \cancel{\log_e a^3} - \log_e (b^2 c)^3$$

$$= 2 \log_e b^3 + \log_e c^3 = \log_e b^6 \cdot c^3$$

$$= \log_e (b^3)^2 + \log_e c^3 - \log_e b^6 - \log_e c^3$$

=  (Ans)



উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

সাধারণ গণিত

অধ্যায় ৪ : সূচক ও লগারিদম

Poll Question- 03

□ $\log_{10} 27 = a$ হলে $\log_{10} 9$ এর মান কত?

$$3^3 = 27$$

(a) $\frac{1}{a}$

(b) $\frac{3a}{2}$

~~(c) $\frac{2a}{3}$~~

(d) $a^{\frac{3}{2}}$

$$\log_{10} 27 = a$$

ক, $\log_{10} 3^3 = a$

$$\text{ক, } 3 \cdot \log_{10} 3 = a$$

$$\text{ক, } \log_{10} 3 = \frac{a}{3}$$

$$\begin{aligned}\log_{10} 9 &= \log_{10} 3^2 \\&= 2 \cdot \log_{10} 3 \\&= 2 \cdot \frac{a}{3} \\&= \frac{2a}{3}\end{aligned}$$

লগারিদম পদ্ধতি

সাধারণ লগারিদমঃ আমরা যেহেতু ১০ ভিত্তিক সংখ্যা পদ্ধতি দিয়ে আমাদের সব হিসাব করি, তাই এই ১০ কে ভিত্তি ধরে লগারিদম করাটাকে সাধারণ লগারিদম বলে। এক্ষেত্রে $\log_{10}x$ এর বদলে শুধু $\log x$ লিখা যায়। অর্থাৎ যদি লগারিদমে কোনো ভিত্তি লেখা না থাকে, তাহলে বুঝতে হবে যে লগারিদমের ভিত্তি ১০।

স্বাভাবিক লগারিদমঃ হিসাব করে দেখা যায়, লগারিদমের ভিত্তি 2.718281828... মানের এক অমূলদ সংখ্যা হলে অনেক জটিল জটিল সমস্যার সহজ সমাধান পাওয়া যায়। সেই সংখ্যাটিকে e দ্বারা প্রকাশ করা হয় এবং এই লগারিদম পদ্ধতিকে স্বাভাবিক লগারিদম বলে। এক্ষেত্রে $\log_e x$ এর বদলে $\ln x$ লিখা হয়। মজার ব্যাপার হলো, সাধারণ লগারিদমের ১০ বছর আগে স্বাভাবিক লগারিদমের উৎপত্তি হয়েছে।

$$\begin{array}{l} \log_{10} M \\ \log_{10} 5 \end{array} \bigg/ \log_{10} (=) \quad \bigg/ \quad \log_e \quad \begin{array}{l} \text{অমূলদ সংখ্যা} \\ e = 2.71828 \dots \\ e \text{ হচ্ছে একটি অসীম সংখ্যা} \\ \log_e x = \ln x \text{ (নতুন)} \end{array}$$

সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ

কোনো একটা সংখ্যাকে যদি ১০ এর সূচকীয় সংখ্যা হিসেবে প্রকাশ করা হয়, তাহলে যেকোনো বড় বা ছোট সংখ্যাকে এইভাবে স্ট্যান্ডার্ড ভাবে প্রকাশ করা যাবে। এই প্রকাশিত রূপকে ঐ সংখ্যার বৈজ্ঞানিক রূপ বলে।

যেমন, 4320 কে 4.32×10^3 লিখা যায়

একইভাবে 0.000342 কে 3.42×10^{-4} লিখা যায়

$$\begin{array}{r} 6442.00 \\ \hline 3 \text{ ডিগ্রী ৪ম}$$

কোনো সংখ্যা যদি N হয়, তাহলে তার বৈজ্ঞানিক রূপ হবে,

$$N = a \times 10^n$$

এখানে অবশ্যই $1 \leq a < 10$ হওয়া লাগবে, এবং n কে পূর্ণসংখ্যা হওয়া লাগবে।

$$\begin{array}{r} \boxed{6442} \\ \hline = 6.442 \times 10^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3439 = 3439.0 \\ \hline = 3.439 \times 10^3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.0028 \\ \hline 2.8 \times 10^{-3} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 0.00017 \\ \hline 1.7 \times 10^{-4} \end{array}$$

Poll Question- 04

□ N এর বৈজ্ঞানিক রূপ $a \times 10^n$ হলে এবং $n = 0$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(a) a অমূলদ সংখ্যা ✗

$$N \rightarrow \underline{a} \times 10^n \rightarrow 0$$

~~(b) $1 \leq N < 10$~~

(c) N এর বৈজ্ঞানিক রূপ সম্ভব নয় ✗

$$\underline{2.71828} \dots \times 10^n$$

$$\times 10^0$$

$$\times 1$$

(d) কোনোটিই নয়

$$\begin{array}{l} \text{✗} \quad \text{✗} \\ 3 \cdot 0 \times 10^0 \\ \text{0} \rightarrow n \\ \underline{3 \cdot 0 \times 10} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 6 \\ = 6.0 \times 10^0 \end{array}$$

$$9.0 \times 10^0$$



উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

সাধারণ গণিত

অধ্যায় ৪ : সূচক ও লগারিদম

লগের পূর্ণক ও অংশক

কোনো সংখ্যাকে যদি সাধারণ লগারিদম করা হয়, তাহলে আমরা উত্তরকে দুটি অংশে ভাগ করতে পারবো। একটি হলো পূর্ণসাংখ্যিক অংশ, আরেকটি হলো দশমিক অংশ। তাহলে, কোনো সংখ্যাকে সাধারণ লগারিদম করলে যে পূর্ণসংখ্যা অংশ পাওয়া যায়, তাকে ঐ সংখ্যার সাধারণ লগের পূর্ণক বলা হয়, এবং দশমিক অংশকে ঐ সংখ্যার সাধারণ লগের অংশক বলা হয়।

যেমন, 4320 কে সাধারণ লগারিদম করলে হয় 3.635483...

তাহলে 4320 এর সাধারণ লগের পূর্ণক হলো 3 ও অংশক হলো 0.635483...

পূর্ণক ও অংশক বের করার সহজ উপায়ঃ

যদি কোনো সংখ্যা N এর বৈজ্ঞানিক রূপ $a \times 10^n$ হয়,

তাহলে n হলো N এর সাধারণ লগের পূর্ণক

এবং $\log(a)$ হলো N এর সাধারণ লগের অংশক

N এর মান যখন 1 থেকে ছোট হয়, তখন সাধারণ লগারিদম বের করে পূর্ণক ও অংশক বের করা কিছুটা কঠিন, তাই সেক্ষেত্রে সহজ উপায় ব্যবহার করাটাই গ্রহণযোগ্য।

গাণিতিক সমস্যা

➤ নিচের সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক রূপ, সাধারণ লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় করো। 60.831

$$\begin{aligned} 60.831 &= \underline{6.0831 \times 10^1} \\ \log_{10}(60.831) &= \textcircled{1} \cdot \overbrace{7841249 \dots}^{\text{অংশক}} \\ &\quad \swarrow \text{পূর্ণক} \\ 1 &\longrightarrow \text{পূর্ণক} \\ 0.784124 &\longrightarrow \text{অংশক} \end{aligned}$$

Practice Problem

➤ নিচের সংখ্যাটির বৈজ্ঞানিক রূপ, সাধারণ লগের পূর্ণক ও অংশক নির্ণয় করো। 0.0456

WHITE BOARD

না বুঝে
মুখস্থ করার
অভ্যাস প্রতিভাকে
ধ্বংস করে

$$X = \frac{c \rho V^2}{2S}$$

$$X = \frac{c \rho V^2}{2S}$$

$$E = mc^2$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{c} + c} - \frac{b}{2}$$



উদ্ভাস

একাত্মিক এড এডমিশন কোয়ার

www.udvash.com