

৯ম শ্রেণি একাডেমিক প্রোগ্রাম ২০২০

গণিত

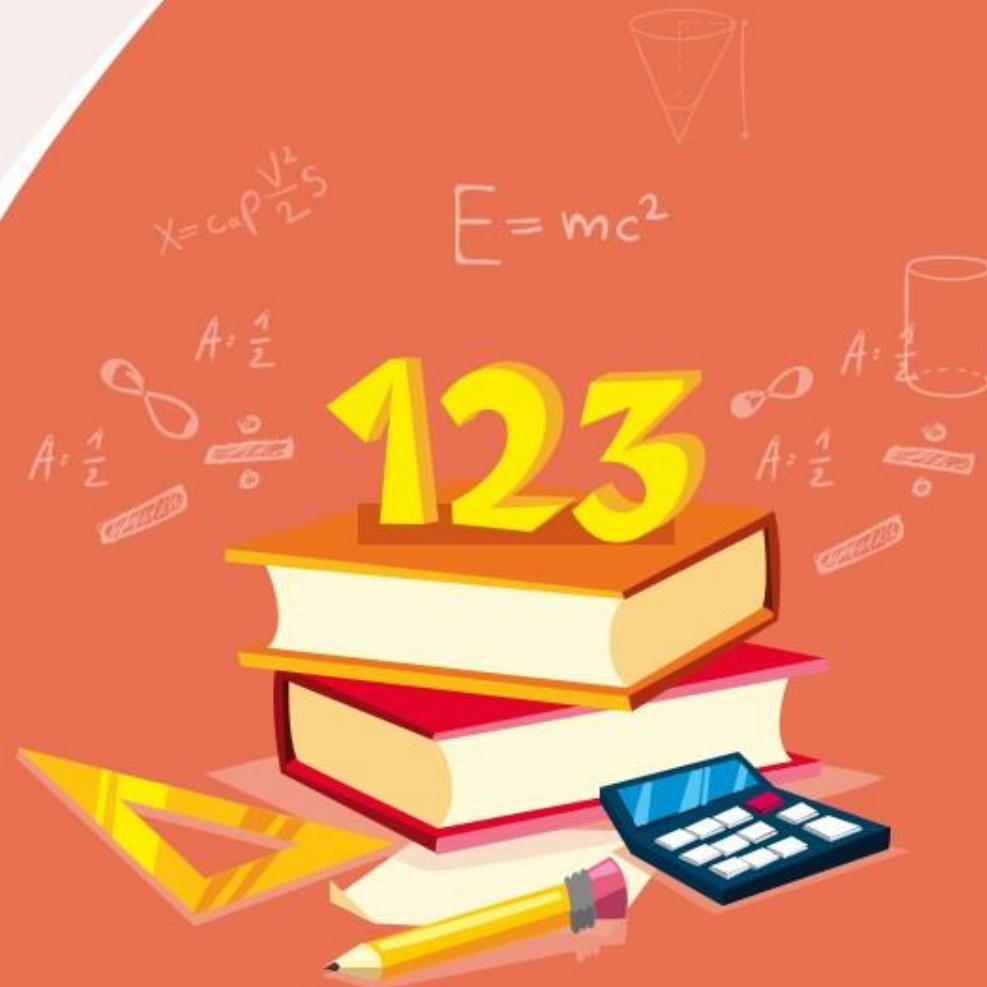
লেকচার : M-24

অধ্যায় ০৯ : ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



উদ্ভাষ

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেন্দ্র



www.udvash.com

সমকোণী ত্রিভুজের বাহু ও কোণ

সমকোণী ত্রিভুজে কোণের উপর নির্ভর করে বাহুগুলোকে চিহ্নিত করা হয়।

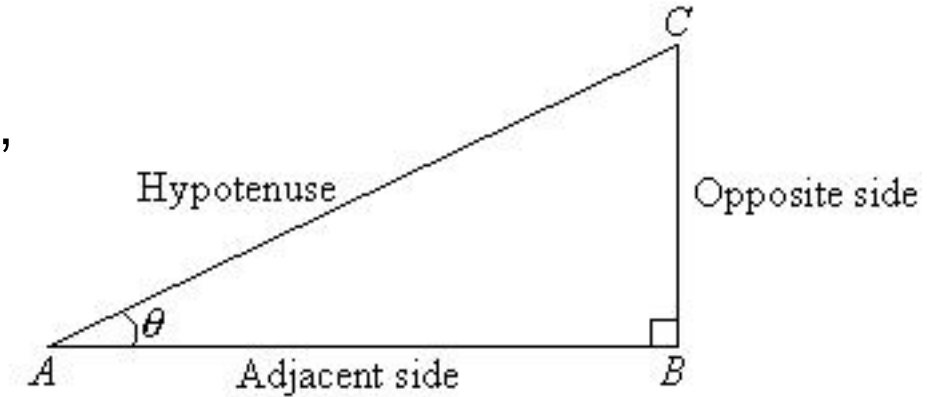
পাশের $\triangle ABC$ তে $\angle ABC$ কোণটি সমকোণ।

সমকোণী ত্রিভুজের সবচেয়ে বড় বাহুটিকে অতিভুজ (Hypotenuse) বলা হয়। এখানে AC হলো অতিভুজ। আর অতিভুজ কোণের উপর নির্ভরশীল না। সমকোণী ত্রিভুজের যেকোনো কোণের জন্য অতিভুজ সবচেয়ে বড় বাহু।

সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ বাদে কোনো কোণের ঠিক বিপরীতে থাকা বাহুকে সেই কোণের সাপেক্ষে বিপরীত বাহু (Opposite Side) বা লম্ব বলা হয়। এখানে BC হলো $\angle BAC$ এর সাপেক্ষে লম্ব, কারণ এটা $\angle BAC$ এর বিপরীত বাহু। একইভাবে, $\angle ACB$ এর সাপেক্ষে লম্ব হলো AB ।

সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ বাদে কোনো কোণের সাথে সন্নিহিত (অতিভুজ বাদে) থাকা বাহুটিকে সেই কোণের সাপেক্ষে সন্নিহিত বাহু (Adjacent Side) বা ভূমি বলা হয়। এখানে AB হলো $\angle BAC$ এর সাপেক্ষে ভূমি। কারণ এটা $\angle BAC$ এর সন্নিহিত বাহু। একইভাবে, $\angle ACB$ এর সাপেক্ষে ভূমি হলো BC ।

সাধারণত কোনো ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলোকে ইংরেজি বড় হাতের অক্ষর ($A, B, C...$) দিয়ে, বাহুগুলোকে ইংরেজি ছোট হাতের অক্ষর ($a, b, c...$) এবং কোণগুলোকে গ্রীক ছোট হাতের অক্ষর ($\alpha, \beta, \gamma...$) দিয়ে চিহ্নিত করা হয় চিত্রে।



সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজ

সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সদৃশতা বিশেষ এক ভূমিকা পালন করে।
আমরা জানি, দুটি ত্রিভুজ যদি সদৃশ হয়, তাহলে তাদের অনুরূপ
বাহুগুলোর অনুপাতও সমান হবে।

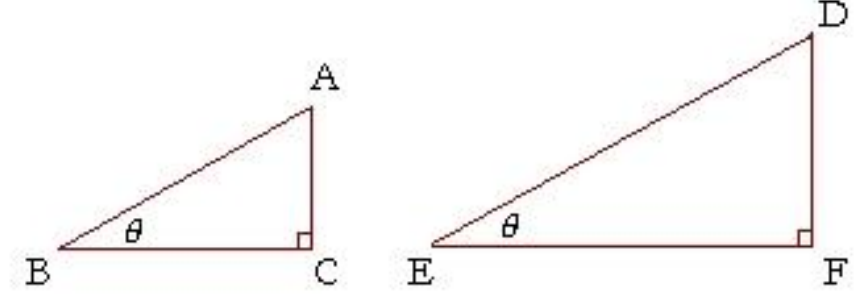
ΔABC এর তিন বাহু থেকে আমরা মোট ৬ ধরনের অনুপাত পাইঃ

$$\frac{AB}{BC}, \frac{AB}{AC}, \frac{BC}{AC}, \frac{AC}{BC}, \frac{AC}{AB} \text{ এবং } \frac{BC}{AB}$$

একইভাবে ΔDEF থেকে পাইঃ $\frac{DE}{EF}, \frac{DE}{DF}, \frac{EF}{DF}, \frac{DF}{EF}, \frac{DF}{DE}$ এবং $\frac{EF}{DE}$

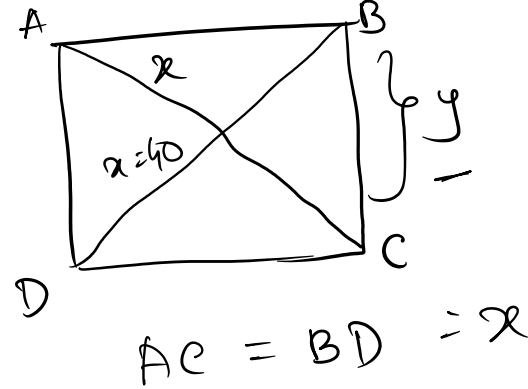
সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে এই অনুপাতগুলো ধ্রুবক হয়। অর্থাৎ

সমকোণী ত্রিভুজে নির্দিষ্ট মানের কোণের জন্য এই(৬)টা অনুপাতের
প্রত্যেকটাই একেকটা ধ্রুব সংখ্যা হবে, একটা সর্বজনীন ধ্রুব মান
হবে। আর এই মান শুধুমাত্র কোণের মানের উপর নির্ভর করে
পরিবর্তিত হবে।



Poll Question-01

একটা বর্গের কর্ণ দুটির গুণফল 1600 হলে বর্গের ক্ষেত্রফল কত?



$$AC \times BD = 1600$$

$$x, x \times x = 1600$$

$$x, x^2 = 1600$$

$$x = 40$$

(a) 1600

(b) 800

(c) 400

(d) কোনোটিই নয়

$$y^2 = (\sqrt{800})^2$$
$$= 800$$



$$y^2 + y^2 = 40^2$$

$$2y^2 = 40^2$$

$$y^2 = 800$$

$$y = \sqrt{800}$$



উদ্ভাস

একাত্মিক এন্ড এডমিশন কেন্দ্র

গণিত

অধ্যায় ০৯ : ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

একটি সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে যে ৬ টা ধ্রুব অনুপাত আছে, আমরা জানি যে এগুলো কোণের মানের উপর নির্ভরশীল, অর্থাৎ কোণের মান অনুযায়ী এই অনুপাতের মান পরিবর্তিত হয়।

সমকোণী ত্রিভুজের এই ধরনের বিশেষ অনুপাতগুলোকে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলা হয়। ত্রিকোণমিতিক অনুপাতকে মূলত এক ধরনের ফাংশন বলা যায়, যেখানে চলক বা কোণের মান ইনপুট হিসেবে নিয়ে আউটপুট হিসেবে অনুপাতের ধ্রুব মান পাওয়া যায়।

এই ৬ টা অনুপাতকে নিম্নোক্ত উপায়ে লেখা হয়ঃ

ΔABC তে যদি $\angle ABC$ সমকোণ হয়, আর যদি $\angle BAC = \theta$ হয়, তাহলেঃ

$$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC} \quad [\text{একে } \theta \text{ কোণের সাইন (sine) হিসেবে পড়া হয়}]$$

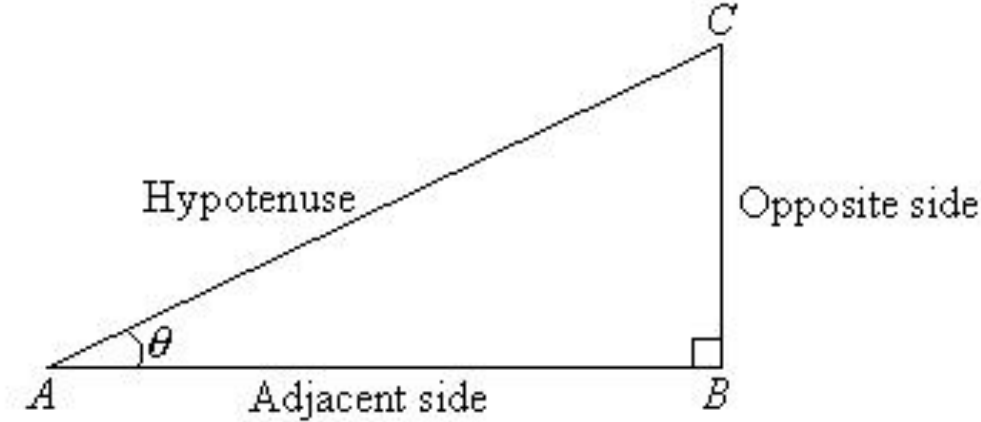
$$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{AC} \quad [\text{একে } \theta \text{ কোণের কোসাইন (cosine) হিসেবে পড়া হয়}]$$

$$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{BC}{AB} \quad [\text{একে } \theta \text{ কোণের ট্যানজেন্ট (tangent) হিসেবে পড়া হয়}]$$

$$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \frac{AC}{AB} \quad [\text{একে } \theta \text{ কোণের সেক্যান্ট (secant) হিসেবে পড়া হয়}]$$

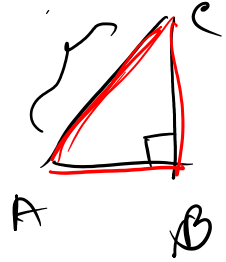
$$\csc\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \frac{AC}{BC} \quad [\text{একে } \theta \text{ কোণের কোসেক্যান্ট (cosecant) হিসেবে পড়া হয়}]$$

$$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \frac{AB}{BC} \quad [\text{একে } \theta \text{ কোণের কোট্যানজেন্ট (cotangent) হিসেবে পড়া হয়}]$$



Poll Question-02

$\triangle ABC$ এর $\angle ABC$ কোণটি সমকোণ। $AB = \sqrt{5}x$ আর $BC = \sqrt{5(1-x^2)}$ হলে $\frac{AC}{BC}$ কত?



$$\begin{aligned} AC^2 &= BC^2 + AB^2 \\ &= (\sqrt{5(1-x^2)})^2 + (\sqrt{5}x)^2 \end{aligned}$$

$$= 5(1-x^2) + 5x^2$$

$$AC^2 = 5 - 5x^2 + 5x^2$$

$$\therefore AC^2 = 5$$

$$AC = \sqrt{5}$$

$$\frac{AC}{BC} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5(1-x^2)}}$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{5}}}{\frac{\cancel{\sqrt{5}} \cdot \sqrt{(1-x^2)}}{1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

- (a) $\sqrt{5}$
- (b) $\frac{\sqrt{5}}{1-x^2}$
- ☒ (c) $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- (d) $\frac{1}{5\sqrt{1-x^2}}$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক ও অভেদাবলী

$$\sin A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}, \quad \csc A = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} \quad \leftarrow \text{D} \quad \sin A = \frac{1}{\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}} = \frac{1}{\csc A}$$

যেকোনো কোণ A এর জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের সম্পর্ক হলো:

$$\sin A = \frac{1}{\csc A}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A}$$

$$\tan A = \frac{1}{\cot A}$$

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$$

$$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}$$

$$\cos A = \frac{\text{দ্বিঘ্ন}}{\text{অতিভুজ}}$$

$$\frac{\sin A}{\cos A}$$

$$= \frac{\frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}}{\text{দ্বিঘ্ন}} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{দ্বিঘ্ন}} = \tan A$$

যেকোনো কোণ A এর জন্য ত্রিকোণমিতিক কিছু অভেদ হলো:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$\csc^2 A - \cot^2 A = 1$$

$$\boxed{\sin A}$$

$$\boxed{\cos A}$$

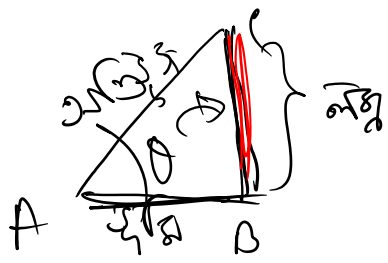
$$\cancel{\sin A}$$

$$\log \text{val} = 4.72$$

বিঃদ্রঃ $(\sin A)^n$ কে কখনো $\sin A^n$ লেখা হয় না, বরং সূচকটা sin এর উপর বসানো হয়, এভাবে লেখা হয়: $\sin^n A$.

$$(\sin A)^2 = \cancel{\sin A^2} \quad \boxed{\sin^2 A} \quad \tan^3 A$$

ত্রিকোণমিতিক অভেদাবলীর প্রমাণ



$$\boxed{AC^2} = \underline{BC^2 + AB^2} \quad \tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{\text{উচ্চ}}{\text{দূরত্ব}}$$

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\text{LHS} = \sin^2 A + \cos^2 A$$

$$= \left(\frac{BC}{AC} \right)^2 + \left(\frac{AB}{AC} \right)^2$$

$$= \frac{\boxed{BC^2 + AB^2}}{AC^2}$$

$$= \frac{\cancel{AC^2}}{\cancel{AC^2}}$$

$$= 1 = \text{RHS}$$

$$\sec^2 A - \tan^2 A = 1$$

$$\text{or, } \boxed{\sec^2 A = 1 + \tan^2 A}$$

$$\text{LHS} = \sec^2 A$$

$$= \left(\frac{\cancel{AC}}{\cancel{AB}} \right)^2$$

$$= \frac{BC^2 + AB^2}{AB^2}$$

$$= \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{\cancel{AB^2}}{\cancel{AB^2}}$$

$$= \tan^2 A + 1 = \text{RHS}$$

$$\text{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$$

$$\text{or, } \text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$$

⊗ Practice at Home



উদ্ভাস

একাত্মিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

গণিত

অধ্যায় ০৯ : ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

Poll Question-03

$A \neq B$ প্রকৃতি

A ও B পরস্পর কোণ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(a) $\sin A = \sin B$ ~~✗~~

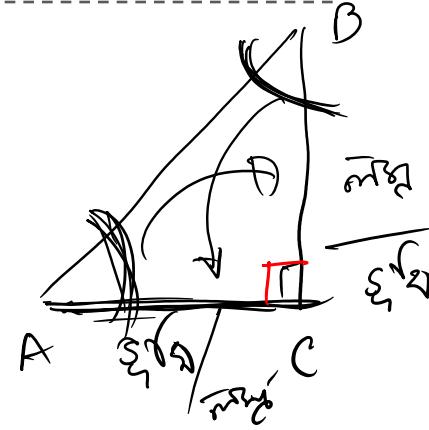
(b) $\tan A = \sec B$ ~~✗~~

(c) $\operatorname{cosec} A = \sin B$ ~~✗~~

(d) $\sec A = \operatorname{cosec} B$ ~~✗~~

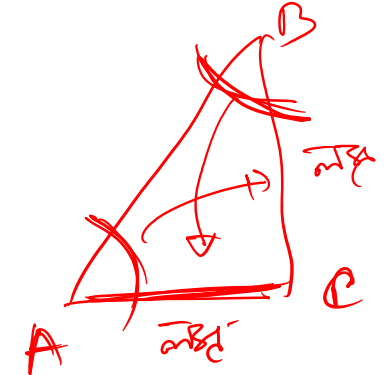
$$\sec A = \frac{AB}{AC}$$

$$\operatorname{cosec} B = \frac{AB}{AC}$$



$$\sin A = \frac{\text{লম্বা}}{\text{প্রতিভু}} = \frac{BC}{AB}$$

$$\sin B = \frac{AC}{AB}$$



$$\frac{BC}{AB}$$

$$\sin A = \frac{BC}{AB}$$

$$\sin B = \frac{AC}{AB}$$

না বুঝে
মুখস্থ করার
অভ্যাস প্রতিভাকে
ধ্বংস করে

$$X = c \rho P \frac{V^2}{2} S$$

$$X = c \rho P \frac{V^2}{2} S$$

$$E = mc^2$$

$$x = \sqrt{\frac{a^2}{c} + c} - \frac{b}{2}$$



উদ্ভাস

একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেন্দ্র

www.udvash.com