



৯ম শ্রেণি একাডেমিক প্রোগ্রাম ২০২০

উচ্চতর গণিত

লেকচার : HM-09

অধ্যায় ৩: জ্যামিতি



$$x = \sqrt{\frac{c^2}{c}} + c - \frac{b}{2}$$



একাডেমিক এবং প্রশিক্ষণ কেন্দ্র

www.udvash.com

সদৃশতা

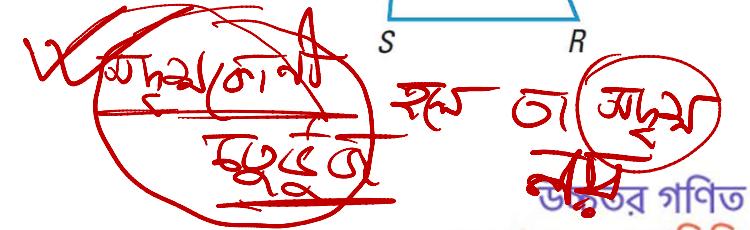
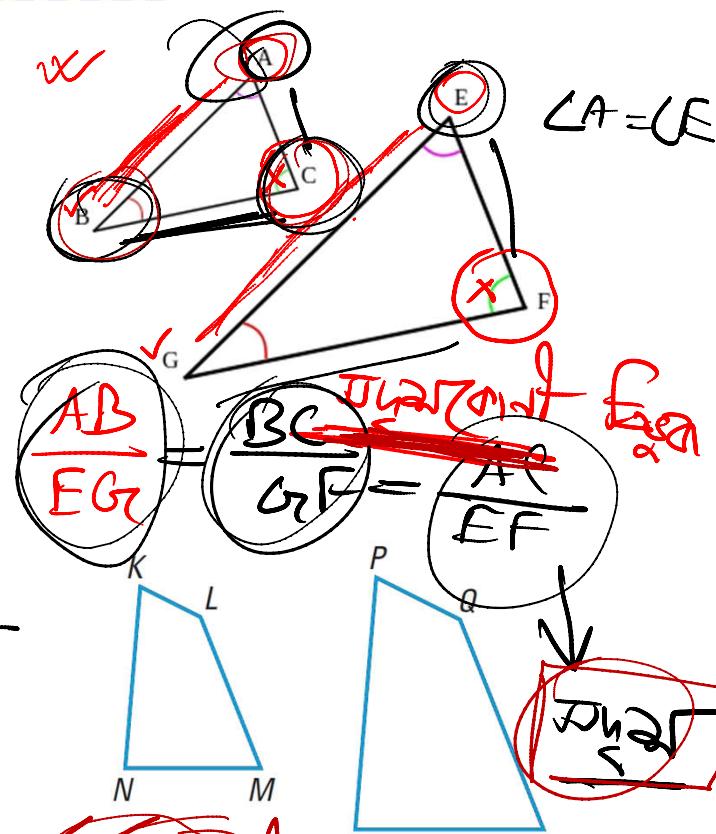
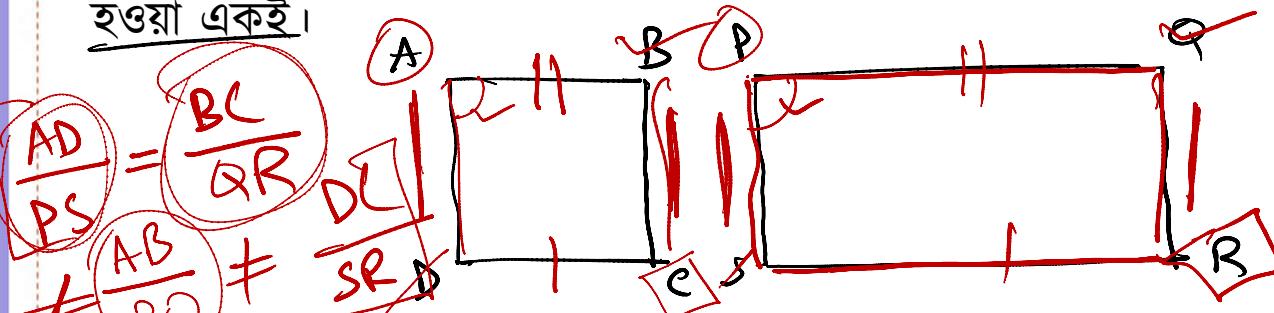
$$\angle C = \angle F$$

সদৃশতার ক্ষেত্রে দুইটি জিনিস সবসময় দেখা লাগে। সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজকে তখনই সদৃশ বলা যাবে, যখনঃ

- 1) একটির কোণগুলো যথাক্রমে অপরটির সমান হয়
- 2) একটির অনুরূপ বাহুর অনুপাতগুলো যথাক্রমে অপরটির বাহুর অনুপাতগুলোর সমান হয়।

শুধু (1) নং সত্য হলে বহুভুজ দুটিকে সদৃশকোণী বহুভুজ বলা যাবে, কিন্তু (1) ও (2) উভয়ে সত্য হলেই শুধুমাত্র বহুভুজ দুটিকে সদৃশ বলা যায়।

দ্রষ্টব্য, ত্রিভুজের ক্ষেত্রে (1) বা (2) এর যেকোনো একটা শর্ত পূরণ হলেই অন্যটা সত্য হয়ে যায়। তাই ত্রিভুজের ক্ষেত্রে সদৃশকোণী হওয়া আর সদৃশ হওয়া একই।



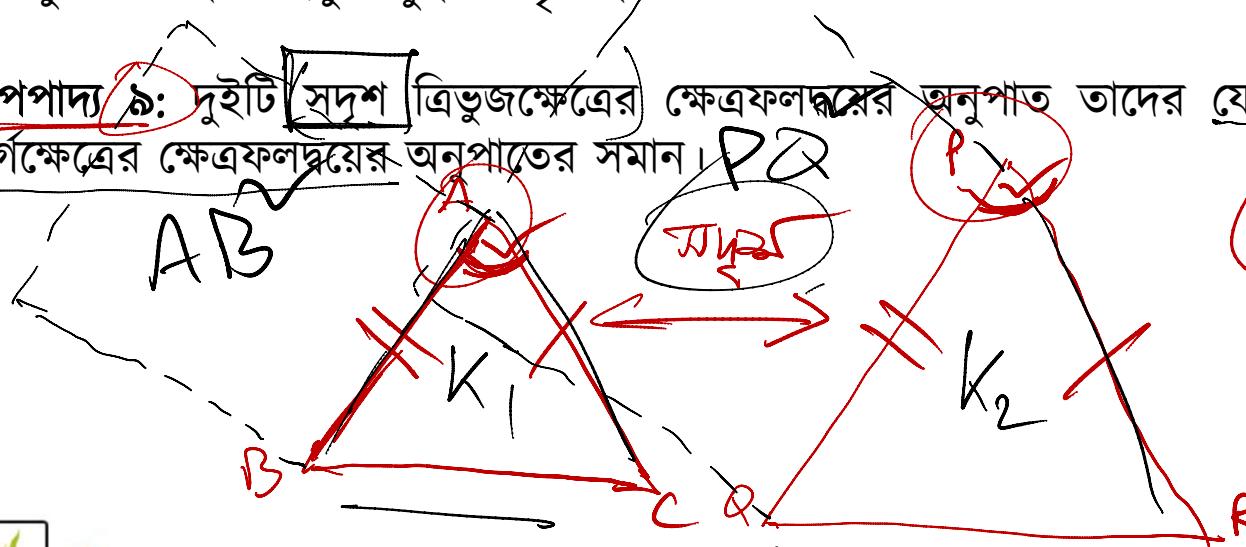
সহায়ক কিছু উপপাদ্য

উপপাদ্য ৬: দুইটি ত্রিভুজ ~~সদৃশকোণী~~ হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক হবে।

উপপাদ্য ৭: দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো পরস্পরের সমানুপাতিক হলে অনুরূপ বাহুগুলোর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান হয়।

উপপাদ্য ৮: দুইটি ত্রিভুজের একটির এক কোণ অপরটির এক কোণের সমান এবং সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ হবে।

উপপাদ্য ৯: দুইটি ~~সদৃশ~~ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অনুপাত তাদের যেকোনো দুই অনুরূপ বাহুর উপর অংকিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অনুপাতের সমান।



$$\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$$

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{AB^2}{PQ^2} = \frac{AC^2}{PR^2}$$

$$= \frac{BC^2}{QR^2}$$

Poll Question-01

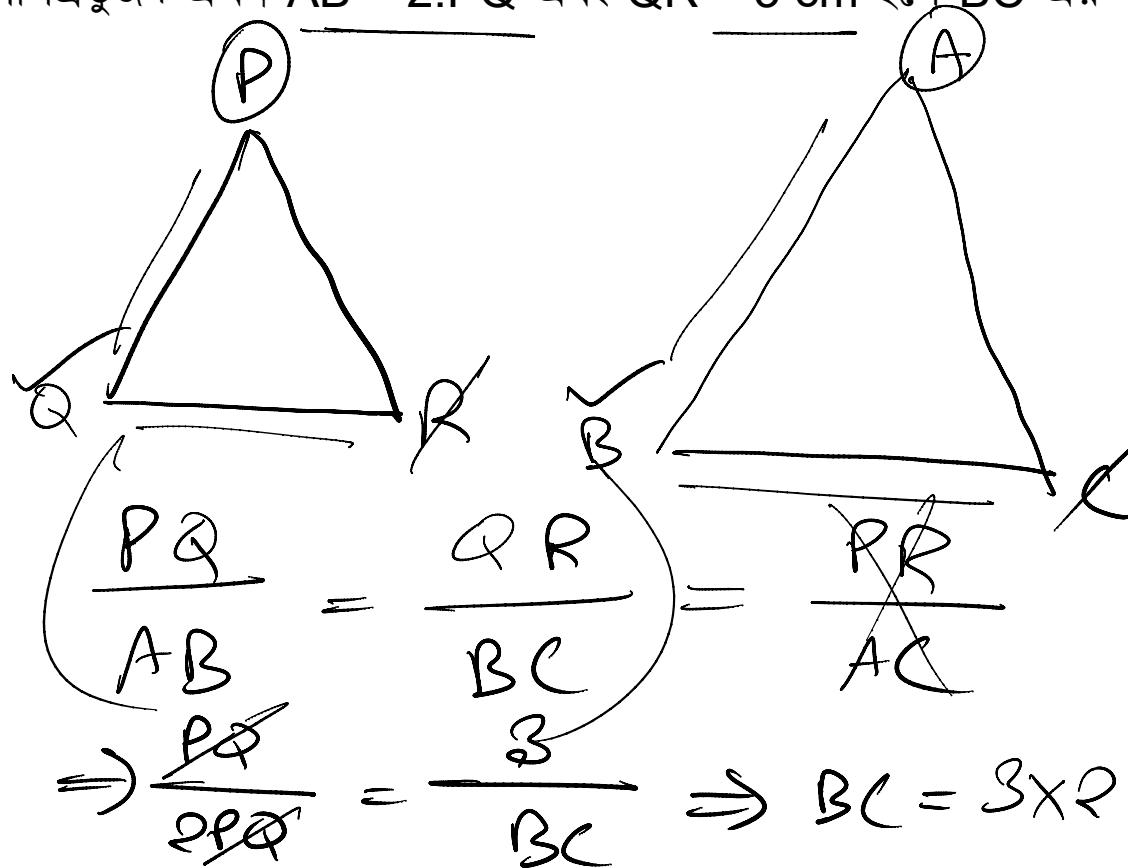
□ $\triangle PQR$ ও $\triangle ABC$ সদৃশকোণী ত্রিভুজ। এখন $AB = 2.PQ$ এবং $QR = 3 \text{ cm}$ হলে BC এর মান কত?

(a) 1.5 cm

(b) 3 cm

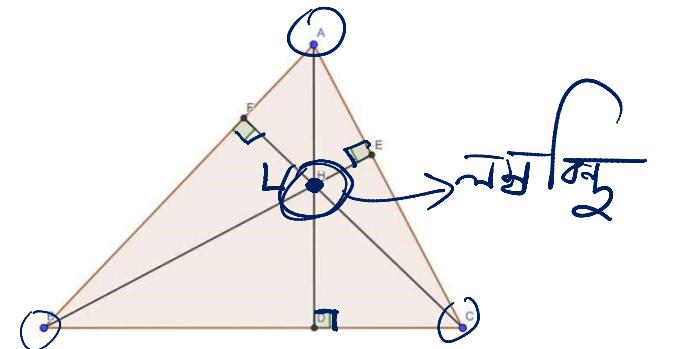
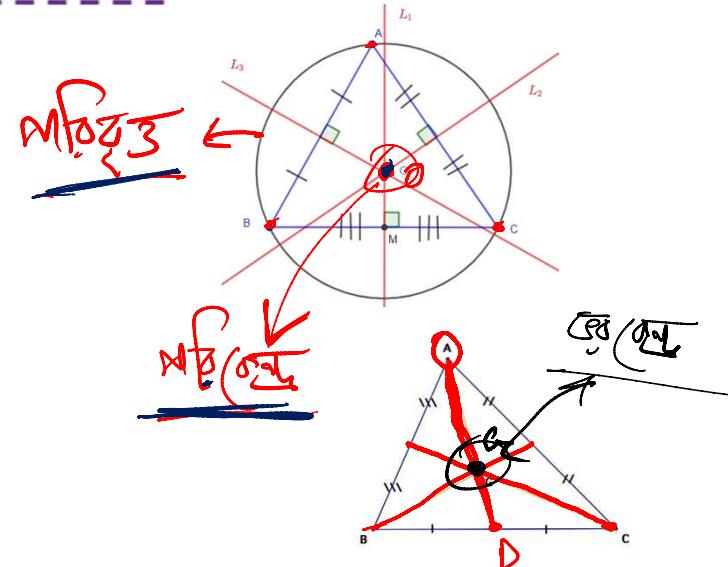
(c) 6 cm

(d) 9 cm



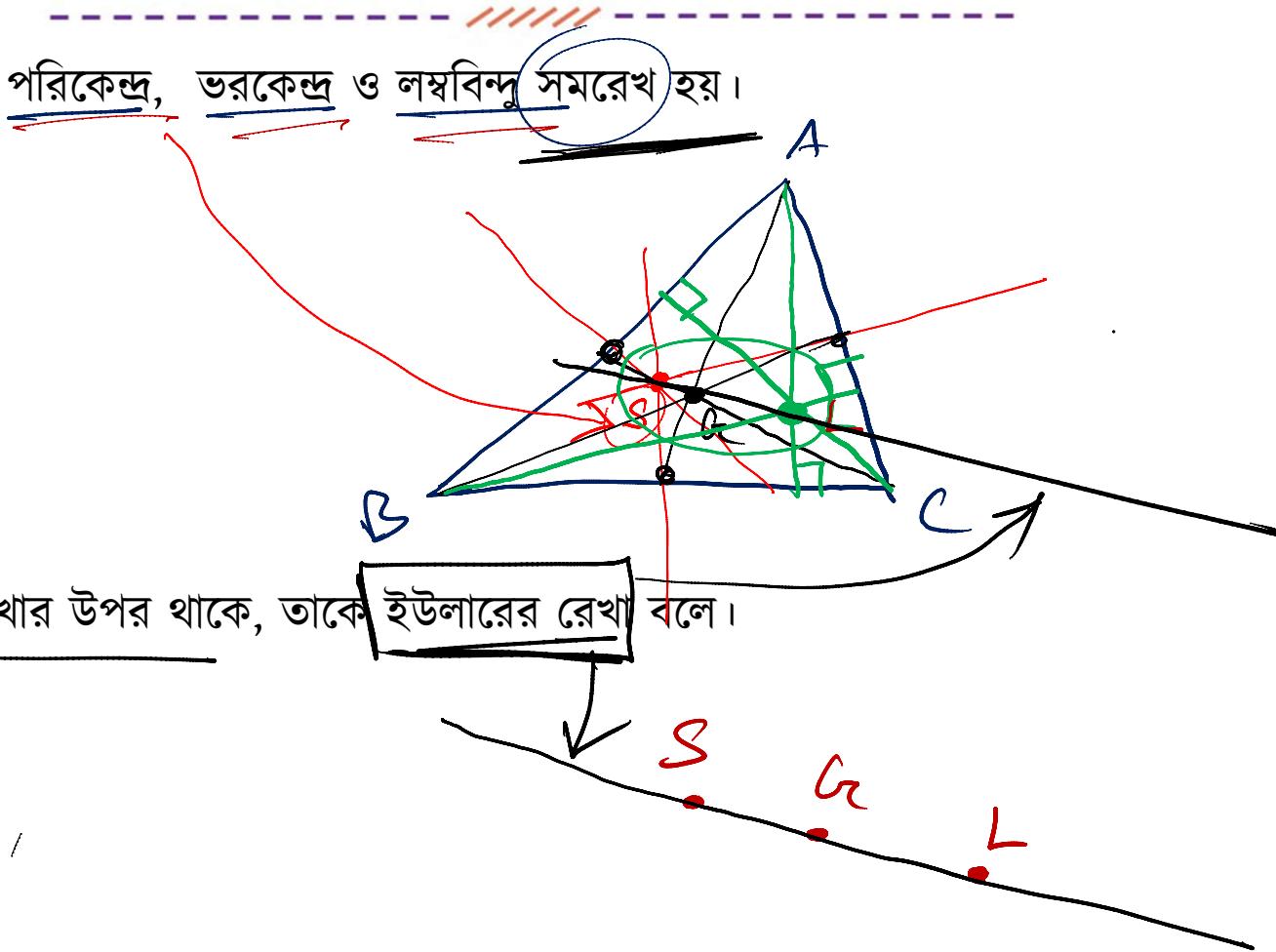
ত্রিভুজের কিছু বিশেষ বিন্দু

- ১) **ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র:** ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর লম্বাদিখণ্ডক যে বিন্দুতে ছেদ করে তাকে ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র বলে। অথবা, ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু দিয়েই যায়, এমন কোনো বৃত্ত আঁকা হলে সেই বৃত্তের কেন্দ্রই হলো এই ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র।
- ২) **ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র:** ত্রিভুজের মধ্যমাংশগুলো যেই বিন্দুতে ছেদ করে এই বিন্দুকে ত্রিভুজের ভরকেন্দ্র বলা হয়।
- ৩) **ত্রিভুজের লম্ববিন্দু:** ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হতে বিপরীত বাহুর উপর অংকিত লম্বগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাই লম্ববিন্দু।



উপপাদ্য ১০

কোনো একই ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমরেখ হয়।



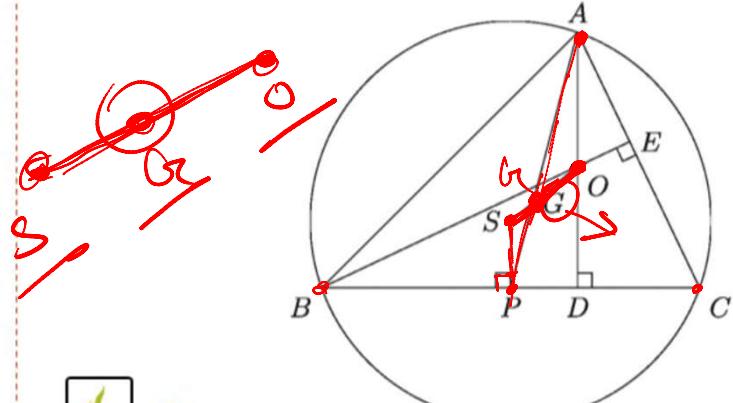
Fun Fact: এটা যেই রেখার উপর থাকে, তাকে ইউলারের রেখা বলে।

উপপাদ্য ১০ (প্রমাণ)

ত্রিভুজের লম্ববিন্দু: ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বগুলো যে বিন্দুতে ছেদ করে তাহাই লম্ববিন্দু।

উপপাদ্য ১০. ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র, ভরকেন্দ্র ও লম্ববিন্দু সমরেখ।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি $\triangle ABC$ এর লম্ববিন্দু O , পরিকেন্দ্র S এবং AP একটি মধ্যমা। লম্ববিন্দু O এবং পরিকেন্দ্র S এর সংযোগ রেখা AP মধ্যমাকে G বিন্দুতে ছেদ করেছে। S, P যোগ করলে SP রেখা BC এর উপর লম্ব। তাহলে, G বিন্দুটি $\triangle ABC$ এর ভরকেন্দ্র এটি প্রমাণ করাই যথেষ্ট।



প্রমাণ: $\triangle ABC$ এর লম্ববিন্দু O থেকে A শীর্ষের দূরত্ব OA এবং পরিকেন্দ্র S থেকে A শীর্ষের বিপরীত বাহু BC এর দূরত্ব SP । $\therefore OA = 2SP \dots\dots (1)$
এখন যেহেতু AD ও SP উভয়ই BC এর উপর লম্ব সেহেতু $AD \parallel SP$ ।
এখন $AD \parallel SP$ এবং AP এদের ছেদক। সুতরাং একান্তর কোণ হওয়ায় $\angle PAD = \angle APS$, অর্থাৎ $\angle OAG = \angle SPG$ ।
এখন \triangleAGO এবং \trianglePGS এর মধ্যে

$$\angleAGO = \anglePGS \quad [\text{বিপ্রতীপ কোণ}]$$

$$\angleOAG = \angleSPG \quad [\text{একান্তর কোণ}]$$

$$\therefore \text{অবশিষ্ট } \angleAOG = \text{অবশিষ্ট } \anglePSG$$

$$\therefore \triangleAGO \text{ এবং } \trianglePGS \text{ সূদশকোণী।}$$

$$\text{সুতরাং, } \frac{AG}{GP} = \frac{OA}{SP} \text{ অর্থাৎ, } \frac{AG}{GP} = \frac{2SP}{SP} \quad [(1) \text{ নং সমীকরণ হতে}]$$

$$\text{অতএব } \frac{AG}{GP} = \frac{2}{1} \text{ বা, } AG : GP = 2 : 1$$

অর্থাৎ, G বিন্দু AP মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাত বিভক্ত করেছে।
 $\therefore G$ বিন্দু $\triangle ABC$ এর ভরকেন্দ্র। [প্রমাণিত]



উপপাদ্য ১০ (প্রমাণ)

প্রমাণ: উৎকৃষ্টের কেন্দ্রের দূরত্ব \overline{OA} , সূর্যের কেন্দ্রের দূরত্ব \overline{SP}

$\frac{OA}{SP} = 2 : 1$

$\therefore \overline{OA} = 2\overline{SP}$ $\text{--- } ①$

$AD \perp BC$ ৩ $SP \perp BC$

$\therefore AD \parallel SP$ ৩ AP মধ্যমা গঠন কৃত

$\angle DAP = \angleAPS$; [এসান্তুর পোর]

$$\Rightarrow \underline{\angle OAG_2} = \underline{\angle GPS}$$

$\triangle ADG_2 \sim \triangle SPG_2$ \leftarrow

$$\angle OAG_2 = \angle GPS$$

$$\angle AG_2O = \angle SG_2P$$

$$\text{তাই } \angle OAG_2 = \angle GPS$$

$\frac{AG_2}{G_2P} = 2 : 1$

$\therefore G_2$ কিন্তু ডেক্সেন্ট বিশেষ কৃত।

বিলুপ্তি ৩ ক্ষয়ক্ষতি

$$\frac{OA}{SP} = \frac{AG_2}{G_2P}$$

$$\Rightarrow \frac{2SP}{SP} = \frac{AG_2}{G_2P}$$

$$\Rightarrow \frac{AG_2}{G_2P} = 2 / 1$$

উচ্চতর গণিত
অধ্যায় ৩ : জ্যামিতি



উকালম

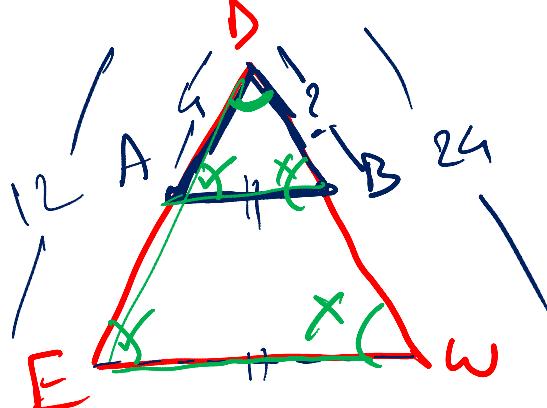
একাডেমিক এবং প্রশিক্ষণ কেন্দ্র

Poll Question- 02

□ $\triangle DEW$ ত্রিভুজে A ও B যথাক্রমে DE ও DW এর উপর যেকোনো বিন্দু এবং $AB \parallel EW$ । এখন $AD = 4 \text{ cm}$,

$DE = 12 \text{ cm}$ ও $DW = 24 \text{ cm}$ হলে DB এর মান কত?

- (a) 4 cm
- (b) 8 cm
- (c) 12 cm
- (d) 16 cm



$$\underline{\triangle DAB} \quad \text{and} \quad \underline{\triangle DEW}$$

$$\frac{AD}{DE} = \frac{DB}{DW}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{12} = \frac{DB}{24}$$

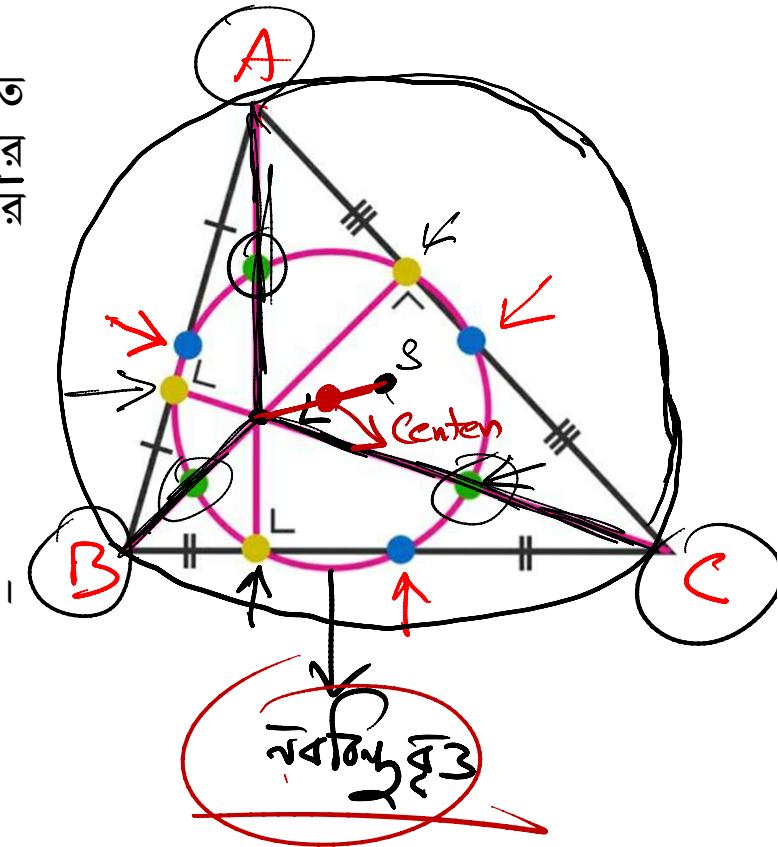
$$\Rightarrow DB = \frac{1}{3} \times 24 \\ = 8 \text{ cm}$$

নববিন্দুবৃত্ত

কোনো ত্রিভুজের বাহ্যগুলোর মধ্যবিন্দুএয়, শীর্ষবিন্দুগুলো থেকে বিপরীত বাহ্যত্রয়ের উপর অংকিত লম্বত্রয়ের পাদবিন্দুএয় এবং শীর্ষবিন্দু ও লম্ববিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয়ের (মধ্যবিন্দুএয়) স্বর্বমোট এই নয়টি বিন্দু একই বৃত্তের উপর অবস্থান করে। এই বৃত্তকে নববিন্দুবৃত্ত বলে।

Fun Fact:

১. নববিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হলো ত্রিভুজের লম্ববিন্দু ও পরিকেন্দ্র সংযোজনকারী রেখাংশের মধ্যবিন্দু।
২. নববিন্দুবৃত্তের ব্যাসার্ধ ত্রিভুজটির পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের অর্ধেকের সমান।



2 min
Break

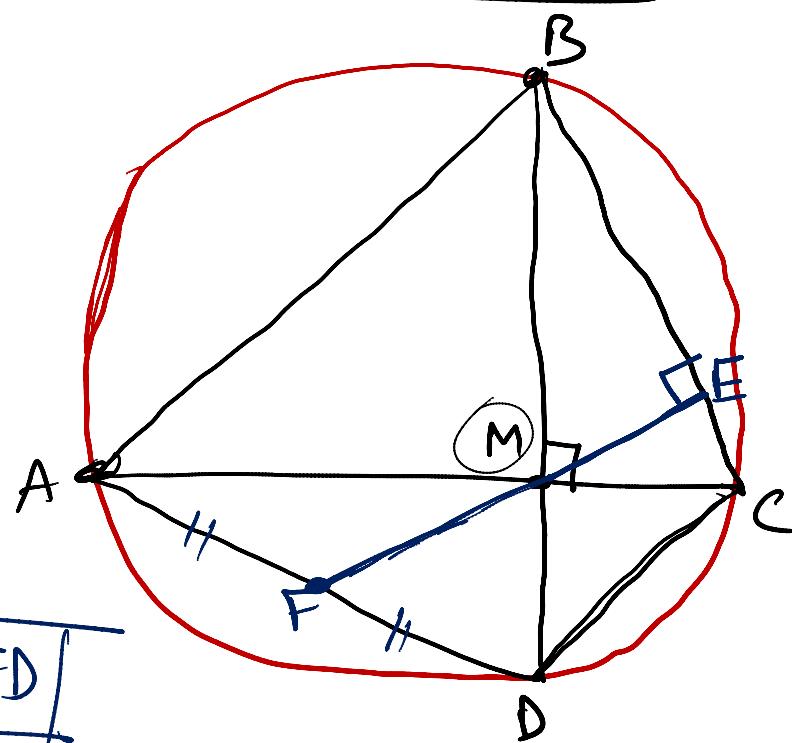
উপপাদ্য ১১

যা. ফি.

(যদি অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণ দুইটি যদি পরস্পর লম্ব হয়, তবে তাদের ছেদ বিন্দু হতে কোনো
বাহুর উপর অংকিত লম্ব বিপরীত বাহুকে দ্বিখণ্ডিত করে)

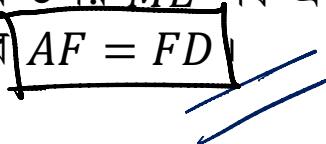
এ উপপাদ্যটিকে ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্যও বলা হয়ে থাকে।

$$AF = FD$$



উপপাদ্য ১১ (প্রমাণ)

বিশেষ নির্বচন: বৃত্তে অন্তর্লিখিত $ABCD$ বৃত্তভুজের কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পরকে লম্বভাবে M বিন্দুতে ছেদকরে। M হতে BC বাহুর উপর ME লম্ব এবং বর্ধিত EM বিপরীত AD বাহুকে F বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে $AF = FD$



(প্রমাণ): একই চাপ CD এর উপর দ্রুতায়মান বলে $\angle CBD = \angle CAD$

অর্থাৎ, $\angle CBM = \angle MAF$

আবার, $\angle CBM = \angle CME$ [উভয়ই একই $\angle BME$ এর পূরক কোণ বলে]

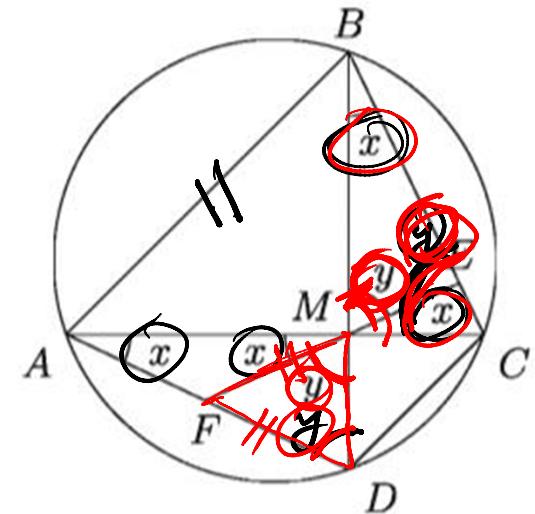
সুতরাং $\angle MAF = \angle FMA$

ফলে $\triangle AFM$ ত্রিভুজে $AF = FM$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, $\angle FDM = \angle BCM = \angle BME = \angle DMF$

ফলে $\triangle DFM$ ত্রিভুজে $FD = FM$

সুতরাং $AF = FD$ [প্রমাণিত]



উপপাদ্য ১১ (প্রমাণ)

প্রমাণ:

$$\angle DAC = \angle CBD ; [\text{একই চরণ } \text{CD} - \text{তে }]$$

$$\Rightarrow \angle DAM = \angle CBM$$

$$\therefore \angle CBM = \angle CME ; [\text{একই চরণ } \text{CBM} \text{ এর }]$$

$$\therefore \angle AMF = \angle CME ; [\text{বিপরীত লম্ব }]$$

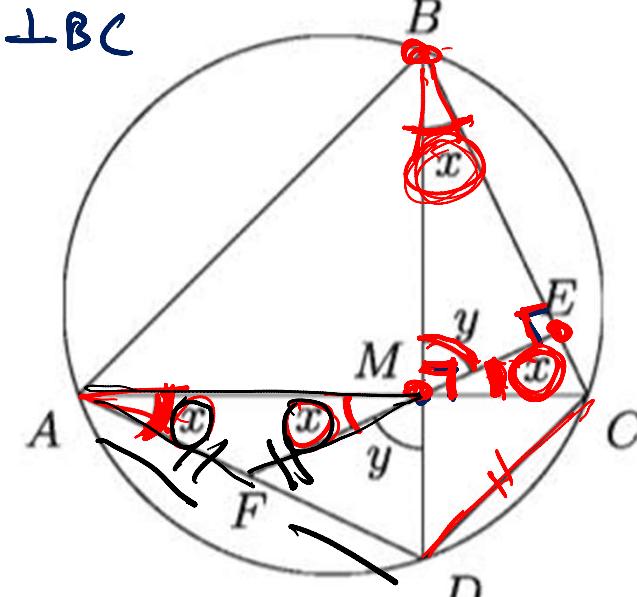
$$\therefore \angle DAM = \angle AMF$$

$$\Rightarrow \angle FAM = \angle AMF$$

$$\triangle AFM \Rightarrow \overline{AF} = \overline{FM}$$

$$\therefore AF = FD$$

$ME \perp BC$



$$x+y=90^\circ$$

অনুসূয়া পথের

$$\begin{matrix} \overline{AD} & = & \overline{CF} & = & \overline{DF} & = & \overline{FM} \end{matrix}$$



ଉক্তি

একাডেমিক ও প্রশিক্ষণ কেন্দ্র

উচ্চতর গণিত
অধ্যায় ৩ : জ্যামিতি

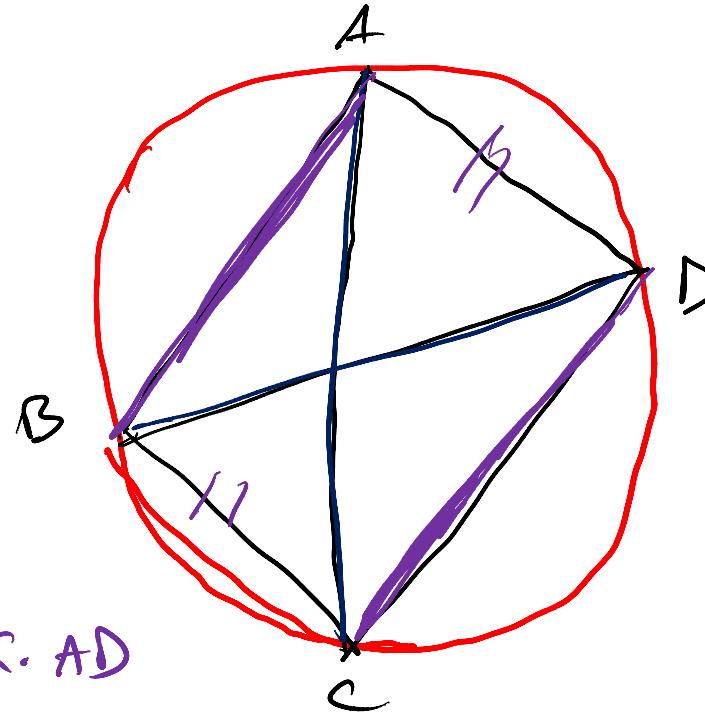
উপপাদ্য ১২

প/স:

বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র এই চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমষ্টির সমান।

এ উপপাদ্যটিকে টলেমির উপপাদ্যও বলা হয়ে থাকে।

$$\underline{AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD}$$



উদ্যাম

একাডেমিক এবং প্রশিক্ষণ কেন্দ্র

উচ্চতর গণিত
অধ্যায় ৩ : জ্যামিতি

উপপাদ্য ১২ (প্রমাণ)

বিশেষ নির্বচন: মনে করি বৃত্তে অন্তর্লিখিত $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো
যথাক্রমে AB ও CD এবং BC ও AD । AC এবং BD চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$ ।

প্রমাণ: $\angle BAC$ কে $\angle DAC$ থেকে ছোট ধরে নিয়ে A বিন্দুতে AD রেখাংশের
সাথে $\angle BAC$ এর সমান করে $\angle DAP$ আঁকি যেন AP রেখা BD কর্ণকে P
বিন্দুতে ছেদ করে।

অঙ্কন অনুসারে $\angle BAC = \angle DAP$ ।

উভয়পক্ষে $\angle CAP$ যোগ করে পাই,

$\angle BAC + \angle CAP = \angle DAP + \angle CAP$ অর্থাৎ, $\angle BAP = \angle CAD$
এখন $\triangle ABP$ ও $\triangle ACD$ এর মধ্যে

$\angle BAP = \angle CAD$ এবং $\angle ABD = \angle ACD$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ
সমান বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle APB = \angle ADC$ ।

$\therefore \triangle ABP$ ও $\triangle ACD$ সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{BP}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

অর্থাৎ, $AC \cdot BP = AB \cdot CD \dots \dots (1)$

আবার, $\triangle ABC$ ও $\triangle APD$ এর মধ্যে

$$\angle BAC = \angle PAD$$
 [অঙ্কন অনুসারে]

$\angle ADP = \angle ACB$ [একই বৃত্তাংশস্থিত কোণ সমান
বলে]

এবং অবশিষ্ট $\angle ABC = \angle APD$

$\therefore \triangle ABC$ ও $\triangle APD$ সদৃশকোণী।

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{PD}{BC}$$

অর্থাৎ, $AC \cdot PD = BC \cdot AD \dots \dots \dots (2)$

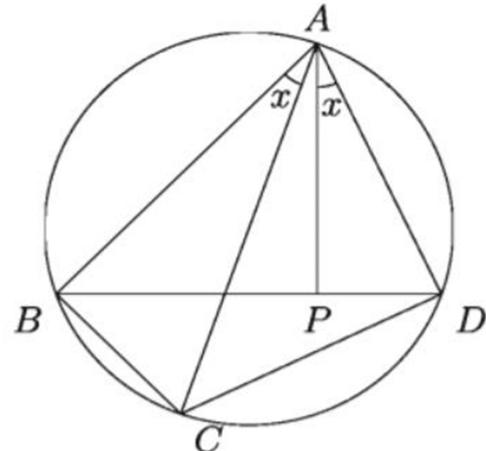
এখন সমীকরণ (1) ও (2) যোগ করে পাই,

$$AC \cdot BP + AC \cdot PD = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

$$\text{বা, } AC(BP + PD) = AB \cdot CD + BC \cdot AD$$

$$\text{কিন্তু } BP + PD = BD$$

$$\text{ফলে } AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot AD \text{ [প্রমাণিত]}$$



উপপাদ্য ১২ (প্রমাণ)

প্রমাণ:

$$\text{সূর্যোদাস পদ্ধতি: } \angle BAC < \angle CAD$$

$$\angle DAP = \angle BAC$$

$$\Rightarrow \angle DAP + \angle CAP = \angle BAC + \angle CAP$$

$$\Rightarrow \angle CAD = \angle BAD$$

$$① + ② \Rightarrow$$

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC$$

$$= AC \cdot BP + AC \cdot PD$$

$$AC(BP + PD)$$

$$= AC \cdot BD$$

$\triangle ABD \sim \triangle ACD$ সূচী

$$\angle BAP = \angle CAD$$

$$\angle ABP = \angle ACD$$

$$\text{অবশ্যই } \angle APB = \angle ADC$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{CD}$$

$$\Rightarrow AB \cdot CD = AC \cdot BP$$

$\triangle ABC \sim \triangle APD$ সূচী

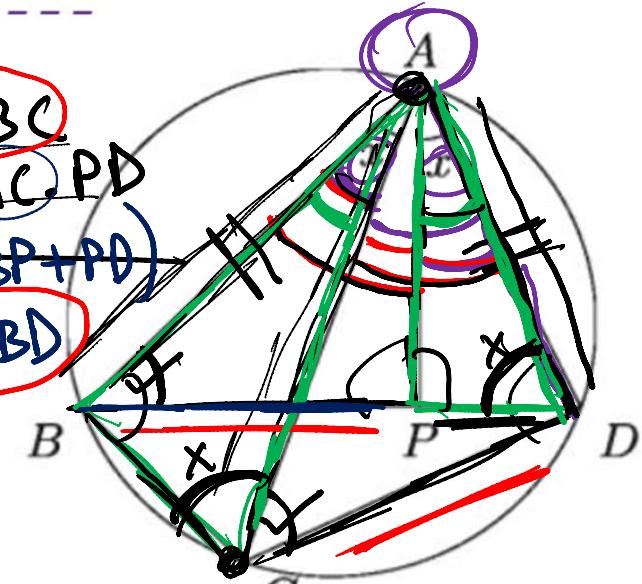
$$\frac{AC}{AD} = \frac{BC}{PD}$$

$$\Rightarrow AD \cdot BC$$

$$= AC \cdot PD$$

উচ্চতর সূচিত

অধ্যায় ৩ : জ্যামিতি



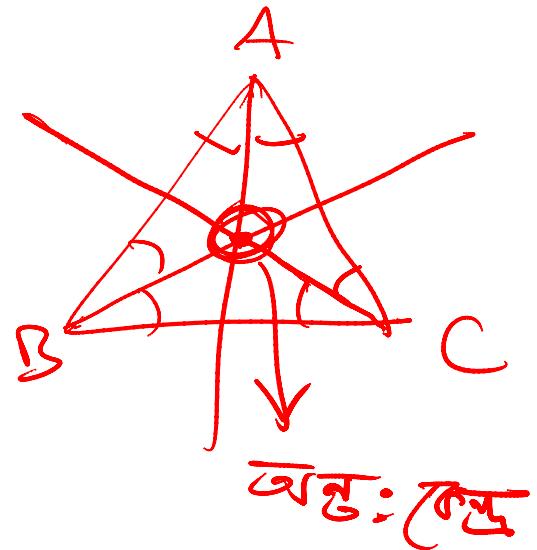
ଉক্তাম

একাডেমিক ও প্রশিক্ষণ বৈজ্ঞানিক

Poll Question- 03

□ কোনো ত্রিভুজের তিনটি কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে সমদ্বিখণ্ডক ত্রয়ের ছেদবিন্দুটি কী হবে?

- (a) ভরকেন্দ্র \rightarrow মুক্যমূল জ্যামিতি
- (b) লম্ববিন্দু \rightarrow ব্যাস "
- (c) পরিকেন্দ্র \rightarrow নম্রমুখিয়তক্ষণ "
- (d) কোনোটিই নয়



না বুঝে
মুখস্ত করার
অভ্যাস প্রতিভাকে
ধর্ষণ করে



একাডেমিক এবং এডুকেশন সেবার

www.udvash.com