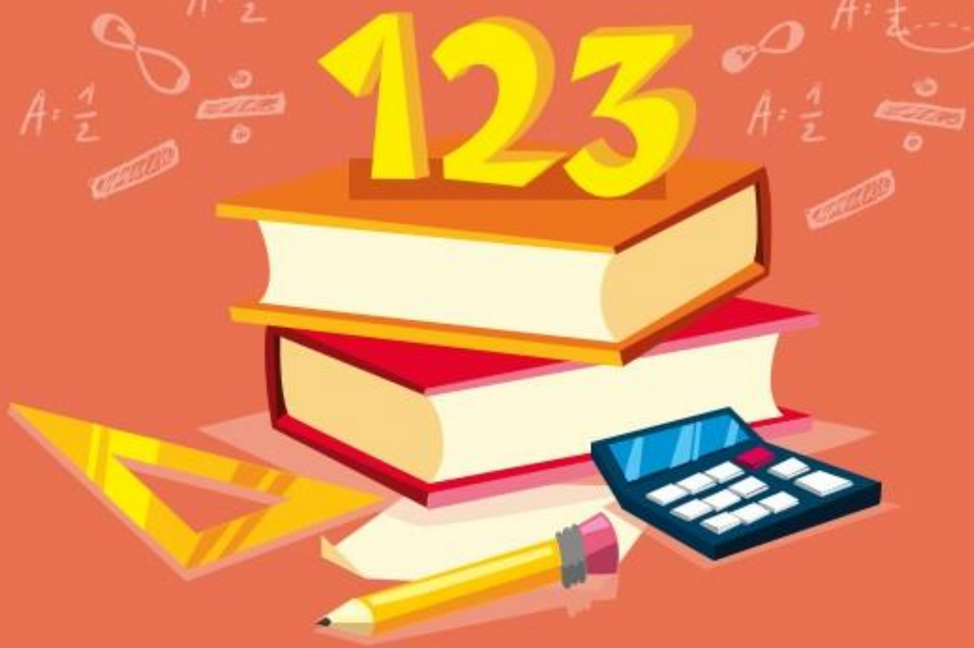
৯ম শ্রেণি একাডেমিক প্রোগ্রাম ২০২০

সাধারণ গণিত

লেকচার : M-10

অধ্যায় ৪ : সূচক ও লগারিদম



উদ্ভাস
একাডেমিক এন্ড এডমিশন কেয়ার

www.udvash.com

$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5$

সূচক

a যেকোনো বাস্তব সংখ্যা এবং n যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে, n সংখ্যক a এর ক্রমিক গুণ হলো a^n, অর্থাৎ

a×a×a×a×...×a (n সংখ্যক বার a) = a^n

এখানে n হলো সূচক বা ঘাত এবং a হলো ভিত্তি।

$n \leftarrow$ সূচক/ঘাত

$a \leftarrow$ ভিত্তি

সূচকের ধর্ম

সূচক শুধু ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যাই নয়, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা ধনাত্মক ভগ্নাংশ বা ঋণাত্মক ভগ্নাংশও হতে পারে।

অর্থাৎ, ভিত্তি $a \in R$ (বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং $n \in Q$ (মূলদ সংখ্যার সেট) এর জন্য a^n সংজ্ঞায়িত।

$n \rightarrow$ মূলদ

$a \rightarrow$ বাস্তব

$a^{1.34927854....}$

সূচকের সূত্রাবলী ও সংজ্ঞা

ধরি $a \in R$ (বাস্তব সংখ্যার সেট) এবং $m, n \in N$ (স্বাভাবিক সংখ্যার সেট)।

সূত্র ১ (গুণ). $a^m \times a^n = a^{m+n}$ $\Rightarrow$ $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

সূত্র ২ (ভাগ). $\frac{a^m}{a^n} = \quad a^{m-n}$ যখন $m \geq n$; $\quad \frac{1}{a^{n-m}}$ যখন $n > m$

সূত্র ৩ (গুণফলের ঘাত). $(ab)^n = a^n \times b^n$

সূত্র ৪ (ভাগফলের ঘাত). $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, (b \neq 0)$ $\Rightarrow$ ~~something~~ ~~0~~

সূত্র ৫ (ঘাতের ঘাত). $(a^m)^n = a^{mn}$

সংজ্ঞা ১ (শুন্য সূচক). $a^0 = 1, (a \neq 0)$

সংজ্ঞা ২ (ঋণাত্মক সূচক). $a^{-n} = \frac{1}{a^n}, (a \neq 0, n \in N)$ $\Rightarrow$ ~~something~~ ~~0~~

$\frac{a^m}{a^n} = \frac{(m \text{ সংখ্যক } a)}{(n \text{ সংখ্যক } a)}$

$m \geq n$: a^{m-n}

$n > m$: $\frac{1}{a^{n-m}}$

$\frac{a^7}{a^5} = a^{7-5} = a^2$

$\frac{a^5}{a^7} = \frac{1}{a^{7-5}} = \frac{1}{a^2}$

n তম মূল = root

a যেকোনো বাস্তব সংখ্যা এবং n যেকোনো ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা হলে,

$a^{\frac{1}{n}}$ এর n তম ঘাত a এবং a এর n তম মূল $a^{\frac{1}{n}}$

অর্থাৎ $a^{\frac{1}{n}}$ এর n তম ঘাত $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$

এবং a এর n তম মূল $(a)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}$

আবার a এর n তম মূলকে $\sqrt[n]{a}$ আকারেও লেখা যায়।

$\boxed{\sqrt[n]{a} = a \text{ এর } n \text{ তম মূল} = a^{\frac{1}{n}}}$

$\sqrt[3]{a^3} = (a^3)^{\frac{1}{3}} = a$

$\sqrt{4} = 2$

square root

$\sqrt[2]{a^2} = (a^2)^{\frac{1}{2}} = a$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[n]{a^n} = (a^n)^{\frac{1}{n}} = a = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = \left(\sqrt[n]{a}\right)^n$

Poll Question 01

- $(-1)^{-1}$ এর মান কত?
  - (a) 0
  - (b) 1
  - (c) -1
  - (d) 2

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$(-1)^{-1} = \frac{1}{(-1)^{+1}}$

$= -1$

$= \frac{1}{(-1)^1} = \frac{\cancel{1}}{\cancel{-1}}$

$= -1$

অনুশীলনী ৪.১ (২)

সরল কর: $\dfrac{\sqrt[3]{7^2}.\sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{(7^2)^{\frac{1}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}}}{7^{1/2}}$

side note → $\boxed{\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}}$

$= \dfrac{7^{\frac{2}{3}} \cdot 7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}}$

$[(a^m)^n = a^{mn}]$

$\sqrt[2]{7} = 7^{\frac{1}{2}}$

$= 7^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

$\left[\begin{array}{l} a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ \dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \end{array}\right]$

অনুশীলনী ৪.১ (৬)

সরল কর: $\sqrt{x^{-1}y}\cdot\sqrt{y^{-1}z}\cdot\sqrt{z^{-1}x}$

$= \sqrt{(x^{-1}\cdot y)\cdot(y^{-1}\cdot z)\cdot(z^{-1}\cdot x)}$

$= \sqrt{x^{-1}\cdot x\cdot y\cdot y^{-1}\cdot z z^{-1}}$

$= \sqrt{\frac{1}{\cancel{x}}\cdot \cancel{x}\cdot \cancel{y}\cdot\frac{1}{\cancel{y}}\cdot \cancel{z}\cdot\frac{1}{\cancel{z}}} = \sqrt{1}$

$= 1$ Ans.

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b} = \sqrt{ab}$

$\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\sqrt{c} = a^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}\cdot c^{\frac{1}{2}}$

$a^m\cdot b^m = (ab)^m$

$\sqrt{4}\cdot\sqrt{9} = \sqrt{(4\cdot 9)} = \sqrt{36}$

$\boxed{2\cdot 3 = 6 \quad = 6}$

অনুশীলনী ৪.১ (৮)

সরল কর: $\frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \frac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$ $= \frac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \times \frac{(3^{m-1})^{m+1}}{9^{\boxed{m+1}}}$

$= \frac{3^{m+1} \cdot 3^{(m-1)(m+1)}}{3^{m(m-1)} \cdot (3^2)^{\boxed{m+1}}}$

$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$

a^n ঘাত
ভিত্তি

$= \frac{3^{\boxed{m+1}} \cdot 3^{m^2-1}}{3^{m^2-m} \cdot 3^{2m+2}} = 3^{\cancel{m}+\cancel{1}+\cancel{m^2}-\cancel{1}-\cancel{m^2}+\cancel{m}-\cancel{2m}-2}$

$= 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$ (Ans.)

Poll Question 02

- $\frac{6^m}{6^{-3}} = \boxed{6^{-5}}$ হলে m এর মান কত?

(a) -8

(b) 2

(c) -2

(d) 8

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\frac{6^m}{6^{-3}} = 6^{-5}$$

$$\Rightarrow 6^{m-(-3)} = 6^{-5}$$

$$\Rightarrow 6^{m+3} = 6^{-5}$$

$$m+3 = -5$$

$$m = -8$$

$$\frac{6^m}{6^{-3}} = 6^{-5}$$

$$6^m = 6^{-5} \cdot 6^{-3}$$

$$6^m = 6^{-8}$$

অনুশীলনী ৪.১ (৯)

প্রমাণ কর: $\frac{4^n-1}{2^n-1} = 2^n + 1$

$$LHS = \frac{4^n - 1}{2^n - 1} = \frac{(2^2)^n - 1}{2^n - 1} = \frac{2^{2n} - 1}{2^n - 1}$$

$$\boxed{(a^m)^n = a^{mn}}$$

$$= \frac{2^{n2} - 1}{2^n - 1} = \frac{(2^n)^2 - 1}{2^n - 1}$$

$$\boxed{a^{mn} = (a^m)^n} \quad 2n = n \cdot 2$$

$$= \frac{সত্ত^2 - 1}{সত্ত - 1} = \frac{(সত্ত+1)\cancel{(সত্ত-1)}}{\cancel{(সত্ত-1)}}$$

ধরি $2^n =$ সত্ত

$$= সত্ত + 1 = 2^n + 1 = R.H.S \Rightarrow [\text{Proved}]$$

অনুশীলনী ৪.১ (১০)

প্রমাণ কর: $\dfrac{2^{2p+1}.3^{2p+q}.5^{p+q}.6^{p}}{3^{p-2}.6^{2p+2}.10^{p}.15^{q}} = \dfrac{1}{2}$

2, 3, 5 , 6, 10, 15

2×3 2×5 3×5

Base/ ভিত্তি

$$\boxed{(ab)^m = a^m.b^m}$$

$$a^m.a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$L.H.S = \frac{2^{2p+1}\,3^{2p+q}\,5^{p+q}\,(2.3)^p}{3^{p-2}\,(2.3)^{2p+2}\,(2.5)^p\,(3.5)^q}$$

$$= \frac{2^{2p+1}\,3^{2p+q}\,5^{p+q}\,2^p\,3^p}{3^{p-2}\,2^{2p+2}\,3^{2p+2}\,2^p\,5^p\,3^q\,5^q}$$

$$= 2^{\cancel{2p}+1+\cancel{p}-\cancel{2p}-2-\cancel{p}} . 3^{\cancel{2p}+\cancel{q}+\cancel{p}-\cancel{p}+2-\cancel{2p}-2-\cancel{q}} . 5^{\cancel{p}+\cancel{q}-\cancel{p}-\cancel{q}}$$

$$= 2^{-1} . 3^{0} . 5^{0} = \frac{1}{2^1}.1.1 = \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

প্রমাণ কর: $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} \cdot \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} \cdot \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = 1$

$$L.H.S = \left(x^{a-b}\right)^{\frac{1}{ab}} \cdot \left(x^{b-c}\right)^{\frac{1}{bc}} \left(x^{c-a}\right)^{\frac{1}{ca}}$$

$$= x^{\frac{a-b}{ab}} \cdot x^{\frac{b-c}{bc}} \cdot x^{\frac{c-a}{ca}}$$

$$= x^{\frac{\cancel{ca}-\cancel{bc}+\cancel{ab}-\cancel{ca}+\cancel{bc}-\cancel{ab}}{abc}}$$

$$= x^{\frac{0}{abc}} = x^0 = 1 = R.H.S$$

$$\left[\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}\right]$$

$$\left[\left(a^m\right)^n = a^{mn}\right]$$

$$\left[\frac{0}{\text{something}} = 0\right]$$

Poll Question 03

- $(100 - 99^0) \times 100$ এর মান কত?

(a) 10000

(b) 100

(c) 9900

(d) 99000

$(100 - 99^0) \times 100$

$(100 - 1) \times 100$

99×100

$= 9900$

$99^0 = 1$

অনুশীলনী ৪.১ (১৫)

প্রমাণ কর: $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r} \cdot \left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p} \cdot \left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q} = 1$

$L.H.S = \left(x^{\boxed{p-q}}\right)^{\boxed{p+q-r}} \cdot \left(x^{q-r}\right)^{q+r-p} \cdot \left(x^{r-p}\right)^{r+p-q}$

$= x^{p^2-q^2-pr+qr} \cdot x^{q^2-r^2-pq+pr} \cdot x^{r^2-p^2-qr+pq}$

$= x^{\cancel{p^2}-\cancel{q^2}-\cancel{pr}+\cancel{qr}+\cancel{q^2}-\cancel{r^2}-\cancel{pq}+\cancel{pr}+\cancel{r^2}-\cancel{p^2}-\cancel{qr}+\cancel{pq}}$

$= x^0 = 1 = R.H.S$

$(a^m)^n = a^{mn}$

calculation

$(p-q)(\boxed{p+q}-r)$

$\underline{(p-q)(p+q)} + \underline{(p-q)(-r)}$

$= p^2-q^2-pr+qr$

সমাধান কর: $4^x = 8$ $x = ??$

$$4^x = 8$$

$$(2^2)^x = 2^3 \Rightarrow \boxed{2}^{2x} = \boxed{2}^{3}$$

$$[(a^m)^n = a^{mn}]$$

$$\Rightarrow 2x = 3$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{3}{2}}$$

অনুশীলনী ৪.১ (১৯)

সমাধান কর: $(\sqrt{3})^{x+1} = (\sqrt[3]{3})^{2x-1}$

$\Rightarrow \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x+1} = \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{2x-1}$

$\Rightarrow \boxed{3}^{\frac{x+1}{2}} = \boxed{3}^{\frac{2x-1}{3}}$

$\Rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{2x-1}{3} \Rightarrow 3x+3 = 4x-2$

$\Rightarrow \boxed{x=5}$ Ans.

$\left[\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}\right]$

$\left[\left(a^{m}\right)^{n} = a^{mn}\right]$

$\sqrt{3} \neq \sqrt[3]{3}$

$\left(3^{2}\right)^{3} = 3^{2\times 3} = 3^{6}$

সমাধান কর: $2^x + 2^{1-x} = 3$

$$\Rightarrow 2^x + \frac{2^1}{2^x} = 3$$

$$\Rightarrow (2^x)^2 + 2^1 = 3 \cdot 2^x$$

[উভয় পাশে 2^x দ্বারা গুণ করে]

$$\Rightarrow (2^x)^2 - 3 \cdot 2^x + 2 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 3a + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 2, 1}$$

middle term

factor

ধরি $2^x = a$

$a = 2^x = 2^1$

$\boxed{x = 1}$

$a = 2^x = 1 = 2^0$

$\boxed{x = 0}$

$\boxed{x = 1, 0}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$\Rightarrow a^{m-n} = \boxed{\frac{a^m}{a^n}}$

$\Rightarrow a^{7-5} = \frac{a^7}{a^5}$

Poll Question 04

$\frac{1}{(\ )^{1}}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$

$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2} - \left(\frac{3}{4}\right)^{0}\right]^{-2}$ এর মান কত?

(a) $\frac{81}{484}$

(b) $\frac{81}{169}$ ✓

(c) $\frac{169}{81}$

(d) $\frac{16}{81}$

$\Rightarrow \left[\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{1}} + \left(\frac{2}{3}\right)^{2} - \left(\frac{3}{4}\right)^{0}\right]^{-2} = \left[2 + \frac{4}{9} - 1\right]^{-2}$

$= \left[\frac{13}{9}\right]^{-2} = \left[\frac{1}{\left(\frac{13}{9}\right)^{2}}\right] = \left(\frac{9}{13}\right)^{2}$

$= \frac{81}{169}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^{n}}$

না বুঝে
মুখস্থ করার
অভ্যাস প্রতিভাকে
ধ্বংস করে