Отчет по заданию №2

Александров Игорь Дмитриевич, 303 группа ВМК

1 Постановка задачи

Требуется явными одношаговым методом Чебышева с оптимальным набором итерационных параметров и двухшаговым методом Чебышева решить систему линейных алгебраических уравнений приближенно

$$\mathbf{x} + A\mathbf{x} = \mathbf{F} \Leftrightarrow (I + A)\mathbf{x} = \mathbf{F},$$

где $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — квадратная симметричная матрица, элементы которой a_{ij} являются вещественными числами. Матрица A предоставляется в виде файла в формате CSV.

2 Описание методов решения

2.1 Одношаговый метод Чебышева

Явный одношаговый метод Чебышева — нестационарный итерационный метод. После некоторых замен была получена схема:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Cy_k = f$$

$$y_{k+1} = y_k + \tau_{k+1}(f - Cy_k),$$

где (в нашем случае) $C = I + A$ (матрица рассматриваемой системы).

Решением задачи построения многочлена степени k с единичным свободным членом, который в точках спектра матрицы C наиболее близок к нулю на отрезке $[\lambda_n, \lambda_1]$ является многочлен Чебышева. Нулями многочлена Чебышёва $T_k(t)$ являются числа $x_k = \cos(\frac{(2j-1)\pi}{2k})$. Тогда получаем формулу для τ_j:

$$\tau_j = \frac{\tau_0}{1 - \rho_0 \mu_j},$$

где $\quad \mu_j \in \{\cos(\frac{2j-1}{2k}\pi), j = 1, 2, \dots, k\}, \quad \tau_0 = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}, \quad \rho_0 = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_n + \lambda_1}$

Метод не является устойчивым при произвольном выборе порядка итерационных параметров τ_j. Выбор параметров производится следующим образом:

1. Переход от Θ_{2m} к Θ_{2m+1} состоит в добавлении к элементам множества Θ_{2m} нечётного числа $2m + 1$.
2. Переход от Θ_m к Θ_{2m} осуществляется следующим образом:
   (a) Если за этим переходом следует переход от Θ_{2m} к Θ_{4m} или переход от Θ_m к Θ_{2m} есть последний шаг, то используются формулы:
   $$\Theta^{(2m)}_{2i-1} = \Theta^{(m)}_i, \quad \Theta^{(2m)}_{2i-1} + \Theta^{(2m)}_{2i} = 4m, \quad i = 1, 2, \dots, m$$
   (b) Если за переходом от Θ_m к Θ_{2m} следует переход от Θ_{2m} к Θ_{2m+1}, то используются формулы:
   $$\Theta^{(2m)}_{2i-1} = \Theta^{(m)}_i, \quad \Theta^{(2m)}_{2i-1} + \Theta^{(2m)}_{2i} = 4m + 2, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

При последовательном выборе j из Θ_m, где m — число итераций получим: $\tau_i = \frac{\tau_0}{1-\rho_0 \cos(\frac{\pi j}{2m})}$. Рекурсивная реализация алгоритма содержится в функции generate_chebyshev_order в файле src/chebyshev_one_step.cpp
.

Начальное приближение y_0 задается равным нулевому вектору.

2.2 Двухшаговый метод Чебышева

Явный двухшаговый метод Чебышева — трехслойный итерационный метод, который использует два предыдущих приближения для вычисления нового. После некоторых преобразований получена схема:

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1}(I - \tau C)y_k + (1 - \alpha_{k+1})y_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau f,$$

где $C = I + A$ — матрица рассматриваемой системы.

Параметры метода выбираются следующим образом:

- Итерационный параметр τ постоянен и равен

$$\tau_0 = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n},$$

  где λ_1 и λ_n — максимальное и минимальное собственные значения матрицы C.

- Параметры α_k вычисляются рекуррентно:

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_{k+1} = \frac{4}{4 - \rho_0^2 \alpha_k},$$

  где

$$\rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Начальное приближение y_0 задается равным нулевому вектору, а y_1 вычисляется по двухслойной схеме:

$$y_1 = y_0 + \tau(f - Cy_0).$$

3 Оценка спектра матрицы системы уравнений

Входная матрица симметричная, а значит, все её собственные значения вещественны.

Согласно теореме Гершгорина все собственные значения матрицы лежат в её кругах Гершгорина. В нашем случае круги — это интервалы на вещественной оси.

В файле-хедере Matrix.hpp была реализована функция gershgorinBounds, которая вычисляет центры и радиусы кругов Гершгорина. Применив теорему, получаем, что все собственные значения матрицы $C = I + A$ лежат в интервале: $[1.0, 158.6]$. Таком образом, матрица системы является положительно определённой. Это гарантирует корректность применения итерационных методов решения.

Оценки для λ_n, λ_n берутся равными крайним точкам отрезка $[1.0, 158.6]$ из теоремы Гершгорина.

$$\lambda_1 = 158.6,$$

$$\lambda_n = 1.0$$

4 Нормы разности численных решений, полученных одношаговым и двушаговым методами Чебышева

Таблица 1: Нормы разности численных решений, полученных одношаговым и двушаговым методами Чебышева

Число итераций	Норма разности решений
16	3.26892
32	0.475282
64	0.00557482
128	3.76381e-07
256	3.22588e-15
512	2.99801e-15

5 Графики абсолютных погрешностей решений

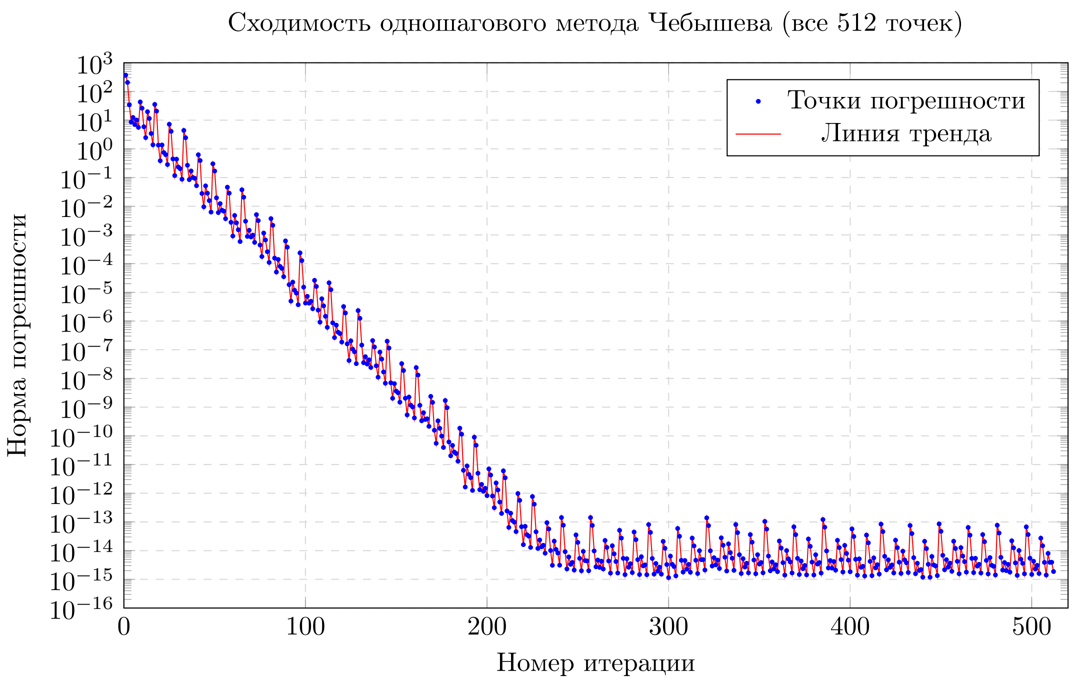

Рис. 1: График сходимости одношагового метода Чебышева в логарифмическом масштабе по оси Y. Показаны все 512 точек. Хорошо видны характерные осцилляции погрешности, типичные для чебышевских методов, и достижение машинной точности ($\sim 10^{-15}$) после примерно 200 итераций.

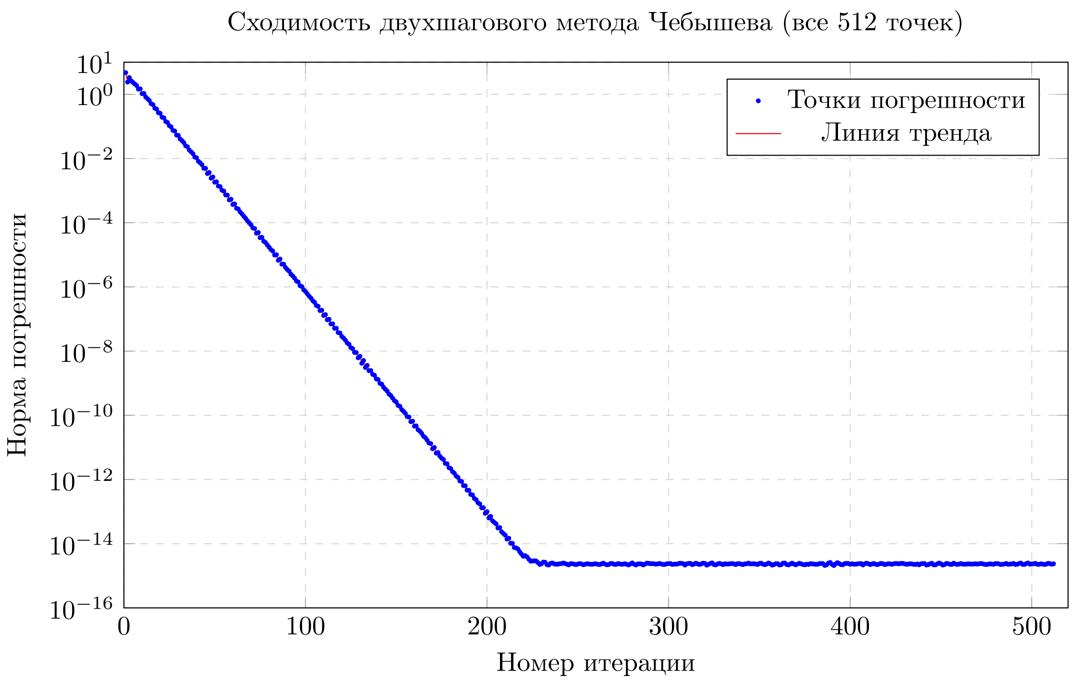

Рис. 2: График сходимости двухшагового метода Чебышева в логарифмическом масштабе по оси Y. Показаны все 512 точек. Видно монотонное убывание погрешности с плавным переходом к машинной точности ($\sim 10^{-15}$) после примерно 200 итераций, что характерно для трехслойных методов.

6 Графики относительных погрешностей решений

Сходимость одношагового алгоритма (все 512 точек)

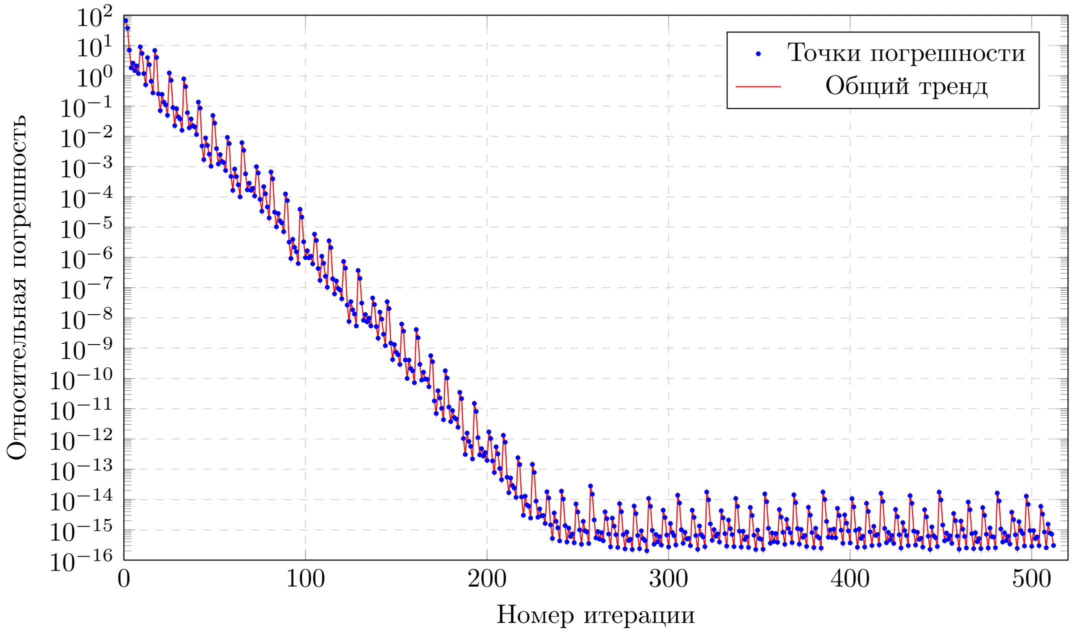

Рис. 3: График сходимости одношагового метода Чебышева в логарифмическом масштабе по оси Y. Показаны все 512 точек. Хорошо видны характерные осцилляции погрешности, типичные для чебышевских методов, и достижение машинной точности ($\sim 10^{-16}$) после примерно 200 итераций.

Сходимость двухшагового метода Чебышева (все 512 точек)

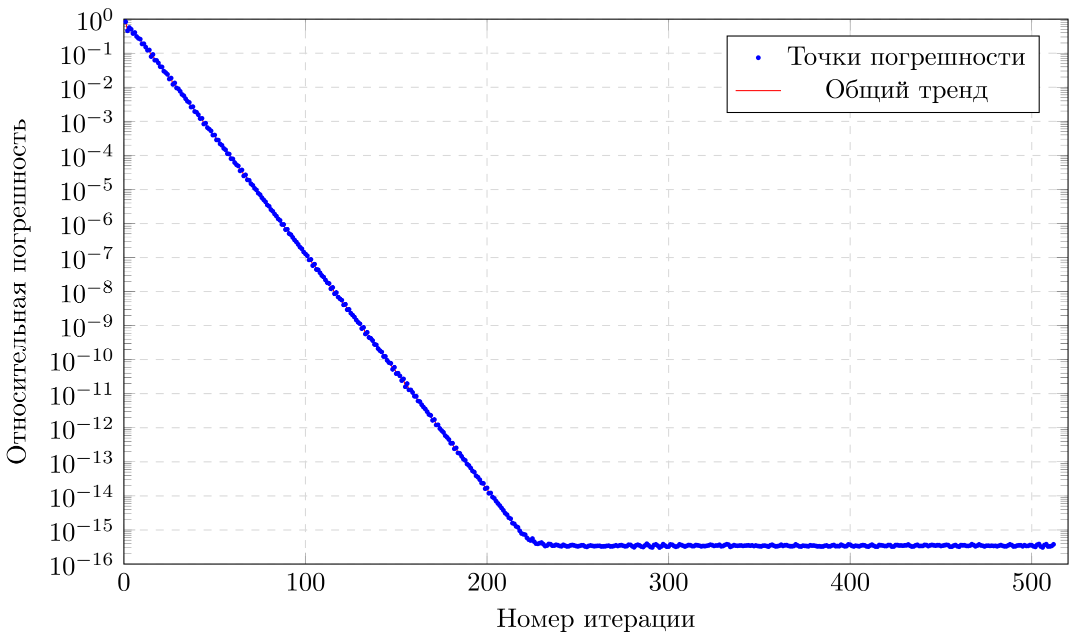

Рис. 4: График сходимости двухшагового метода Чебышева в логарифмическом масштабе по оси Y. Показаны все 512 точек. Наблюдается монотонное убывание погрешности с достижением машинной точности ($\sim 10^{-16}$) после примерно 200 итераций, что характерно для трехслойных методов Чебышева.

7 Относительные погрешности решений одношагового и двухшагового методов Чебышева

Формула для вычисления относительной погрешности:

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \frac{\|\mathbf{y}_{\text{прибл}} - \mathbf{y}_{\text{точн}}\|}{\|\mathbf{y}_{\text{точн}}\|}$$

Таблица 2: Сравнение относительных погрешностей одношагового и двухшагового методов Чебышева

Число итераций	Одношаговый метод	Двухшаговый метод
16	0.474046	0.0771574
32	0.0642399	0.00659021
64	0.000688888	4.04488e-05
128	3.48552e-08	1.61682e-09
256	3.32255e-16	4.34597e-16
512	2.99749e-16	4.29315e-16

8 Абсолютные погрешности решений одношагового и двухшагового методов Чебышева

Формула для вычисления абсолютной погрешности:

$$\varepsilon_{\text{абс}} = \|\mathbf{y}_{\text{прибл}} - \mathbf{y}_{\text{точн}}\|$$

Таблица 3: Сравнение абсолютных погрешностей одношагового и двухшагового методов Чебышева

Число итераций	Одношаговый метод	Двухшаговый метод
16	2.78538	0.453359
32	0.377459	0.0387225
64	0.00404774	0.000237668
128	2.04801e-07	9.50006e-09
256	1.95225e-15	2.55359e-15
512	1.76125e-15	2.52255e-15

9 Замечания по программной реализации

- Папка include:
  - Matrix.hpp — реализация класса для хранения квадратной матрицы и основных методов для работы с ней (ними).
  - Iterative_methods.hpp — namespace, содержащий в себе декларацию функций, реализующих одношаговый и двухшаговый методы Чебышева.
- Папка src:
  - chebyshev_one_step.cpp — реализация одношагового метода Чебышева с оптимальным набором итерационных параметров.
  - chebyshev_two_step.cpp — реализация двухшагового метода Чебышева.
- main.cpp — часть кода, генерирующая случайный вектор и запускающая оба метода Чебышева к прочитанной из .csv файла матрице $+I$ с выводом в stdout полученных погрешностей на каждой итерации.
- meson.build — файл для сборки исполняемого файла prog.
- run.sh — bash скрипт, реализующий сборку и запуск программы. **Использование: ./run.sh**