

# Отчет по заданию №2

Александров Игорь Дмитриевич, 303 группа ВМК

## 1 Постановка задачи

Требуется явными одношаговым методом Чебышева с оптимальным набором итерационных параметров и двухшаговым методом Чебышева решить систему линейных алгебраических уравнений приближенно

$$\mathbf{x} + A\mathbf{x} = \mathbf{F} \Leftrightarrow (I + A)\mathbf{x} = \mathbf{F},$$

где  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  — квадратная симметричная матрица, элементы которой  $a_{ij}$  являются вещественными числами. Матрица  $A$  предоставляется в виде файла в формате CSV.

## 2 Описание методов решения

### 2.1 Одношаговый метод Чебышева

Явный одношаговый метод Чебышева — нестационарный итерационный метод. После некоторых замен была получена схема:

$$\begin{aligned}\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Cy_k &= f \\ y_{k+1} &= y_k + \tau_{k+1}(f - Cy_k),\end{aligned}$$

где (в нашем случае)  $C = I + A$  (матрица рассматриваемой системы).

Решением задачи построения многочлена степени  $k$  с единичным свободным членом, который в точках спектра матрицы  $C$  наиболее близок к нулю на отрезке  $[\lambda_n, \lambda_1]$  является многочлен Чебышева. Нулями многочлена Чебышёва  $T_k(t)$  являются числа  $x_k = \cos(\frac{(2j-1)\pi}{2k})$ . Тогда получаем формулу для  $\tau_j$ :

$$\tau_j = \frac{\tau_0}{1 - \rho_0 \mu_j},$$

где  $\mu_j \in \{\cos(\frac{2j-1}{2k}\pi), j = 1, 2, \dots, k\}$ ,  $\tau_0 = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ ,  $\rho_0 = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_n + \lambda_1}$

Метод не является устойчивым при произвольном выборе порядка итерационных параметров  $\tau_j$ . Выбор параметров производится следующим образом:

1. Переход от  $\Theta_{2m}$  к  $\Theta_{2m+1}$  состоит в добавлении к элементам множества  $\Theta_{2m}$  нечётного числа  $2m + 1$ .
2. Переход от  $\Theta_m$  к  $\Theta_{2m}$  осуществляется следующим образом:
  - (a) Если за этим переходом следует переход от  $\Theta_{2m}$  к  $\Theta_{4m}$  или переход от  $\Theta_m$  к  $\Theta_{2m}$  есть последний шаг, то используются формулы:

$$\Theta_{2i-1}^{(2m)} = \Theta_i^{(m)}, \quad \Theta_{2i-1}^{(2m)} + \Theta_{2i}^{(2m)} = 4m, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

- (b) Если за переходом от  $\Theta_m$  к  $\Theta_{2m}$  следует переход от  $\Theta_{2m}$  к  $\Theta_{2m+1}$ , то используются формулы:

$$\Theta_{2i-1}^{(2m)} = \Theta_i^{(m)}, \quad \Theta_{2i-1}^{(2m)} + \Theta_{2i}^{(2m)} = 4m + 2, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

И параметры  $j$  для вычисления  $\tau_j$  выбираются последовательно из множества  $\Theta_{iter}$ , где  $iter$  — число итераций алгоритма. Рекурсивная реализация алгоритма содержится в функции `generate_chebyshev_order` в файле `src/chebyshev_one_step.cpp`.

Начальное приближение  $y_0$  задается равным нулевому вектору.

## 2.2 Двухшаговый метод Чебышева

Явный двухшаговый метод Чебышева — трехслойный итерационный метод, который использует два предыдущих приближения для вычисления нового. После некоторых преобразований получена схема:

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1}(I - \tau C)y_k + (1 - \alpha_{k+1})y_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau f,$$

где  $C = I + A$  — матрица рассматриваемой системы.

Параметры метода выбираются следующим образом:

- Итерационный параметр  $\tau$  постоянен и равен

$$\tau_0 = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n},$$

где  $\lambda_1$  и  $\lambda_n$  — максимальное и минимальное собственные значения матрицы  $C$ .

- Параметры  $\alpha_k$  вычисляются рекуррентно:

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_{k+1} = \frac{4}{4 - \rho_0^2 \alpha_k},$$

где

$$\rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Начальное приближение  $y_0$  задается равным нулевому вектору, а  $y_1$  вычисляется по двухслойной схеме:

$$y_1 = y_0 + \tau(f - Cy_0).$$

## 3 Оценка спектра матрицы системы уравнений

Входная матрица симметрична, а значит, все её собственные значения вещественны.

Согласно теореме Гершгорина все собственные значения матрицы лежат в её кругах Гершгорина. В нашем случае круги — это интервалы на вещественной оси.

В файле-хедере Matrix.hpp была реализована функция gershgorinBounds, которая вычисляет центры и радиусы кругов Гершгорина. Применив теорему, получаем, что все собственные значения матрицы  $C = I + A$  лежат в интервале: [1.0, 158.6]. Таким образом, матрица системы является положительно определённой. Это гарантирует корректность применения итерационных методов решения.

Оценки для  $\lambda_n$ ,  $\lambda_1$  берутся равными крайним точкам отрезка [1.0, 158.6] из теоремы Гершгорина.

$$\lambda_1 = 158.6,$$

$$\lambda_n = 1.0$$

## 4 Графики абсолютных погрешностей решений

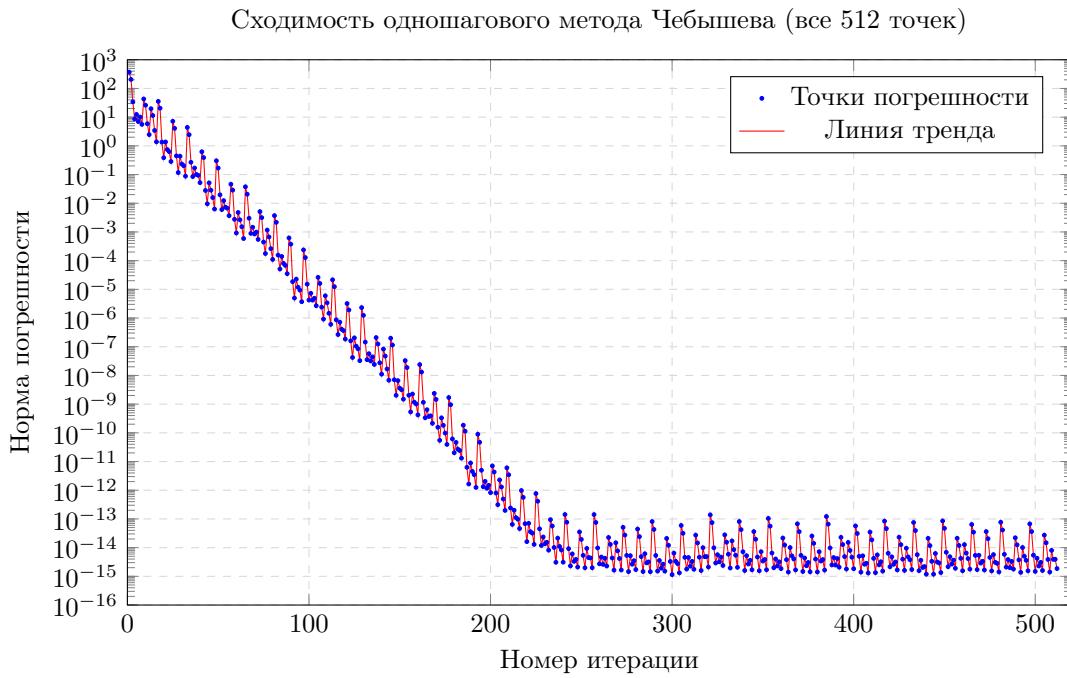


Рис. 1: График сходимости одношагового метода Чебышева в логарифмическом масштабе по оси Y. Показаны все 512 точек. Хорошо видны характерные осцилляции погрешности, типичные для чебышевских методов, и достижение машинной точности ( $\sim 10^{-15}$ ) после примерно 200 итераций.

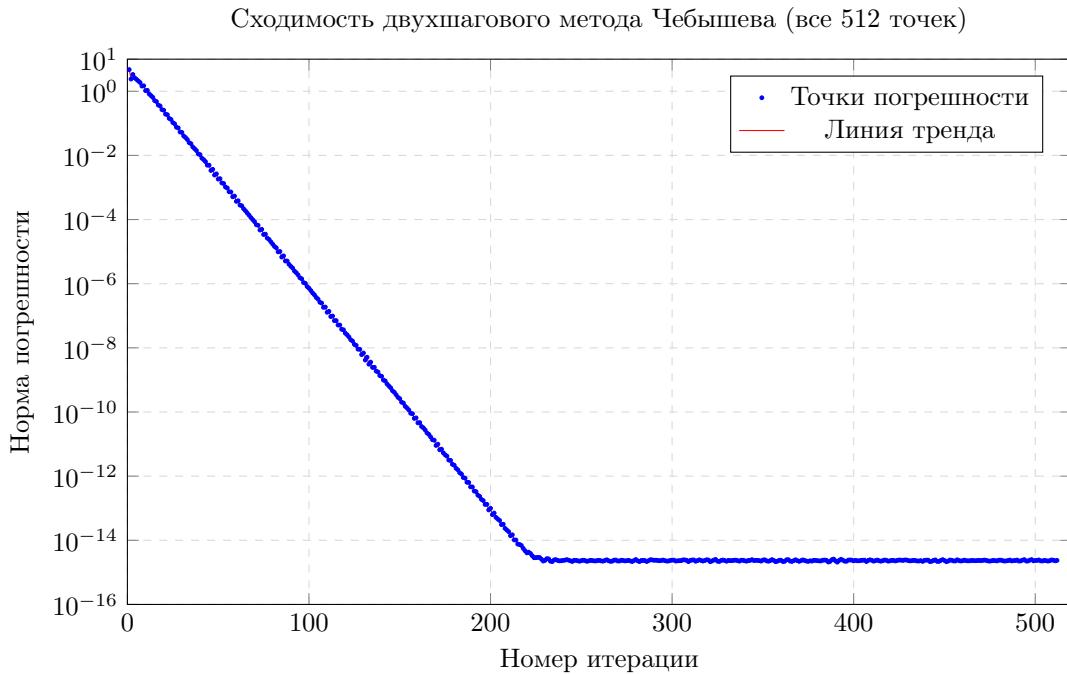


Рис. 2: График сходимости двухшагового метода Чебышева в логарифмическом масштабе по оси Y. Показаны все 512 точек. Видно монотонное убывание погрешности с плавным переходом к машинной точности ( $\sim 10^{-15}$ ) после примерно 200 итераций, что характерно для трехслойных методов.

## 5 Графики относительных погрешностей решений

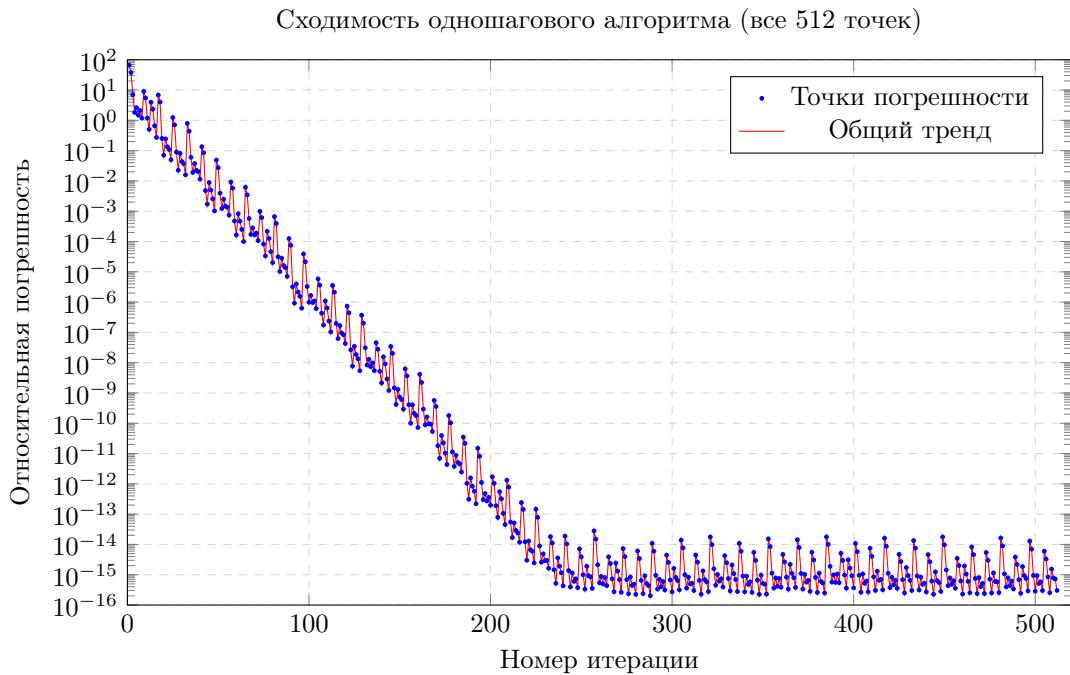


Рис. 3: График сходимости одношагового метода Чебышева в логарифмическом масштабе по оси Y. Показаны все 512 точек. Хорошо видны характерные осцилляции погрешности, типичные для чебышевских методов, и достижение машинной точности ( $\sim 10^{-16}$ ) после примерно 200 итераций.

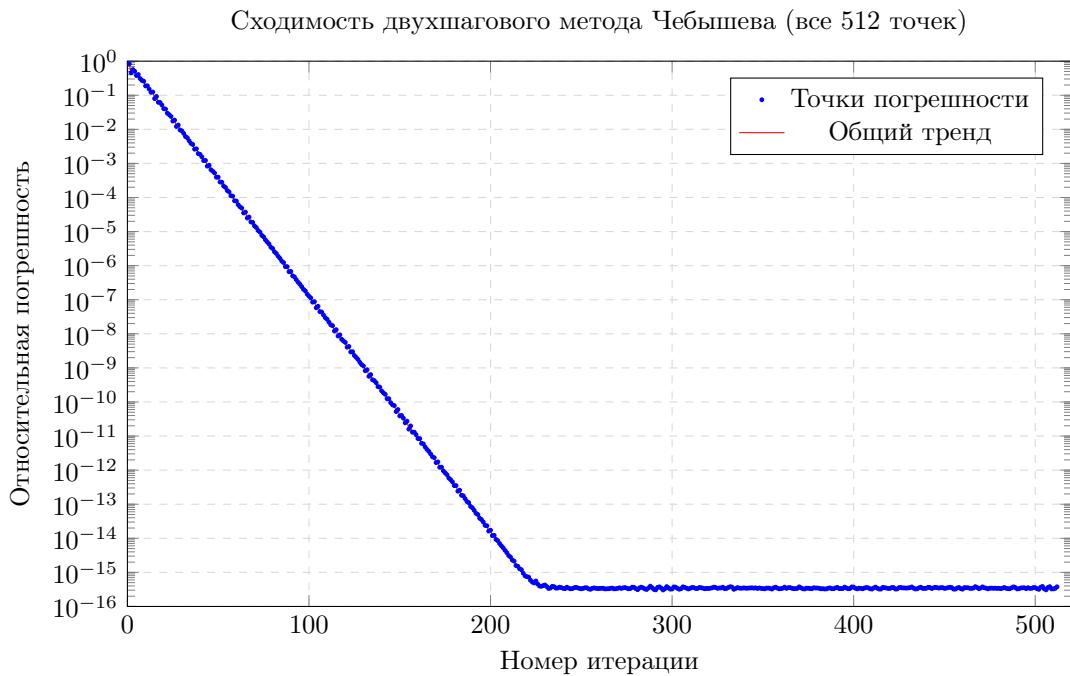


Рис. 4: График сходимости двухшагового метода Чебышева в логарифмическом масштабе по оси Y. Показаны все 512 точек. Наблюдаются монотонное убывание погрешности с достижением машинной точности ( $\sim 10^{-16}$ ) после примерно 200 итераций, что характерно для трехслойных методов Чебышева.

## 6 Относительные погрешности решений одношагового и двухшагового методов Чебышева

Формула для вычисления относительной погрешности:

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \frac{\|\mathbf{y}_{\text{прибл}} - \mathbf{y}_{\text{точн}}\|}{\|\mathbf{y}_{\text{точн}}\|}$$

Таблица 1: Сравнение относительных погрешностей одношагового и двухшагового методов Чебышева

Число итераций	Одношаговый метод	Двухшаговый метод
16	0.245654	0.0876728
32	0.0162759	0.0058022
64	0.00012052	3.22591e-05
128	4.60174e-9	1.48965e-09
256	2.60301e-16	3.81777e-16
512	3.01632e-16	3.92085e-16

## 7 Абсолютные погрешности решений одношагового и двухшагового методов Чебышева

Формула для вычисления абсолютной погрешности:

$$\varepsilon_{\text{абс}} = \|\mathbf{y}_{\text{прибл}} - \mathbf{y}_{\text{точн}}\|$$

Таблица 2: Сравнение абсолютных погрешностей одношагового и двухшагового методов Чебышева

Число итераций	Одношаговый метод	Двухшаговый метод
16	1.42285	0.498999
32	0.0870851	0.0372466
64	0.000598225	0.000234845
128	2.61819e-08	8.98353e-09
256	1.73007e-15	2.42266e-15
512	1.73142e-15	2.31376e-15

## 8 Замечания по программной реализации

- Папка include:
  - Matrix.hpp — реализация класса для хранения квадратной матрицы и основных методов для работы с ней (ними).
  - Iterative\_methods.hpp — namespace, содержащий в себе декларацию функций, реализующих одношаговый и двухшаговый методы Чебышева.
- Папка src:
  - chebyshev\_one\_step.cpp — реализация одношагового метода Чебышева с оптимальным набором итерационных параметров.
  - chebyshev\_two\_step.cpp — реализация двухшагового метода Чебышева.
- main.cpp — часть кода, генерирующая случайный вектор и запускающая оба метода Чебышева к прочитанной из .csv файла матрице с выводом в stdout полученных погрешностей на каждой итерации.
- meson.build — файл для сборки исполняемого файла prog.
- run.sh — bash скрипт, реализующий сборку и запуск программы.