

Отчет по заданию №2

Александров Игорь Дмитриевич, 303 группа ВМК

1 Постановка задачи

Требуется явными одношаговым методом Чебышева с оптимальным набором итерационных параметров и двухшаговым методом Чебышева решить систему линейных алгебраических уравнений приближенно

$$\mathbf{x} + A\mathbf{x} = \mathbf{F} \Leftrightarrow (I + A)\mathbf{x} = \mathbf{F},$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ — квадратная симметричная матрица, элементы которой a_{ij} являются вещественными числами. Матрица A предоставляется в виде файла в формате CSV.

2 Описание методов решения

2.1 Одношаговый метод Чебышева

Явный одношаговый метод Чебышева — нестационарный итерационный метод. После некоторых замен была получена схема:

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{\tau_{k+1}} + Cy_k = f$$
$$y_{k+1} = y_k + \tau_{k+1}(f - Cy_k),$$

где (в нашем случае) $C = I + A$ (матрица рассматриваемой системы).

Решением задачи построения многочлена степени k с единичным свободным членом, который в точках спектра матрицы C наиболее близок к нулю на отрезке $[\lambda_n, \lambda_1]$ является многочлен Чебышева. Нулями многочлена Чебышёва $T_k(t)$ являются числа $x_k = \cos(\frac{(2j-1)\pi}{2k})$. Тогда получаем формулу для τ_j :

$$\tau_j = \frac{\tau_0}{1 - \rho_0 \mu_j},$$

где $\mu_j \in \{\cos(\frac{2j-1}{2k}\pi), j = 1, 2, \dots, k\}$, $\tau_0 = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_2}$, $\rho_0 = \frac{\lambda_1 - \lambda_n}{\lambda_n + \lambda_1}$

Метод не является устойчивым при произвольном выборе порядка итерационных параметров τ_j . Выбор параметров производится следующим образом:

1. Переход от Θ_{2m} к Θ_{2m+1} состоит в добавлении к элементам множества Θ_{2m} нечётного числа $2m + 1$.
2. Переход от Θ_m к Θ_{2m} осуществляется следующим образом:
 - (a) Если за этим переходом следует переход от Θ_{2m} к Θ_{4m} или переход от Θ_m к Θ_{2m} есть последний шаг, то используются формулы:

$$\Theta_{2i-1}^{(2m)} = \Theta_i^{(m)}, \quad \Theta_{2i-1}^{(2m)} + \Theta_{2i}^{(2m)} = 4m, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

- (b) Если за переходом от Θ_m к Θ_{2m} следует переход от Θ_{2m} к Θ_{2m+1} , то используются формулы:

$$\Theta_{2i-1}^{(2m)} = \Theta_i^{(m)}, \quad \Theta_{2i-1}^{(2m)} + \Theta_{2i}^{(2m)} = 4m + 2, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

И параметры j для вычисления τ_j выбираются последовательно из множества Θ_{iter} , где $iter$ — число итераций алгоритма. Рекурсивная реализация алгоритма содержится в функции `generate_chebyshev_order` в файле `src/chebyshev_one_step.cpp`.

Начальное приближение y_0 задается равным нулевому вектору.

2.2 Двухшаговый метод Чебышева

Явный двухшаговый метод Чебышева — трехслойный итерационный метод, который использует два предыдущих приближения для вычисления нового. После некоторых преобразований получена схема:

$$y_{k+1} = \alpha_{k+1}(I - \tau C)y_k + (1 - \alpha_{k+1})y_{k-1} + \alpha_{k+1}\tau f,$$

где $C = I + A$ — матрица рассматриваемой системы.

Параметры метода выбираются следующим образом:

- Итерационный параметр τ постоянен и равен

$$\tau_0 = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n},$$

где λ_1 и λ_n — максимальное и минимальное собственные значения матрицы C .

- Параметры α_k вычисляются рекуррентно:

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_{k+1} = \frac{4}{4 - \rho_0^2 \alpha_k},$$

где

$$\rho_0 = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}, \quad \xi = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}.$$

Начальное приближение y_0 задается равным нулевому вектору, а y_1 вычисляется по двухслойной схеме:

$$y_1 = y_0 + \tau(f - Cy_0).$$

3 Оценка спектра матрицы системы уравнений

Входная матрица симметричная, а значит, все её собственные значения вещественны.

Согласно теореме Гершгорина все собственные значения матрицы лежат в её кругах Гершгорина. В нашем случае круги — это интервалы на вещественной оси.

В файле-хедере `Matrix.hpp` была реализована функция `gershgorinBounds`, которая вычисляет центры и радиусы кругов Гершгорина. Применив теорему, получаем, что все собственные значения матрицы $C = I + A$ лежат в интервале: $[1.0, 158.6]$. Таким образом, матрица системы является положительно определённой. Это гарантирует корректность применения итерационных методов решения.

Оценки для λ_n , λ_1 берутся равными крайним точкам отрезка $[1.0, 158.6]$ из теоремы Гершгорина.

$$\lambda_1 = 158.6,$$

$$\lambda_n = 1.0$$

4 Нормы разности численных решений, полученных одношаговым и двушаговым методами Чебышева

Таблица 1: Нормы разности численных решений, полученных одношаговым и двушаговым методами Чебышева

Число итераций	Норма разности решений
16	2.41397
32	0.311804
64	0.00248734
128	1.20996e-07
256	2.2126e-15
512	2.19453e-15

5 Графики абсолютных погрешностей решений

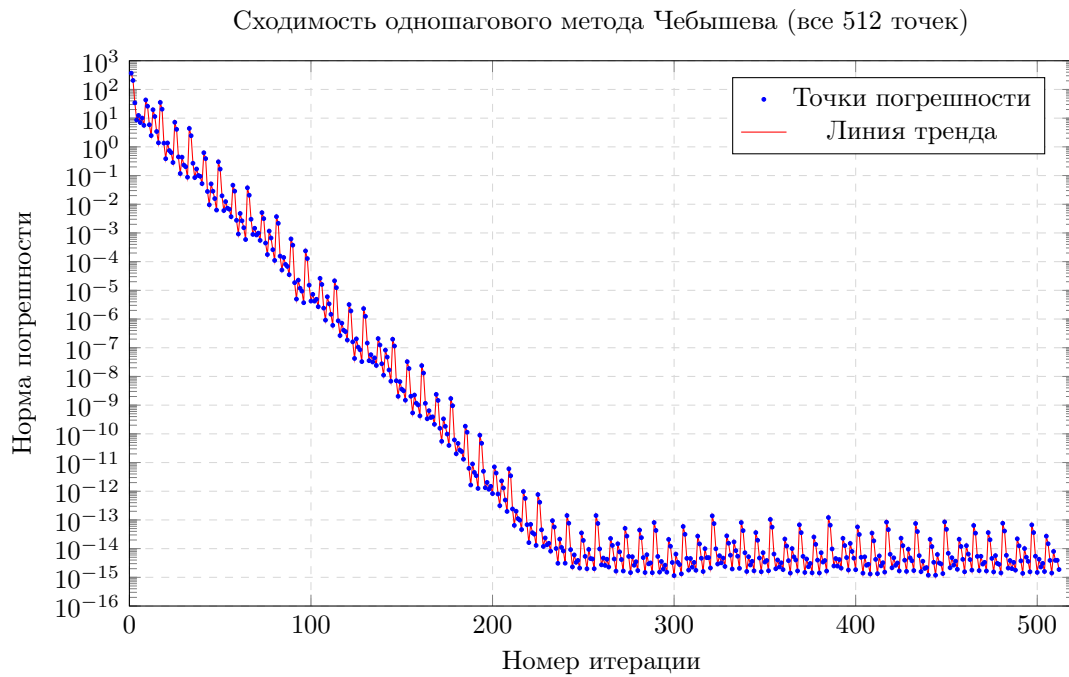


Рис. 1: График сходимости одношагового метода Чебышева в логарифмическом масштабе по оси Y. Показаны все 512 точек. Хорошо видны характерные осцилляции погрешности, типичные для чебышевских методов, и достижение машинной точности ($\sim 10^{-15}$) после примерно 200 итераций.

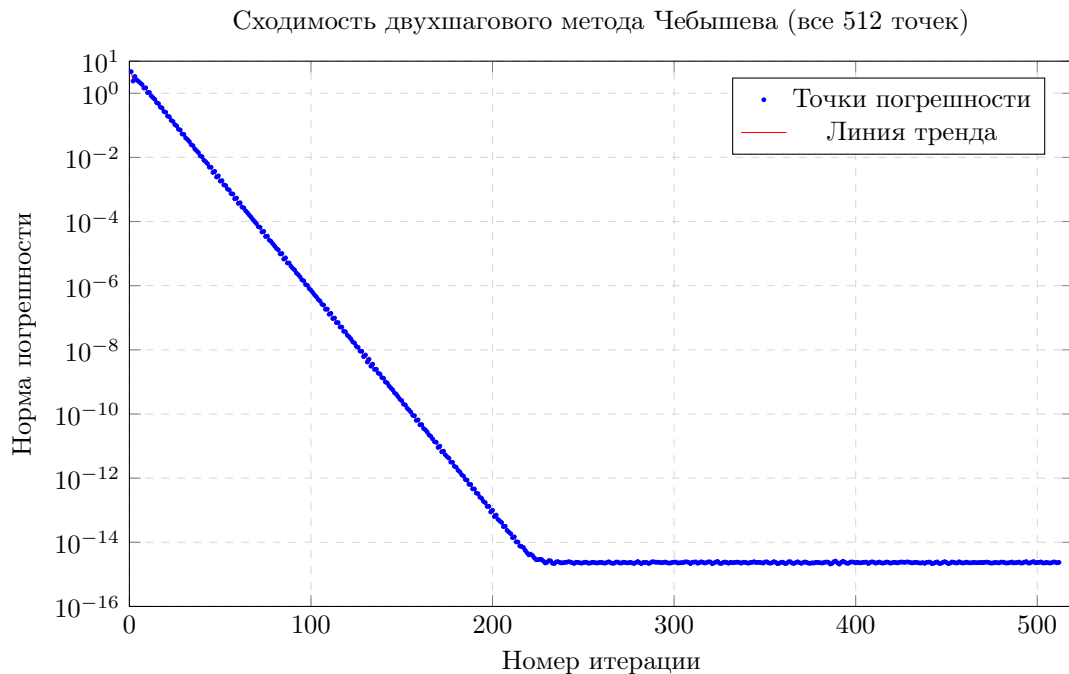


Рис. 2: График сходимости двухшагового метода Чебышева в логарифмическом масштабе по оси Y. Показаны все 512 точек. Видно монотонное убывание погрешности с плавным переходом к машинной точности ($\sim 10^{-15}$) после примерно 200 итераций, что характерно для трехслойных методов.

6 Графики относительных погрешностей решений

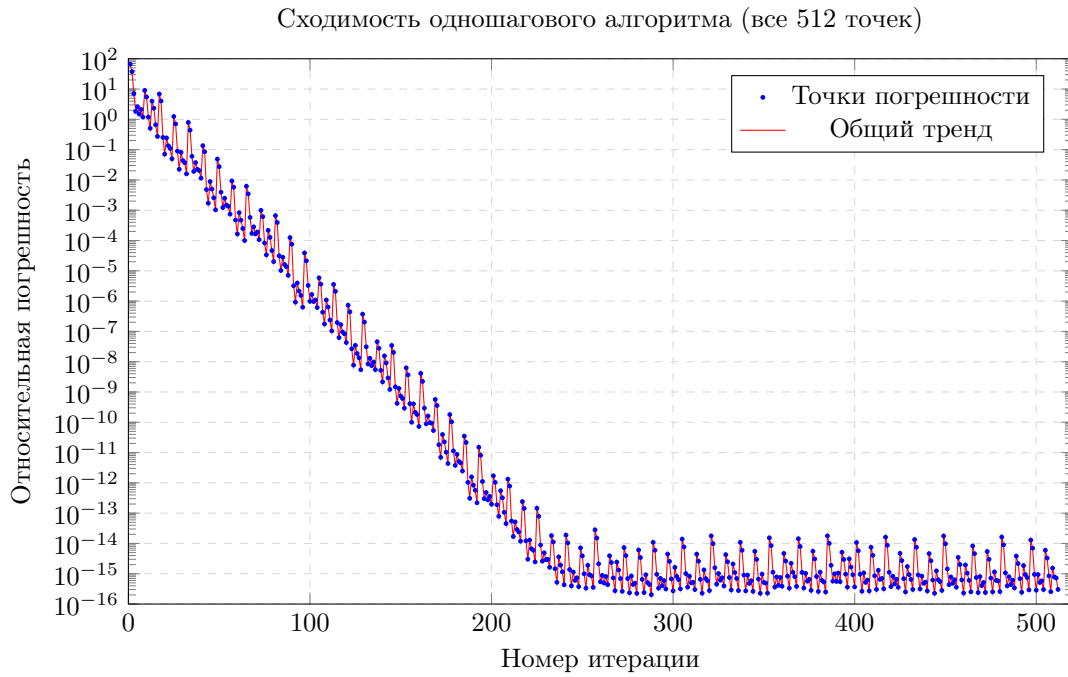


Рис. 3: График сходимости одношагового метода Чебышева в логарифмическом масштабе по оси Y. Показаны все 512 точек. Хорошо видны характерные осцилляции погрешности, типичные для чебышевских методов, и достижение машинной точности ($\sim 10^{-16}$) после примерно 200 итераций.

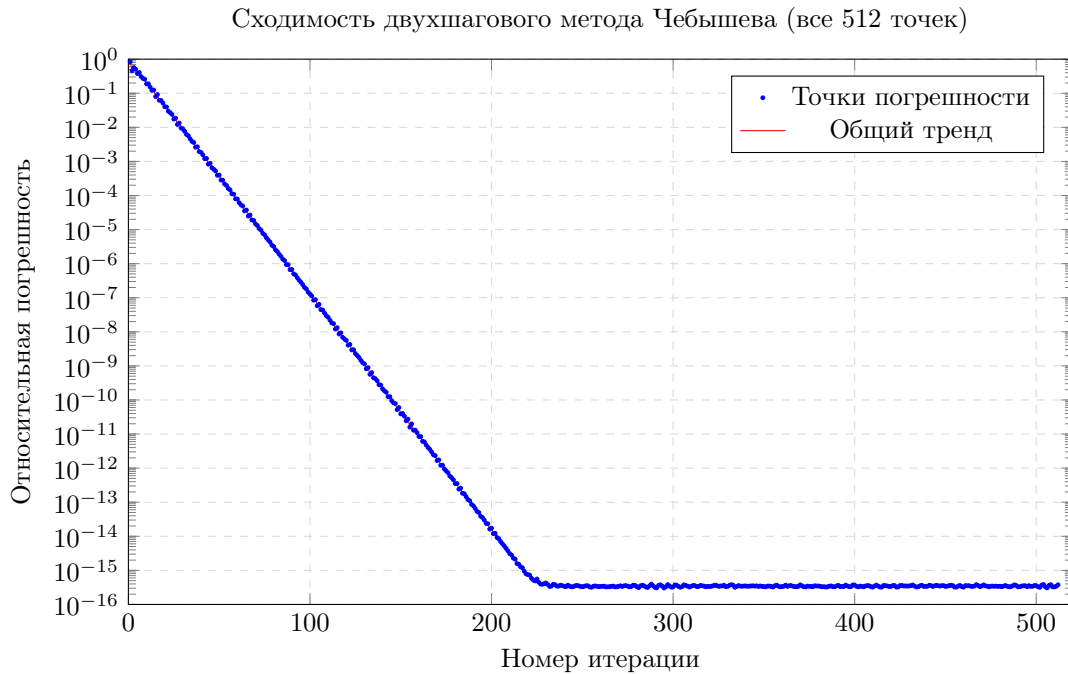


Рис. 4: График сходимости двухшагового метода Чебышева в логарифмическом масштабе по оси Y. Показаны все 512 точек. Наблюдается монотонное убывание погрешности с достижением машинной точности ($\sim 10^{-16}$) после примерно 200 итераций, что характерно для трехслойных методов Чебышева.

7 Относительные погрешности решений одношагового и двухшагового методов Чебышева

Формула для вычисления относительной погрешности:

$$\varepsilon_{\text{отн}} = \frac{\|\mathbf{y}_{\text{прибл}} - \mathbf{y}_{\text{точн}}\|}{\|\mathbf{y}_{\text{точн}}\|}$$

Таблица 2: Сравнение относительных погрешностей одношагового и двухшагового методов Чебышева

Число итераций	Одношаговый метод	Двухшаговый метод
16	0.245654	0.0876728
32	0.0162759	0.0058022
64	0.00012052	3.22591e-05
128	4.60174e-9	1.48965e-09
256	2.60301e-16	3.81777e-16
512	3.01632e-16	3.92085e-16

8 Абсолютные погрешности решений одношагового и двухшагового методов Чебышева

Формула для вычисления абсолютной погрешности:

$$\varepsilon_{\text{абс}} = \|\mathbf{y}_{\text{прибл}} - \mathbf{y}_{\text{точн}}\|$$

Таблица 3: Сравнение абсолютных погрешностей одношагового и двухшагового методов Чебышева

Число итераций	Одношаговый метод	Двухшаговый метод
16	1.42285	0.498999
32	0.0870851	0.0372466
64	0.000598225	0.000234845
128	2.61819e-08	8.98353e-09
256	1.73007e-15	2.42266e-15
512	1.73142e-15	2.31376e-15

9 Замечания по программной реализации

- Папка include:
 - Matrix.hpp — реализация класса для хранения квадратной матрицы и основных методов для работы с ней (ними).
 - Iterative_methods.hpp — namespace, содержащий в себе декларацию функций, реализующих одношаговый и двухшаговые методы Чебышева.
- Папка src:
 - chebyshev_one_step.cpp — реализация одношагового метода Чебышева с оптимальным набором итерационных параметров.
 - chebyshev_two_step.cpp — реализация двухшагового метода Чебышева.
- main.cpp — часть кода, генерирующая случайный вектор и запускающая оба метода Чебышева к прочитанной из .csv файла матрице с выводом в stdout полученных погрешностей на каждой итерации.
- meson.build — файл для сборки исполняемого файла prog.
- run.sh — bash скрипт, реализующий сборку и запуск программы.