Lógica

[1] Proposiciones

➥ ¿Que son?

Las proposiciones son expresiones a las que se les puede asignar un valor de verdad ya sea verdadero o falso pero no ambos. Por ejemplo la proposición «Las semanas tienen siete días» tiene valor de verdad verdadero ya que en efecto las semanas tienen siete días.

Se suelen usar letras para denotar una proposición. Sea p la proposición «Los pájaros vuelan», podemos decir que p tiene valor de verdad verdadero refiriéndonos a que la proposición «Los pájaros vuelan» tiene valor de verdad verdadero.

[2] Conectores lógicos

Los conectores lógicos se usan para construir **proposiciones compuestas** en base a otras proposiciones. Para definirlos se usan las tablas de verdad.

➥ Tablas de verdad

Las tablas de verdad nos permiten expresar cual es el valor de verdad de una proposición compuesta para cada combinación posible de valores de verdad de las proposiciones que la componen. Se organizan en filas y columnas. Se representan los valores de verdad verdadero y falso como 1 y 0 respectivamente. `[TODO: Falta explicar]`

Negación $\neg$

p	$\neg p$
0	1
1	0

Conjunción $\wedge$

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disyunción $\vee$

p	q	$p \vee q$	$p \veebar q$
0	0	0	0
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	1	0

Implicación $\rightarrow$

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Bicondicional $\leftrightarrow$

p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

➥ Proposiciones primitivas

Las proposiciones primitivas son proposiciones que no se pueden formar a partir de otras proposiciones usando conectores lógicos.

➥ Orden de precedencia

Para simplificar la notación se establece un orden de precedencia de los conectores lógicos y es:

Conector	Precedencia
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3

De forma que la expresión $((p \vee (q \wedge (\neg r))) \rightarrow s) \leftrightarrow t$
es equivalente a $p \vee q \wedge \neg r \rightarrow s \leftrightarrow t$

$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

➡ Tautologías y Contradicciones

Las proposiciones compuestas que tienen valor de verdad verdadero independientemente del valor de las proposiciones que las componen son tautologías por el contrario las que son falsas independientemente del valor de las proposiciones que las componen son contradicciones. Notamos a las tautologías como T_0 y las contradicciones como F_0.

[3] Equivalencia lógica

Dos proposiciones p y r son lógicamente equivalentes, notamos $p \Leftrightarrow r$, si la proposición $p \leftrightarrow r$ es una tautología.

- Propiedades:
  1. $p \Leftrightarrow p$
  2. $p \Leftrightarrow q$, entonces $q \Leftrightarrow p$
  3. $p \Leftrightarrow q$ y $q \Leftrightarrow r$, entonces $p \Leftrightarrow r$
- Ejemplo importante (EMI): $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$

[4] Leyes de la lógica

1. Ley de doble negación
   $\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
2. Leyes de De Morgan
   $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
   $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
3. Leyes conmutativas
   $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$
   $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$
4. Leyes asociativas
   $p \vee (q \vee r) \Leftrightarrow (p \vee q) \vee r$
   $p \wedge (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$
5. Leyes distributivas
   $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
   $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
6. Leyes idempotentes
   $p \vee p \Leftrightarrow p$
   $p \wedge p \Leftrightarrow p$
7. Leyes de neutro
   $p \vee F_0 \Leftrightarrow p$
   $p \wedge T_0 \Leftrightarrow p$
8. Leyes inversas
   $p \vee \neg p \Leftrightarrow T_0$
   $p \wedge \neg p \Leftrightarrow F_0$
9. Leyes de dominación
   $p \vee T_0 \Leftrightarrow T_0$
   $p \wedge F_0 \Leftrightarrow F_0$
10. Leyes de absorción
    $p \wedge (p \vee q) \Leftrightarrow p$
    $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$

[TODO: Completar la tabla]

[5] Reglas de sustitución

1. Supongamos que una proposición compuesta P es una tautología y que p es una proposición primitiva que aparece en P. Si reemplazamos cada ocurrencia de p en P por la misma proposición q, entonces la proposición resultante también es una tautología
2. Sea P una proposición compuesta y p una proposición arbitraria que aparece en P. Sea q una proposición tal que $p \Leftrightarrow q$. Supongamos que reemplazamos en P una o mas ocurrencias de p por q y llamemos P_1 a la proposición obtenida. Entonces $P \Leftrightarrow P_1$.

➡ Implicaciones varias:

1. Implicación directa: $p \to q$
2. Implicación recíproca: $q \to p$
3. Implicación inversa: $\neg p \to \neg q$
4. Implicación contrapositiva: $\neg q \to \neg p$

[6] Reglas de inferencia

➡ Argumentos

Un argumento es una proposición de la forma: $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \to q$. Un argumento válido es un argumento y una tautología. A las proposiciones p_i se les llama premisas y q es conclusión.

➡ Reglas de inferencia

Las reglas de inferencia nos permiten determinar la validez de un argumento sin usar tablas de verdad. La notación es la siguiente:

$$\begin{array}{l} p_1 \\ p_2 \\ \ldots \\ p_n \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Donde $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n \to q$ es la tautología asociada.

Modus Ponens:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Ley de Silogismo:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to r \\ \hline \therefore p \to r \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \neg p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Eliminación del bicondicional:

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ p \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Modus Tollens:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ \neg q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

Inducción del bicondicional:

$$\begin{array}{l} p \to q \\ q \to p \\ \hline \therefore p \leftrightarrow q \end{array}$$

Eliminación del bicondicional:

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ \neg p \\ \hline \therefore \neg q \end{array}$$

Eliminación del
bicondicional:

$$\begin{array}{l} p \leftrightarrow q \\ p \vee q \\ \hline \therefore p \wedge q \end{array}$$

Reducción al absurdo:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow F_0 \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

[TODO: Completar la tabla]

[7] Cuantificadores

➡ Variables

Una variable un identificador al cual se le puede asignar un valor. Por ejemplo si x es una variable puede tomar como valor el número 2.

➡ Proposiciones abiertas

1. Definición

Una proposición abierta es una expresión que contiene una o más variables de forma que si las variables toman un valor la proposición abierta pasa a ser una proposición.

2. Notación

Proposición de una sola variable: $p(x)$ por ejemplo $x + 1 = 2$. $p(x)$ es la proposición abierta de variable x. Proposición de varias variables: $p(x, y)$ o $p(x_1, ..., x_n)$, por ejemplo la proposición abierta $x = y$.

➡ Universo

El universo es la familia de elementos que se permiten asignar a las variables. Se simboliza $\mathcal{U}$.

➡ Cuantificadores

Los cuantificadores nos permiten formular una proposición mediante el uso de una proposición abierta y valores posibles de la variable.

1. Existencial

El cuantificador existencial $\exists$ aplicado en la variable x para la proposición abierta $p(x)$ notado $\exists x[p(x)]$ es una proposición verdadera si existe por lo menos un x en el universo tal que $p(x)$ es verdadera y si no es falsa.

2. Universal

El cuantificador universal $\forall$ aplicado en la variable x para la proposición abierta $p(x)$ notado $\forall x[p(x)]$ es una proposición verdadera para todo x en el universo se cumple $p(x)$, si no es falsa.

➡ Equivalencia lógica

Se dice que una proposición abierta $p(x)$ es lógicamente equivalente a otra proposición abierta $q(x)$ si se cumple $\forall x[p(x) \leftrightarrow q(x)]$ y se escribe $p(x) \Leftrightarrow q(x)$

➡ Implicación lógica

Se dice que una proposición abierta $p(x)$ implica lógicamente a otra proposición abierta $q(x)$ si se cumple $\forall x[p(x) \to q(x)]$ y se escribe $p(x) \Rightarrow q(x)$

➡ Más implicaciones lógicas

- La directa $\forall x[p(x) \to q(x)]$
- La reciproca $\forall x[q(x) \to p(x)]$
- La inversa $\forall x[\neg p(x) \to \neg q(x)]$
- La contrapositiva $\forall x[\neg q(x) \to \neg p(x)]$

1. Propiedades

1. $\exists x[p(x) \land q(x)] \Rightarrow \exists x[p(x)] \land \exists x[q(x)]$
2. $\exists x[p(x) \lor q(x)] \Leftrightarrow \exists x[p(x)] \lor \exists x[q(x)]$
3. $\forall x[p(x) \land q(x)] \Leftrightarrow \forall x[p(x)] \land \forall x[q(x)]$
4. $\forall x[p(x)] \lor \forall x[q(x)] \Rightarrow \forall x[p(x) \lor q(x)]$

➡ Negación de los cuantificadores

1. $\neg(\exists x[p(x)]) \Leftrightarrow \forall x[\neg p(x)]$
2. $\neg(\forall x[p(x)]) \Leftrightarrow \exists x[\neg p(x)]$