Calculo Integral

[1] Sumas inferiores y superiores

➡ Partición de un intervalo

Sea $[a, b]$ un intervalo, P es partición de $[a, b]$ si:

1. $\exists n \in \mathbb{N}\ |P| = n + 1$
2. $\forall i \in \mathbb{N}_0\ (0 \leq i \leq n \Rightarrow t_i \in P)$
3. $\forall i, j \in \mathbb{N}_0\ \left(0 \leq i < j \leq n \Rightarrow a < t_i < t_j < b\right)$

➡ Ínfimos y supremos

Dada la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a, b]$, P una partición del intervalo $[a, b]$ y un número $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < |P|$ y sea $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ entonces se definen para ella los siguientes:

$$m_k = \inf_{I_k} f \quad \text{y} \quad M_k = \sup_{I_k} f$$

➡ Suma inferior y superior

Dada la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a, b]$, P una partición del intervalo $[a, b]$ y un número $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < |P|$ y sea $\Delta t_k = t_k - t_{k-1}$ entonces se definen la **suma inferior** y la **suma superior** como:

$$L(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta t_k \quad \text{y} \quad U(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta t_k$$

➡ Lemas

Sean $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada, P una partición de $[a, b]$ y $k \in \mathbb{N}$ tal que $k < |P|$:

1. $L(f, P) \leq U(f, P)$
   - Esto es porque $\forall k (m_k \leq M_k \land \Delta t_k \geq 0) \Rightarrow \forall k (m_k \Delta t_k \leq M_k \Delta t_k)$
2. Sea P' partición de $[a, b]$ y $P \subseteq P' \Rightarrow L(f, P) \leq L(f, P') \land U(f, P') \leq U(f, P)$
   - **[TODO: Demostración]**
3. Sea Q partición de $[a, b] \Rightarrow L(f, P) \leq U(f, Q)$
   - Se demuestra considerando la partición $T = P \cup Q$ y utilizando el segundo lema.

[2] Funciones integrables según Riemann

➡ Integral inferior y superior

Dada la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a, b]$ se llaman **integral inferior** e **integral superior** respectivamente a:

$$\underline{\int_a^b} f = \sup\{L(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\} \quad \text{y} \quad \overline{\int_a^b} f = \inf\{U(f, P) : P \in \mathcal{P}([a, b])\}$$

La integral inferior es menor o igual que la integral superior. Esto es porque por el tercer lema:

$$L(f,P) \leq \inf_{Q} U(f,Q) = \overline{\int_a^b} f$$

y

$$\underline{\int_a^b} f = \sup_{P} L(f,Q) \leq U(f,Q)$$

➡ Integral de Riemann

Dada la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a,b]$ es integrable según Riemann si la integral inferior es igual a la integral superior que son entonces iguales a la integral de f. Se nota:

$$\int_a^b f = \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f = \int_a^b f(x)dx$$

➡ Area bajo una curva

Dada la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada y no negativa en $[a,b]$, sea la región:

$$R = \{(x,y) : x \in [a,b] \land y \in [0,f(x)]\}$$

entonces la integral de f es igual al area de R

➡ Condición de integrabilidad

Dada la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada e integrable si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists P(P \text{ partición de } [a,b] \land U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon)$$

[TODO: Demostración]

➡ Particiones regulares

Dado un intervalo $[a,b]$ y un número $n \in \mathbb{N}$ entonces P_n es una partición regular sobre el mismo solo si $\forall k\left(\Delta t_k = \frac{b-a}{n}\right)$