# Números Reales

Veremos en este apunte una posible definición axiomática de los números reales. Los axiomas se dividen en tres grupos y son, los axiomas de cuerpo, de orden y del supremo.

Se da por sabido conocimiento básico de conjuntos y lógica. El conjunto de números reales es $\mathbb{R}$ y elementos del conjunto se declaran $a \in \mathbb{R}$ o $b, c \in \mathbb{R}$. Las operaciones binarias de suma y multiplicación (o producto) entre dos números reales $a, b \in \mathbb{R}$ se notan $a + b$ y $ab$ (o $a \cdot b$) respectivamente.

## [1] Axiomas de cuerpo

### ➥ Los axiomas de cuerpo (propiedades aritméticas)

Dados los números reales $a, b, c \in \mathbb{R}$ de cumplen:

1. Propiedades conmutativas: $a + b = b + a$ y $ab = ba$
2. Propiedades asociativas: $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a(bc) = (ab)c$
3. Propiedad distributiva: $a(b + c) = ab + ac$
4. Existencia de elementos neutros: $\exists 0[a + 0 = 0 + a = a]$ y $\exists 1[a1 = 1a = a]$
5. Existencia de elementos opuestos: $\forall a[\exists b[a + b = 0]]$
6. Existencia de elementos recíprocos (o inversos): $\forall a \neq 0\ \exists b[ab = 1]$

## [2] Teoremas de cuerpo

### ➥ Ley de simplificación para la suma

También llamada propiedad cancelativa de la suma es:

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ entonces si $a + b = a + c$ se da que $b = c$.

#### 1. Demostración

Sean $a$, $b$ y $c$ en $\mathbb{R}$, de modo que $a + b = a + c$, llamamos $y$ al elemento opuesto de a (es decir, existe un $y$ tal que $a + y = y + a = 0$.

Dicho esto, formamos la ecuación $y + (a + b)$, que será equivalente a $y + (a + c)$ por hipótesis.

$y + (a + b) = y + (a + b)$

Gracias a la asociatividad de la suma, tenemos que:

$(y + a) + b = (y + a) + c$

Podemos usar el axioma del elemento opuesto para transformar $y + a$ en 0.

Nos quedan así las siguientes ecuaciones (aun equivalentes):

$0 + b = 0 + c$

Podemos entonces usar el axioma de existencia de los elementos neutros para dar con la conclusión:

$b = c$

#### 2. Demostración (simbólica)

$\forall a, b, c \in \mathbb{R}[a + b = a + c] \overset{(1)}{\Rightarrow} \exists y[a + y = 0]$

$\therefore$

$$\left.\begin{array}{l} y+(a+b)\overset{(2)}{=}(y+a)+b=0+b\overset{(3)}{=}b \\ y+(a+b)=y+(a+c)\overset{(2)}{=}(y+a)+c=0+c\overset{(3)}{=}c \end{array}\right\} \Rightarrow b=c$$

(1) $\because$ Existencia del elemento neutro de la suma

(2) $\because$ Propiedad asociativa de la suma

(3) $\because$ Existencia del elemento opuesto de la suma

## ➥ Diferencia (o resta) de números reales

Primero definimos que dado un $a \in \mathbb{R}$ su elemento opuesto se nota $-a$ tal que $a + (-a) = 0$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ la diferencia entre ellos es $a - b = a + (-b)$

### 1. Propiedades de la diferencia y el opuesto

Dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ se cumplen:

1. $-(-a) = a$
2. $-0 = 0$
3. $0 \cdot a = 0$
4. $a(-b) = -(ab) = (-a)b$
5. $(-a)(-b) = ab$
6. $a(b - c) = ab - ac$

## ➥ Ley de simplificación para producto

También llamada propiedad cancelativa del producto es:

Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a \neq 0$ entonces si $ab = ac$ se da que $b = c$.

`[TODO: Demostración]`

## ➥ Unicidad del elemento neutro del producto

Si $1'$ es un número real que verifica $\forall a \in \mathbb{R}\ a \cdot 1' = 1' \cdot a = a$ entonces $1' = 1$

## ➥ Unicidad del reciproco

$\forall a \in \mathbb{R} - \{0\}\ \exists! b \in \mathbb{R} - \{0\}\ ab = ba = 1$

## ➥ Cociente de números reales

Primero definimos que dado un $a \in \mathbb{R} - \{0\}$ su reciproco se nota $a^{-1}$ tal que $aa^{-1} = 1$.

Dados $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ el cociente entre ellos es $\frac{a}{b} = ab^{-1}$

### 1. Propiedades del cociente y el reciproco

Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ se cumplen:

1. $1^{-1} = 1$
2. $\frac{a}{1} = a$
3. $a \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{a} = a^{-1}$
4. $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \lor b = 0$
5. $b \neq 0 \land d \neq 0 \Rightarrow$
   - $(bd)^{-1} = b^{-1}d^{-1}$
   - $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{ad+bc}{bd}$
   - $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

6. $a \neq 0 \wedge b \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{a^{-1}}{b^{-1}}$
7. $-a = (-1)a$

# [3] Axiomas de orden

Para poder enunciar los axiomas de orden debemos primero declarar el conjunto de los números positivos. Suponemos que existe un $\mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{R}$ y lo llamamos conjunto de números positivos.

## ➥ Los axiomas de orden

7. La suma y el producto son cerrados en los números positivos:
   $a \in \mathbb{R}^+ \wedge b \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{R}^+ \wedge ab \in \mathbb{R}^+$
8. Para todo real $a \neq 0$ se da que $a$ es positivo o su opuesto $-a$ es positivo pero no ambos:
   $\forall a \in \mathbb{R}\ a \neq 0 \to (a \in \mathbb{R}^+ \wedge -a \notin \mathbb{R}^+) \vee (a \notin \mathbb{R}^+ \wedge -a \in \mathbb{R}^+)$
9. El elemento neutro de la suma (el cero) no es positivo:
   $0 \notin \mathbb{R}^+$

## ➥ Símbolos menor a, mayor a, ...

Dados $a, b \in \mathbb{R}$

1. Menor a: $a < b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+$
2. Mayor a: $a > b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^+ \Leftrightarrow b < a$
3. Menor o igual a: $a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathbb{R}^+ \vee a = b$
4. Mayor o igual a: $a \geq b \Leftrightarrow a - b \in \mathbb{R}^+ \vee a = b \Leftrightarrow b \leq a$

### 1. Propiedades

Para cualesquiera $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

1. $a < b \Rightarrow a + c < b + c$
2. $a < b \wedge c < d \Rightarrow a + c < b + d$
3. $a < b \wedge c > 0 \Rightarrow ac < bc$
4. $a < b \wedge c < 0 \Rightarrow ac > bc$
5. $a \neq 0 \Rightarrow a \cdot a > 0$
6. $1 > 0$ osea $1 \in \mathbb{R}^+$
7. $a < b \Rightarrow -b < -a$
8. $ab > 0 \Leftrightarrow a, b \in \mathbb{R}^+ \vee (a \notin \mathbb{R}^+ \wedge b \notin \mathbb{R}^+)$
9. $ab < 0 \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}^+ \veebar b \in \mathbb{R}^+$
10. $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$
11. $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$

## ➥ Subconjuntos de los reales

### 1. Los números naturales

El conjunto de números naturales (notamos $\mathbb{N}$) se define mediante las siguientes reglas.

1. $1 \in \mathbb{N}$
2. $a \in \mathbb{N} \Rightarrow a + 1 \in \mathbb{N}$

Notemos que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}^+$ ya que $1 > 0$ y $a > 0 \Rightarrow a + 1 > 0$.

### 2. Los números enteros

El conjunto de los números enteros (notamos $\mathbb{Z}$) se define por:

$$\mathbb{Z} = \{x \in \mathbb{R} : x \in \mathbb{N} \lor -x \in \mathbb{N} \lor x = 0\}$$

### 3. Los números racionales

El conjunto de los números racionales (notamos $\mathbb{Q}$) se define por:

$$\mathbb{Q} = \left\{x \in \mathbb{R} : \exists p, q \in \mathbb{Z}\ q \neq 0 \land x = \frac{p}{q}\right\}$$

### 4. Los números irracionales

El conjunto de los números irracionales (notamos $\mathbb{I}$) se define por $\mathbb{I} = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

## ➥ La recta real

**[TODO: Explicar la representación geométrica de los números reales]**

## ➥ Intervalos reales

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ tal que $a < b$

1. $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ (intervalo abierto)
2. $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ (semiabierto a derecha o semicerrado a izquierda)
3. $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ (semiabierto a izquierda o semicerrado a derecha)
4. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ (intervalo cerrado)
5. $(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$
6. $[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$
7. $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
8. $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$

**[TODO: Representaciones gráficas]**

## ➥ Valor absoluto de un número real

Dado $x \in \mathbb{R}$ su valor absoluto es:

$$|x| = \begin{cases} \text{x}, & \text{x} \geq 0 \\ -\text{x}, & \text{x} < 0 \end{cases}$$

### 1. Propiedades

Sean $x, y \in \mathbb{R}$ se cumplen:

1. $|x| \geq 0$
   - $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2. $|x| = |-x|$
3. $-|x| \leq x \leq |x|$
4. Dado $a \in R^+$ entonces:
   - $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$
   - $|x| > a \Leftrightarrow x < -a \lor x > a$
5. Desigualdad triangular: $|x + y| \leq |x| + |y|$
6. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
7. $y \neq 0 \Rightarrow \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

### 2. Interpretación geométrica

Dado $x \in \mathbb{R}$ entonces $|x|$ es la distancia del punto correspondiente a $x$ al punto correspondiente a 0.

[TODO: Completar]

# [4] Axioma del supremo

## ➥ Cotas superiores

Dado el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y el número $b \in \mathbb{R}$ se dice que $b$ es **cota superior** de $A$ si $\forall a \in A\ a \leq b$. Si existe al menos una cota superior para $A$ entonces $A$ esta acotado superiormente.

## ➥ Supremos

Dado el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y el número $b \in \mathbb{R}$ se dice que $b$ es **supremo** de $A$ y se nota $b = \sup(A)$ si:

1. $\forall a \in A\ a \leq b$.
2. $\forall c \in \mathbb{R}\ c < b \to c \text{ no es cota superior de } A$

### 1. Unicidad del supremo

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ y un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ si $a = \sup(A)$ y $b = \sup(A)$ entonces $a = b$.

## ➥ Máximo

Dados $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y $b \in \mathbb{R}$ se dice que $b$ es el máximo de $A$ y se nota $b = \max(A)$ si:

1. $\forall a \in A\ a \leq b$.
2. $b \in A$

### 1. Supremacía del máximo

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y $b \in \mathbb{R}$ entonces $b = \max(A) \Leftrightarrow b \in A \land b = \sup(A)$

## ➥ Axioma del supremo

Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene supremo. Simbólicamente:

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\ [(\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A\ a \leq b) \to \exists b \in \mathbb{R}\ b = \sup(A)]$$

### 1. Existencia de raíces cuadradas

Dado $a \in \mathbb{R}$ entonces $a \geq 0 \Rightarrow \exists! x \in \mathbb{R}\ (x \geq 0 \land x^2 = a)$

### 2. Número de Euler

Notado $e$ se define por:

$$e \in \mathbb{R} \land e = \sup\left(\left\{x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{N}\ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}\right)$$

## ➥ Cotas inferiores, ínfimo y mínimo

Dado el conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y el número $b \in \mathbb{R}$:

1. Se dice que $b$ es **cota inferior** de $A$ si $\forall a \in A\ a \geq b$.
   - Si existe al menos una cota inferior para $A$ entonces $A$ esta acotado inferiormente.
2. Se dice que $b$ es **ínfimo** de $A$ y se nota $b = \inf(A)$ si:
   i. $\forall a \in A\ a \geq b$.
   ii. $\forall c \in \mathbb{R}\ c > b \to c \text{ no es cota inferior de } A$
3. Se dice que $b$ es el mínimo de $A$ y se nota $b = \min(A)$ si:
   i. $\forall a \in A\ a \geq b$.

ii. $b \in A$

† Esa palabra es una mentira

**1. Infimacía[†] del mínimo**

Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que $A \neq \varnothing$ y $b \in \mathbb{R}$ entonces $b = \min(A) \Leftrightarrow b \in A \land b = \inf(A)$

**2. Teorema del ínfimo**

Todo conjunto no vacío de números reales acotado inferiormente tiene supremo. Simbólicamente:

$$\forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R})\ [(\exists b \in \mathbb{R}\ \forall a \in A\ a \geq b) \to \exists b \in \mathbb{R}\ b = \inf(A)]$$