Conjuntos

[1] Nociones primitivas

Un conjunto puede tener un elemento y decimos que el elemento pertenece al conjunto o puede no tenerlo entonces decimos que el elemento **no** pertenece al conjunto. Si al conjunto lo llamamos A (letras mayúsculas) y al elemento x (letras minúsculas), «x pertenece a A» se nota $x \in A$ y «x no pertenece a A» se nota $x \notin A$.

[2] Definición por extensión

Sea A un conjunto, entonces si a, b, c pertenecen a A y son los únicos elementos de A podemos definir al conjunto como $A = \{a, b, c\}$ así queda explícito entre llaves la lista de los elementos de A.

[3] Igualdad de Conjuntos

Se dice que dos conjuntos A y B son iguales si la proposición $\forall x[x \in A \Leftrightarrow x \in B]$ es verdadera y se nota $A = B$.

[4] Definición por comprensión

Sea $p(x)$ una proposición abierta y A un conjunto, el nuevo conjunto B que contiene todos los elementos x de A tal que $p(x)$ es verdadera es por $B = \{x \in A : p(x)\}$.

➡ Se cumplen

- $\{x \in A : p(x)\} = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \land p(x)\}$
- $x \in B \Leftrightarrow x \in A \land p(x)$

[5] Conjuntos universales

Un conjunto universal $\mathcal{U}$ es aquel del cual tomamos los elementos para determinar la veracidad o falsedad de proposiciones abiertas cuantificadas.

[6] El conjunto vacío

➡ Existencia del conjunto vacío.

Existe el conjunto vacío $\varnothing$ y es aquel que no tiene elementos. $\exists \varnothing[\forall x[x \notin \varnothing]]$.

➡ Unicidad del conjunto vacío.

Existe un único conjunto vacío. Sea A un conjunto, si no existe ningún x tal que $x \in A$ se da que $A = \varnothing$.

[7] Contención de conjuntos

Decimos que un conjunto A esta contenido en el conjunto B o que A es subconjunto de B y notamos $A \subseteq B$ si se cumple $\forall x[x \in A \Rightarrow x \in B]$. Si A no esta contenido en B, osea $\neg(A \subseteq B)$ entonces $A \nsubseteq B$.

➡ Contención estricta

Se dice que A esta contenido estrictamente en B y se nota $A \subset B$ si se cumple $A \subseteq B \land A \neq B$.

➥ Algunas propiedades

Para los conjuntos A, B y C siempre se cumple

1. $A \subseteq A$
2. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
3. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
4. $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

➥ Lema

Sea A un conjunto, entonces $\varnothing \subseteq A$ y si A tiene al menos un elemento se cumple $\varnothing \subset A$.

[8] Diagramas de Venn

`[TODO: Alta fiaca]`

[9] Cardinalidad

➥ Cardinalidad de conjuntos finitos

La cardinalidad de un conjunto finito es igual a la cantidad de elementos que contiene. Si A es un conjunto entonces $|A|$ es la cardinalidad de A. Un conjunto finito informalmente es aquel que tiene una cantidad contable de elementos.

➥ Propiedades

- $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$
- $A \subset B \Rightarrow |A| < |B|$
- $|\varnothing| = 0$

➥ Cardinalidad de conjuntos infinitos

`[TODO: No es prioridad]`

[10] Conjunto de partes

Sea A un conjunto, el conjunto de partes de A notado $\mathcal{P}(A)$ es $\mathcal{P}(A) = \{X \in \mathcal{U} : X \subseteq A\}$

➥ Propiedades

- $|A| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n = 2^{|A|}$

[11] Operaciones con conjuntos

Dados los conjuntos A, B y C se definen las siguientes operaciones.

➥ Union

La union de A y B es $A \cup B$ tal que $\forall x[x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \vee x \in B]$

1. Propiedades

1. $A = A \cup A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \subseteq A \cup B$
4. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

➡ Intersección

La union de A y B es $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$

1. Propiedades

1. $A = A \cap A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cap B \subseteq A$
4. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
5. $A \cap (B \cap C)$ = $(A \cap B) \cap C$

➡ Diferencia

El conjunto diferencia de A y B es $A - B = \{x \in A : x \notin B\}$

1. Propiedades

1. $A - A = \varnothing$
2. $A - \varnothing = A$
3. $B - A \subseteq B$
   - $\varnothing - A = \varnothing$
4. $A - B = B - A \Rightarrow A = B$
5. $(A - B) - C \subseteq A - (B - C)$

➡ Complemento

Al complemento de A es $\overline{A} = \mathcal{U} - A = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$

1. Propiedades

Para algún $A \subseteq \mathcal{U}$

1. $A \cap \overline{A} = \varnothing$
2. $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$

➡ Leyes de teoría de conjuntos

Dados A, B y C incluidos en $\mathcal{U}$

1. $\overline{\overline{A}} = A$ (Ley de doble complemento)
2. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
   $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (Leyes de De Morgan)
3. $A \cup B = B \cup A$
   $A \cap B = B \cap A$ (Leyes conmutativas)
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
   $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (Leyes asociativas)
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (Leyes distributivas)
6. $A \cup A = A$
   $A \cap A = A$ (Leyes idempotentes)
7. $A \cup \varnothing = A$
   $A \cap \mathcal{U} = A$ (Leyes de identidad)
8. $A \cup (A \cap B) = A$
   $A \cap (A \cup B) = A$ (Leyes de absorción)