Números Complejos

[1] Los números complejos

Todo número complejo es de la forma $z = a + ib$ donde $a,\ b \in \mathbb{R}$. A i se le llama unidad imaginaria y se define por la relación $i^2 = -1$.

Esa forma de representar un numero complejo se llama forma canónica.

➡ El conjunto $\mathbb{C}$

Al conjunto de todos los números complejos de lo define $\mathbb{C} = \{a + ib : a,\ b \in \mathbb{R}\}$.

➡ Componentes

Para todo número complejo $z = a + ib$ se definen

1. Parte real de z: $\mathrm{Re}(z) = a$
2. Parte imaginaria de z: $\mathrm{Im}(z) = b$

[2] Las operaciones de los números complejos

Sean $z_1 = a_1 + ib_1$ y $z_2 = a_2 + ib_2$ dos números complejos se definen.

➡ Igualdad

Antes de definir las operaciones debemos definir la igualdad entre números complejos. Se dice que z_1 es igual a z_2 si se cumple tienen igual parte real e imaginaria. Simbólicamente:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 + ib_1 = a_2 + ib_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$$

➡ Suma

La suma de dos números complejos es $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$

➡ Producto

El producto de dos números complejos es $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_1) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

[3] Teoremas de cuerpo

Sean z, w y u números complejos, entonces valen:

1. Clausura de la suma y el producto: $(z + w) \in \mathbb{C}$ y $(zw) \in \mathbb{C}$
2. Ley conmutativa de la suma y el producto: $z + w = w + z$ y $zw = wz$
3. Ley asociativa de la suma y el producto: $(z + w) + u = z + (w + u)$ y $(zw)u = z(wu)$
4. Ley distributiva del producto respecto a la suma: $z(w + u) = zw + zu$
5. Existencia del elemento neutro de la suma: $\exists 0 \in \mathbb{C}\ 0 + z = z$
6. Existencia del elemento identidad del producto: $\exists 1 \in \mathbb{C}\ 1z = z$
7. Existencia del elemento opuesto: $\forall z \in \mathbb{C}\ \exists -z \in \mathbb{C} z + (-z) = 0$
8. Existencia del elemento inverso: $\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}\ \exists z^{-1} \in \mathbb{C}\ z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2} \wedge z^{-1}z = 1$

[4] Más operaciones

➡ Resta

La resta de dos números complejos z_1 y z_2 es $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

➡ División

La resta de dos números complejos z_1 y $z_2 \neq 0$ es $\frac{z_1}{z_2} = z_1 z_2^{-1}$

➡ Potencia de exponente entero

La potencia de exponente entero para $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$ es

$$z^n = \begin{cases} 1, & \text{n} = 0 \\ \text{z}, & \text{n} = 1 \\ z^{n-1}\text{z}, & \text{n} \geq 2 \\ \left(z^{-1}\right)^{-n}, & \text{n} < 0 \end{cases}$$

1. Propiedades

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ y $n, k \in \mathbb{Z}$ entonces:

1. $z^k z^n = z^{k+n}$
2. $\left(z^k\right)^n = z^{kn}$
3. $(zw)^n = z^k w^n$
4. $w \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{z}{w}\right)^n = \frac{z^n}{w^n}$

2. Potencias de la unidad imaginaria

Se da que para todo $n \in \mathbb{N}$ el resultado de i^n es fácilmente predecible y es:

$$\begin{cases} 1, & \text{n} = 0 \\ \text{i}, & \text{n} = 1 \\ -1, & \text{n} = 2 \\ -\text{i}, & \text{n} = 3 \\ i^r, & \text{n} \geq 4 \text{ donde r es el resto de } \frac{n}{4} \end{cases}$$

➡ Raíz cuadrada de un numero complejo

Sean $z, w \in \mathbb{C}$ decimos que z es raíz cuadrada de w si $z^2 = w$.

1. Raíz cuadrada de un numero real negativo

Sea $z \in \mathbb{C}$ raíz cuadrada de $a \in \mathbb{R}^-$ entonces $z = \pm i\sqrt{|a|}$

[5] Forma de par ordenado de un número complejo

Los números complejos son *identificables* con los pares de números reales. Esto quiere decir que... **[TODO: no se que significa]**

➡ Pares ordenados

Los pares ordenados de números reales son del la forma $z = (a, b)$ donde a y b son números reales.

1. Igualdad

Los pares ordenados (a_1, b_1) y (a_2, b_2) son iguales si y solo si $a_1 = a_2 \wedge b_1 = b_2$

2. Suma

La suma de dos pares ordenados se define por $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$

3. Producto

El producto de dos pares ordenados se define por $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$

[TODO: comlpetar]

➡ Unidad imaginaria

La unidad imaginaria de define por $i = (0,1)$ que verifica:

$$i^2 = ii = (0,1)(0,1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1) = (-1,0) = -1$$

[6] Representación geométrica de los números complejos en el plano complejo

[TODO: acortar título]

[TODO: Los malditos gráficos]

➡ Conjugado de un número complejo

Dado $z = a + ib \in \mathbb{C}$ el conjugado de z es $\overline{z} = a - ib$

1. Propiedades

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, entonces:

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
2. $\overline{zw} = \overline{zw}$
3. $z = \overline{z} \Rightarrow z \in \mathbb{R}$
4. $z * \overline{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2$
5. $z^{-1} = \frac{\overline{z}}{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$

[7] Módulo y argumento

Dado $z \in \mathbb{C}$

1. Su módulo $|z|$ es la longitud del segmento $\overline{\mathrm{OP}}$ donde P es el punto asociado a z.
2. Su argumento $\mathrm{Arg}(z)$ es el conjunto de todos los ángulos que forma el vector $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ con el semieje positivo de las abscisas. (El 0 no tiene argumento)
3. Su argumento principal es $\arg(z) \in \mathrm{Arg}(z)$ tal que $-\pi < \arg(z) \leq \pi$
4. $\mathrm{Arg}(z) = \{\varphi \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z}\ \varphi = \arg(z) + 2k\pi\}$
5. $|z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = z\overline{z}$
6. $\cos(\arg(z)) = \frac{a}{|z|}$, $\mathrm{sen}(\arg(z)) = \frac{b}{|z|}$ y $\tan(\arg(z)) = \frac{b}{a}$
7. Si $z \neq 0$ entonces:

$$\arg(z) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & \mathrm{a} = 0 \land \mathrm{b} > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \mathrm{a} = 0 \land \mathrm{b} < 0 \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right), & \mathrm{a} \neq 0 \land (z \in \mathrm{I}_c \lor z \in \mathrm{IV}_c) \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) + \pi, & \mathrm{a} \neq 0 \land \mathrm{z} \in \mathrm{II}_c \\ \arctan\left(\frac{b}{a}\right) - \pi, & \mathrm{a} \neq 0 \land \mathrm{z} \in \mathrm{III}_c \end{cases}$$

[8] Forma trigonométrica de un número complejo

Sean $z = a + ib$, $\rho = |z|$ y $\varphi \in \mathrm{Arg}(z)$ se define la forma trigonométrica de z como

$$z = \rho(\cos\varphi + i \text{ sen } \varphi)$$

Despejando queda: $a = \rho\cos\varphi \ \land \ b = \rho \text{ sen } \varphi$

1. Propiedades

Sean $z, w \in \mathbb{C}$

1. $|zw| = |z||w|$
2. $\arg(z) + \arg(w) \in \operatorname{Arg}(zw)$

[9] Forma polar de un número complejo

Sea $z = a + ib \in \mathbb{C}$, $\rho = |z|$ y $\varphi \in \operatorname{Arg}(z)$ entonces la forma polar de z es ρ_φ.

Así queda que si $z = \rho_\varphi$ y $w = \delta_\theta$ se cumple $z = w \Leftrightarrow \rho = \delta \wedge \exists k \in \mathbb{Z}\ \varphi = \theta + 2k\pi$

1. Propiedades

Sean $z, w \in \mathbb{C}$, $z = \rho_\varphi$ y $w = \delta_\theta$

1. $zw = (\rho\delta)_{\varphi+\theta}$
2. $w \neq 0 \Rightarrow \frac{z}{w} = \left(\frac{\rho}{\delta}\right)_{\varphi-\theta}$
3. $z^n = (\rho^n)_{n\varphi}$

[10] Raíces n-ésimas de un numero complejo

➥ Formula de De Moivre

Sea $z = \rho_\varphi \in \mathbb{C}$ entonces si $w = \delta_\theta \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima de z por la formula de De Moivre:

$$\delta = \sqrt[n]{\rho}$$

$$\exists k \in \mathbb{N}\ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

[11] Apéndice

➥ La resolvente

Cuando se quiere determinar las raíces de un polinomio de segundo grado con coeficientes complejos notamos que se evita el uso del símbolo $\pm$ quedando $z_{1,2} = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2}$ ya que todo complejo tiene dos raíces cuadradas.