# Funciones

## [1] Definición de función

Sea $f$ una relación de $A$ a $B$, se dice que $f$ es función si se cumple:

$$a \in A \Rightarrow \exists! b \in B \ (a, b) \in f$$

### ➡ Dominio y codominio

$A$ es el dominio de $f$ y se nota $\operatorname{Dom}(f)$. $B$ es el codominio de $f$ y se nota $\operatorname{Codom}(f)$.

### ➡ Notación

Si $f$ es una función con $\operatorname{Dom}(f) = A$ y $\operatorname{Codom}(f) = B$ entonces se puede declarar usando la notación $f : A \to B$.

Como el conjunto imagen de cualquier elemento $a \in A$ es un conjunto con un solo elemento empleamos la siguiente notación: $f(a) = b$ en vez de $f(a) = \{b\}$.

## [2] Función inyectiva

Una función $f : A \to B$ es inyectiva si:

$$\forall a_1 \in A \ \forall a_2 \in A \ f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2$$

## [3] Sobre el conjunto imagen de un subconjunto

Sea $f : A \to B, A_1 \subseteq A$ y $A_2 \subseteq A$ entonces:

1. $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$
2. $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$
3. $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2) \Leftrightarrow f$ es inyectiva

## [4] Restricciones y extensiones

Sea $f : A \to B$ y $A_1 \subseteq A \subseteq A_2$

1. La restricción de $f$ a $A_1$ es $f|_{A_1} : A_1 \to B$ tal que $a \in A_1 \Rightarrow f|_{A_1}(a) = f(a)$
2. La expansión de $f$ a $A_2$ es $g : A_2 \to B$ tal que $a \in A \Rightarrow g(a) = f(x)$

## [5] Sobre el conjunto pre-imagen de un subconjunto

Sea $f : A \to B, B_1 \subseteq B$ y $B_2 \subseteq B$

1. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$
2. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$
3. $f^{-1}\left(\overline{B_1}\right) = \overline{f^{-1}(B_1)}$

## [6] Función sobreyectiva

Una función $f : A \to B$ es sobreyectiva si:

$$\forall b \in B \ \exists a \in A \ f(a) = b$$

## [7] Función biyectiva

Una función $f : A \to B$ es biyectiva si es inyectiva y sobreyectiva simultáneamente.

## [8] Composición de funciones

Sean $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D, a \in A$ y $c \in C$, entonces la composición de $A$ con $B$ es $g \circ f$ tal que:

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) : f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}$$
$$\forall x \in \mathrm{Dom}(g \circ f)\ (g \circ f)(x) = g(f(x))$$

Si $\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Dom}(g) = \varnothing$ la composición no es posible.

### ➡ Propiedades

1. La composición de funciones no es conmutativa.
2. La composición de funciones es asociativa: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$
3. Si $f$ y $g$ son inyectivas entonce $g \circ f$ es inyectiva.
4. Si $f$ y $g$ son sobreyectivas entonce $g \circ f$ es sobreyectiva.

## [9] Función inversible

**[TODO: Aclarar que significa $\mathrm{id}_A$ y $\mathrm{id}_B$ (son alguna función identidad)]**

Una función $f : A \to B$ es inversible si existe $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A \land f \circ g = \mathrm{id}_B$

### ➡ Propiedades

1. Si una función $f$ es inversible la inversa es única y se nota $f^{-1}$
2. Toda función es inversible si y solo sí es biyectiva.
3. Dadas las funciones $f$ y $g$ inversibles: $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$
4. Dada una función inversible $f : A \to B$ donde las cantidades de elementos de $A$ y $B$ son finitas e iguales, entonces se cumple: $f$ inyectiva $\Leftrightarrow$ $f$ sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $f$ biyectiva.

# Operaciones

## [10] Definición de operación.

Cualquier función de la forma $f : A \times A \to B$ es una operación binaria en $A$. Si además $\mathrm{Im}(f) \subseteq A$ entonces es cerrada en $A$. Notamos $f(a, b)$ como $a \otimes b$

Cualquier función de la forma $g : A \to A$ es una operación monaria a en $A$.

## [11] Operaciones conmutativas

Dada $f : A \times A \to B$ es conmutativa si y solo si:

$$x \otimes y = f(x, y) = f(y, x) = y \otimes x$$

## [12] Operaciones asociativas

Dada $f : A \times A \to B$ cerrada en $A$ es asociativa si y solo si:

$$(x \otimes y) \otimes z = f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)) = x \otimes (y \otimes z)$$

## [13] Elemento neutro

Dada $f : A \times A \to A$ tiene elemento neutro si $\exists e \in A\ e \otimes a = a \otimes e = a$

### ➡ Unicidad del neutro

Si una operación tiene neutro este es único.

## [14] Elemento inverso

Dada $f : A \times A \to A$ con $e$ elemento neutro de $f$ entonces $f$ tiene inversos si se cumple:

$$\forall a \in A \ \exists a' \in A \ a \otimes a' = a' \otimes a = e$$

### ➡ Unicidad de inversos

Si $f : A \times A \to A$ es una operación asociativa y conmutativa con elemento neutro $e \in A$ que posee inversos. Entonces cada elemento posee un único inverso.