Conjuntos

Hirch, Juan Manuel

Contents

Nociones primitivas

Un conjunto puede tener un elemento y decimos que el elemento pertenece al conjunto o puede no tenerlo entonces decimos que el elemento **no** pertenece al conjunto. Si al conjunto lo llamamos A (letras mayúsculas) y al elemento x (letras minúsculas), "x pertenece a A" se nota $x \in A$ y "x no pertenece a A" se nota $x \notin A$.

Definición por extensión

Sea A un conjunto, entonces si a, b, c pertenecen a A y son los únicos elementos de A podemos definir al conjunto como $A = \{a, b, c\}$ así queda explícito entre llaves la lista de los elementos de A.

Definición por comprensión

Sea $p(x)$ una proposición abierta y A un conjunto, el nuevo conjunto B que contiene todos los elementos x de A tal que $p(x)$ es verdadera es por $B = \{x \in A : p(x)\}$.

ACLARACIÓN:

Se cumplen:
- $\{x \in A : p(x)\} = \{x \in \mathcal{U} : x \in A \wedge p(x)\}$
- $x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge p(x)$

Conjunto universal

Un conjunto universal $\mathcal{U}$ es aquel del cual tomamos los elementos para determinar la veracidad o falsedad de proposiciones abiertas cuantificadas.

El conjunto vacío

Existencia del conjunto vacío.

Existe el conjunto vacío $\varnothing$ y es aquel que no tiene elementos. $\exists \varnothing [\forall x [x \notin \varnothing]]$.

Unicidad del conjunto vacío.

Existe un único conjunto vacío. Sea A un conjunto, si no existe ningún x tal que $x \in A$ se da que $A = \varnothing$.

Lema

Sea A un conjunto, entonces $\varnothing \subseteq A$ y si A tiene al menos un elemento se cumple $\varnothing \subset A$.

Comparación de conjuntos

Igualdad de conjuntos

Se dice que dos conjuntos A y B son iguales y se nota $A = B$ si $x \in A \Leftrightarrow x \in B$.

Contención de conjuntos

Decimos que un conjunto A esta contenido en el conjunto B o que A es subconjunto de B y notamos $A \subseteq B$ si se cumple $x \in A \Rightarrow x \in B$. Si A no esta contenido en B, osea $\neg(A \subseteq B)$ entonces $A \nsubseteq B$.

Contención estricta

Se dice que A esta contenido estrictamente en B y se nota $A \subset B$ si se cumple $A \subseteq B \wedge A \neq B$.

PROPIEDADES:
Para los conjuntos A, B y C siempre se cumple
1. $A \subseteq A$
2. $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
3. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
4. $A \subset B \wedge B \subset C \Rightarrow A \subset C$

Diagramas de Venn

[TODO: Alta fiaca]

Cardinalidad

Cardinalidad de conjuntos finitos

La cardinalidad de un conjunto finito es igual a la cantidad de elementos que contiene. Si A es un conjunto entonces $|A|$ es la cardinalidad de A. Un conjunto finito informalmente es aquel que tiene una cantidad contable de elementos.

PROPIEDADES:
- $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$
- $A \subset B \Rightarrow |A| < |B|$
- $|\varnothing| = 0$

Cardinalidad de conjuntos infinitos

[TODO: No es prioridad]

Conjunto de partes

Sea A un conjunto, el conjunto de partes de A es $\mathcal{P}(A) = \{X \in \mathcal{U} : X \subseteq A\}$

PROPIEDADES:
- $|A| = n \Rightarrow |\mathcal{P}(A)| = 2^n = 2^{|A|}$

Operaciones con conjuntos

Dados los conjuntos A, B y C se definen las siguientes operaciones.

Union

La union de A y B es $A \cup B$ tal que $x \in A \cup B \Rightarrow x \in A \lor x \in B$

PROPIEDADES:
1. $A = A \cup A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \subseteq A \cup B$
4. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
5. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Intersección

La union de A y B es $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$

PROPIEDADES:

1. $A = A \cap A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $A \cap B \subseteq A$
4. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
5. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

Diferencia

El conjunto diferencia de A y B es $A - B = \{x \in A : x \notin B\}$

PROPIEDADES:

1. $A - A = \varnothing$
2. $A - \varnothing = A$
3. $B - A \subseteq B$
    - $\varnothing - A = \varnothing$
4. $A - B = B - A \Rightarrow A = B$
5. $(A - B) - C \subseteq A - (B - C)$

Complemento

Al complemento de A es $\overline{A} = \mathcal{U} - A = \{x \in \mathcal{U} : x \notin A\}$

PROPIEDADES:

Para algún $A \subseteq \mathcal{U}$

1. $A \cap \overline{A} = \varnothing$
2. $A \cup \overline{A} = \mathcal{U}$

Leyes de teoría de conjuntos

Dados A, B y C incluidos en $\mathcal{U}$:

- $\overline{\overline{A}} = A$ **Ley de doble negación**

- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ **Leyes de De Morgan**

- $A \cup B = B \cup A$
  $A \cap B = B \cap A$ **Leyes Conmutativas**

- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ **Leyes Asociativas**

- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ **Leyes Distributivas**

- $A \cup A = A$
  $A \cap A = A$ **Leyes Idempotentes**

- $A \cup \varnothing = A$
  $A \cap \mathcal{U} = A$ **Leyes de Identidad**

- $A \cup (A \cap B) = A$
  $A \cap (A \cup B) = A$ **Leyes de Absorción**