Vectores

[1] Definiciones

➡ Magnitudes escalares

Todas las cantidades que puedan caracterizarse mediante un único número real son magnitudes escalares. Por ejemplo la masa de un objeto, o la edad de una persona.

➡ Magnitudes vectoriales

Todas las cantidades que para su medición requieran ademas de magnitud, dirección y sentido son magnitudes vectoriales. Ejemplos son la velocidad y la fuerza de un objeto.

➡ Vector

Un vector es un par ordenado de puntos. Sean A y B dos puntos tal que el vector $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (A, B)$ es el vector que va de A hacia B entonces A es el origen de $\vec{u}$ y B es el extremo de $\vec{u}$.

➡ Representación gráfica de un vector

`[TODO: Y si]`

➡ Vector nulo

Un vector $\overrightarrow{AB}$ es nulo si el origen y el extremo coinciden ($A = B$) y se simboliza $\vec{0}$.

➡ Dirección, sentido y módulo

Todo vector no nulo tiene:

- Una **dirección** dada por la recta que contiene el origen y el extremo o una paralela a la misma.
- Un **sentido**, todas las direcciones tienen dos sentidos donde el sentido de $\overrightarrow{AB}$ es opuesto al sentido de $\overrightarrow{BA}$.
- Un **módulo** igual a la longitud del segmento $\overline{AB}$. Se simboliza $|\vec{u}|$ o $\left|\overrightarrow{AB}\right|$

El vector nulo no tiene dirección ni sentido pero sí tiene módulo igual a 0 y el módulo de cualquier vector no nulo es mayor a 0.

➡ Igualdad entre vectores

Dos vectores no nulos se dicen iguales si y solo si tienen igual magnitud dirección y módulo. La igualdad caracteriza a los vectores libres, osea que dos vectores con igual origen y extremo son iguales pero también pueden serlo vectores con diferente origen y extremo. El vector nulo es igual solo a si mismo.

➡ Paralelismo entre vectores

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ no nulos se dicen paralelos si tienen igual dirección y se nota $\vec{u} \parallel \vec{v}$.

➡ Vector opuesto

Sea $\vec{u}$ un vector no nulo, entonces $-\vec{u}$ es el vector opuesto a $\vec{u}$ que tiene igual módulo, dirección y sentido opuesto. Nótese que $-\vec{0} = \vec{0}$

[2] Algunas operaciones de vectores

➡ Suma de vectores

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores, entonces su suma es $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$ donde $\vec{w}$ tiene el mismo origen que $\vec{u}$ y el mismo extremo que $\vec{v}$.

1. Propiedades

Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

1. Propiedad conmutativa: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. Propiedad asociativa: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. Existencia del elemento neutro: $\exists\vec{0}\left[\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}\right]$
4. Existencia del elemento opuesto: $\forall\vec{u} \neq \vec{0}\ \exists(-\vec{u})\left[\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}\right]$

➡ Diferencia de vectores

Sean $\vec{u}$ y $\vec{v}$ dos vectores, entonces su diferencia es $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.

➡ Producto por un escalar

Sea $\vec{u}$ un vector y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces el producto de $\vec{u}$ por α es $\alpha\vec{u}$ donde:

1. $|\alpha\vec{v}| = |\alpha||\vec{v}|$
2. $\alpha \neq 0 \land \vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \alpha\vec{u} \parallel \vec{u}$
3. $\alpha \neq 0 \land \vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\ \vec{u} \text{ tiene igual sentido a } \vec{u}, & \alpha > 0 \\ \alpha\ \vec{u} \text{ tiene distinto sentido a } \vec{u}, & \alpha < 0 \end{cases}.$

1. Propiedades

Sean $\vec{u}$ y $\vec{u}$ vectores y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ escalares, entonces:

1. $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$
2. $(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$
3. $\alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$
4. $1\vec{u} = \vec{u} \land -1\vec{u} = -\vec{u}$
5. $\alpha\vec{u} = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \lor \vec{u} = \vec{0}$
6. $\vec{u} \parallel \vec{u} \Leftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{R}\ \vec{u} = \alpha\vec{v}$

➡ Angulo entre vectores

`[TODO: Encontrar una definición no circular]`

➡ Versores

Un versor es un vector de módulo 1.

1. Versor asociado a un vector

Dado un vector $\vec{u}$ su versor asociado $\vec{u}_0$ es un versor con igual dirección y sentido que $\vec{u}$.

- $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u}_0 = \frac{1}{|\vec{u}|}\vec{u}$

➡ Proyección de un vector sobre otro

1. Proyección escalar

La proyección escalar de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es $\vec{v}_{\vec{u}} = |\vec{v}| \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$.

2. Vector proyección

El vector proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es $\text{proy}_{\vec{v}}\,\vec{u}$.

1. $\vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \vee \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \text{proy}_{\vec{u}}\,\vec{v} = \vec{0}$
2. $\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \wedge \neg(\vec{u} \perp \vec{v}) \Rightarrow \text{proy}_{\vec{u}}\,\vec{v} = \vec{v}_{\vec{u}}\vec{u}_0$

➡ Producto escalar

El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\vec{u} \times \vec{v}$.

1. $\vec{u} = \vec{0} \vee \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$
2. $\vec{u} \neq \vec{0} \wedge \vec{v} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \times \vec{v} = |\vec{u}||\vec{v}| \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}\right)$

1. Propiedades

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ vectores.

1. $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{v} \times \vec{u}$
2. $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
3. $\alpha(\vec{u} \times \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\alpha\vec{v})$
4. $\vec{u} \times \vec{u} \geq 0$
5. $\vec{u} \times \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

[3] Bases y componentes

➡ Conjuntos de vectores:

- $\mathbb{V}_1$: Vectores en la recta.
- $\mathbb{V}_2$: Vectores en el plano.
- $\mathbb{V}_3$: Vectores en el espacio.

[TODO: Explicar bases y componentes y combinaciones lineales bien]

[4] Combinaciones lineales

[TODO: Explicar bases y componentes y combinaciones lineales bien]

[5] Versores fundamentales del plano

[TODO: Requiere ^^]

[6] Versores fundamentales del espacio

[TODO: Requiere ^^]

[7] Operaciones y propiedades por componentes

1. $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_1, u_3 + v_3)$
2. $\vec{u} \times \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$
3. $\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \exists\alpha \in \mathbb{R}\ (v_1 = \alpha u_1 \wedge v_2 = \alpha u_2 \wedge v_3 = \alpha u_3)$
4. $|\vec{u}|^2 = \vec{u} \times \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2$
5. $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

[8] Cosenos directores

Para un vector $\vec{u} \neq \vec{0}$ los cosenos directores son las componentes del versor asociado $\vec{u}_0$.

- $\cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{\imath}}\right) = \frac{u_1}{|\vec{u}|} \wedge \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{\jmath}}\right) = \frac{u_2}{|\vec{u}|} \wedge \cos\left(\widehat{\vec{u}, \vec{k}}\right) = \frac{u_3}{|\vec{u}|}$

[9] Componentes de un vector entre dos puntos

Dados dos vectores posición $\overrightarrow{OP_1} = (x_1, y_1, z_1)$ y $\overrightarrow{OP_2} = (x_2, y_2, z_2)$.

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

[10] Coordenadas del punto medio entre dos puntos

Sea $M(x, y, z)$ punto medio entre los dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ se dan.

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_1M} + \overrightarrow{MP_2}$$

$$\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{MP_2}$$

Entonces $2\overrightarrow{P_1M} = \overrightarrow{P_1P_2}$ o por componentes:

$$\begin{cases} 2(x - x_1) = x_2 - x_1 \\ 2(y - y_1) = y_2 - y_1 \\ 2(z - z_1) = z_2 - z_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x_2 - x_1}{2} + x_1 \\ y = \frac{y_2 - y_1}{2} + y_1 \\ z = \frac{z_2 - z_1}{2} + z_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{x_2 + x_1}{2} \\ y = \frac{y_2 + y_1}{2} \\ z = \frac{z_2 + z_1}{2} \end{cases}$$

[11] Producto vectorial

Para los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ el producto vectorial es $\vec{u} \wedge \vec{v}$ y se define por:

1. $\vec{u} = 0 \vee \vec{v} = 0 \vee \vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
2. $\vec{u} \neq 0 \wedge \vec{v} \neq 0 \wedge \neg(\vec{u} \parallel \vec{v}) \Rightarrow \begin{cases} \text{Dirección dada por: } (\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}) \wedge (\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}) \\ \text{Sentido dado por: regla de la mano derecha} \\ \text{Módulo dado por: } |\vec{u}||\vec{v}|\text{sen}(\widehat{u, v}) \end{cases}$

[TODO: Mejorar la definición, está fea]

➡ Propiedades

Dados los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ se cumplen.

1. $\forall \vec{u} \left[\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0} \right]$
2. $\vec{\imath} \wedge \vec{\jmath} = \vec{k}$
3. $\vec{\jmath} \wedge \vec{k} = \vec{\imath}$
4. $\vec{k} \wedge \vec{\imath} = \vec{\jmath}$
5. Antisimétrica: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$
6. Distributivas: $\begin{cases} \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w} \\ (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w} \end{cases}$
7. $\alpha(\vec{u} \wedge \vec{v}) = (\alpha\vec{u}) \wedge \vec{v} = \vec{u} \wedge (\alpha\vec{v})$

➡ Por componentes

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2)\vec{\imath} + (u_3v_1 - u_1v_3)\vec{\jmath} + (u_1v_2 - u_2v_1)\vec{k}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \left(\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right)$$

➡ Interpretación geométrica

[TODO:]

➡ Producto mixto

Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{V}_3$ el producto mixto entre ellos es $\vec{u} \wedge \vec{v} \times \vec{w}$

1. Interpretación geométrica

[TODO:]