Polinomios

[1] Polinomio a coeficientes complejos

Sea $n \in \mathbb{N}_0 \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0 \cap [0, n]\ a_i \in \mathbb{C} \wedge a_n \neq 0$ entonces Una función polinómica o polinomio a coeficientes complejos es una función de la forma:

$$\begin{aligned} p\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \end{aligned}$$

- a_k es el k-ésimo coeficiente.
- $a_k x^k$ es el k-ésimo término o monomio.
- $p(x) \neq 0 \Rightarrow n$ es el grado de polinomio y se nota $\mathrm{gr}(p) = n$.
- a_0 es el coeficiente (o termino) independiente.
- a_n es el coeficiente principal.
- $\mathbb{C}[x]$ es el conjunto de todos los polinomios a coeficientes complejos en la variable x.
- $p(x) = 0 \Rightarrow p = \overline{0}, \overline{0}$ es el polinomio nulo.
- $p(x) = 1 \Rightarrow p = \overline{1}$
- $\mathrm{gr}(p) = 0 \Rightarrow p$ es una función constante no nula.

[2] Igualdad de polinomios

Dados $p, q \in \mathbb{C}[x]$ de ley $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y $q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ se dice que son iguales si se cumple:

$$\mathrm{gr}(p) = \mathrm{gr}(q) \wedge \forall i \in \mathbb{N}_0 \cap [0, n]\ a_i = b_i$$

[3] Operaciones de polinomios

Sean $p, q \in \mathbb{C}[x]$ y $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i, q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$ s

➡ Suma

La suma de p y q es el polinomio suma definido por:

$$\begin{aligned} (p+q)\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto (p+q)(x) = p(x) + q(x) \end{aligned}$$

➡ Opuesto

El opuesto de p de define por:

$$\begin{aligned} -p\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto (-p)(x) = -p(x) \end{aligned}$$

➡ Diferencia

La diferencia de p y q es el polinomio definido por:

$$\begin{aligned} (p-q)\colon \mathbb{C} &\to \mathbb{C} \\ x &\mapsto (p-q)(x) = (p + (-q))(x) = p(x) - q(x) \end{aligned}$$

➡ Multiplicación

La multiplicación de p y q es el polinomio definido por:

$$(p \cdot q)\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$x \mapsto (p \cdot q)(x) = p(x)q(x) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j x^j\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j} = \sum_{k=0}^{n+m} c_k x^k$$

➡ Inverso

Se dice que q es el inverso de p si $p \cdot q = \overline{1}$. Esto se da si:

$$p(x)q(x) = 1 \Rightarrow q(x) = p(x)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i x^i\right)^{-1}$$

Notemos que si $n = 0$ queda que $q(x) = a_0^{-1} = \frac{1}{a_0}$, por lo tanto:

$$\forall p \in \mathbb{C}[x] \quad \mathrm{gr}(p) = 0 \Rightarrow p \text{ tiene inverso con grado } 0$$

➡ Propiedades

1. $p \neq \overline{0} \land q \neq \overline{0} \Rightarrow \mathrm{gr}(p+q) \leq \max\{\mathrm{gr}(p) + \mathrm{gr}(q)\}$
2. $p \neq \overline{0} \land q \neq \overline{0} \Rightarrow \mathrm{gr}(p \cdot q) = \mathrm{gr}(p) + \mathrm{gr}(q)$
3. La suma es cerrada, conmutativa, asociativa, tiene elemento neutro $\overline{0}$ y elementos opuestos.
4. La multiplicación es cerrada, conmutativa, asociativa y tiene elemento neutro $\overline{1}$.
5. La multiplicación es distributiva respecto a la suma.

➡ Algoritmo de división

Sean $p, q \in \mathbb{C}[x] \land q \neq \overline{0} \Rightarrow \exists! c, r \in \mathbb{C}[x] \quad p = c \cdot q + r \land \left(r = \overline{0} \lor 0 \leq \mathrm{gr}(r) \leq \mathrm{gr}(q)\right)$

1. Regla de Ruffini

$$q(x) = x - \alpha \land \alpha \in \mathbb{C} \Rightarrow \begin{cases} p = c \cdot q + r \\ r = a_0 + \alpha b_0 \\ c(x) = \sum_{i=0}^{n-1} b_i x^i \\ b_{n-1} = a_n \\ \forall i \in \mathbb{N}_0 \cap [0, n-2] b_i = a_{i+1} + \alpha b_{i+1} \end{cases}$$

El método gráfico es el siguiente: **[TODO: Explicación]**

$$\begin{array}{c|cccccc} & a_n & a_{n-1} & \dots & a_2 & a_1 & a_0 \\ \alpha & & \alpha b_{n-1} & \dots & \alpha b_2 & \alpha b_1 & \alpha b_0 \\ \hline & a_n & a_{n-1} + \alpha b_{n-1} & \dots & a_2 + \alpha b_2 & a_1 + \alpha b_1 & a_0 + \alpha b_0 \end{array}$$

2. Teorema del resto

Si $\mathrm{gr}(p) \geq 1 \land a \in \mathbb{C} \Rightarrow p(z)$ es igual al resto de la division de p por $x - z$. Esto es porque por el algoritmo de la división $p(x) = (x - z)c(x) + r(x) \Rightarrow p(z) = (z - z)c(x) + r(x) = r(x)$

3. Raíces de polinomios

Sea $z \in \mathbb{C}$ se dice que z es raíz de p si y solo sí $p(z) = 0$.

Si z es raíz de p si y solo si $x - z$ divide a p.

[4] Factorización de polinomios a coeficientes enteros

➥ Teorema fundamental del álgebra

$$\forall p \in \mathbb{C}[x] \quad \mathrm{gr}(p) \geq 1 \to \exists z \in \mathbb{C} \; p(z) = 0$$

Deducimos entonces que si $\mathrm{gr}(p) \geq 1$ podemos expresar a $p(x)$ como $(x - \alpha_1)c_1(x)$ donde c_1 tiene grado $\mathrm{gr}(p) - 1$. Si $\mathrm{gr}(c_1) \geq 1$ entones se puede expresar a $c_1(x)$ como $(x - \alpha_2)c_2(x)$ y así... Al final nos queda $c_n \in \mathbb{C} \wedge n = \mathrm{gr}(p) \wedge p(x) = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)c_n$

➥ Descomposición factorial

Sea $p \in \mathbb{C}[x], r$ la cantidad de raíces de $p, n = \mathrm{gr}(p)$ y $\forall i \in \mathbb{N} \cap [1, r] \; \alpha_i \in \mathbb{C} \wedge l_i \in \mathbb{N}$ entonces se llama descomposición factorial del polinomio p a la expresión.

$$p(x) = a_n \prod_{i=1}^{r} (x - \alpha_i)^{l_i}$$

- $\displaystyle\sum_{i=1}^{r} l_i = n$
- $\mathrm{gr}(p) = n \Rightarrow p$ tiene a lo sumo n raíces.
- l_i es la multiplicidad de a_i

➥ Teorema de Gauss

Sea $p \in \mathbb{C}[x]$ tal que $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ y $a_i \in \mathbb{Z}$ entonces:

$$\frac{r}{s} \in \mathbb{Q} \wedge p\left(\frac{r}{s}\right) = 0 \Rightarrow r | a_0 \wedge s | a_n$$

[TODO: Agregar un ejemplo del método de búsqueda y verificación de raíces]

➥ Raíces complejas de un polinomio a coeficientes reales

Si un polinomio $p \in \mathbb{C}[x]$ tiene una raíz compleja $\alpha \in \mathbb{C}$ entonces también tiene por raíz al conjugado de $\alpha = \overline{\alpha}$

$$p(\overline{\alpha}) = \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{\alpha}^i = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i}\,\overline{\alpha^i} = \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i \alpha^i} = \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i \alpha^i} = \overline{p(\alpha)} = \overline{0} = 0$$