1 Technische Lemmas und Definitionen

Wir beginnen damit, ein paar wichtige Begriffe und Notationen einzuführen.

Definition 1.1 *Definition Laplacematrix L_n*

die bleibt hier, da ist sie leicht zu finden

Definition 1.0.1 *Definition Multigraph*

die bleibt hier, im Kapitel "Tuttes..." stört das nur

Im Verlauf dieser Arbeit werden wir immer wieder die Anzahl der Spannbäume eines Graphen ausrechnen, daher definieren wir $k(G)$ als die Anzahl der Spannbäume eines beliebigen Graphen G.

1.1 W_n (Räder)

Der vorletzte Stop auf unserer Reise sind die sogenannten Wheel-Graphen. Hier wird zu einem zyklischen Graphen C_n mit Knoten $\{v_1,..,v_n\}$, $n \geq 3$ ein weiterer Knoten z hinzugefügt, der mit allen anderen Knoten benachbart ist, sodass der Wheel-Graph W_n entsteht (Achtung: W_n hat $n+1$ Knoten).

Satz 1.2 *Für die Anzahl der Spannbäume in einem Rad gilt:*

$$k(W_n) = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - 2 \tag{1}$$

Beweis:
Um die Formel für die Berechnung der Anzahl der Spannbäume eines solchen Graphen herzuleiten, lassen wir von [?] inspirieren. Wir beobachten, dass wir den Fan-Graphen F_n bekommen, wenn wir die Kante v_1v_n aus W_n entfernen. Die Anzahl der Spannbäume von F_n kennen wir bereits von oben. Um die Anzahl der Spannbäume von Rädern zu berechnen, zeigen wir zuerst die rekursive Beziehung

$$k(W_{n+1}) = k(F_{n+1}) + k(F_n) + k(W_n) \tag{2}$$

Um das zu tun, werden die Spannbäume von W_{n+1} in drei verschiedene Klassen einteilen, wie man auch in den Abbildungen unten sehen kann:
1) Alle Spannbäume, die die Kante $v_{n+1}v_1$, aber nicht die Kante $v_{n+1}z$ enthalten; das sind genau so viele, wie die Spannbäume von W_n.
2)Alle Spannbäume, die die Kante $v_{n+1}v_1$ nicht enthalten; das sind genau so viele, wie die Spannbäume von F_{n+1}.
3) Alle Spannbäume, die die Kante $v_{n+1}v_1$ und die Kante $v_{n+1}z$ enthalten; jetzt beweisen wir, dass das so viele sind, wie die Spannbäume von F_n.
Dafür werden wir zeigen, dass für die Anzahl der Spannbäume in Klasse 3 den gleichen rekursiven Formeln genügen wie die von F_n.

Bilder davon

Da jeder Spannbaum von W_{n+1} in genau einer dieser Klassen ist, gilt die rekursive Beziehung $k(W_{n+1}) = k(F_{n+1}) + k(F_n) + k(W_n)$
Wir werden nun den Beweis per Induktion über $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ vervollständigen, wobei uns natürlich zu Gute kommt, dass uns die Anzahl der Spannbäume von Fan-Graphen schon bekannt ist.
Für unseren Induktionsanfang sehen wir -zum Beispiel durch Anwendung von Krichhoffs Matrix-Tree-Theorem- leicht, dass $k(W_3) = 16 = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^3 + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^3 - 2$.
Wir nehmen nun an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ die Formel $k(W_n) = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - 2$ gilt.
Damit bleibt noch zu Zeigen, dass $k(W_{n+1}) = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n+1} + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - 2$.
Wie wir oben bereits gezeigt haben, gilt $k(W_{n+1}) = k(F_{n+1}) + k(F_n) + k(W_n)$
Nachdem wir im vorherigen Kapitel herausgefunden haben, wieviele Spannbäume Fan-Graphen haben, setzen wir das und unsere Induktionsannahme sofort ein, und erhalten:
$k(W_{n+1}) = \frac{(3+\sqrt{5})^{n+1}-(3-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} + \frac{(3+\sqrt{5})^n-(3-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}} + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n - 2$
Einfaches Umformen führt uns zu

Rechnung! und danach zusammengehörige Terme farbig markieren

Damit haben wir erfolgreich gezeigt, dass für die Anzahl der Spannbäume in W_n gilt:

Rechnungen evtl. in equations packen