0.1 circulant Graphs

Wir nennen einen Graphen circulant mit n Knoten, wenn für $n \in \mathbb{N}$ und eine Menge $I \subset \{1,..,\lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} \subset \mathbb{N}$ gilt, dass jeder Knoten v genau zu jedem Knoten $(v+i)(\mod n)$ mit $i \in I$ benachbart ist; wir bezeichnen solch einen Graphen kurz mit C_n^I.
Wir erinnern uns, dass eine $n \times n$ Matrix zyklisch genannt wird, falls jede Spalte aus der vorherigen durch Anwendung der Permutation $(1...n)$ hervorgeht. Das ist bei den Adjazenzmatrizen unserer circulant Graphs, aufgrund dessen, wann Konten benachbart sind, natürlich der Fall. Zu Gute kommt uns das bei der Berechnung der Anzahl von Spannbäumen in circulant Graphs, denn die Eigenwerte einer zyklischen Matrix sind wohlbekannt.Um die Formel für die Anzahl der Spannbäume überhaupt zu verstehen, müssen wir einen weiteren Begriff einführen.Nachdem wir nun alles beisammen haben, formulieren wir folgenden Satz:

Satz 0.1.1 *Für die Anzahl der Spannbäume in circulant Graphs von Grad d gilt:*

$$k\left(C_n^I\right) = \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{n-1} \left(4 \sum_{i \in I} \sin^2 \left(\frac{ij\pi}{n} \right) \right), falls\, d\, gerade\, ist \tag{1}$$

$$k\left(C_n^I\right) = \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{n-1} \left(4 \sum_{i \in I} \sin^2 \left(\frac{ij\pi}{n} \right) - (-1)^j + 1 \right), falls\, d\, ungerade\, ist \tag{2}$$

Beispiel 0.1.2 (C_n^2 - Das Quadrat eines Kreises)

0.2 W_n (Räder)

Der vorletzte Stop auf unserer Reise sind die sogenannten Wheel-Graphen. Hier wird zu einem zyklischen Graphen C_n mit Knoten $\{v_1,..,v_n\}$, $n \geq 3$ ein weiterer Knoten z hinzugefügt, der mit allen anderen Knoten benachbart ist, sodass der Wheel-Graph W_n entsteht (Achtung: W_n hat $n+1$ Knoten).

Satz 0.1 *Für die Anzahl der Spannbäume in einem Rad gilt:*

$$k(W_n) = (\frac{3+\sqrt{5}}{2}) + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - 2 \tag{3}$$

Beweis:
Um die Formel für die Berechnung der Anzahl der Spannbäume eines solchen Graphen herzuleiten, lassen wir von [**?**] inspirieren. Wir beobachten, dass wir den Fan-Graphen F_n bekommen, wenn wir die Kante v_1v_n aus W_n entfernen. Die Anzahl der Spannbäume von F_n kennen wir bereits von oben. Wir werden zeigen, dass $k(W_n) = k(F_n) + 2\sum_{j=2}^{n} k(F_{j-1})$; damit können wir danach die Anzahl der Spannbäume von W_n berechnen. Als ersten Schritt dahin beweisen wir, dass für $n \geq 3$ die nachfolgende rekursive Beziehung gilt:

$$k(W_{n+1}) = k(F_{n+1}) + k(F_n) + k(W_n) \tag{4}$$

Um das zu tun, werden die Spannbäume von W_{n+1} in drei verschiedene Klassen einteilen:
1) Alle Spannbäume, die die Kante v_1v_{n+1} nicht enthalten; das sind genau die Spannbäume von F_{n+1}.
2) Alle Spannbäume, die die Kante v_1v_{n+1} enthalten, jedoch nicht die Kante v_1z; das sind die Spannbäume des Graphen W_{n+1}/v_1v_{n+1}, den wir durch Kontraktion der Kante v_1v_{n+1} aus W_{n+1} erhalten - dieser Graph ist aber W_n.
3) Alle Spannbäume, die die Kanten v_1v_{n+1} und v_1z beinhalten; das sind die Spannbäume des Graphen, den wir durch die Kontraktion der Kante v_1z gewinnen, also von F_n, wie wir aus der nachfolgenden Grafik entnehmen können.
Wie wir sehr leicht sehen können ist jeder Spannbaum von W_{n+1} in genau einer dieser Klassen, also gilt die Rekursion.
Unsere Formel lässt sich - zum Beispiel durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}$ - sehr einfach verifizieren.
Nachdem wir im vorherigen Kapitel herausgefunden haben, wieviele Spannbäume Fan-Graphen haben, können wir das sofort in die Formel einsetzen, und erhalten:
Damit haben wir erfolgreich gezeigt, dass für die Anzahl der Spannbäume in W_n gilt: