0.1 W_n (Räder)

Der vorletzte Stop auf unserer Reise sind die sogenannten Wheel-Graphen. Hier wird zu einem zyklischen Graphen C_n mit Knoten $\{v_1,..,v_n\}$, $n \geq 3$ ein weiterer Knoten z hinzugefügt, der mit allen anderen Knoten benachbart ist, sodass der Wheel-Graph W_n entsteht (Achtung: W_n hat $n+1$ Knoten).

Satz 0.1 *Für die Anzahl der Spannbäume in einem Rad gilt:*

$$k(W_n) = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - 2 \tag{1}$$

Beweis:
Um die Formel für die Berechnung der Anzahl der Spannbäume eines solchen Graphen herzuleiten, lassen wir von [**?**] inspirieren. Wir beobachten, dass wir den Fan-Graphen F_n bekommen, wenn wir die Kante $v_1 v_n$ aus W_n entfernen. Die Anzahl der Spannbäume von F_n kennen wir bereits von oben. Um die Anzahl der Spannbäume von Rädern zu berechnen, zeigen wir zuerst die rekursive Beziehung

$$k(W_{n+1}) = k(F_{n+1}) + k(F_n) + k(W_n) \tag{2}$$

Um das zu tun, werden die Spannbäume von W_{n+1} in drei verschiedene Klassen einteilen, wie man auch in den Abbildungen unten sehen kann:

1) Alle Spannbäume, die die Kante $v_{n+1}v_1$, aber nicht die Kante $v_{n+1}z$ enthalten; das sind genau so viele, wie die Spannbäume von W_n.

Grafik dazu

2)Alle Spannbäume, die die Kante $v_{n+1}v_1$ nicht enthalten; das sind genau so viele, wie die Spannbäume von F_{n+1}.

Grafik dazu

3) Alle Spannbäume, die die Kante $v_{n+1}v_1$ und die Kante $v_{n+1}z$ enthalten; jetzt beweisen wir, dass das so viele sind, wie die Spannbäume von F_n. Dafür werden wir zeigen, dass für die Anzahl der Spannbäume in Klasse 3 den gleichen rekursiven Formeln genügen wie die von F_n.

Beweis und grafische Veranschaulichung davon

Da jeder Spannbaum von W_{n+1} in genau einer dieser Klassen ist, gilt die rekursive Beziehung

$$k(W_{n+1}) = k(F_{n+1}) + k(F_n) + k(W_n) \tag{3}$$

Wir werden nun den Beweis per Induktion über $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ vervollständigen, wobei uns natürlich zu Gute kommt, dass uns die Anzahl der Spannbäume von Fan-Graphen schon bekannt ist.
Für unseren Induktionsanfang sehen wir -zum Beispiel durch Anwendung von Krichhoffs Matrix-Tree-Theorem- leicht, dass

$$k(W_3) = 16 = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^3 + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^3 - 2. \tag{4}$$

Wir nehmen nun an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$k(W_n) = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n - 2 \tag{5}$$

gilt.
Damit bleibt noch zu zeigen, dass

$$k(W_{n+1}) = (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n+1} + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - 2. \tag{6}$$

Das werden wir nun einfach ausrechnen. Nachdem wir im vorherigen Kapitel herausgefunden haben, wieviele Spannbäume Fan-Graphen haben, setzen wir das und unsere Induktionsannahme in die Gleichung (3) ein, und erhalten:

$$\begin{aligned} k(W_{n+1}) = & \frac{(3+\sqrt{5})^{n+1} - (3-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} + \frac{(3+\sqrt{5})^{n} - (3-\sqrt{5})^{n}}{2^{n}\sqrt{5}} \\ & + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^n + (\frac{3-\sqrt{5}}{2})^n - 2 \end{aligned} \tag{7}$$

Wir bringen fast alles auf einen Nenner, sortieren die Terme und bekommen

$$\begin{aligned} k(W_{n+1}) = & \frac{(3+\sqrt{5}+2+2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^n}{2^{n+1}\sqrt{5}} \\ & - \frac{(3+\sqrt{5}+2-2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^n}{2^{n+1}\sqrt{5}} - 2 \end{aligned} \tag{8}$$

zusammengehörige Terme farbig markieren

Ausrechnen führt uns zu

$$k(W_{n+1}) = \frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n+1} + (\frac{3+\sqrt{5}}{2})^{n+1} - 2 \tag{9}$$

Damit ist unser Induktionsbeweis abgeschlossen und wir haben gezeigt, dass unser Satz 1 über die Anzahl der Spannbäume in einem Rad gilt.

Rechnungen evtl. in equations packen