

# Das Matrix-Tree-Theorem



Bachelorarbeit der Fakultät für Mathematik  
der  
Ludwig-Maximilians-Universität München

vorgelegt von  
**Christopher Mann**  
geboren in Freising

Betreuer: **Prof. Dr. Konstantinos Panagiotou**

München, den 30. Juli, 2020



# Inhalt

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Grundlegende Definitionen und Notationen</b>	<b>4</b>
<b>3</b>	<b>Das Matrix-Tree-Theorem</b>	<b>5</b>
3.1	Tuttles Matrix-Tree-Theorem . . . . .	5
3.2	Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Anzahl Spannbäume für bestimmte Graphenklassen</b>	<b>8</b>
4.1	Warm-up und interessante Identität . . . . .	8
4.2	Vollständige Graphen - der Satz von Cayley . . . . .	9
4.3	Vollständige multipartite Graphen . . . . .	10
4.4	Fächer-Graphen . . . . .	12
4.5	Rad-Graphen . . . . .	14
4.6	Zirkuläre Graphen . . . . .	18
4.7	Kartesische Produkte von Graphen . . . . .	20



# 1 Einleitung

Schon 1847 schrieb Kirchhoff in seiner Arbeit "Ueber[sic!] die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung[sic!] galvanischer Ströme geführt wird" [8] als erster implizit über den Zusammenhang zwischen Matrizen und der Anzahl von Spannbäumen von Graphen - explizit über Systeme von beliebig miteinander verbundenen Drähten und Gleichungen für die elektrischen Stromstärken in diesem System. In der Graphentheorie sind Matrix-Tree-Theorems neben anderen Methoden, wie Prüfer-codes, beliebte Werkzeuge um die Anzahl der Spannbäume eines Graphen zu ermitteln. Das wohl berühmteste, nach Kirchhoff benannte, Matrix-Tree-Theorem wird oft als "das Matrix-Tree-Theorem" bezeichnet, wobei es auch noch andere Versionen, wie Tutte's Matrix-Tree-Theorem für gerichtete Multigraphen, dessen Beweis auch Teil dieser Arbeit sein wird, gibt. Aber auch außerhalb der reinen Mathematik und der Theorie über elektrische Schaltkreise finden Matrix-Tree-Theorems ihre Anwendung.

So wird das Matrix-Tree-Theorem zum Beispiel in der Quantenphysik genutzt [5]. In der Chemie gibt es einen Zusammenhang zwischen Spannbäumen und der Komplexität von Molekülen [7]. Auch in der Informatik kann man Matrix-Tree-Theorems zum Beispiel dafür benutzen, die Anzahl von Spannbäumen von Netzwerken - die man als Graphen betrachten kann - zu berechnen, um dann Rückschlüsse auf die Stabilität dieser Netzwerke zu ziehen [14]. Das Anwendungsspektrum von Matrix-Tree-Theorems ist also vielseitig.

In dieser Arbeit werden wir zuerst ein Matrix-Tree-Theorem für gerichtete Multigraphen beweisen, wobei wir uns an [2] halten. Daraus werden wir dann Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem schließen. In Kapitel "Warm-up und interessante Identität" werden wir dann die Anzahl der Spannbäume von Pfad- und Kreisgraphen berechnen; auf diesem Weg sehen wir eine interessante Identität des Sinus. Danach werden wir den Satz von Cayley beweisen; dabei imitieren wir [9]. Als nächste Graphenklasse betrachten wir dann vollständige multipartite Graphen; dort modifizieren [1] für unsere Zwecke. Wie [3] zeigen wir danach einen Zusammenhang zwischen den berühmten Fibonaccizahlen und der Anzahl der Spannbäume von Fächer-Graphen, die uns im darauffolgenden Kapitel zu Rad-Graphen nützlich sein wird; an dieser Stelle werden wir uns von [11] inspirieren lassen. Mit einem Beweis, der [13] ähnlich ist, berechnen wir dann die Anzahl der Spannbäume in zirkulären Graphen. Wir runden die Arbeit dann mit einem Kapitel über kartesische Produkte von Graphen ab.

## 2 Grundlegende Definitionen und Notationen

Wir beginnen damit, ein paar wichtige Begriffe und Notationen einzuführen, die wir später häufiger benutzen werden. In einem Matrix-Tree-Theorem wird immer ein Zusammenhang zwischen bestimmten Matrizen und den Spannbäumen eines Graphen beschrieben. Daher bieten sich die folgenden zwei Definitionen an, von denen wir eine für ungerichtete und die andere für gerichtete Graphen verwenden werden.

### Definition 2.1 Laplacematrix

Für einen Graphen  $G = (V, E)$  indizieren wir die Zeilen und Spalten einer Matrix mit den Knoten von  $G$ . Die Matrix mit den Einträgen

$$l_{ij} = \begin{cases} d(i), & \text{falls } i = j, \\ (-1), & \text{falls } ij \in E, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

nennen wir die Laplacematrix  $L(G)$  des Graphen  $G$ .

Für einen Knoten  $i$  bezeichnen wir mit  $d^-(i)$  seinen Ausgangsgrad.

### Definition 2.2 Kirchhoffmatrix

Für einen gerichteten Multigraphen  $D$  mit Knoten  $1, \dots, n$  definieren wir die Kirchhoffmatrix  $K(D)$  wie folgt:

$$k_{ij} = \begin{cases} d^-(i), & \text{falls } i = j, \\ (-m), & \text{wobei } m \text{ die Anzahl der Kanten von } i \text{ nach } j \text{ ist.} \end{cases}$$

Wobei wir wieder die Zeilen und Spalten mit den Knoten von  $D$  indiziert haben.

Nachdem wir in Tutte's Matrix-Tree-Theorem eine Zeile und Spalte streichen müssen, bezeichnen wir mit  $K_{\bar{i}}(D)$  die Matrix, die entsteht, wenn man aus  $K(D)$  die  $i$ -te Zeile und Spalte löscht.

Im Verlauf dieser Arbeit werden wir immer wieder die Anzahl der Spannbäume eines Graphen ausrechnen, daher verwenden wir  $k(G)$  als die Anzahl der Spannbäume eines beliebigen Graphen  $G$ .

### 3 Das Matrix-Tree-Theorem

Nachdem wir genügend Vorarbeit geleistet haben, können wir mit dem wichtigsten Teil dieser Arbeit anfangen, dem Beweis der Matrix-Tree-Theorems selbst. Wir beweisen zuerst eine Version für gerichtete Multigraphen, bevor wir uns der Version für ungerichtete Graphen als einem Spezialfall davon widmen.

#### 3.1 Tuttles Matrix-Tree-Theorem

Um die Version des Matrix-Tree-Theorems für gerichtete Multigraphen und den dazugehörigen Beweis zu verstehen, müssen wir zuerst den Begriff der Aboreszenz einführen. Als Aboreszenz aus einem Knoten bezeichnen wir einen gerichteten Baum, der diesen Knoten als Wurzel hat, wobei die Kanten von der Wurzel ausgehen.

Nun können wir ein Matrix-Tree-Theorem für gerichtete Multigraphen formulieren:

**Satz 3.1.1 (Tuttles Matrix-Tree-Theorem)** Sei  $D$  ein gerichteter Multigraph mit Kirchhoffmatrix  $K(D)$ . Die Anzahl der Aboreszenzen aus einem Knoten  $i$  ist gleich der  $\det(K_i(D))$ .

Um das zu beweisen lassen wir uns von [2] inspirieren. Also zeigen wir zuerst folgendes Lemma:

**Lemma 3.1.2** Sei  $D$  ein gerichteter Multigraph mit maximalem Eingangsgrad  $= 1$  und  $i$  ein Knoten in  $D$ .

Dann hat  $D$  maximal eine Aboreszenz mit Wurzel  $i$ . Des Weiteren ist  $\det(K_i(D)) \in \{0, 1\}$  und genau dann, wenn  $D$  eine Aboreszenz mit Wurzel  $i$  besitzt, ist  $\det(K_i(D)) = 1$ .

##### Beweis von Lemma 3.1.2:

Wir nehmen zuerst an, dass  $D$  eine Aboreszenz mit Wurzel  $i$  hat.

Da der maximale Eingangsgrad  $= 1$  ist, schließen wir, dass für jeden Knoten außer  $i$ , die eine eingehende Kante in dieser Aboreszenz enthalten ist.

Weil das Vertauschen von Zeilen einer Matrix deren Determinante nicht ändert, dürfen wir annehmen, dass  $i = 1$  ist und die übrigen Knoten in der Reihenfolge einer Breitensuche durchnummeriert sind.

Dann ist nämlich  $K_i(D)$  eine obere Dreiecksmatrix mit Diagonaleinträgen  $= 1$ , also  $\det(K_i(D)) = 1$ . Jetzt nehmen wir an, dass  $D$  keine Aboreszenz mit Wurzel  $i$  besitzt.

Falls ein anderer Knoten als  $i$  Eingangsgrad  $= 0$  hat, sind die alle Einträge der entsprechenden Spalte von  $K_i(D)$  und damit auch  $\det(K_i(D))$  gleich 0

Deshalb dürfen wir zu guter Letzt annehmen, dass für alle von  $i$  verschiedenen Knoten der Eingangsgrad  $= 1$  ist.

Weil  $D$  keine Aboreszenz mit Wurzel  $i$  besitzt, hat  $D$  einen Zyklus, der  $i$  nicht enthält.

Da aber jeder Knoten  $\neq i$  Eingangsgrad  $= 1$  hat, sind die Spalten, die mit den Knoten in diesem Zyklus korrespondieren, linear abhängig und damit  $\det(K_i(D)) = 0$ .

Damit haben wir unser Lemma bewiesen.

□

Nun können wir uns dem Beweis von Tuttles Matrix-Tree-Theorem widmen.

**Beweis von Tuttles Matrix-Tree-Theorem:** Wir werden die Matrix  $K(D)$  in kleinere Matrizen zerlegen und dann mit dem Lemma von oben arbeiten.

Bei der Zerlegung in kleinere Matrizen erinnern wir uns an ein Ergebnis aus der linearen Algebra: Für eine Matrix aus Spalten  $c_1, \dots, c_n$  mit jeweils  $n$  Elementen gilt:

$$\det(c_1, \dots, (c_i + \lambda c_i), \dots, c_n) = \det(c_1, \dots, c_i, \dots, c_n) + \lambda \det(c_1, \dots, \lambda c_i, \dots, c_n)$$

Weil sich die einzigen positiven Einträge von  $K(D)$  auf der Diagonale befinden und die Spaltensummen alle  $= 0$  sind, können wir  $K(D)$  auf diese Weise in  $s = \prod_{i=1}^n k_{ii}$   $n \times n$ -Matrizen  $K(D_i), i \in \{1, \dots, s\}$  zerlegen, indem wir jede Spalte als Summe von  $k_{ii}$  Spalten schreiben von denen jede mit einer in  $i$  eingehenden Kante korrespondiert.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir  $i = 1$  annehmen.

Wir werden jetzt  $\det(K_{\bar{1}}(D))$  mithilfe der Matrizen von oben vereinfachen und dann ausrechnen.

Hierzu sei  $\hat{D}$  der Graph der aus  $D$  durch löschen aller in den Knoten 1 eingehenden Kanten entsteht und  $d^-(j)$  der Eingangsgrad eines Knoten  $j$ . Dann folgt:

$$\det(K_{\bar{1}}(\hat{D})) = \sum_{e_2}^{d^-(2)} \det(K_{e_2}(\hat{D}))$$

,wobei  $K_{e_j}(\hat{D})$  aus  $\hat{D}$  durch löschen aller in den Knoten  $j$  eingehenden Kanten außer  $e_j$  entsteht. Wiederholen wir das für die übrigen Knoten, bekommen wir:

$$\det(K_{\bar{1}}(\hat{D})) = \sum_{e_2}^{d^-(2)} \dots \sum_{e_n}^{d^-(n)} \det(K_{e_n})$$

Mit Lemma 3.1.2 schließen wir, dass genau das die Aboreszenzen mit Wurzel  $i$  zählt.

Da  $\det(K_{\bar{i}}(D))$  aus  $K(D)$  durch löschen der mit Knoten  $i$  korrespondierenden Zeile und Spalte entstanden ist und wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit  $i = 1$  annehmen durften, gilt:

$$\det(K_{\bar{1}}(\hat{D})) = \det(K_{\bar{1}}(D)) = \det(K_{\bar{i}}(D))$$

Das vervollständigt unseren Beweis von Tutes Matrix-Tree-Theorem.

□

### 3.2 Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem

Nun werden wir das Matrix-Tree-Theorem für ungerichtete Graphen formulieren und beweisen, das wir auch im weiteren Verlauf dieser Arbeit verwenden werden, um die Anzahl der Spannbäume für verschiedene Graphenklassen zu bestimmen.

**Satz 3.2.1 (Kirchhoffs Matrix Tree Theorem)** Sei  $G$  ein ungerichteter Graph und  $L_n$  die dazugehörige Laplacematrix. Dann gilt:

- (1) Die Anzahl der Spannbäume von  $G$  gleich einem beliebigen Kofaktor von  $L_n$ .
- (2) Die Anzahl der Spannbäume von  $G$  gleich  $\frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i$  ist, wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  die Eigenwerte von  $L_n$  sind, die ungleich null sind.

#### Beweis:

Teil 1 des Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem folgt quasi direkt aus Tutes Matrix-Tree-Theorem.

Sei  $\vec{G}$  der gerichtete Graph, der entsteht, wenn man jede Kante in  $G$  als zwei gerichtete Kante ansieht.

Wir betrachten einen beliebigen Knoten aus  $\vec{G}$ , der natürlich auch in  $G$  ist.

Da nach Definition jeder Knoten in jedem Spannbau mit jedem anderen wegverbunden ist, korrespondiert jeder Spannbau von  $G$  mit genau einer Aboreszenz mit unserem Knoten als Wurzel in  $\vec{G}$ .

Nachdem jede Kante in  $\vec{G}$  auch in die entgegengesetzte Richtung vorhanden ist, schließen wir, dass  $L_n = K(\vec{G})$ , wobei  $L_n$  die Laplacematrix von  $G$  ist.

Weil die Anzahl der Spannbäume gegenüber Permutationen der Knotenmenge invariant ist, wissen



wir, dass jeder Kofaktor von  $L_n$  also gleich jedem Kofaktor von  $K(\vec{G})$  ist.

Wir folgern daraus mit Tutes Matrix-Tree-Theorem, dass die Anzahl der Spannbäume in  $G$  gleich einem beliebigen Kofaktor von  $L_n$  ist.

Um Teil 2 zu zeigen, berufen wir uns auf ein bekanntes Ergebnis der linearen Algebra:

Das Produkt der Eigenwerte einer Matrix ist gleich der Summe seiner Hauptminoren.

Das kann man zum Beispiel in [10] nachlesen.

Da  $L_n$   $n$  Hauptminoren hat, folgt mit Teil 1, dass die Anzahl der Spannbäume von  $G$  gleich  $\frac{1}{n} \prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i$  ist, wobei  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  die Eigenwerte von  $L_n$  sind, die ungleich null sind.

Damit ist Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem bewiesen.

□

## 4 Anzahl Spannbäume für bestimmte Graphenklassen

Nachdem wir Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem nun bewiesen haben, werden wir damit im Folgenden Formeln für die Berechnung der Anzahl der Spannbäume für verschiedene Klassen von ungerichteten Graphen finden. Begegnen werden uns unter Anderem der vollständige Graph, multipartite Graphen, Räder und das Quadrat eines Kreises (engl. "square of a cycle"). Dabei werden wir uns an der ein- oder anderen Stelle ein paar Eigenschaften bestimmter Matrizen, Determinanten und andere Hilfsmittel zunutze machen, da das Ausrechnen eines Kofaktors der Laplacematrix hier manchmal nicht der schnellste und intelligenteste Weg ist, um ans Ziel zu kommen.

### 4.1 Warm-up und interessante Identität

Als kleines Aufwärmprogramm für den Rest dieser Arbeit werden wir in diesem Kapitel die Anzahl der Spannbäume von ein paar wohl bekannten, sehr einfachen Graphen mit Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem berechnen.

Unsere Ergebnisse aus diesem Kapitel wollen wir uns im Kapitel zu kartesischen Produkten von Graphen zuunutzen machen. Weil wir die Eigenwerte der Laplacematrizen im Kapitel über kartesische Produkte von Graphen brauchen, werden wir diese hier jedes Mal ausrechnen.

Dabei wird uns die Identität  $\prod_{j=1}^{n-1} \left( \sin \left( \frac{\pi j}{n} \right) \right) = n 2^{n-1}$  quasi geschenkt.

**Lemma 4.1.1** *Der Pfad-Graph  $P_n$  mit  $n$  Knoten hat genau einen Spannbaum.*

**Beweis:**

Dass ein Pfad-Graph nur einen Spannbaum hat ist offensichtlich; er ist kreisfrei und zusammenhängend, also selbst schon ein Baum.

Wir sind aber auch an den Eigenwerten der Laplacematrix interessiert. Wir betrachten also

$$L(P_n) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lemma 2 von [4], zeigt unter Verwendung einiger Eigenschaften von Chebychev-Polynomen, dass die Eigenwerte  $\neq 0$  dieser Matrix gleich  $2 - 2 \cos \left( \frac{\pi k}{n} \right)$  für  $k \in \{1, \dots, n-1\}$  sind. Mit Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem folgt

$$k(P_n) = \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{n-1} \left( 2 - 2 \cos \left( \frac{\pi j}{n} \right) \right)$$

Wir rechnen weiter

$$\begin{aligned} k(P_n) &= \frac{2^{n-1}}{n} \prod_{j=1}^{n-1} \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi j}{n} \right) \right) \\ &= \frac{2^{n-1}}{n} \prod_{j=1}^{n-1} \left( \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi j}{n} \right) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2^{n-1}}{n} \prod_{j=1}^{n-1} \left( \left( 1 - 2 \cos^2 \left( \frac{\pi j}{n} \right) + \cos^2 \left( \frac{\pi j}{n} \right) \right) \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2^{n-1}}{n} \prod_{j=1}^{n-1} \left( \sin \left( \frac{\pi j}{n} \right) \right) \end{aligned}$$

Da wir schon wissen, dass ein Pfad-Graph nur einen Spannbaum besitzt, schließen wir folgende Identität für  $n \in \mathbb{N}$ :

$$\prod_{j=1}^{n-1} \left( \sin \left( \frac{\pi k}{n} \right) \right) = n 2^{-(n-1)} \quad (1)$$

Diese werden wir bei der Berechnung der Spannbäume von Kreis-Graphen verwenden.

Wir wissen, dass  $P_n$  wie erwartet einen einzigen Spannbaum besitzt, kennen die Eigenwerte der Laplacematrix von Pfad-Graphen und haben die Identität gezeigt; damit beenden wir die Ausführungen zu Lemma 4.1.1.

□

Die zweite Klasse von Graphen, die wir in diesem Kapitel betrachten, sind Kreis-Graphen. Sie sind der einfachste Spezialfall von zirkulären Graphen, die wir später auch noch behandeln werden. In einem Kreis-Graphen  $C_n$  mit  $n$  Knoten sind genau die aufeinanderfolgenden Knoten, sowie der erste und der letzte adjazent.

**Lemma 4.1.2** *Der Kreis-Graph  $C_n$  mit  $n$  Knoten hat genau  $n$  Spannbäume.*

**Beweis:**

Wir sehen uns hier wieder die Laplacematrix an.

$$L(C_n) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & 0 & -1 & 2 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lemma 3, wieder aus [4] bestimmt die Eigenwerte  $\lambda_k$ ,  $k \in \{0, \dots, n-1\}$  dieser Matrix als  $\lambda_k = 2 - 2 \cos \left( \frac{2\pi k}{n} \right)$ . Um das weiter zu vereinfachen, werden wir jetzt unser Wissen über trigonometrische Funktionen verwenden.

$$\begin{aligned} \lambda_k &= 2 \left( 1 - \cos \left( \frac{2\pi k}{n} \right) \right) \\ &= 2 \left( 1 - \cos^2 \left( \frac{\pi k}{n} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi k}{n} \right) \right) \\ &= 4 \left( \sin^2 \left( \frac{\pi k}{n} \right) \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Mit Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem folgt

$$k(C_n) = \frac{4^{n-1}}{n} \prod_{j=1}^{n-1} \left( \sin^2 \left( \frac{\pi k}{n} \right) \right)$$

Wir verwenden die Identität (1) wieder und schließen  $k(C_n) = n$ .

□

## 4.2 Vollständige Graphen - der Satz von Cayley

**Satz 4.2.1 (Satz von Cayley)**  $K_n$  besitzt genau  $n^{n-2}$  verschiedene Spannbäume.

**Beweis:**

Unser Beweis orientiert sich an [9]. Wir wollen das Matrix-Tree-Theorem verwenden und betrachten deshalb die Determinante der Matrix, die durch das Streichen der ersten Zeile und Spalte der Laplacematrix  $L_n(K_n) \in M_n(\mathbb{Z})$  entsteht:

$$\det \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & \dots & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \dots & \dots & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

Da sich die Determinante durch elementare Zeilen- und Spaltenoperationen nicht ändert, dürfen wir die erste Spalte von allen anderen subtrahieren und erhalten:

$$\det \begin{pmatrix} n-1 & -n & \dots & \dots & \dots & -n \\ -1 & n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

Mit demselben Argument wie oben addieren wir zur ersten Zeile alle übrigen und es ergibt sich:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

Wir berechnen den Wert dieser Determinante durch Entwicklung nach der ersten Zeile.

Weil die betrachtete Matrix eine  $(n-1 \times n-1)$ -Matrix ist, ist die Determinante gleich  $n^{n-2}$ .

Nach Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem ist genau das die Anzahl der Spannbäume des  $K_n$ .

□

### 4.3 Vollständige multipartite Graphen

Als nächste Graphenklasse betrachten wir vollständige multipartite Graphen. Ein vollständiger multipartiter Graph ist ein Graph, bei dem jeder Knoten mit jedem anderen Knoten, der nicht in seiner Partition ist, verbunden ist. Für  $m \in \mathbb{N}$  schreiben wir kurz  $K_{n_1, \dots, n_m}$  für einen vollständigen  $m$ -partiten Graphen, wobei  $n_i$  für  $i \in \{1, \dots, m\}$  die Anzahl der Knoten in der  $m$ -ten Partition ist.

Für diese Klasse von Graphen zeigen wir diesen Satz:

**Satz 4.3.1** *Für die Anzahl der Spannbäume in einem vollständig  $m$ -partiten Graphen  $K_{n_1, \dots, n_m}$  mit  $n = \sum_{i=1}^m n_i$  Knoten gilt:*

$$k(K_{n_1, \dots, n_m}) = n^{m-2} \prod_{i=1}^m (n - n_i)^{n_i-1}$$

**Beweis:** Wir beweisen den Satz ähnlich wie Austin in [1], der ein äquivalentes Problem zu dem eben genannten bewiesen hat.

Dazu werden wir im Geist dieser Arbeit Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem verwenden.

Zuerst werden wir bemerken, dass alle Laplace-Matrizen, die unseren Sachverhalt beschreiben, bei geschickter Nummerierung Blockmatrizen einer bestimmten Gestalt sind und Schlüsse über deren Kofaktoren ziehen. Im nächsten Schritt werden wir dann einen beliebigen vollständigen multipartiten Graphen auswählen und die entsprechenden Werte einsetzen.

Mit Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem folgt dann der Satz.

Wir beobachten, dass die Laplacematrix und die, die entsteht, wenn man davon die erste Zeile und Spalte streicht, von der Form

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 id_{d_1} & -V_{12} & \dots & \dots & -V_{1m} \\ -V_{21} & \gamma_2 id_{d_2} & \dots & \dots & -V_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -V_{(m-1)m} \\ -V_{m1} & \dots & \dots & -V_{m(m-1)} & \gamma_m id_{d_m} \end{pmatrix}$$

ist, wobei  $V_{ij}$   $(d_i \times d_j)$ -Matrizen sind, bei denen alle Einträge gleich  $-1$  sind und  $d_l \in \mathbb{N}$  für  $l \in \{1, \dots, m\}$ .

Das ist eine symmetrische Matrix mit ganzzahligen Einträgen, deshalb wissen wir, dass alle Eigenwerte reell sind und wir die Determinante aus den Eigenwerten ausrechnen können.

Um die Eigenwerte herauszufinden betrachten wir das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 id_{d_1} & -V_{12} & \dots & \dots & -V_{1m} \\ -V_{21} & \gamma_2 id_{d_2} & \dots & \dots & -V_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -V_{(m-1)m} \\ -V_{m1} & \dots & \dots & -V_{m(m-1)} & \gamma_m id_{d_m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_{m-1} \\ Y_m \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \dots \\ Y_{m-1} \\ Y_m \end{pmatrix}$$

Hier sind die  $Y_i := (y_{i1}, \dots, y_{ij})^T$ , wobei  $j = d_i$ .

Für  $\lambda$  verschieden von  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  können wir, wenn wir immer zwei Gleichungen aus diesem System vergleichen, schließen dass für jedes  $i \in \{1, \dots, m\}$  alle Einträge eines Vektors  $Y_i$  gleich sein müssen. Deswegen können wir das Gleichungssystem in die  $m$  voneinander unabhängigen Gleichungen

$$\sum_{j=1}^m ((\gamma_j - d_j) \delta_{ij} - d_j) Y_j = \lambda_i Y_i \quad (i \in 1, \dots, m)$$

umformulieren. Das gibt uns  $m$  von  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  verschiedene Eigenwerte, deren Produkt die Determinante der Matrix  $K \in M_m(\mathbb{R})$  mit Einträgen  $k_{i,j} = ((\gamma_j - d_j) \delta_{ij} - d_j)$  ist.

Die übrigen Eigenwerte müssen also aus  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  sein.

Angenommen  $\lambda = \gamma_i$  für ein  $i \in \{1, \dots, m\}$ ; dann sehen wir bei Betrachtung des Gleichungssystems von oben, dass  $Y_j = 0$  für  $i \neq j$  und  $\sum_l y_{li} = 0$ . Also ist  $\gamma_i$  ein  $(d_i - 1)$ -facher Eigenwert. Wir schließen also

$$\det \begin{pmatrix} \gamma_1 id_{d_1} & -V_{12} & \dots & \dots & -V_{1m} \\ -V_{21} & \gamma_2 id_{d_2} & \dots & \dots & -V_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -V_{(m-1)m} \\ -V_{m1} & \dots & \dots & -V_{m(m-1)} & \gamma_m id_{d_m} \end{pmatrix} = \det(K) \prod_{i=1}^m \gamma_i^{(d_i-1)}$$

Um einen Kofaktor von  $L(K_{n_1, \dots, n_m})$  zu berechnen, setzen wir in diese Gleichung jetzt die Werte für die Matrix ein, die entsteht wenn wir die erste Spalte und Zeile von  $L(K_{n_1, \dots, n_m})$  streichen. Also setzen wir  $\gamma_i = (n - n_i)$  für  $i \in \{1, \dots, m\}$  und  $d_1 = (n_1 - 1)$ , sowie  $d_i = n_i$  für  $i \in \{2, \dots, m\}$ .

Wir berechnen also

$$\det \begin{pmatrix} (n - n_1) & -n_2 & \dots & \dots & \dots & -n_m \\ (1 - n_1) & (n - n_2) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1 - n_1) & -n_2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -n_m \\ (1 - n_1) & -n_2 & \dots & \dots & -n_{m-1} & (n - n_m) \end{pmatrix} (n - n_1)^{(n_1-2)} \prod_{i=2}^m (n - n_i)^{(n_i-1)} \quad (3)$$

Um das auszurechnen, müssen wir die Determinante auswerten. Da elementare Zeilenoperationen die Determinante nicht ändern, subtrahieren wir die erste Zeile von allen anderen. Die zu berechnende Determinante ist nun

$$\det \begin{pmatrix} (n-n_1) & -n_2 & \dots & \dots & \dots & -n_m \\ (1-n) & n & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ (1-n) & 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

Jetzt addieren wir zur ersten Zeile für alle  $i = 2, \dots, m$  das  $\left(\frac{n_i}{n}\right)$ -fache der  $i$ -ten Zeile und erhalten

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ (1-n) & n & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ (1-n) & 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix}$$

wobei  $a = (n-n_1) + \sum_{i=2}^m \left(\frac{(1-n)n_i}{n}\right)$  ist.

Berücksichtigen wir die Gleichheit  $n = n_1 + \dots + n_m$ , sehen wir leicht, dass  $a = \frac{n-n_1}{n}$ .

Die Determinante einer Dreiecksmatrix können wir ablesen und folgern

$$\det \begin{pmatrix} a & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ (1-n) & n & 0 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ (1-n) & 0 & \dots & \dots & 0 & n \end{pmatrix} = n^{m-2}(n-n_1)$$

Das setzen wir nun in die Formel 3 ein:

$$\det \begin{pmatrix} (n-n_1) & -n_2 & \dots & \dots & \dots & -n_m \\ (1-n_1) & (n-n_2) & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (1-n_1) & -n_2 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -n_m \\ (1-n_1) & -n_2 & \dots & \dots & -n_{m-1} & (n-n_m) \end{pmatrix} = n^{m-2} \prod_{i=1}^m (n-n_1)^{n_i-1}$$

Damit haben wir erfolgreich einen Kofaktor der Laplacematrix von  $K_{n_1, \dots, n_m}$  berechnet.

Mit Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem folgt nun

$$k(K_{n_1, \dots, n_m}) = n^{m-2} \prod_{i=1}^m (n-n_1)^{n_i-1}$$

Damit ist der Satz über die Anzahl der Spannbäume in vollständig multipartiten Graphen bewiesen. □

## 4.4 Fächer-Graphen

Nun werden wir Fächer-Graphen  $F_n$ , für  $n \geq 1$  betrachten. Diese entstehen, wenn wir an einen Pfad-Graphen  $P_n$  einen weiteren Knoten so ankleben, dass er mit allen übrigen Knoten adjazent

ist. Interessanterweise treffen wir im Zusammenhang mit den Spannbäumen der Fächer-Graphen auf die Fibonaccizahlen; eine der berühmtesten Zahlenfolgen überhaupt. Sie tritt häufig bei Wachstumsprozessen in der Natur, aber auch in anderen Gebieten der Wissenschaft und Kunst auf. Die Fibonaccizahlen erhält man bekanntlicherweise rekursiv indem man - mit den beiden Startwerten gleich 1 - die vorherigen zwei Fibonaccizahlen addiert [12]. Wir bezeichnen die  $n$ -te solche Zahl als  $\text{Fib}(n)$ ; die beiden ersten sind also  $\text{Fib}(0) = 0$  und  $\text{Fib}(1) = 1$ .

Wir wollen in diesem Kapitel folgendes zeigen:

**Satz 4.4.1** *Für die Anzahl der Spannbäume im Fächer-Graphen  $F_n$  gilt:*

$$k(F_n) = \frac{(3 + \sqrt{5})^n - (3 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}} = \text{Fib}(2n)$$

**Beweis:** Diesmal halten wir uns an einen Beweis von Bogdanowicz [3], wobei dieser  $F_n$  leicht anders definiert.

Zuerst werden wir zeigen, dass ein Kofaktor der Laplacematrix von Fächer-Graphen einer bestimmten Rekursion folgt und dann, dass  $\text{Fib}(2n)$  die gleiche Rekursionsvorschrift einhält; mit Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem folgt dann der Satz.

Wir betrachten also zunächst die Laplacematrix von  $F_n$ ; wenn wir die Knoten entsprechend nummerieren ist

$$L_n(F_n) = \begin{pmatrix} n & -1 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Wir brauchen einen beliebigen Kofaktor davon, deshalb streichen wir die erste Zeile und Spalte und erhalten

$$A_n := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Determinante dieser Matrix ist der gesuchte Kofaktor; wir benennen sie mit  $a_n$ .

Nun zeigen wir, dass die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  der Rekursion  $x^2 - 3x + 1 = 0$  folgt, wobei  $x$  den Shift-Operator  $a_n = xa_{n-1}$  darstellt.

Wir entwickeln  $A_n$  nach der ersten Reihe und erhalten  $a_n = 2b_{n-1} - b_{n-2}$ , wobei  $b_i$  die Determinante der folgenden Hilfsmatrix ist:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Entwickeln wir die Determinante dieser Matrix für  $i = n$  ebenfalls nach der ersten Reihe, sehen wir, dass die Rekursion  $b_n - 3b_{n-1} + b_{n-2}$  gilt.

Daraus schließen wir nun, dass  $a_n$  die gewünschte Rekursion  $x^2 - 3x + 1 = 0$  von oben erfüllt.

Es bleibt also noch zu zeigen, dass sowohl  $\text{Fib}(2n)$ , als auch die Formel

$$\frac{(3 + \sqrt{5})^n - (3 - \sqrt{5})^n}{2^n \sqrt{5}}$$

dieser Rekursionsvorschrift genügen;

Das sind aber zwei einfache Rechnungen, die wir uns an dieser Stelle sparen.

Damit ist unser Beweis vollständig.

□

## 4.5 Rad-Graphen

Der vorletzte Stop auf unserer Reise sind die sogenannten Rad-Graphen. Hier wird zu einem zyklischen Graphen  $C_n$  mit Knoten  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $n \geq 3$  ein weiterer Knoten  $z$  hinzugefügt, der mit allen anderen Knoten benachbart ist, sodass der Rad-Graph  $W_n$  entsteht (Achtung:  $W_n$  hat  $n + 1$  Knoten).

**Satz 4.1** Für die Anzahl der Spannbäume in einem Rad gilt:

$$k(W_n) = \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^n - 2 \quad (4)$$

### Beweis:

Um die Formel für die Berechnung der Anzahl der Spannbäume eines solchen Graphen herzuleiten, lassen wir von [11] inspirieren. Wir beobachten, dass wir den Fan-Graphen  $F_n$  bekommen, wenn wir die Kante  $v_1 v_n$  aus  $W_n$  entfernen. Die Anzahl der Spannbäume von  $F_n$  kennen wir bereits von oben. Um die Anzahl der Spannbäume von Rädern zu berechnen, zeigen wir zuerst die rekursive Beziehung

$$k(W_{n+1}) = k(F_{n+1}) + k(F_n) + k(W_n)$$

Dafür teilen wir die Spannbäume von  $W_{n+1}$  in drei verschiedene Klassen ein:

- 1) Alle Spannbäume, die die Kante  $v_{n+1} v_1$ , aber nicht die Kante  $v_{n+1} z$  enthalten; das sind genau so viele, wie die Spannbäume von  $W_n$ , wie man in der Abbildung 1 sehen kann. Wir beachten hier, dass ein  $W_n$  entsteht, wenn man im  $F_n$  eine Kante zwischen den beiden Knoten mit Grad 2 hinzufügt.
- 2) Alle Spannbäume, die die Kante  $v_{n+1} v_1$  nicht enthalten; das sind genau so viele, wie die Spannbäume von  $F_{n+1}$ ; das wird aus Abbildung 2 ersichtlich



3) Alle Spannbäume, die die Kante  $v_{n+1}v_1$  und die Kante  $v_{n+1}z$  enthalten; Wir beweisen gleich, dass das so viele sind, wie die Spannbäume von  $F_n$ .

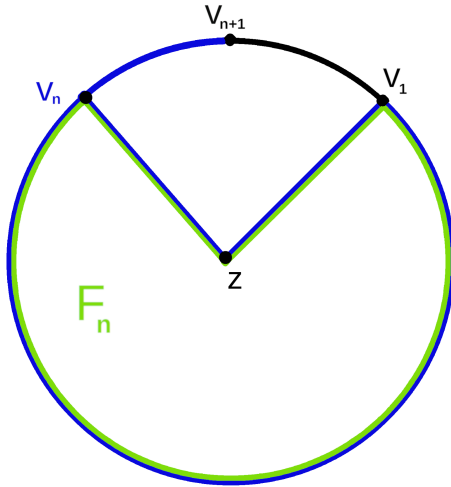


Abb. 1: In Klasse 1 sind die Spannbäume dieses Graphen, wobei die schwarze Kante in diesen Spannbäumen enthalten sein muss und der grün markierte Teil ein  $F_n$  ist.

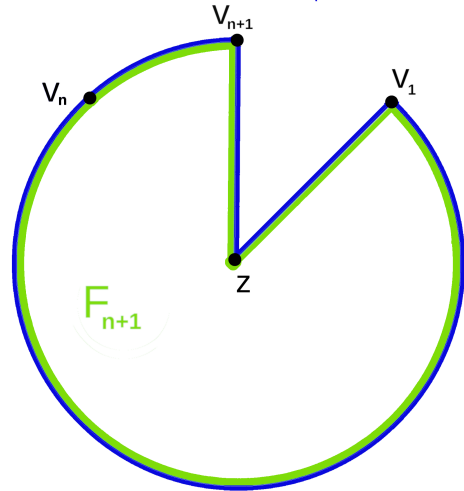


Abb. 2: In Klasse 2 sind genau die Spannbäume dieses Graphen, wobei der grün markierte Teil ein  $F_{n+1}$  ist.

Um zu zeigen, dass die Klasse 3 genauso viele Spannbäume enthält wie  $F_n$ , werden wir beweisen, dass für die Anzahl der Spannbäume in Klasse 3 den gleichen rekursiven Formeln genügen, wie die von  $F_n$ .

Sei  $a_n$  die Anzahl der Subgraphen von  $F_n$ , die aus genau zwei Komponenten bestehen, von denen eine den Knoten  $z$  und die andere  $v_n$  enthält.

Sei  $n \geq 1$ . Wir beweisen zuerst, dass  $k(F_{n+1}) = 2k(F_n) + a_n$ . Dazu nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass  $v_{n+1}$  nur zu den Knoten  $v_n$  und  $z$  adjazent ist. Ein Spannb Baum des  $F_{n+1}$  ist dann entweder durch hinzufügen einer der beiden Kanten  $v_nv_{n+1}$  und  $v_{n+1}z$  entstanden, oder durch hinzufügen beider Kanten an einen Subgraphen von  $F_n$ , der aus genau zwei Komponenten, die Bäume sind, besteht, von denen eine den Knoten  $z$  und die andere  $v_n$  enthält.

Es gilt also  $k(F_{n+1}) = 2k(F_n) + a_n$ .

Wir sehen leicht, dass  $a_{n+1} = a_n + k(F_n)$ .

Jetzt betrachten wir die Spannbäume aus Klasse 3.

Wir definieren dazu  $b_n$  als die Anzahl der Spannbäume in Klasse 3, die die Kanten  $v_nv_{n+1}$  und  $v_nz$  nicht enthalten.

Sei  $M_n$  die Menge der Spannbäume von  $W_{n+1}$  aus Klasse 3;

Nun zeigen wir, dass  $|M_n| = 2|M_{n-1}| + b_{n-1}$  für  $n \geq 4$  ist.

Im Folgenden betrachten wir nur ein  $n \geq 3$ . Wir erinnern uns an dieser Stelle daran, dass wir die Knoten beliebig umnummerieren können; in  $M_n$  sind also die Spannbäume des Graphen aus Abbildung 3.

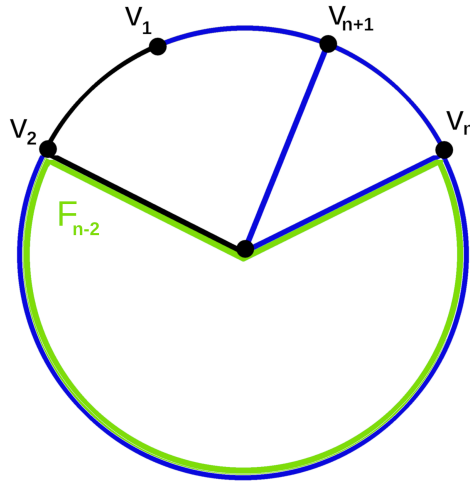


Abb. 3

Wir unterteilen die Spannbäume davon auch in drei Klassen:

Die Erste bilden diejenigen, in denen die Kante  $v_{n+1}z$  enthalten ist; wie wir in der Abbildung 4 erkennen können, sind das so viele, wie in  $M_{n-1}$ .

Die Zweite besteht aus denen, die die Kante  $v_nv_{n+1}$  enthalten; in Abbildung 5 sehen wir, dass das auch  $|M_{n-1}|$  Stück sind.

Die Dritte beinhaltet die, die weder die Kante  $v_{n+1}z$  noch die Kante  $v_nv_{n+1}$  enthalten; die Anzahl davon ist nach Definition genau  $b_n$ .

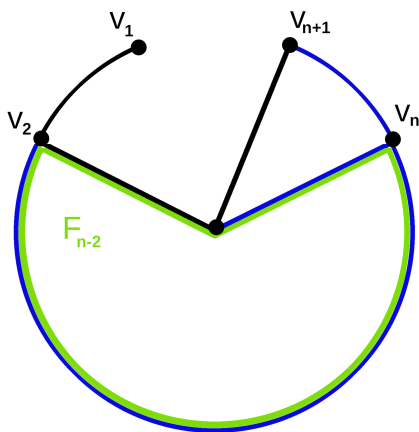


Abb. 4

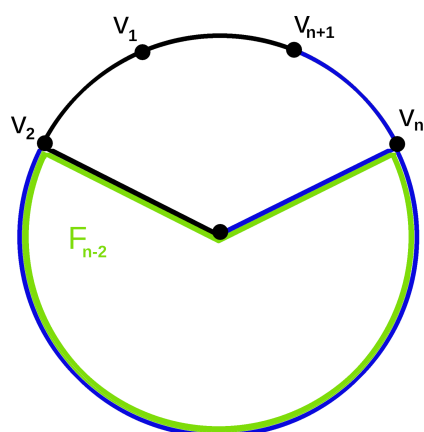


Abb. 5

Daraus schließen wir also  $|M_n| = 2|M_{n-1}| + b_n$  für  $n \geq 4$ .

Wir sehen leicht, dass  $a_1 = 1$ ,  $a_3 = b_4 = 5$ ,  $F_1 = 1$  und  $k(F_3) = |M_3|$ ; daraus schließen wir, dass

die Anzahl der Spannbäume von  $W_{n+1}$  in Klasse 3 gleich  $k(F_n)$  ist, was wir zeigen wollten. Da jeder Spannbaum von  $W_{n+1}$  in genau einer der 3 Klassen ist, gilt die rekursive Beziehung

$$k(W_{n+1}) = k(F_{n+1}) + k(F_n) + k(W_n) \quad (5)$$

Wir werden nun den Beweis per Induktion über  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$  vervollständigen, wobei uns natürlich zu Gute kommt, dass uns die Anzahl der Spannbäume von Fan-Graphen schon bekannt ist. Für unseren Induktionsanfang sehen wir - zum Beispiel durch Anwendung von Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem - leicht, dass

$$k(W_3) = 16 = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3 + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^3 - 2.$$

Wir nehmen nun an, dass für ein  $n \in \mathbb{N}$  die Formel

$$k(W_n) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2$$

gilt.

Damit bleibt noch zu zeigen, dass

$$k(W_{n+1}) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - 2$$

Das werden wir nun einfach ausrechnen. Nachdem wir im vorherigen Kapitel herausgefunden haben, wieviele Spannbäume Fan-Graphen haben, setzen wir das und unsere Induktionsannahme in die Gleichung (5) ein, und erhalten:

$$\begin{aligned} k(W_{n+1}) &= \frac{(3+\sqrt{5})^{n+1} - (3-\sqrt{5})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{5}} + \frac{(3+\sqrt{5})^n - (3-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}} \\ &\quad + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2 \end{aligned}$$

Wir bringen fast alles auf einen Nenner, sortieren die Terme und bekommen

$$\begin{aligned} k(W_{n+1}) &= \frac{(3+\sqrt{5}+2+2\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^n}{2^{n+1}\sqrt{5}} \\ &\quad - \frac{(3+\sqrt{5}+2-2\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^n}{2^{n+1}\sqrt{5}} - 2 \end{aligned}$$

s Ausrechnen führt uns zu

$$k(W_{n+1}) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - 2$$

Damit ist unser Induktionsbeweis abgeschlossen und wir haben gezeigt, dass unser Satz 4 über die Anzahl der Spannbäume in einem Rad gilt.

□

## 4.6 Zirkuläre Graphen

Im Kapitel Warm-up ist uns schon ein zirkulärer Graph begegnet; der Kreis-Graph.

Wir nennen einen Graphen zirkulär (engl. "circulant") mit  $n$  Knoten, wenn für  $n \in \mathbb{N}$  und eine Menge  $I \subset \{1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\} \subset \mathbb{N}$  gilt, dass jeder Knoten  $v$  genau zu jedem Knoten  $(v+i) \pmod{n}$  mit  $i \in I$  benachbart ist; wir bezeichnen solch einen Graphen kurz mit  $C_n^I$ .

Wir erinnern uns, dass eine  $(n \times n)$ -Matrix zyklisch genannt wird, falls jede Spalte aus der vorherigen durch Anwendung der Permutation  $(1 \dots n)$  hervorgeht.

Das ist bei den Adjazenz- und Laplacematrizen von zirkulären Graphen, aufgrund dessen, wann Knoten benachbart sind, der Fall.

Zugute kommt uns das bei der Berechnung der Anzahl von Spannbäumen in zirkulären Graphen, denn die Eigenwerte einer zyklischen Matrix sind wohlbekannt.

Wir wollen in diesem Zusammenhang folgendes zeigen:

**Satz 4.6.1** Für die Anzahl der Spannbäume in zusammenhängenden zirkulären Graphen von Grad  $d$  gilt:

$$k(C_n^I) = \begin{cases} \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{n-1} \left( 4 \sum_{k \in I} \sin^2 \left( \frac{kj\pi}{n} \right) \right) & , \text{ falls } d \text{ gerade ist} \\ \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{n-1} \left( 4 \sum_{k \in I/\sup(I)} \sin^2 \left( \frac{kj\pi}{n} \right) - (-1)^j + 1 \right) & , \text{ falls } d \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

### Beweis:

Wir beweisen den Satz ähnlich wie [13], berechnen daher die Eigenwerte der Laplacematrix und wenden danach Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem an.

Für unseren Graphen  $C_n^I$  ist die Laplacematrix zirkulär; wir können sie also durch die erste Spalte eindeutig beschreiben. Der erste Eintrag ist  $|I|$ , die Einträge  $(i+1)$  und  $(n-i)$  sind  $-1$  für  $i \in I$ , die übrigen 0.

Des weiteren sind die Eigenwerte von zirkulären Matrizen ein bekanntes Resultat aus der linearen Algebra:

$$\lambda_j = \sum_{k=1}^n l_k \exp \left( \frac{2\pi i j (k-1)}{n} \right), \quad j \in \{0, \dots, n-1\} \quad (6)$$

$l_k$  ist hier der  $k$ -te Eintrag der ersten Spalte.

Der Eigenwert  $\lambda_0 = 0$ . Da der Graph zusammenhängend ist, sind die übrigen Eigenwerte ungleich 0 und mit Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem folgt:

$$k(C_n^I) = \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j$$

An dieser Stelle machen wir die Fallunterscheidung, ob der Graph geraden Grad hat, oder nicht.

**Fall 1:** Grad gerade; das heißt der Grad ist gleich  $2|I|$

Dann ist für alle  $j \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\begin{aligned} \lambda_j &= 2|I| - \left( \sum_{k \in I} \left( \exp \left( \frac{2\pi i j k}{n} \right) + \exp \left( \frac{2\pi i j (n-k)}{n} \right) \right) \right) \\ &= \left( \sum_{k \in I} \left( \exp \left( \frac{2\pi i j k}{n} \right) - 2 + \exp \left( \frac{2\pi i j (n-k)}{n} \right) \right) \right) \\ &= - \left( \sum_{k \in I} \left( \exp \left( \frac{\pi i j k}{n} \right) - \exp \left( \frac{\pi i j (n-k)}{n} \right) \right)^2 \right) \\ &= 4 \sum_{k \in I} \sin^2 \left( \frac{kj\pi}{n} \right) \end{aligned}$$

,wobei wir die berühmte eulersche Formel verwendet haben.

**Fall 2:** Grad ungerade; das bedeutet der Grad ist  $2(|I| - 1) + 1$   
Dann gilt für alle  $j \in \{1, \dots, n-1\}$

$$\begin{aligned}\lambda_j &= 2(|I| - 1) + 1 - \left( \exp\left(\frac{2\pi i j \sup(I)}{n}\right) + \sum_{k \in I/\sup(I)} \left( \exp\left(\frac{2\pi i j k}{n}\right) + \exp\left(\frac{2\pi i j (n-k)}{n}\right) \right) \right) \\ &= 1 - \left( \exp\left(\frac{\pi i j \sup(I)}{n}\right) + \sum_{k \in I/\sup(I)} \left( \exp\left(\frac{\pi i j k}{n}\right) - \exp\left(\frac{\pi i j (n-k)}{n}\right) \right)^2 \right) \\ &= 4 \sum_{k \in I/\sup(I)} \sin^2\left(\frac{k j \pi}{n}\right) - (-1)^j + 1\end{aligned}$$

Hier sind wir wieder genauso vorgegangen, wie oben.

Jetzt kennen wir die Eigenwerte der Laplacematrix und können Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem anwenden; es folgt

$$k(C_n^I) = \begin{cases} \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{n-1} \left( 4 \sum_{k \in I} \sin^2\left(\frac{k j \pi}{n}\right) \right) & , \text{ falls } d \text{ gerade ist} \\ \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{n-1} \left( 4 \sum_{k \in I/\sup(I)} \sin^2\left(\frac{k j \pi}{n}\right) - (-1)^j + 1 \right) & , \text{ falls } d \text{ ungerade ist} \end{cases}$$

Das wollten wir zeigen. □

#### Beispiel 4.6.2 ( $C_n^{1,2}$ - Das Quadrat eines Kreises)

Ein berühmtes Beispiel für einen zirkulären Graphen ist  $C_n^{1,2}$ , das sogenannte Quadrat eines Kreises (engl. "square of a cycle"). In der Literatur wird dieser Graph auch gelegentlich als  $C_n^2$  bezeichnet. Einen solchen Graphen können wir in Abbildung 6 sehen.

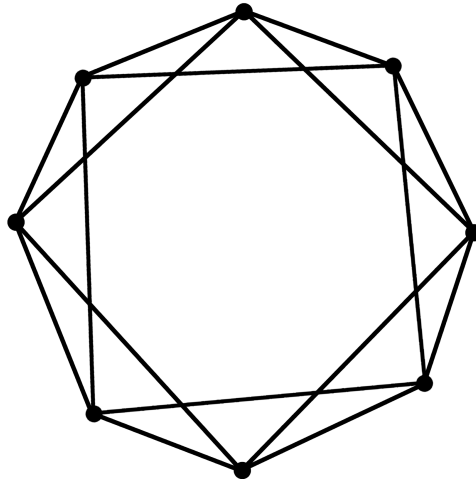


Abb. 6:  $C_8^{1,2}$

Bei der Berechnung der Anzahl der Spannbäume des Quadrats eines Kreises stößt man interessanterweise wieder auf die Fibonaccizahlen. Für  $n \geq 5$  gilt nämlich

$$k(C_n^{1,2}) = n \text{Fib}(n)^2$$

Ein Beweis dafür ist nicht schwer, sprengt aber quantitativ den Rahmen für ein Beispiel in dieser Arbeit. Er besteht zum Beispiel daraus sich rekursive Beziehungen von Hilfsmatrizen und Eigenschaften erzeugender Funktionen zunutze zu machen; an dieser Stelle verweisen wir also auf [13].

## 4.7 Kartesische Produkte von Graphen

In diesem Teil zeigen wir, was im Bezug auf die Anzahl der Spannbäume geschieht, wenn man das kartesische Produkt von Graphen bildet.

Das kartesische Produkt  $G_1 \times G_2$  zweier Graphen  $G_1 = (V_1, E_1)$  und  $G_2 = (V_2, E_2)$  bezeichnet dabei den Graphen mit Knotenmenge  $V_1 \times V_2$  und Kantenmenge  $(E_1 \times V_2) \cup (V_1 \times E_2)$ , wobei zwei Knoten  $(u_1, u_2), (v_1, v_2) \in (V_1 \times V_2)$  genau dann in  $G_1 \times G_2$  benachbart sind, wenn entweder  $u_1 = v_1$  in  $G_1$  oder  $u_2 = v_2$  in  $G_2$  ist.

**Satz 4.7.1** *Sei  $G$  ein Graph mit  $m$  Knoten und Eigenwerten  $\mu_1(G), \dots, \mu_m(G)$  und  $H$  ein Graph mit  $n$  Knoten und Eigenwerten  $\mu_1(H), \dots, \mu_n(H)$ . Dann hat der Graph  $G \times H$  genau*

$$\frac{1}{nm} \prod_{i,j} (\mu_i(G) + \mu_j(H)) 1_{\{\mu_i(G) + \mu_j(H) \neq 0\}}$$

*Spannbäume.*

### **Beweis:**

Für diesen Beweis werden wir die Gestalt der Laplacematrix von  $G \times H$  ausnutzen und dann mit Hilfe der linearen Algebra Aussagen über die Eigenwerte treffen.

Wir beobachten, dass die Laplacematrix von  $G \times H$  die Kroneckersumme der Laplacematrizen von  $G$  und  $H$  ist. Für mehr Informationen zur Kroneckersumme können wir in [6] nachsehen.

Aus der linearen Algebra wissen wir nun, dass die Eigenwerte der Kroneckersumme  $L(G) \oplus L(H)$  genau  $\mu_i(G) + \mu_j(H)$  mit  $i \in \{1, \dots, m\}$  und  $j \in \{1, \dots, n\}$  sind.

Mit Kirchhoffs Matrix-Tree-Theorem folgt nun

$$k(G \times H) = \frac{1}{nm} \prod_{i,j} (\mu_i(G) + \mu_j(H)) 1_{\{\mu_i(G) + \mu_j(H) \neq 0\}}$$

Damit ist unser Satz bewiesen.

□

Dieses Hilfsmittel erleichtert uns das Berechnen der Anzahl von Spannbäumen kartesischer Produkte von Graphen erheblich. Um das zu demonstrieren, werden wir uns nun drei verschiedene Klassen davon als Beispiele ansehen.

### **Beispiel 4.7.2 (Zylinder-Graph)**

Als erstes, sehr anschauliches Beispiel betrachten wir Zylinder-Graphen  $C_{m,n}$ ; diese sind das kartesische Produkt eines Pfad-Graphen  $P_m$  mit einem Kreisgraphen  $C_n$ .

In der Abbildung 7 sehen wir den Zylinder-Graphen  $C_{3,8}$ .

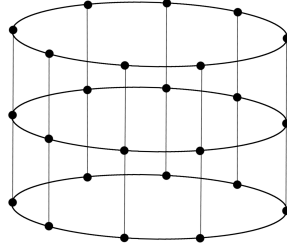


Abb. 7:  $C_{3,8}$

### Beispiel 4.7.3 (Torus-Graph)

Unser zweites Beispiel sind kartesische Produkte zweier Kreis-Graphen  $C_m, C_n$ . Man nennt diese dann auch Torus-Graphen, kurz  $T_{m,n}$ . Hier sehen wir so einen Graphen:

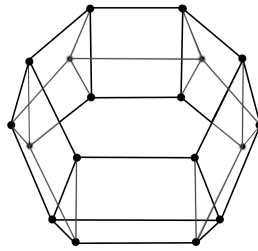


Abb. 8:  $T_{3,6}$

Da wir die Eigenwerte der Laplacematrix eines Kreis-Graphen im Kapitel Warm-up in Gleichung 2 schon berechnet haben können wir einfach Satz 4.7.1 anwenden und erhalten

$$k(T_{m,n}) = \frac{1}{mn} \prod_{j=1}^{n-1} 4 \sin^2 \left( \frac{\pi j}{n} \right) \prod_{i=1}^{m-1} 4 \sin^2 \left( \frac{\pi i}{m} \right) \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^{n-1} 4 \left( \sin^2 \left( \frac{\pi j}{n} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi i}{m} \right) \right)$$

Mit Gleichung 1 können wir schließen

$$k(T_{m,n}) = mn 4^{(n-1)(m-1)} \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^{n-1} \left( \sin^2 \left( \frac{\pi j}{n} \right) + \sin^2 \left( \frac{\pi i}{m} \right) \right)$$

### Beispiel 4.7.4 (kartesisches Produkt von vollständigen Graphen)

Unser Drittes und letztes Beispiel in diesem Kapitel sind kartesische Produkte von vollständigen Graphen. Zu dieser Klasse gehört der Graph, der die legalen Züge des Turms (engl. "rook") auf dem Schachbrett modelliert (siehe Abb. 9). Die Graphen dieser Klasse werden daher im Englischen auch als "Rook Graph" bezeichnet.

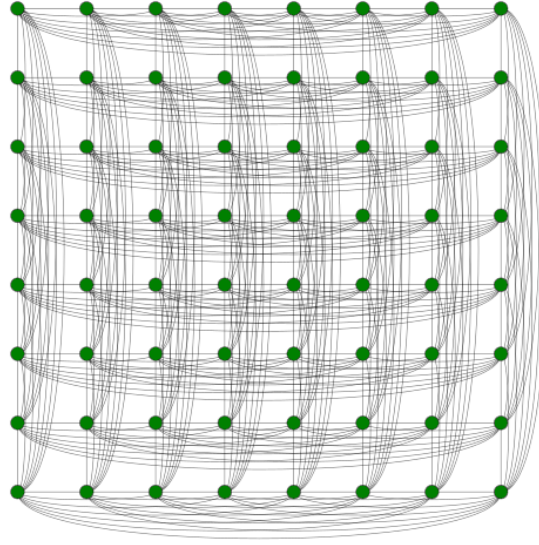


Abb. 9: Rooks-Graph  $K_8 \times K_8$

Quelle: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rook\%27s\\_graph.svg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Rook\%27s_graph.svg)

Um das zu zeigen, berechnen wir zunächst die Eigenwerte der Laplacematrix von vollständigen Graphen und wenden dann Satz 4.7.1 an. Für  $n \in \mathbb{N}$  ist

$$L(K_n) = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & \dots & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \dots & \dots & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & -1 & \dots & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & \dots & \dots & \dots & -1 & n-1 \end{pmatrix}$$

Wir beobachten, dass das eine zirkuläre Matrix ist, also ist  $K_n$  ein zirkulärer Graph; Die Eigenwerte kennen wir also schon aus dem entsprechenden Kapitel. Wir setzen die entsprechenden Einträge von  $L(K_n)$  in 6 ein und erhalten  $\lambda_0 = 0$ , sowie

$$\begin{aligned} \lambda_j &= (n-1) - \sum_{k=2}^n \exp\left(\frac{2\pi i j(k-1)}{n}\right) \\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\frac{2\pi i j(k)}{n}\right) \\ &= n - \left( \frac{1 - \exp\left(\frac{2\pi i j((n-1)+1)}{n}\right)}{1 - \exp\left(\frac{2\pi i j}{n}\right)} \right) \\ &= n \end{aligned}$$

für  $j \in \{1, \dots, n-1\}$ , wobei wir die geometrische Summe verwendet haben; das durften wir, weil hier  $\exp\left(\frac{2\pi i j}{n}\right) \neq 1$  ist.

Somit sind die Eigenwerte von  $L(K_n)$  0 mit Multiplizität 1 und  $n$  mit Multiplizität  $n-1$ .

Sei nun  $m \in \mathbb{N}$ . Für das kartesische Produkt  $K_m \times K_n$  gilt nun mit Satz 4.7.1

$$k(K_m \times K_n) = \frac{1}{nm} (m+0)^{m-1} (n+0)^{n-1} (m+n)^{(m-1)(n-1)}$$



## References

- [1] T. L. Austin. The enumeration of point labelled chromatic graphs and trees. *Canadian Journal of Mathematics*, 1960.
- [2] J. Bang-Jensen and G. Z. Gutin. Digraphs. *Springer Monographs in Mathematics*, 2009.
- [3] Z. Bogdanowicz. Formulas for the Number of Spanning Trees in a Fan. *Applied Mathematical Sciences (Ruse)*, 2008.
- [4] S. N. Daoud. Generating formulas of the number of spanning trees of some special graphs. *The European Physical Journal Plus*, 2014.
- [5] V. Giovannetti and S. Severini. Kirchhoffs Matrix-Tree Theorem Revisited: Counting Spanning Trees with the Quantum Relative Entropy. *Advances in Network Complexity*, 2013.
- [6] R. A. Horn and Charles R. J. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, 1991.
- [7] D. Janezic, A. Milicevic, S. Nikolic, and N. Trinajstic. *Graph-Theoretical Matrices in Chemistry*. CRC Press, 2015.
- [8] G. Kirchhoff. Ueber die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird. *Annalen der Physik und Chemie*, 148, 1847.
- [9] D. Lau. *Algebra und Diskrete Mathematik. Vol. 2, Lineare Optimierung, Graphen und Algorithmen, Algebraische Strukturen und Allgemeine Algebra mit Anwendungen*. Springer, 2004.
- [10] C. D. Meyer. *Matrix analysis and applied linear algebra*. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005.
- [11] J Sedlacek. On the skeletons of a graph or digraph. *Proc. Calgary International Conference on Combinatorial Structures and their Applications*, Gordon and Breach, 1970.
- [12] N. J. A. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences. <https://oeis.org/A000045>. abgerufen am 24. Juli, 2020.
- [13] J. F. Wang and C. S. Yang. On the number of spanning trees of circulant graphs. *International Journal of Computer Mathematics*, 1984.
- [14] F. Yakoubi, N. EL Khattabi, and M. El Marraki. Computing Spanning Trees In Some Multiple Planar Graphs. *International Journal of Scientific & Technology Research*, 2019.



# Selbständigkeitserklärung

Ich versichere hiermit, die vorliegende Arbeit mit dem Titel

## **Das Matrix-Tree-Theorem**

selbständig verfasst zu haben und keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel verwendet zu haben.

Christopher Mann

München, den 30. Juli, 2020