

## 0.1 $W_n$ (Räder)

Der vorletzte Stop auf unserer Reise sind die sogenannten Wheel-Graphen. Hier wird zu einem zyklischen Graphen  $C_n$  mit Knoten  $\{v_1, \dots, v_n\}$ ,  $n \geq 3$  ein weiterer Knoten  $z$  hinzugefügt, der mit allen anderen Knoten benachbart ist, sodass der Wheel-Graph  $W_n$  entsteht (Achtung:  $W_n$  hat  $n + 1$  Knoten). Um eine Formel für die Berechnung der Anzahl der Spannbäume eines solchen Graphen herzuleiten, lassen wir von [?] inspirieren. Unser Ziel ist es folgendes zu zeigen:

$$k(W_n) = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2 \quad (1)$$

Wir beobachten, dass wir den Fan-Graphen  $F_n$  bekommen, wenn wir die Kante  $v_1 v_n$  aus  $W_n$  entfernen. Die Anzahl der Spannbäume von  $F_n$  kennen wir bereits von oben. Wir werden zeigen, dass  $k(W_n) = k(F_n) + 2 \sum_{j=2}^n k(F_{j-1})$ ; damit können wir danach die Anzahl der Spannbäume von  $W_n$  berechnen. Als ersten Schritt dahin beweisen wir, dass für  $n \geq 3$  die nachfolgende rekursive Beziehung gilt:

$$k(W_{n+1}) = k(F_{n+1}) + k(F_n) + k(W_n) \quad (2)$$

Um das zu tun, werden die Spannbäume von  $W_{n+1}$  in drei verschiedene Klassen einteilen:

- 1) Alle Spannbäume, die die Kante  $v_1 v_{n+1}$  nicht enthalten; das sind genau die Spannbäume von  $F_{n+1}$ .
- 2) Alle Spannbäume, die die Kante  $v_1 v_{n+1}$  enthalten, jedoch nicht die Kante  $v_1 z$ ; das sind die Spannbäume des Graphen  $W_{n+1}/v_1 v_{n+1}$ , den wir durch Kontraktion der Kante  $v_1 v_{n+1}$  aus  $W_{n+1}$  erhalten - dieser Graph ist aber  $W_n$ .
- 3) Alle Spannbäume, die die Kanten  $v_1 v_{n+1}$  und  $v_1 z$  beinhalten; das sind die Spannbäume des Graphen, den wir durch die Kontraktion der Kante  $v_1 z$  gewinnen, also von  $F_n$ , wie wir aus der nachfolgenden Grafik entnehmen können.

Wie wir sehr leicht sehen können ist jeder Spannbaum von  $W_{n+1}$  in genau einer dieser Klassen, also gilt die Rekursion.

Wir können jetzt - zum Beispiel durch vollständige Induktion über  $n \in \mathbb{N}$  - unsere Formel verifizieren. Nachdem wir im vorherigen Kapitel herausgefunden haben, wieviele Spannbäume Fan-Graphen haben, können wir das sofort in die Formel einsetzen, und erhalten:

Damit haben wir erfolgreich gezeigt, dass für die Anzahl der Spannbäume in  $W_n$  gilt: