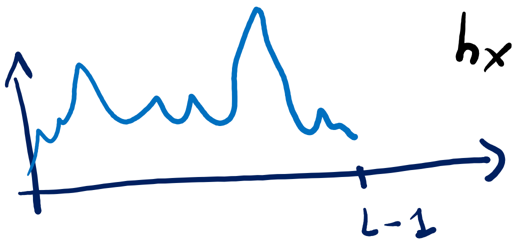
Equalizzazione istogramma (immagini a livelli di grigio) (o altra singola tonalità)

Immagine di partenza I, x variabile casuale (discreta), h_x istogramma normalizzato

distribuzione probabilità

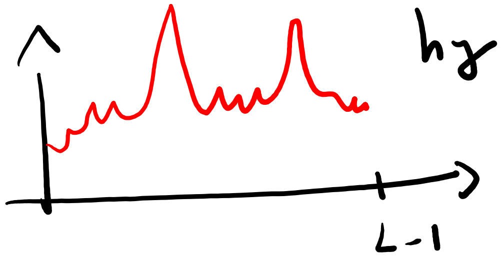
I

$\Rightarrow$



L = numero livelli di grigio

Immagine di arrivo J, y variabile casuale (discreta), h_y istogramma normalizzato



$$\boxed{\text{PROBLEMA: trovare } f,\ y = f(x), \text{ tale che } h_x \longrightarrow h_y}$$

CASO PARTICOLARE: Per equalizzazione si assume che $h_y = c_1$ (costante)

E' una richiesta "empirica", in generale potrei assegnare h_y in modo differente.

Nota con L livelli $\Rightarrow$ h_y ha valore costante $= \frac{1}{L-1} = c_1$

[0 — L-1]

Proprietà di f:

(1) f strettamente crescente, derivabile con f^{-1} derivabile

(2) $f(x) \in [0, L-1]$

Nota monotonia è richiesta per non alterare significato dell'immagine
regolarità è aggiunta per "comodità"

Sia $g = f^{-1}$ (g è derivabile per ipotesi). Supponiamo di passare nel continuo, quindi x, y v.a. continue.

$$F_y(t) = Pr\{y \le t\} = \text{probabilità valore pixel} \le t = \int_{-\infty}^{t} h_y(s)\,ds = \int_{0}^{t} h_y(s)\,ds$$

$$= Pr\{x \le g(t)\} = \int_{-\infty}^{g(t)} h_x(w)\,dw = \int_{0}^{g(t)} h_x(w)\,dw$$

[per definizione di g e per monotonia]

Per ipotesi abbiamo assunto che $h_y(s) = \frac{1}{L-1} \Rightarrow \int_0^t h_y(s)\,ds = \frac{t}{L-1}$

Derivando rispetto a t: $\frac{1}{L-1} = h_x(g(t))\, g'(t)$

Per definizione $g'(t) = \dfrac{1}{f'(g(t))}$, quindi, posto $z = g(t)$,

$$f'(z) = (L-1)\, h_x(z) \implies f(z) = (L-1) \int_0^z h_x(s)\, ds + f(0)$$

è ragionevole assumere $f(0) = 0$ [pixel nero, valore minimo, $\to$ pixel nero]

$$\implies f(z) = (L-1) \int_0^z h_x(s)\, ds$$

Nel caso discreto $h_x(s) \to$ costante a tratti; $\int_0^z \to \sum$ $\implies$

$$\boxed{f(z) = (L-1) \sum_{i=0}^{z} h_x(i)}$$

dove

$$\boxed{h_x(i) = \frac{\#\{\text{valore pixel} = i\}}{\sum_{j=0}^{L-1} \#\{\text{valore pixel} = j\}}}$$

dove $\#\{\dots\}$ indica la cardinalità di $\{\dots\}$