Esercizi Laboratorio Calcolo Numerico 1
- Settimana 6 -

Nota: per i comandi non esplicitamente introdotti nel video di spiegazione si può utilizzare `help` oppure `doc` dei comandi stessi

1. È dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con

$$A = \begin{bmatrix} 2002 & 2002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2002 & 2002 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2002 & 2002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2002 & 2002 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2002 & 2002 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2002 & 2002 \end{bmatrix},$$

   e $\mathbf{f}$ tale che la soluzione esatta sia il vettore $\mathbf{x} = (1, 1, \ldots, 1)^t$. Calcolare il numero di condizionamento $K_2(A) = ||A||_2||A^{-1}||_2$ e confrontarlo al variare di $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}$ con $K_\varepsilon(A) = \left(\frac{||\mathbf{x}-\mathbf{x}_\varepsilon||_2}{||\mathbf{x}||_2}\right) / \left(\frac{||A-A_\varepsilon||_2}{||A||_2}\right)$ essendo $\mathbf{x}_\varepsilon$ la soluzione del sistema perturbato $A_\varepsilon \mathbf{x}_\varepsilon = \mathbf{f}$, dove $(A_\varepsilon)_{23} = (A_\varepsilon)_{32} = (A_\varepsilon)_{54} = (A_\varepsilon)_{45} = 1 + \varepsilon$ e $(A_\varepsilon) = A$ altrove. Calcolare la soluzione dei sistemi perturbati usando il comando \ di Matlab.

2. Si consideri la matrice 20×20

$$B = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \varepsilon & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \varepsilon & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \varepsilon & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \varepsilon & 0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix},$$

   e le matrici

$$A_{n,\varepsilon} = nI_{20} - B + \varepsilon B^2, \quad n = 1, 2, 3, ...,$$

   con $\varepsilon = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$, dove I_{20} è la matrice Identica di ordine 20.

   - Trovare il minimo valore di n, sia esso N, affinché $\min(\lambda(A_{N,\varepsilon})) > 0$
   - Dopo aver calcolato i rapporti

$$r(\varepsilon) = \frac{K_2(B)}{K_2(A_{N,\varepsilon})}, \quad \varepsilon = 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$$

     si ipotizzi una relazione del tipo

$$r(\varepsilon) = C\varepsilon^p,$$

     e si deduca sperimentalmente il valore di p.

3. Per ogni $n = 2, 3, 4, ..., 15$ si consideri il vettore x di n punti equispaziati sull'intervallo $[0, 1]$ e la corrispondente matrice di Vandermonde $V(n)$ ottenuta dal comando `vander(x)`. Sia $K(n)$ il numero di condizionamento in norma infinito della matrice $V(n)$. Ipotizzando una relazione esponenziale fra n e $K(n)$ del tipo:

$$K(n) = C \cdot 2^{\alpha n}, \quad \alpha > 0,$$

si trovi sperimentalmente il valore di α osservando che

$$\frac{K(n)}{K(n-1)} = \frac{2^{\alpha n}}{2^{\alpha(n-1)}} = 2^{\alpha}, \quad \text{da cui si ottiene : } \alpha \approx \log_2 \frac{K(n)}{K(n-1)}.$$

Per ogni $n = 3, 4, ..., 15$ calcolare i rapporti

$$r(n) = \log_2 \frac{K(n)}{K(n-1)},$$

e dedurre il valore teorico di α.

4. Data la matrice A di dimensione $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} 3+\frac{1}{n} & -\frac{2}{n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{n} & 2+\frac{1}{n} & -\frac{4}{n} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2}{n} & 2+\frac{1}{n} & -\frac{6}{n} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & \frac{n-2}{n} & 2+\frac{1}{n} & -\frac{2(n-1)}{n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{n-1}{n} & 3-\frac{1}{n} \end{bmatrix}$$

calcolare le quantità $||A||_1, ||A||_2, ||A||_\infty$ per $n = 20, 40, 60$. Successivamente, dato il vettore $\mathbf{x}$ di dimensione n di componenti $x_i = \sin(\pi i)/n, i = 1, \dots, n$ e i corrispondenti vettori normalizzati

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||_1}, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||_2}, \quad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{x}}{||\mathbf{x}||_\infty},$$

calcolare le quantità $||A\mathbf{u}||_1, ||A\mathbf{v}||_2, ||A\mathbf{w}||_\infty$. Commentare i risultati.

5. Date le matrici quadrate A, B di dimensione $n = 10$:

$$A = \begin{pmatrix} n & 0 & ... & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & ... & 1 & 2 & -1 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 1 & 2 & -1 & ... & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & ...0 & 0 & -n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 & -n \\ -1 & 2 & 1 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & ... & 0 & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & 0 & ... & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & -1 & 2 & 1 \\ n & 0 & ... & 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix},$$

calcolare le quantità $K_\infty(A) \equiv \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$, $K_\infty(B) \equiv \|B\|_\infty \|B^{-1}\|_\infty$ e $r = K_\infty(A)/K_\infty(B)$.