Esercizi Laboratorio Calcolo Numerico 1
- Settimana 10 -

Nota: per i comandi non esplicitamente introdotti nel video di spiegazione si può utilizzare `help` oppure `doc` dei comandi stessi

1. Sia
$$f(x) = \mathrm{e}^{|x|}, \qquad x \in [-1, 1].$$

   1.1) Siano $P^e_{10}(x)$ e $P^e_{20}(x)$ gli interpolanti di Lagrange di grado $n = 10$ e $n = 20$, rispettivamente, della funzione $f(x)$ su nodi equispaziati.

   1.2) Siano inoltre $P^c_{10}(x)$ e $P^c_{20}(x)$ gli interpolanti di Lagrange di grado $n = 10$ e $n = 20$, rispettivamente, della funzione $f(x)$ su nodi di Chebyshev. Sia poi z il vettore ottenuto con il comando Matlab `z=-1:0.01:1`.

   Si calcolino gli errori
$$e^e_{10} := ||f(z) - P^e_{10}(z)||_\infty, \qquad e^e_{20} = ||f(z) - P^e_{20}(z)||_\infty$$
$$e^c_{10} := ||f(z) - P^c_{10}(z)||_\infty, \qquad e^c_{20} := ||f(z) - P^c_{20}(z)||_\infty$$

   Si commentino i risultati ottenuti.

2. Data la funzione $f(x) = e^{-x^2}$, sia $s_{[n]}$ la spline lineare che interpola f in $n+1$ nodi equispaziati dell'intervallo $I = [-1, 2]$.

   Implementare una procedura che, a partire da $n = 2$, raddoppi ogni volta il numero n dei sottointervalli e si arresti in corrispondenza del più piccolo valore n per cui sono soddisfatte le condizioni
$$E_1 \equiv \sqrt{\sum_{j=0}^{300} [f(t_j) - s_{[\overline{n}]}(t_j)]^2} < 10^{-2}, \qquad E_2 \equiv \max_{j=1,\dots,301} |f(t_j) - s_{[\overline{n}]}(t_j)| < 10^{-2},$$
   dove i $t_j,\ j = 0, ..., 300$ sono 301 nodi equispaziati di I: $t_0 = -1, ..., t_{300} = 2$.

3. Sia $f(x) = \log(5 + x)$ definita nell'intervallo $I = [a, b], a = -2, b = 2$. Si considerino su tale intervallo $(n + 1)$ nodi di interpolazione ottenuti come immagine sull'intervallo I dei nodi di Gauss-Chebyshev (C) o dei nodi di Gauss-Lobatto (L), questi ultimi definiti sull'intervallo di riferimento $[-1, 1]$ come
$$\widehat{x}_k = -\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right), \qquad k = 0, \dots, n.$$

   Siano, rispettivamente, $p_{n,C}$ e $p_{n,L}$ i polinomi interpolatori ottenuti utilizzando i nodi (C) oppure (L).

   Dati i punti $z_i = a + ih, i = 0, \dots, 1000,\ h = (b - a)/1000$:

   3.1) Si calcoli per $n = 4, 6, 8$ l'errore $e_{n,C} = \max_{z_i, i=0,\dots,1000} |f(z_i) - p_{n,C}(z_i)|$ commesso utilizzando i nodi di tipo (C) e l'errore $e_{n,L} = \max_{z_i, i=0,\dots,1000} |f(z_i) - p_{n,L}(z_i)|$ commesso utilizzando i nodi di tipo (L).

4. Dati la funzione $f(t) = \cos(t)\exp(t)$, i nodi $x_k = k\pi/12$, $k = 0, \dots, 12$ e 401 punti equispaziati $\{z_i\}_{i=0}^{400}$ su $[0, \pi]$, calcolare, $\forall i = 0, \dots, 400$ i valori:

   4.1) $s_m(z_i)$, dove per $m = 1$ e $m = 3$, s_1 e s_3 sono rispettivamente le spline lineare e cubica interpolanti i dati $(x_k, f(x_k))), k = 0, \dots, 12$

   4.2) $p(z_i)$, con p polinomio di Lagrange di grado 12 interpolante i dati $(\eta_j, f(\eta_j)), j = 0, \dots, 12$, dove gli $\eta_j, j = 0, \dots, 12$ sono i nodi di Chebyshev su $[0, \pi]$. Calcolare gli errori:

$$E_m = \sqrt{\sum_{j=0}^{400} [f(z_j) - s_m(z_j)]^2}, \; m = 1, 3 \qquad E_p = \sqrt{\sum_{j=0}^{400} [f(z_j) - p(z_j)]^2}$$