Il metodo di Newton come metodo di punto fisso.

$$g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \Rightarrow g'(\alpha) = 0.$$

Infatti:

$$g'(x) = 1 - \frac{f'(x)f'(x) - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2},$$

e, in particolare,

$$g'(\alpha) = 1 - \frac{[f'(\alpha)]^2 - \overbrace{f(\alpha)}^{=0} f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} = 1 - \frac{[f'(\alpha)]^2}{[f'(\alpha)]^2} = 0.$$

Si può verificare che $g''(\alpha) \neq 0$.
Se la radice α ha molteplicità $p > 1$, il metodo di Newton è del primo ordine con:

$$g'(\alpha) = 1 - \frac{1}{p}.$$

Infatti, se si considera $f(x) = (x-\alpha)^p h(x)$, con $h(\alpha) \neq 0$, si ha:

$$f'(x) = p(x-\alpha)^{p-1}h(x) + (x-\alpha)^p h'(x) = (x-\alpha)^{p-1}[ph(x) + (x-\alpha)h'(x)]$$

$$g(x) = x - \frac{(x-\alpha)^p h(x)}{(x-\alpha)^{p-1}[ph(x) + (x-\alpha)h'(x)]} = x - (x-\alpha)\frac{h(x)}{ph(x) + (x-\alpha)h'(x)}$$

Derivando:

$$g'(x) = 1 - \frac{h(x)}{ph(x) + (x-\alpha)h'(x)} - (x-\alpha)\frac{d}{dx}\left[\frac{h(x)}{ph(x) + (x-\alpha)h'(x)}\right].$$

In particolare:

$$g'(\alpha) = 1 - \frac{\boxed{h(\alpha)}}{p\boxed{h(\alpha)} + \underbrace{(\alpha-\alpha)}_{=0} h'(\alpha)} - \underbrace{(\alpha-\alpha)}_{=0}\frac{d}{dx}\left[\frac{h(x)}{ph(x) + (x-\alpha)h'(x)}\right]_{x=\alpha} = 1 - \frac{1}{p}$$

Dunque

$$g'(\alpha) = 1 - \frac{1}{\boxed{p}} = 0 \iff p = 1$$

Il metodo di Newton modificato:

$$g(x) = x - \boxed{p}\frac{f(x)}{f'(x)},$$

ha ordine 2.

Osservazione.
Se α ha molteplicità p per f, allora α ha molteplicità $p-1$ per f' e α ha molteplicità 1 per $\Phi(x) := \frac{f(x)}{f'(x)}$. $\Rightarrow$ Si può applicare il metodo di Newton 'classico' alla funzione Φ, ottenendo nuovamente un metodo di ordine 2.