

Sia $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la matrice ottenuta estraendo la parte *triangolare inferiore*, inclusa la diagonale, dalla matrice di Hilbert H_n di ordine n .

Si calcoli (senza usare il comando Matlab `det`) il determinante d_n della matrice A_n , sfruttando la particolare struttura della matrice stessa e ricordando che

$$(H_n)_{i,j} = \frac{1}{(i+j-1)}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Si riporti il valore del determinante d_n .

Si calcoli (senza usare il comando Matlab `inv`) l'inversa della matrice A_n .

A tale scopo, essendo $A_n A_n^{-1} = I_n$, si implementi una procedura che consiste nella risoluzione di n sistemi lineari del tipo $A_n \mathbf{u}_i = \mathbf{e}_i$, $i = 1, \dots, n$, dove \mathbf{u}_i è la i -esima colonna della matrice A_n^{-1} ed \mathbf{e}_i è l' i -esimo vettore della base canonica.

Si riportino gli elementi di A_n^{-1} .

Utilizzare $n = 5$.

$$A_n \cdot \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ \hline \end{array}$$

$$A_n \cdot A_n^{-1} = I_n$$