

A.A. 2020 - 2021

Elaborazione dell'Immagine

Alberto Alzati, Giovanni Naldi
Dipartimento di Matematica
“F. Enriques”

Il modulo – Lezione 2

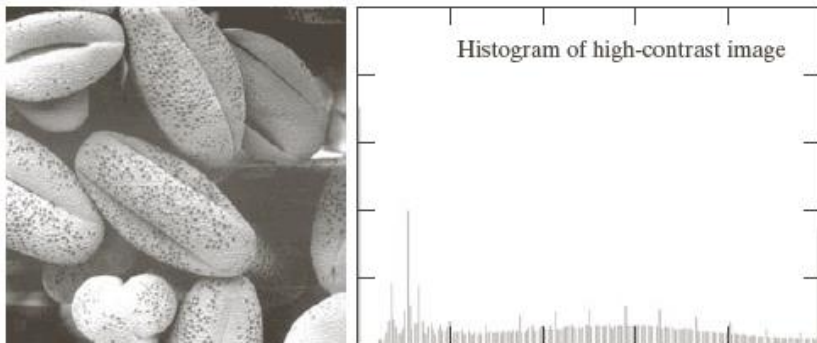
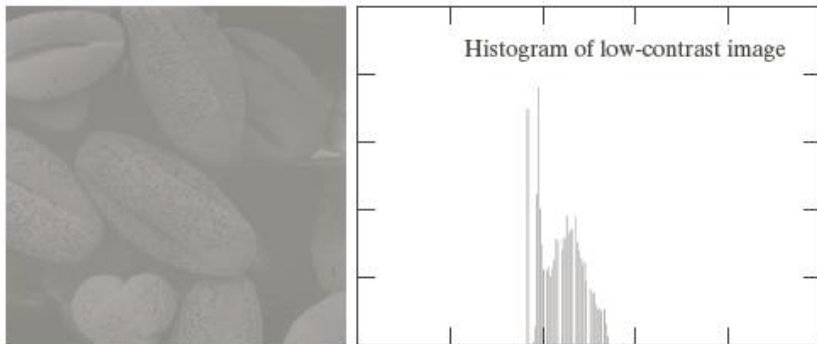
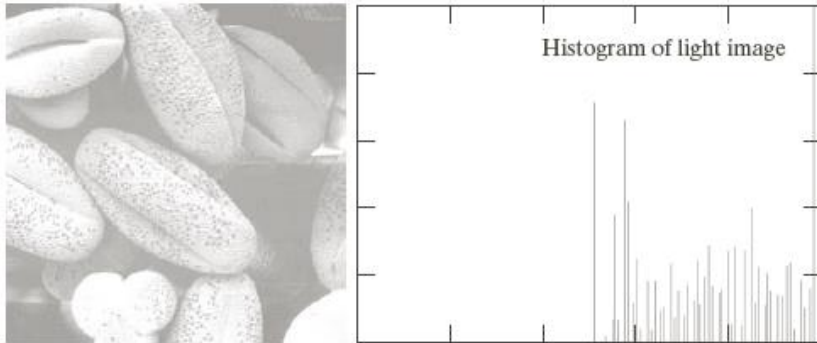
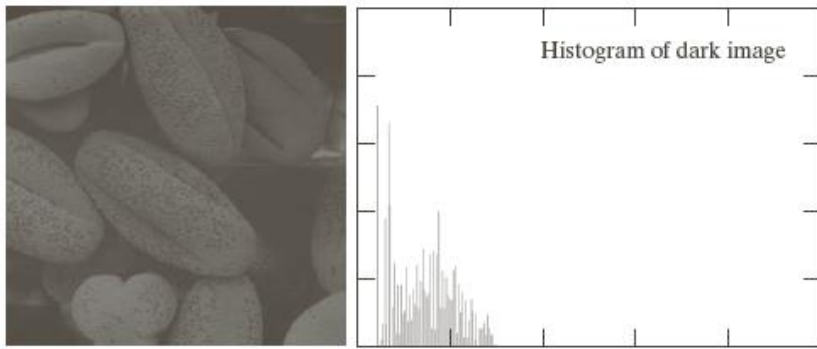
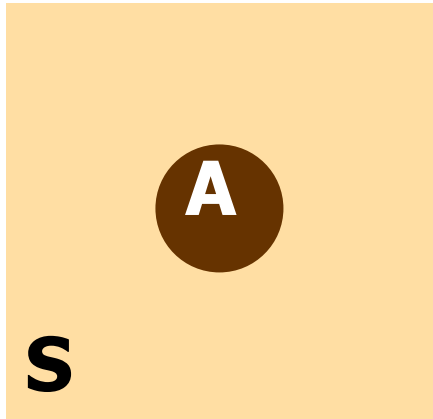


Foto dello stesso soggetto in diverse in differenti situazioni.

Empiricamente: la foto risulta migliore (dal punto di vista del contrasto) se l'istogramma è «uniforme»

Contrasto

E' uno dei parametri fondamentali per valutare la qualità di un'immagine. Un elevato contrasto consente di osservare anche piccoli dettagli, rendendoli distinguibili dallo sfondo.



Per un'immagine monocromatica può essere definito come la variazione relativa del valore assunto dai pixel appartenenti ad una zona **A** dell'immagine rispetto allo sfondo **S**.

$$c = \frac{\Delta i}{i} = \frac{i_a - i_s}{i_s}$$

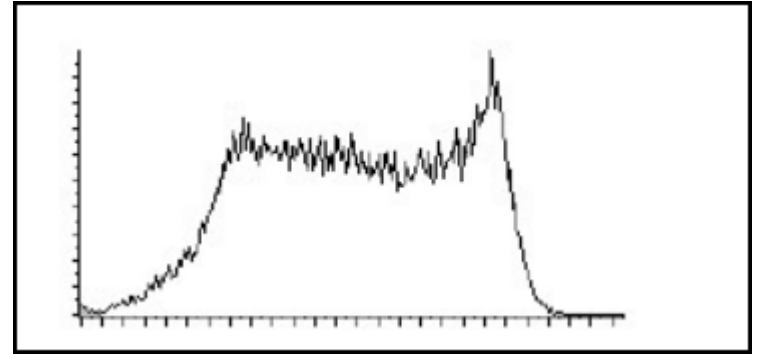
i_a valor medio intensità dell'immagine valutato sull'area A

i_s valor medio intensità dell'immagine valutato sullo sfondo S

Equalizzazione dell'istogramma

Considero il caso **continuo**, normalizzando i valori dei pixel, sia:

- $X \in [0,1]$, il valore del pixel e $h(X)$ la corrispondente densità;
- Y valore trasformato, $Y=Y(X)$, con densità $g(Y)$



Desidero che $g(Y)=C=\text{costante}$ (sperimentalmente le immagini con un istogramma approssimativamente uniforme presentano un miglior contrasto).

Proprietà per la $Y(X)$:

- 1) Y sia monotona strettamente crescente;
- 2) $Y(X) \in [0,1]$ per $X \in [0,1]$.

Possiamo pensare X ed Y come variabili casuali, abbiamo per la funzione di ripartizione di X e Y :

$$F_X(t) = P\{X \leq t\}, \quad F_Y(t) = P\{Y(X) \leq t\}$$

Quindi: $F_Y(t) = P\{Y(X) \leq t\} = P\{X \in Y^{-1}([-\infty, t])\} = \int_{-\infty}^{Y^{-1}(t)} h(x) dx$ Da cui:

$$g(t) = F_Y'(t) = (Y^{-1}(t))' h(Y^{-1}(t)), \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Obiettivo: $g = C = \text{costante}$. Dalla relazione Precedente ed utilizzando derivata funzione inversa, segue che:

$$Y(X) = \frac{1}{C} \int_0^X h(s) ds + Y(0), \quad (h(s) > 0)$$

Possiamo scegliere $Y(0)=0$, da cui

$$Y(X) = \frac{1}{C} \int_0^X h(s) ds$$

Nel caso discreto non posso parlare di densità di probabilità, lavoro con le **frequenze**, ovvero con l'istogramma normalizzato H , dove $H(i)$ rappresenta il numero di pixel con livello di grigio i diviso per il numero totale di pixel.

La trasformata puntuale si scrive quindi (qui consideriamo il caso di 256 differenti livelli di grigio, da 0 a 255):

$$Y(X) = 255 \sum_{i=0}^X H(i)$$

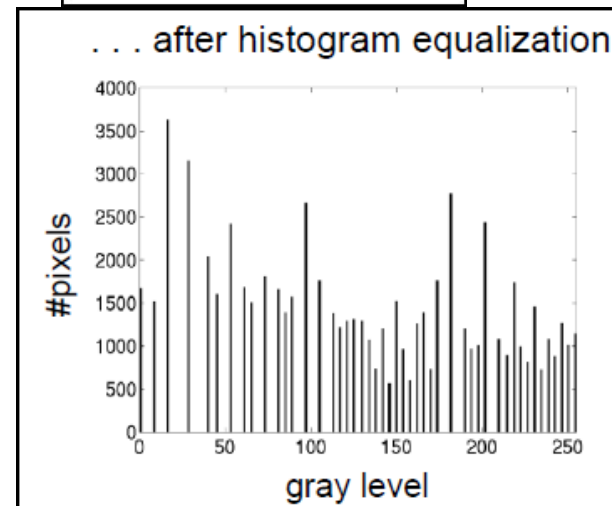
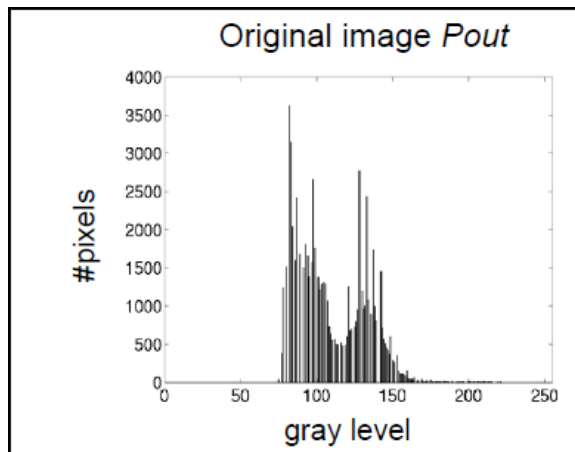
Più in generale:

$$Y(X) = 255 \frac{\sum_{i=0}^X [H(i)]^m}{\sum_{i=0}^{255} [H(i)]^m}$$

Con $m=1$ equalizzazione, $m<0$ sotto-equalizzazione, $m>1$ sovra-equalizzazione

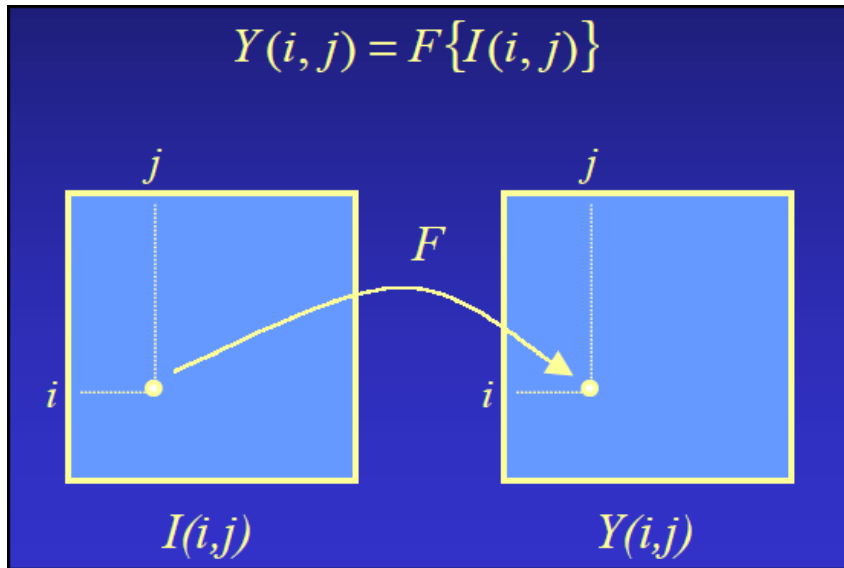


Equalizzazione ...

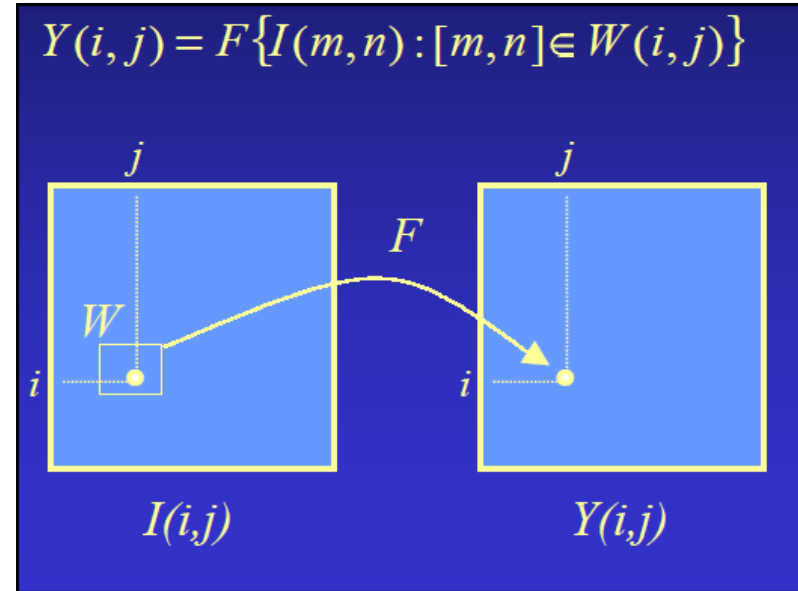


Operatori $F: I \rightarrow Y$, I e Y immagini

Operatori puntuali



Operatori locali

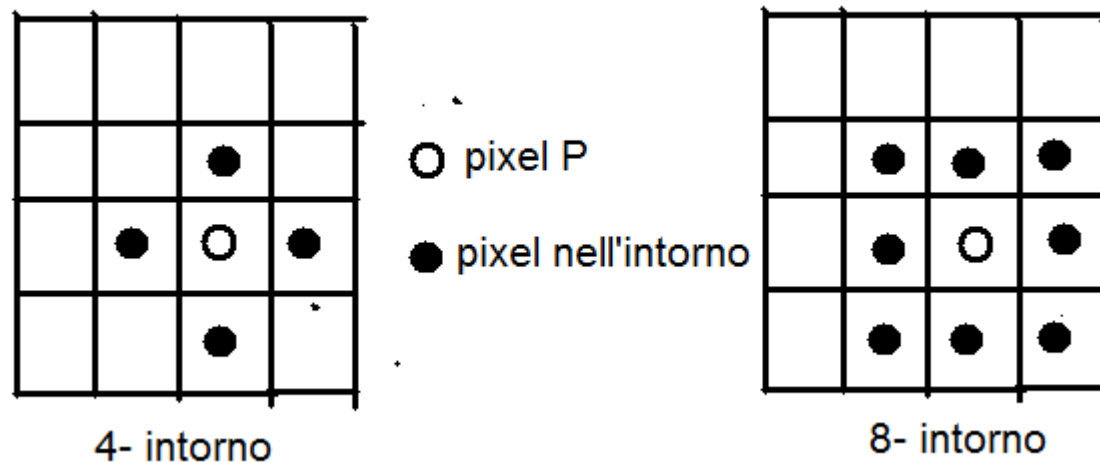


[Ci sono anche Operatori Globali]

Nozione di intorno di un pixel p.

Tra i più utilizzati tipi di intorno di un pixel p di coordinate (x,y):

- 4-intorno $N_4(P)$, pixel con coordinate (x+1,y), (x,y+1), (x,y-1), (x-1,y)
- 8-intorno $N_8(P)$, pixel con coordinate come per il 4-intorno con anche i pixel diagonali, (x-1,y-1), (x-1,y+1), (x+1,y-1), (x+1,y+1).



[Non sono gli unici intorni possibili]

Esempio, operatore locale.

$A = \text{insieme di pixel } \{P_0, P_1, \dots, P_M\} \rightarrow P$ che realizza la migliore approssimazione

- Nel senso dei minimi quadrati $\| \cdot \|_2$
(media aritmetica)

oppure

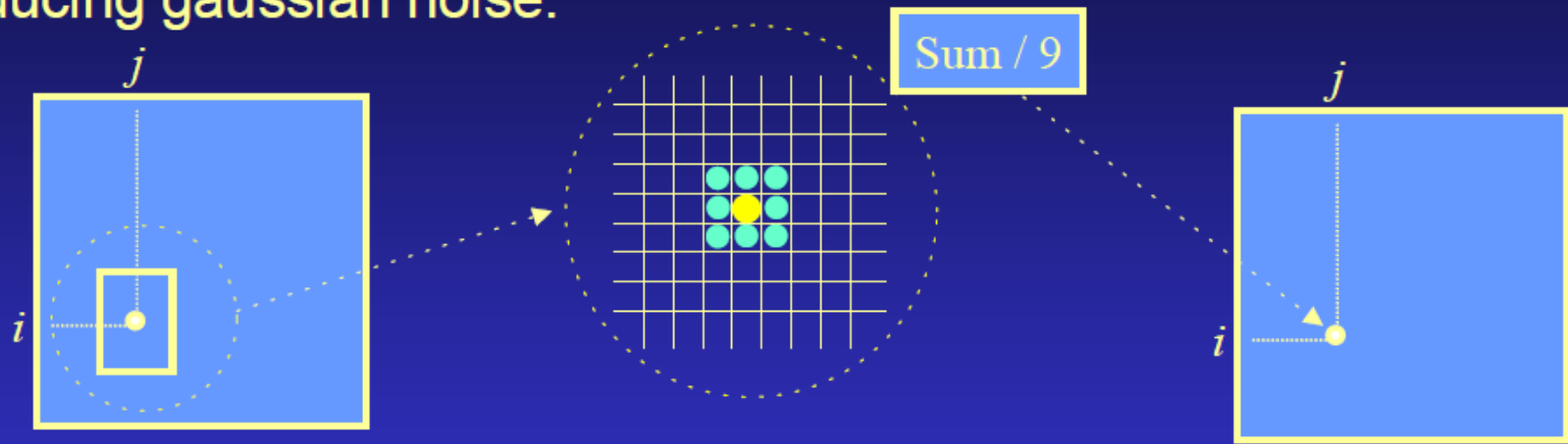
- Nel senso di $\| \cdot \|_1$
(Mediana)

oppure

- Nel senso di $\| \cdot \|_\infty$
(punto medio segmento (min P_i , max P_i))

Mean Filters

Every pixel is changed with the arithmetic mean computed inside a neighbourhood centred at the pixel position. Quite powerful for reducing gaussian noise.



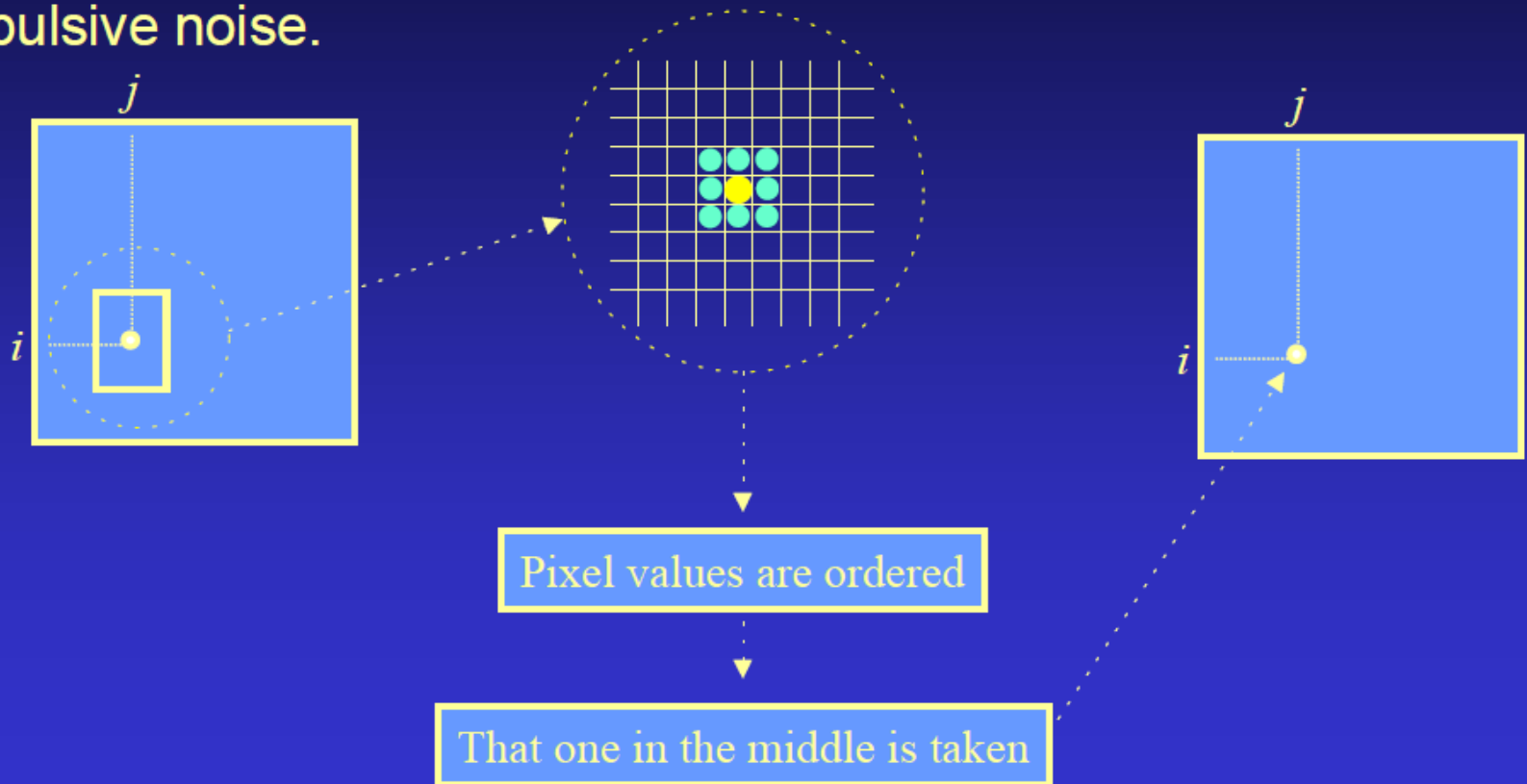
The pixels in the window are weighted by a set of weights and added:

$$\begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1/16 & 1/8 & 1/16 \\ 1/8 & 1/4 & 1/8 \\ 1/16 & 1/9 & 1/16 \end{bmatrix}$$

Median Filter

Every pixel is changed with the median value computed inside a neighbourhood centred at the pixel position. Powerful for reducing impulsive noise.



Mean (Average) Filter



Added Gaussian noise with variance 100.



Mean filtered 5x5 window. The image is defocused.

Mean (Average) Filter



Added shot noise with 5% percentage.



Mean filtered 5x5 window. The image is defocused and disturbed.

Median Filter



Added shot noise with 5% percentage.



Median filtered, 3x3 window. The image is slightly defocused.

Median Filter



Added Gaussian noise with variance 100.



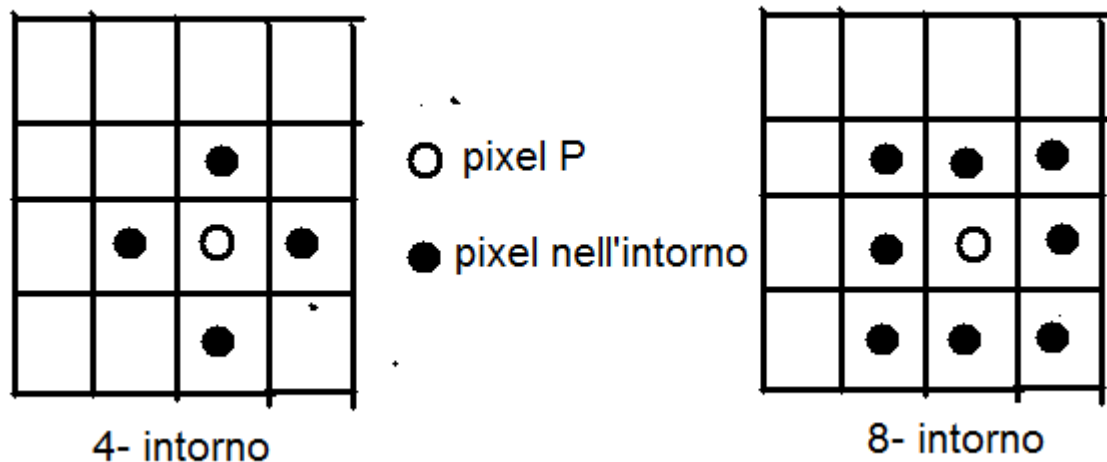
Median filtered, 3x3 window. The image is slightly defocused.

OPERATORI LOCALI

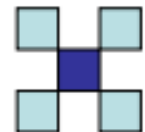
Nozione di intorno di un pixel p .

Tra i più utilizzati tipi di intorno di un pixel p di coordinate (x,y) :

- 4-intorno $N_4(P)$, pixel con coordinate $(x+1,y)$, $(x,y+1)$, $(x,y-1)$, $(x-1,y)$
- 8-intorno $N_8(P)$, pixel con coordinate come per il 4-intorno con anche i pixel diagonali, $(x-1,y-1)$, $(x-1,y+1)$, $(x+1,y-1)$, $(x+1,y+1)$.



[Non sono gli unici intorni possibili], per esempio $N_D(P)$,



Esistono delle relazioni di base tra pixel in un'immagine:

- **adiacenza**: un pixel **q** è **4-adiacente** a **p** se $q \in N_4(p)$, ed è **8-adiacente** se $q \in N_8(p)$;
- **connettività**: due pixel si dicono **connessi**, se sono adiacenti e se soddisfano un criterio di similarità del livello di grigio. Più in generale, il criterio di similarità può consistere nell'appartenenza di entrambi i valori di grigio ad un insieme V ;
- **regioni**: si definisce **regione R** un sottoinsieme di pixel dell'immagine tra loro connessi.
- **contorni**: **il contorno** di una regione è l'insieme di pixel della regione **R** che hanno uno o più pixel adiacenti che non appartengono a **R**.
- **due insiemi di pixel** S_1 e S_2 sono **adiacenti** se almeno un pixel di S_1 è connesso con almeno un pixel di S_2 ;
- **un cammino (path)** dal pixel **p** di coordinate (x,y) al pixel **q** di coordinate (s,t) è una sequenza di pixel distinti di coordinate: $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ dove $(x_0, y_0) = (x, y)$ e $(x_n, y_n) = (s, t)$ e, inoltre, per $1 \leq i \leq n$, (x_i, y_i) è adiacente a (x_{i-1}, y_{i-1}) ; n è la lunghezza del cammino;
- dati due pixel **p** e **q** di un sottoinsieme **S** dell'immagine, **p** è connesso a **q** in **S** se esiste un cammino tra **p** e **q** interamente costituito da pixel di **S**.

Relazioni tra pixel (adiacenza)

In base alla relazione di adiacenza spaziale adoperata, si definiscono i seguenti tipi di connettività (V è un prefissato insieme di valori di grigio):

4-adiacenza: due pixel p e q con valori di grigio in V si dicono 4-connessi se q è nell'insieme $N_4(p)$;

8-adiacenza: due pixel p e q con valori di grigio in V si dicono 8-connessi se q è nell'insieme $N_8(p)$;

m (mixed)-adiacenza: due pixel p e q con valori di grigio in V si dicono m -connessi se: q è nell'insieme $N_4(p)$, oppure
 q è nell'insieme $N_8(p)$, e l'insieme $N_4(p) \cap N_4(q)$ non ha pixel con valori in V

Attenzione: possibili paradossi topologici.

Esempio (Teorema della curva di Jordan)

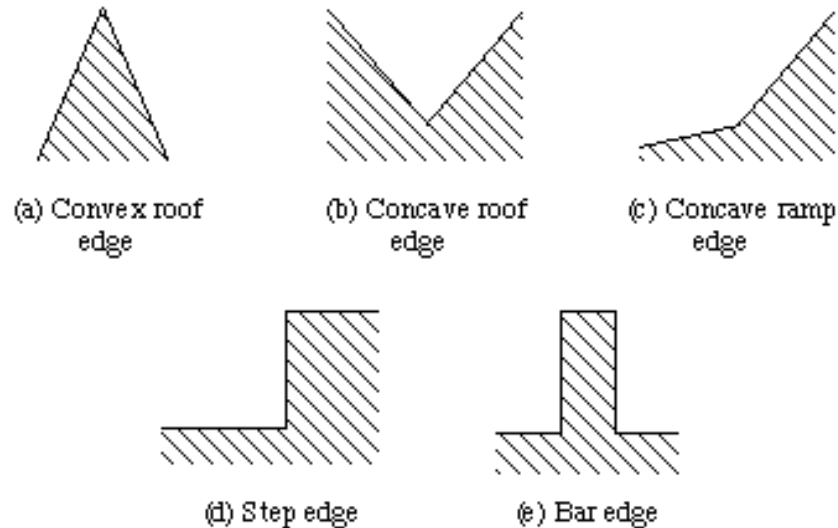
Teorema *Sia C una curva di Jordan nel piano \mathbb{R}^2 . Il suo complementare $\mathbb{R}^2 \setminus C$ è costituito da esattamente due componenti connesse, delle quali una è limitata e l'altra è illimitata e la curva C è il loro bordo comune.*

Vale ancora nel piano discreto dei pixel? In generale no (Esercizio: trovare un controesempio)

Alla ricerca del bordo perduto

Edge detection.

An edge point can be regarded as a point in an image where a discontinuity (in gradient) occurs across some line. A discontinuity may be classified as one of several types:



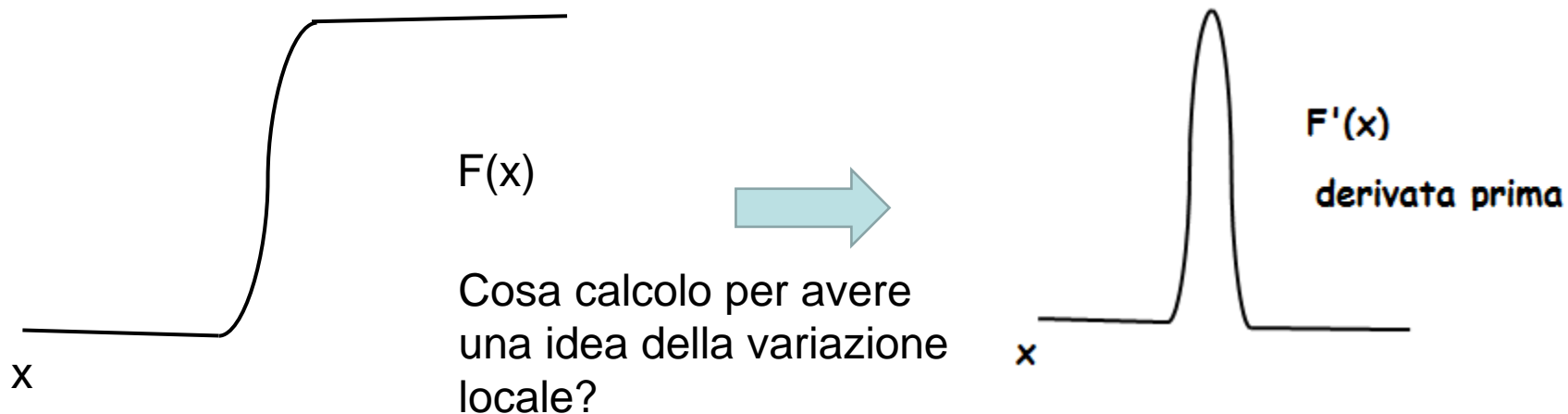
“Classical method”:

- ◆ Discrete approximation of differential operator
- ◆ Template matching

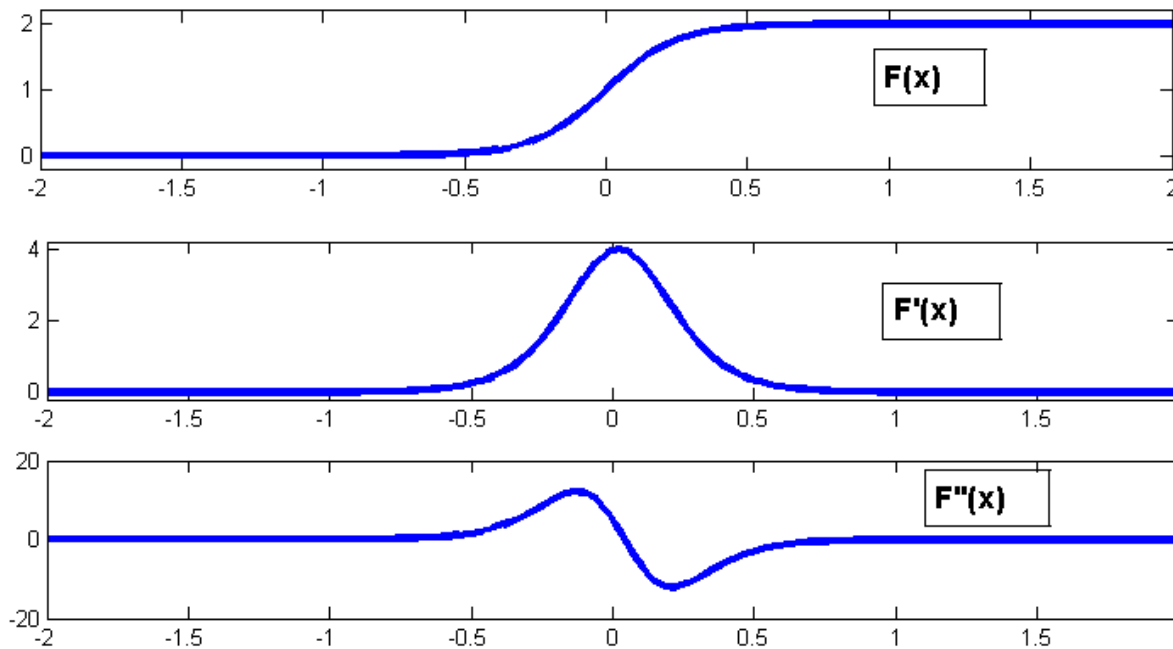
Esempio



Considero la “rappresentazione analitica”, Caso 1D, $F(x)$, con F regolare



NOTA: è possibile utilizzare anche derivate di ordine superiore.



Massimi $|F'(x)|$

Zero
Crossing

$+-$

$-+$

$F''(x)$

Problema: siamo in un ambito discreto

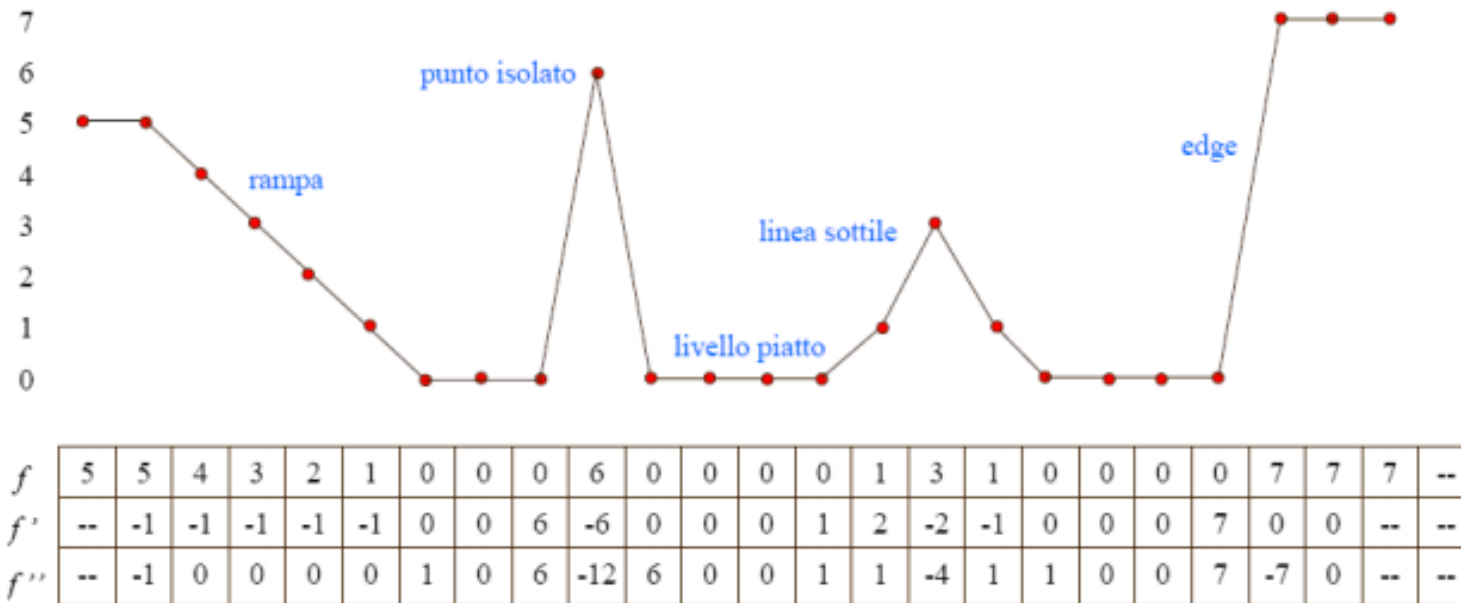
“derivata” \approx “rapporto incrementale” \approx “variazione relativa ai punti di un intorno”

Come classificare gli zero crossing?

Esempi.

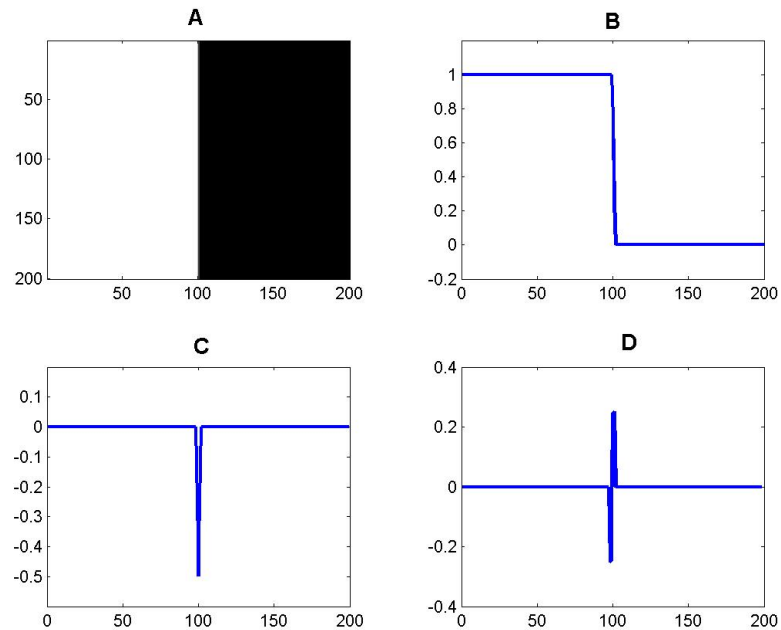
$$F'(x) \approx \frac{F(x+h) - F(x)}{h} ; \quad F''(x) \approx \frac{F(x+h) - F(x) + F(x-h)}{h^2}$$

Nel nostro caso possiamo assumere $h=1$.

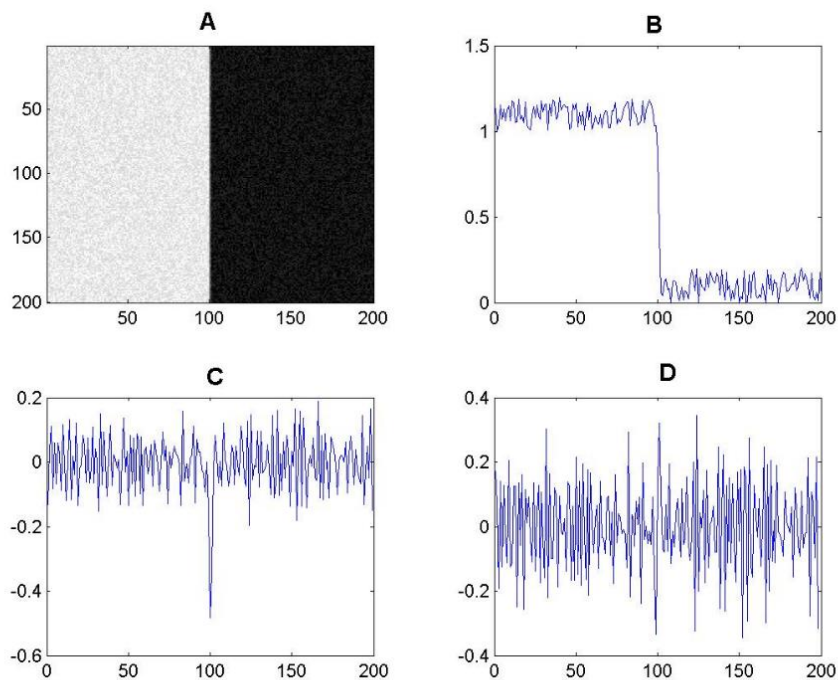


Nota. Occorrono condizioni per i primi e ultimi valori (pixel estremità segnale)

Caso discreto, un edge ideale

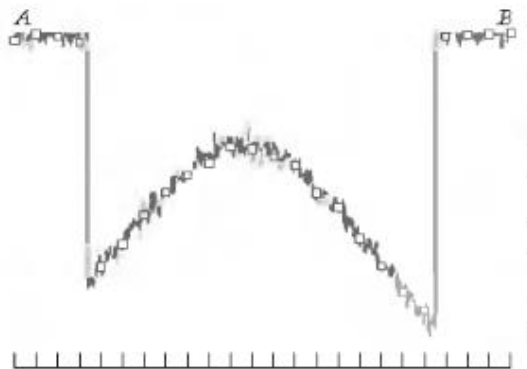
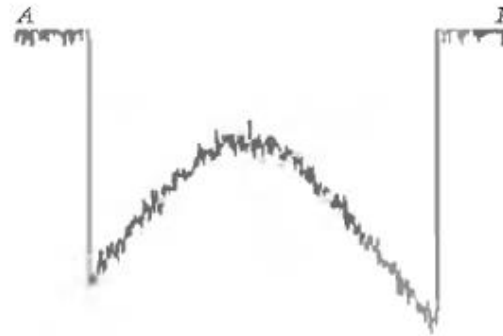
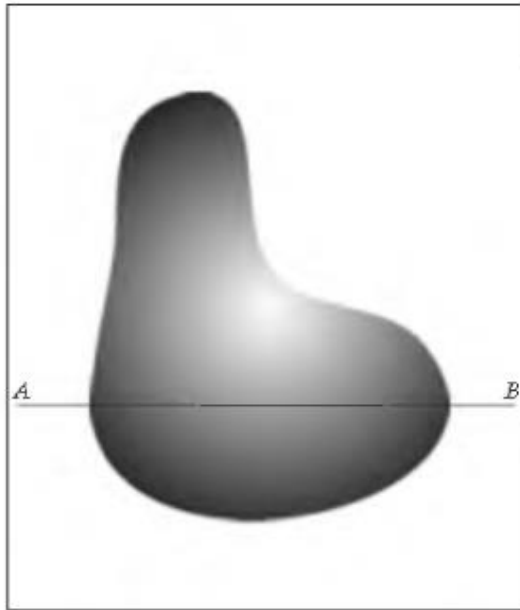


Ma....

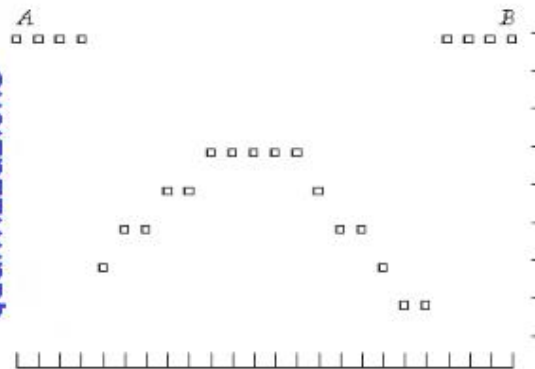
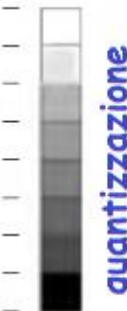


C'è il rumore!

Problema: nei dati reali abbiamo la presenza di rumore (dovuto alla misura fisica, all'ambiente,...) e di altri disturbi (per esempio blurring).



Campionamento

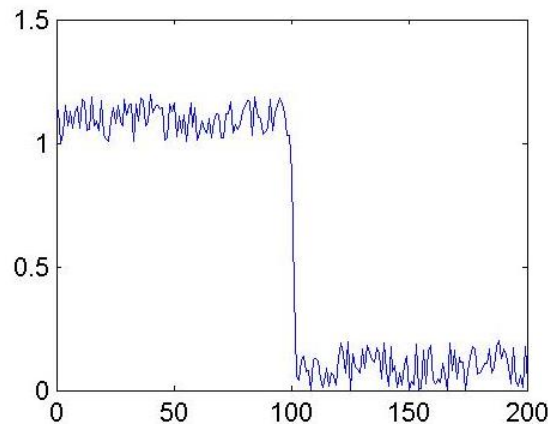


Osservazione: segnali sovente si presentano “rumorosi” e un operatore differenziale risente di questo. Per esempio in un caso 1D supponiamo di valutare i punti di bordo degli oggetti attraverso il calcolo della derivata prima discreta e con una operazione di sogliatura del modulo di questa.

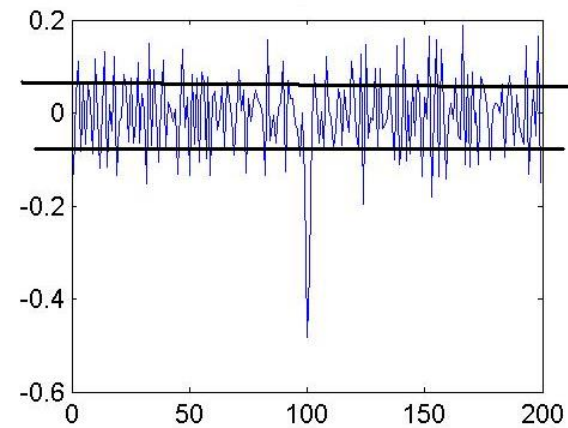
Se il segnale da analizzare fosse, nel continuo, $f(t)=g(t)+A \sin(\omega t)$, dove il termine $A \sin(\omega t)$, rappresenta il rumore con $|A|$ “piccolo” rispetto all’ordine di grandezza di g , ma $|A \omega| \gg 1$, dalla derivata

$$f'(t)= g'(t) +A \omega \cos(\omega t)$$

e sogliando $|f'(t)|$, si rischia di accettare molti punti come punti di bordo mentre sono solo punti in cui la derivata ha “amplificato” il rumore.



segnale con rumore (un solo punto di bordo "vero")



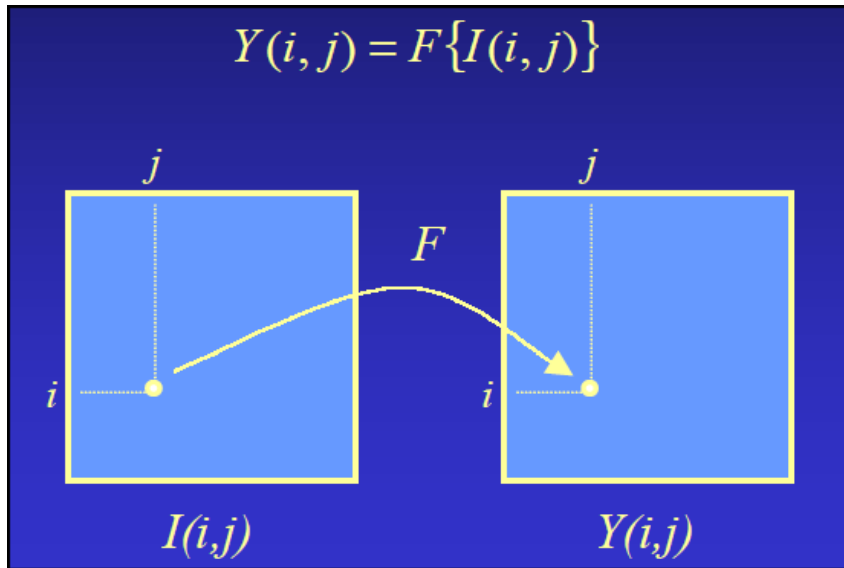
Derivata prima discreta con sogliatura del modulo: tanti punti di bordo

Argomenti:

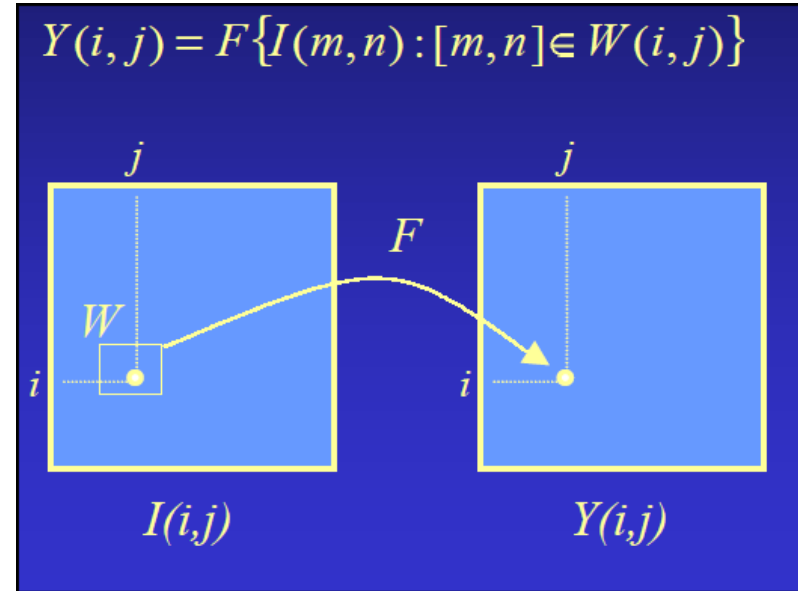
- Operatori locali
- Convoluzione/Correlazione
- Operatori lineari/shift-invarianti

Operatori $F: I \rightarrow Y$, I e Y immagini

Operatori puntuali



Operatori locali



[Ci sono anche Operatori Globali]