Brevi Note di introduzione alle trasformate discrete per il Corso di Elaborazione dell'Immagine

Corso di Laurea: Matematica

Docente: Giovanni Naldi

Le seguenti brevi note intendono essere un riassunto dell'ultima parte del corso di Elaborazione dell'Immagine. Alcune questioni sono state semplificate non considerando aspetti teorici più generali: sono da intendersi solo come introduzione. Si ringrazia fin da ora per ogni segnalazione di errore.

1 Spazi di Hilbert, approssimazione

Abbiamo già visto una semplice applicazione/interpretazione del prodotto scalare per l'individuazione di andamenti locali in un segnale (o immagine). Ricordiamo brevemente la definizione di norma e prodotto scalare per uno spazio vettoriale reale. Tutti gli spazi vettoriali che consideriamo sono per semplicità reali. Ciò vale anche per il seguito, senza alcun preavviso (gli spazi che introduciamo sono anche casi particolari di spazi vettoriali topologici).

Definizione 1. Sia V uno spazio vettoriale. Una norma in V è una funzione $\|\cdot\| : V^2 \to \mathbb{R}$ verificante, per ogni x, $y \in V$ e $c \in \mathbb{R}$, le condizioni

$$\|x\| \geq 0 \qquad (1.1)$$
$$\|x\| = 0 \textit{ se e solo se } x = 0 \qquad (1.2)$$
$$\|cx\| = |c|\|x\| \qquad (1.3)$$
$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad (1.4)$$

Uno spazio normato è una coppia $(V, \|\cdot\|)$ costituita da uno spazio vettoriale V e da una norma in V.

Nota. Diversi risultati di esistenza nel seguito valgono anche nel caso in cui la proprietà (1.2) non è valida ma dovremmo rinunciare all'unicità.

Notiamo che anche la (3.4) viene detta disuguaglianza triangolare, inoltre la formula

$$d(x, y) = \|x - y\|$$

definisce una metrica in V.

Nota. Tutte le norme definite su $\mathbb{R}^n$ sono equivalenti: ovvero per due norme qualsiasi $\|\cdot\|_a$ e $\|\cdot\|_b$ esistono due costanti positive m, M tali che

$$m\|\cdot\|_a \leq \|\cdot\|_b \leq M\|\cdot\|_a.$$

Abbiamo utilizzato questa equivalenza nel semplice algoritmo di edge detection che utilizzava la norma del vettore gradiente: essendo equivalenti le norme si sceglie la norma computazionalmente meno onerosa.

Definizione 2. Sia V uno spazio vettoriale. Un prodotto scalare in V è una applicazione $(\cdot,\cdot) : V^2 \to \mathbb{R}$ verificante, per ogni x, y, $z \in V$ e $c \in \mathbb{R}$, le condizioni

$$(x, x) \geq 0 \tag{1.5}$$
$$(x, x) = 0 \; se \; e \; solo \; se \; x = 0 \tag{1.6}$$
$$(x, y) = (y, x) \tag{1.7}$$
$$(x + y, z) = (x, z) + (y, z) \; e \; (cx, y) = c(x, y) \tag{1.8}$$

Uno spazio pre-hilbertiano è una coppia $(V, (\cdot,\cdot))$ costituita da uno spazio vettoriale V e da un prodotto scalare in V. Per uno spazio prehilbertiano la formula,

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

fornisce una norma in V.

Proposizione. Siano $(V, (\cdot,\cdot))$ uno spazio pre-hilbertiano e $\|\cdot\|$ la corrispondente norma indotta. Allora, per ogni x, $y \in V$, vale la disuguaglianza

$$|(x, y)| \leq \|x\|\|y\|$$

detta disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Se x e/o y è il vettore nullo la disugualianza è banale. Consideriamo il caso in cui sia x che y non siano nulli, e consideriamo il seguente polinomio quadratico, qui t è un parametro reale,

$$p(t) = (x + ty, x + ty) = \|x + ty\|^2 \geq 0.$$

Abbiamo:

$$p(t) = \|x\|^2 + 2t(x, y) + t^2\|y\|^2,$$

ed il polinomio è strettamente convesso con punto di minimo per

$$p'(t_m) = 0 \Leftrightarrow 2t_m\|y\|^2 + 2(x, y) = 0 \Leftrightarrow t_m = -\frac{(x, y)}{\|y\|^2}.$$

Essendo sempre non negativo deve valere

$$p(t_m) \geq 0 \Leftrightarrow \|x\|^2 - 2\frac{(x, y)^2}{\|y\|^2} + \frac{(x, y)^2}{\|y\|^2} \geq 0,$$

quindi

$$\|x\|^2 - \frac{(x, y)^2}{\|y\|^2} \geq 0$$

da cui la tesi.

Osservazione. Nel caso in cui i vettori non siano nulli abbiamo anche

$$\frac{|(x, y)|}{\|x\|\|y\|} \leq 1$$

e si raggiunge il valore massimo, uno, se e solo se i due vettori sono uno il multiplo dell'altro. Cosa significa per i segnali? Significa che un possibile metodo per cercare una particolare disposizione (o sequenza) di valori/pixel/... consiste nel considerare il prodotto di correlazione tra il segnale e la sequenza cercata, normalizzarlo e determinare i massimi (o i valori prossimi ad 1).

Nota. Si veda esercizio di laboratorio di ricerca di cifre numeriche all'interno dell'immagine *Lena*.

Definizione 3 (Vettori e sistemi ortogonali). Diciamo che due vettori $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$ sono ortogonali se $(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$. Analogamente, un insieme (finito o infinito) di vettori $\{\mathbf{u}_n\}$ forma un sistema ortogonale se

$$(\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) > 0; \;\; n \neq m \Rightarrow (\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_m) = 0.$$

Inoltrte l'insieme $\{\mathbf{u}_n\}$ si dice ortonormale se in aggiunta ogni elemento $\mathbf{u}_n$ è un versore, cioè $\|\mathbf{u}_n\| = (\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_n) = 1$.

Osserviamo che se un vettore $\mathbf{v}$ è ortogonale a ciascun elemento di un insieme $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^N$, allora è ortogonale anche a tutte le combinazioni lineari $\sum_k \alpha_k \mathbf{u}_n$.

Per ogni $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$, spazio con prodotto scalare, la distanza $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ si può esprimere per mezzo del prodotto scalare:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = (\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} - \mathbf{v}) = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - 2(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

In particolare se $\mathbf{u}$ è ortogonale a $\mathbf{v}$ si ha la formula (di "Pitagora"),

$$d(\mathbf{u},\mathbf{v})^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

Nel caso di combinazione lineare di N vettori:

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_n\|^2 = \left\|\sum_{n=1}^{N} \mathbf{v}_n\right\| = \sum_{n,m=1}^{N} (\mathbf{v}_m, \mathbf{v}_n).$$

Se il sistema di vettori $\mathbf{v}_n$ è ortogonale l'espressione precedente si semplifica

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_n\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \|\mathbf{v}\|^2.$$

Problema MA (Migliore approssimazione) Sia V uno spazio vettoriale, munito di una norma $\|\cdot\|$ e siano $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, $\ldots$, $\mathbf{u}_N$ assegnati elementi di V . Dato $\mathbf{v} \in V$ ci chiediamo se è possibile trovare coeffienti c_1, c_2, $\ldots, c_N$ in modo da rendere minimo l'errore di approssimazione

$$\|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{u}_k\|$$

Vale il risultato seguente

Teorema. Il Problema MA ammette sempre almeno una soluzione.

(Dimostrazione Teorema MA). Si osservi che la norma è una funzione continua essendo una funzione Lipschitziana, infatti per ogni $\mathbf{u}$, $\mathbf{v} \in V$,

$$\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{u} \pm \mathbf{v}\| \le \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|$$

$$\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{v} \pm \mathbf{u}\| \le \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\| + \|\mathbf{u}\|$$
$$\Downarrow$$
$$|\|\mathbf{u}\| - \|\mathbf{v}\|| \le \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|.$$

Tra le possibili combinazioni lineari abbiamo anche quella con $c_k = 0$ per ogni $k = 1, ..., N$, quindi certamente l'eventuale valore di minimo deve verificare

$$\|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{u}_k\| \le \|\mathbf{v} - \mathbf{0}\ \| = \|\mathbf{v}\|.$$

Quindi consideriamo il seguente sottinsieme di $\mathbb{R}^N$ (si osservi che i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}_k$, $k = 1, ..., N$ sono assegnati),

$$B = \left\{ \{c_k\}_{k=1}^{N} \in \mathbb{R}^N \ : \ \|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{u}_k\| \le \|\mathbf{v}\| \right\}.$$

L'insieme B è chiuso e limitato e quindi compatto in $\mathbb{R}^N$, quindi, essendo la norma dell'errore una funzione continua rispetto ai coefficienti c_k, esiste un punto di minimo $\{\hat{c}_k\}_{k=1}^N$ per

$$\|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{u}_k\|,$$

indichiamo con $\hat{m} = \|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathbf{u}_k\|$ il valore minimo. Per combinazioni lineari in $\mathbb{R}^N/B$ si ha inoltre

$$\|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{u}_k\| > \|\mathbf{v}\| \geq \hat{m}$$

per cui il valore $\hat{m}$ è un minimo assoluto. ♦

Purtroppo il teorema precedente non indica alcun preocedimento costruttivo per determinare i coeffienti $c_1, c_2, \ldots, c_N$, e in generale il problema pu` essere molto complicato. C'è però un caso in cui è possibile risolvere esplicitamente il problema: quello in cui la norma può essere espressa per mezzo di un prodotto scalare.

Consideriamo un insieme di vettori linearmenti indipendenti non nulli $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^N$ ed il sottospazio W generato da questi. Geometricamente è "intuitivo" che per ottenere la migliore approssimazione di $\mathbf{v}$ devo calcolare la proiezione ortogonale $\mathbf{w}$ di $\mathbf{v}$ su W. In particolare tale proiezione ortogonale è caratterizzata dalla seguente proprietà di ortogonalità,

$$(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \perp W,$$

che può essere scritta, in modo equivalente, richiedendo che la differenza $(\mathbf{v} - \mathbf{w})$ sia ortogonale ad ogni vettore $\mathbf{u}_k$.

Proposizione 1. Se $\{\mathbf{u}_k\}_{k=1}^N$ è un insieme finito di vettori linearmente indipendenti, per ogni $\mathbf{v} \in V$ esiste un'unica scelta di coefficienti $\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_N$ in modo tale che il vettore

$$\delta = \mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathbf{u}_k$$

risulti ortogonale a ciascun vettore $\mathbf{u}_k$.

(**Dimostrazione**). Le condizioni di ortogonalità portano al seguente siste-

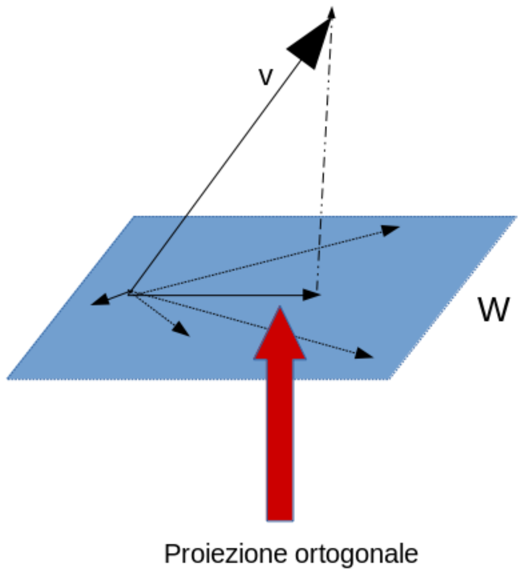

Figura 1: Interpretazione della migliore approssimazione nel caso di spazio con prodotto scalare.

ma lineare

$$\left(\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_m\right) = 0, \quad m = 1, 2, \ldots, N$$

che può essere riscritto come

$$\left(\sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathbf{u}_k, \mathbf{u}_m\right) = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_m), \quad m = 1, 2, \ldots, N.$$

Definita la matrice A con elementi $a_{km} = (\mathbf{u}_m, \mathbf{u}_k)$, ed i vettori $\hat{C} = (\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_N)^T$, $\mathbf{b} = ((\mathbf{v}, \mathbf{u}_1), \ldots, (\mathbf{v}, \mathbf{u}_N))$, possiamo scrivere anche

$$A\hat{C} = \mathbf{b}$$

dove la matrice A è simmetrica, per le proprietà del prodotto scalare, inoltre per ogni vettore $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^N$,

$$\mathbf{C}^T A \mathbf{C} = \sum_k \sum_m c_k c_m a_{km} = \| \sum_{n=1}^{N} c_n \mathbf{u}_n \|^2.$$

Nel caso in cui $\mathbf{C}^T A\mathbf{C} = 0$, segue che

$$\|\sum_{n=1}^{N} c_n \mathbf{u}_n\|^2 = 0 \Rightarrow \|\sum_{n=1}^{N} c_n \mathbf{u}_n\| = 0$$

da cui

$$\sum_{n=1}^{N} c_n \mathbf{u}_n = \mathbf{0} \Rightarrow c_n = 0 \;\; n = 1, \ldots, N$$

perchè i vettori $\mathbf{u}_n$ sono linearmente indipendenti. Quindi la matrice A è anche definita positiva e quindi invertibile. Esiste quindi una sola soluzione per il sistema di partenza che fornisce la soluzione $\hat{C}$ ♦

Proposizione Sia $\mathbf{v} \in V$ e $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^N$ un insieme finito linearmente indipendente, i coefficienti $\{\hat{c}_n\}_{n=1}^N$ calcolati secondo la precedente Proposizione 1. risolvono il Problema della migliore approssimazione.

(**Dimostrazione**) Siano $\{c_n\}_{n=1}^N$ ogni altra scelta di coefficienti si ha

$$\|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{u}_k\|^2 = \|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{u}_k \pm \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathbf{u}_k\|^2,$$

quindi

$$\|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{u}_k\|^2 = \|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathbf{u}_k + \sum_{k=1}^{N} (\hat{c}_k - c_k)\mathbf{u}_k\|^2.$$

Per la proprietà di ortogonalità dimostrata nella Proposizione 1. segue che possiamo utilizzare la formula di Pitagora,

$$\|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{u}_k\|^2 = \|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathbf{u}_k\|^2 + \|\sum_{k=1}^{N} (\hat{c}_k - c_k)\mathbf{u}_k\|^2,$$

da cui segue che

$$\|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} c_k \mathbf{u}_k\|^2 \geq \|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathbf{u}_k\|^2 \;\; \blacklozenge$$

Possiamo anche ottenere una stima dell'errore relativo alla migliore approssimazione, infatti dalla decomposizione

$$\mathbf{v} = \mathbf{v} \pm \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathbf{u}_k,$$

applicando ancora la formula di Pitagora si deduce che

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathbf{u}_k\|^2 + \|\sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathbf{u}_k\|^2,$$

da cui

$$\|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathbf{u}_k\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - \|\sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathbf{u}_k\|^2.$$

Corollario. Quando il sistema $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^N$ è ortogonale, la soluzione del problema di miglior approssimazione si ottiene per

$$\hat{c}_n = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{u}_n)}{\|\mathbf{u}_n\|^2}$$

con errore

$$\|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathbf{u}_k\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\hat{c}_k|^2 \|\mathbf{u}_k\|^2.$$

Se infine il sistema $\{\mathbf{u}_n\}_{n=1}^N$ è anche ortonormale, si ottiene,

$$\hat{c}_n = (\mathbf{v}, \mathbf{u}_n), \quad \|\mathbf{v} - \sum_{k=1}^{N} \hat{c}_k \mathbf{u}_k\|^2 = \|\mathbf{v}\|^2 - \sum_{k=1}^{N} |\hat{c}_k|^2.$$

Frames

Per certe applicazioni dell'analisi di immagini digitali potrebbe essere utile indebolire la richiesta di ortogonalità o di indipendenza lineare: si preferisce esplorare un insieme ampio di possibili caratteristiche (espresse tramite una opportuna matrice) da ricercare, attraverso prodotti scalari, all'interno di una immagine.

Esempio.

Il rilevamento del volto è una parte sostanziale delle operazioni di riconoscimento del volto stesso: occorre "concentrare" le risorse computazionali sulla sezione di una immagine che contiene una o più facce. Il metodo di rilevamento del volto nelle immagini è complicato a causa della variabilità presente nei volti umani come la posa, l'espressione, la posizione e l'orientamento, il colore della pelle, la presenza di occhiali o peli del viso, differenze nelle caratteristiche della fotocamera, condizioni di illuminazione e risoluzione dell'immagine. Tutti i volti umani condividono però alcune proprietà universali, come la regione degli occhi è più scura dei pixel vicini e la regione del naso è più luminosa della regione degli occhi. Basandosi su questo Viola e Jones hanno sviluppato un algoritmo in cui si cercano alcune caratteristiche del volto (occhi, bocca, naso,...) odificandole in un sistema di vettori (matrici) simili a quelli utilizzati per la trasformata di Haar. Come per la trasformata di Haar questi vettori vengono traslati e riscalati per permettere una analisi multiscala dell'immagine.

Risulta evidente che il sistema di vettori utilizzato è sovrabbondante e

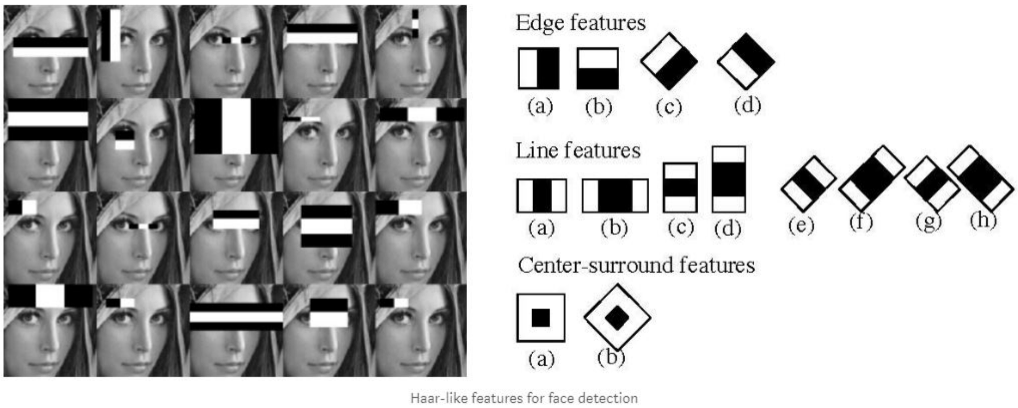

Figura 2: Alcuni elementi utilizzati nell'algoritmo di Viola-Jones per il rilevamento di volti in una immagine.

non forma una base, né un sistema ortogonale: genera però un insieme di caratteristiche utili: la presenza di una particolare caratteristica è ottenuta ancora attraverso un prodotto scalare tra la matrice codificante la caratteristica e tutte le zone dell'immagine in cui posso sovrapporre tale matrice.

Esempio. Consideriamo due insiemi di vettori in $\mathbb{R}^2$,

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}; \quad B = \left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \right\}.$$

I vettori in A formano una base ortonormale dello spazio $\mathbb{R}^2$, mentre per il sistema B ii vettori non possono essere reciprocamente ortogonali. Confrontiamo i due sistemi.

- Sia A che B generano tutto lo spazio $\mathbb{R}^2$, quindi ogni vettore $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ può essere scritto come combinazione lineare di vettori di A, oppure, allo stesso modo, di vettori di B.

- I vettori di A sono linearmente indipendenti per cui la decomposizione

$$\mathbf{x} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

  con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ è unica. I vettori di B non sono linearmente indipendenti per cui la decomposizione non è unica.

- I vettori di A hanno lunghezza 1 mentre i vettori di B hanno lunghezza $\sqrt{2/3}$.

- I vettori di A sono ortogonali mentre i vettori di B non lo sono.

- I coefficienti nell'espansione rispetto ai vettori di A possono essere calcolati facilmente con i prodotti scalari,

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2, \;\; c_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_1), \, c_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_2).$$

  Una possibile espansione rispetto ai vettori, chiamiamoli $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, $\mathbf{v_3}$, di B può comunque essere trovata considerando ancora i relativi prodotti scalari

$$\mathbf{x} = d_1\mathbf{v}_1 + d_2\mathbf{v}_2 + d_3\mathbf{v}_3, \;\; d_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{v}_1), \, d_2 = (\mathbf{x}, \mathbf{v}_2), \, d_3 = (\mathbf{x}, \mathbf{v}_3).$$

- Sia A che B soddisfano una proprietà detta, per i sistemi ortonormali, identità di Parseval. Se denotiamo con $\|\mathbf{x}\|$ la lunghezza (norma Euclidea) del vettore $\mathbf{x}$ si hanno le seguenti uguaglianze

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{k=1}^{2} c_k^2 = \sum_{k=1}^{3} d_k^2$$

Entrambi gli insiemi A e B dell'esempio appena visto sono particolari tipi di `frame` per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$.
La principale proprietà che rende desiderabile una base ortogonale è l'unicità della rappresentazione e quindi dei coefficienti che realizzano una espansione

di un vettore rispetto alla base data. Il calcolo numerico di tali coefficienti risulta veloce e stabile. Immaginiamo però un sistema di comunicazione attraverso cui inviamo un segnale (pensato come elemento di un opportuno spazio vettoriale) considerando i suoi coefficienti in una particolare decomposizione. Se il sistema rispetto a cui si fa la decomposizione è una base ortonormale basterà calcolare i prodotti scalari del segnale rispetto agli elementi della base. Ma cosa accade in questo caso se un coefficiente viene perso oppure alterato nella trasmissione? Non riusciremmo a ricostruire il segnale. Per questo risulterebbe più robusto accettare una certa ridondanza nella rappresentazione: è qui che entrano in gioco i frame.
Nel caso finito dimensionale un frame è generalmente un insieme di vettori che genera tutto lo spazio. Diventa interessante quando possiede le medesime proprietà di una base ortogonale, in paeticolare se i coefficienti di una espansione rispetto al frame possono essere calcolati attravero il calcolo dei prodotti scalari.
Vediamo le definizioni proncipali nel caso di $\mathbb{R}^n$.
Definizione Sia $k \geq n$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \}$ un insieme finito di vettori in $\mathbb{R}^n$. Noi diremo che i vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \}$ hanno una estensione ad una base di $\mathbb{R}^k$ se esistono vettori $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_k, \}$ in $\mathbb{R}^{k-n}$ tali che

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{w}_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{w}_2 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k \\ \mathbf{w}_k \end{bmatrix} \right\}$$

è una base di $\mathbb{R}^k$.
Definizione [frame]. Un $\mathbb{R}^n - frame$ è un insieme finito di vettori $F = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \}$ in $\mathbb{R}^n$, con $k \geq n$, tali che esista una estensione di F ad una base di $\mathbb{R}^k$.
Una proprietà immediata,
Lemma. un insieme di vettori F di $\mathbb{R}^n$ è un $\mathbb{R}^n - frame$ se e solo se è un insieme di generatori per $\mathbb{R}^n$.
Definizione. Un insieme finito di vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \}$ in $\mathbb{R}^n$, si dice una sequenza di Parseval se per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{k} |(\mathbf{x}, \mathbf{v}_i)|^2$$

Abbiamo quindi che

Lemma. Un Parseval frame $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \}$ per $\mathbb{R}^n$, ha una estensione ad una base ortonormale per $\mathbb{R}^k$.

Quindi se abbiamo un frame per cui valga l'identità di Parseval possiamo considerare i prodotti scalari di un qualsiasi vettore rispetto agli elementi del frame e ottenere il valore della norma di tale vettore. Il risultato seguente è utile per riconoscere quando questo può accadere.

Lemma. Una sequenza finita $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \}$ di vettori in $\mathbb{R}^n$ è una sequenza di Parseval se e solo se le righe della matrice

$$A = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \ldots \ \mathbf{v}_k]$$

sono vettori ortogonali in $\mathbb{R}^k$.

Ad esempio, per l'insieme di vettori visti sopra

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{bmatrix}, \sqrt{\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -1/2 \\ -\sqrt{3}/2 \end{bmatrix} \right\}$$

Abbiamo

$$A = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{3}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} & -\sqrt{\frac{1}{6}} \\ \\ 0 & \sqrt{\frac{1}{2}} & -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

che ha righe ortonormali in $\mathbb{R}^3$.

Infine è possibile dimostrare una formula di "ricostruzione" di un qualsiasi vettore (segnale) attraverso i prodotti scalari.

Proposizione. Un insieme di vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k, \}$ in $\mathbb{R}^n$ è un Parseval frame se e solo se vale la seguente identità per ogni $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\mathbf{x} \ = \ \sum_{i=1}^{k} (\mathbf{x}, \mathbf{v}_i)\mathbf{v}_i$$