Esercizi Laboratorio Calcolo Numerico 1
- Settimana 9 -

Nota: per i comandi non esplicitamente introdotti nel video di spiegazione si può utilizzare `help` oppure `doc` dei comandi stessi

1) Sia A la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

1.1) Verificare che vale la maggiorazione

$$\rho(A) \leq ||A||_p$$

considerando i casi particolari $p = 1, 2, +\infty$.

1.2) Rappresentare graficamente le regioni corrispondenti ai cerchi riga di Gershgorin:

$$K_i^{(r)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j = 1, \ldots, n \\ j \neq i}} |a_{ij}|\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

e i cerchi colonna

$$K_j^{(c)} = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{jj}| \leq \sum_{\substack{i = 1, \ldots, n \\ i \neq j}} |a_{ij}|\}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

essendo n la dimensione di A. Verificare che tutti gli autovalori di A sono contenuti nell'unione dei cerchi riga e anche nell'unione dei cerchi colonna, ovvero $\sigma(A) \subseteq C_r \cap C_c$, essendo $\sigma(A)$ lo spettro di A e $C_r = \bigcup_{i=1,\ldots,n} K_i^{(r)}$, $C_c = \bigcup_{j=1,\ldots,n} K_j^{(c)}$, rispettivamente.

3) Sia $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ definita nell'intervallo $I = [-2, 3]$ e si considerino i nodi di interpolazione $x_0 = -2, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.

Dati inoltre 1000 nodi equispaziati $z_j,\ j = 1, ..., 1000$ nell'intervallo I:

3.1) si calcoli $M_4 = \|\omega\|_{\infty,d}$, dove

$$\|g\|_{\infty,d} \equiv \max_{j=1,\ldots,1000} |g(z_j)|,\ \omega(x) = \prod_{i=0}^{3}(x - x_i);$$

3.2) si consideri il polinomio $p_3 \in \mathbb{P}_3$ che interpola f nei nodi $(x_i, y_i = f(x_i)), i = 0, \ldots, 3$ e il polinomio $\widetilde{p}_3 \in \mathbb{P}_3$ che interpola i dati perturbati $\tilde{y}_i \approx y_i$, ottenuti con il comando `yitilde=yi+delta`, con `delta=1e-3`. Si verifichi sperimentalmente la disuguaglianza

$$\|\widetilde{p}_3 - p_3\|_{\infty,d} \leq \|\Delta\|_{\infty,d}, \qquad \text{dove} \qquad \Delta(x) = \delta \sum_{i=0}^{3} |L_i(x)|,$$

$L_i \in \mathbb{P}_3$ essendo l' i-esimo polinomio di base di Lagrange.

4) Sia $f(x) = \cos(x)$ definita nell'intervallo $x \in [0, \pi]$.

4.1) Si costruisca, usando la funzione Matlab `polyfit`, il polinomio di interpolazione $\Pi_M f(x)$ di grado M, con $M = 3, 5, 10$; sia $p_L^{(M)}$ il corrispondente vettore dei coefficienti di tale polinomio. Per ogni valore di M utilizzato si calcoli l'errore

$$\max_z |f(z) - \Pi_M f(z)|,$$

dove il vettore di ascisse z è assegnato con il comando `z=linspace(0,pi,1000)`.

4.2) Per ciascun valore di M, si costruiscano la matrice di Vandermonde $X^{(M)}$ (senza usare il comando `vander`!) e il termine noto $b^{(M)}$ relativi al polinomio di interpolazione di f. Si risolva quindi il sistema lineare $X^{(M)} p_V^{(M)} = b^{(M)}$, dove $p_V^{(M)}$ è il vettore dei coefficienti del polinomio di interpolazione trovato per ciascun valore di M.

Si calcoli la quantità $||p_V^{(M)} - p_L^{(M)}||_\infty$.