EdI – 2020/21

Due esempi di operazioni globali:

Decomposizione SVD (una applicazione alle immagini)
Trasformata di Haar

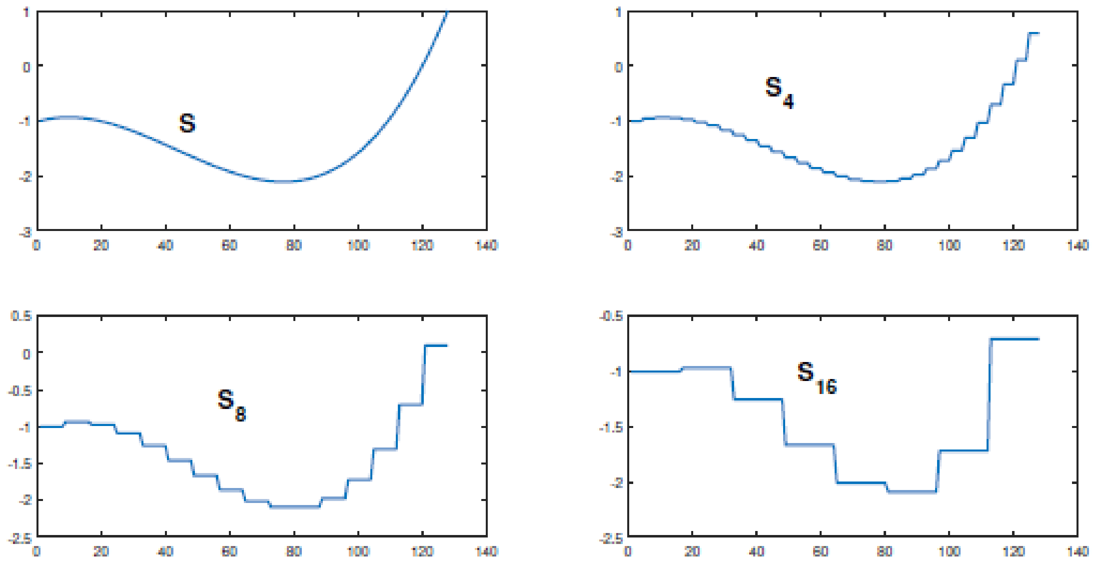
Giovanni Naldi- ESP UNIMI

Trasformata discreta di Haar

Diversi approcci:

- Analisi del segnale con operatori locali (a differenti scale)
- Algebra Lineare e basi
- Statistico
- Analisi armonica (discretizzazione trasformata continua)
- ….

Uno dei concetti fondamentali legati a questa trasformata (codifica) è la **scala** (**risoluzione**) a cui si osserva un segnale (qui e nel seguito utilizzeremo principalmente segnali unidimensionali).



Esempio di un segnale S, qui continuo, e alcune sue approssimazioni con funzioni costanti a tratti per scale (risoluzioni spaziali) individuate da un indice numerico, differenti. Cercheremo di «combinare» le differenti approssimazioni (o scale)

Esempio. Consideriamo un segnale discreto di partenza di sole otto componenti

$$\mathbf{S} = \{ 37 , 35, \ 28, \ 28, 58, 18, 21, 15\}$$

che sono considerate alla scala più fine. Analizzare coppie di valori contigue

$$\{37, 35\} \quad \{28 , 28\} \quad \{58, 18\} \quad \{21,15\}$$

vuol dire guardare il segnale in particolari sottodomini. Calcoliamo le medie m_i^1

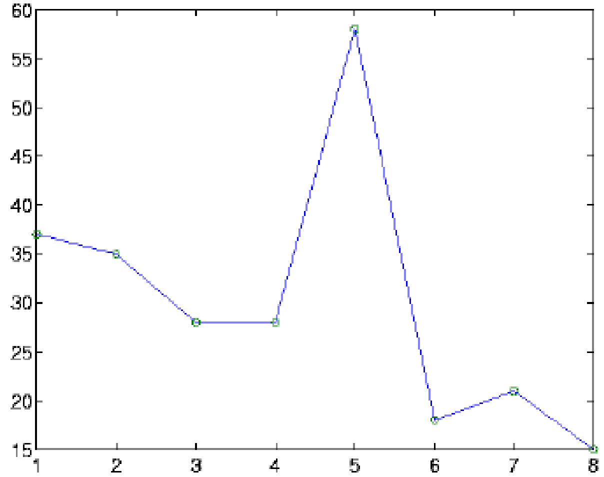
media:

37 35 28 28 58 18 21 15

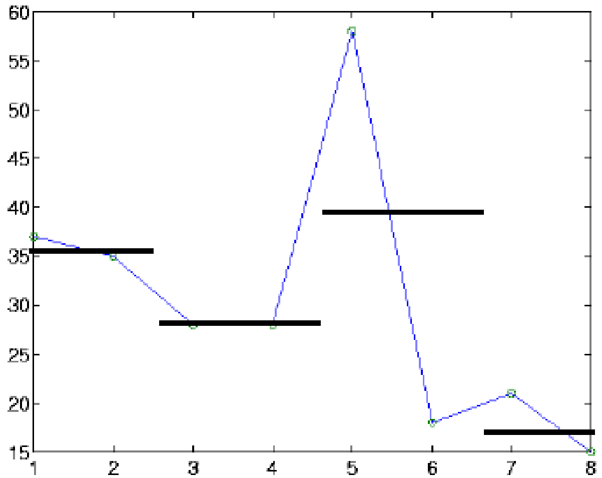
$$m_1^1 = \frac{37+35}{2} = 36, \quad m_2^1 = \frac{28+28}{2} = 28, \quad m_3^1 = \frac{58+18}{2} = 38, \quad m_4^1 = \frac{21+15}{2} = 18.$$

Potrei sostituire al posto di ogni coppia il corrispondente valore medio: risparmierei memoria ma non ho indicazioni riguardo l’errore commesso e non potrei ricostruire i valori originali.

37 35 28 28 58 18 21 15



37 35 28 28 58 18 21 15



Scelgo quindi un indice di variabilità adeguato, per Sesempio la variazione/dettaglio d_i^1 differenza tra i valori della coppia divisa per 2 (per utilizzare una "normalizzazione" simile alla media),

differenza:

37 35 28 28 58 18 21 15

$$d_1^1 = \frac{37-35}{2} = 1, \quad d_2^1 = \frac{28-28}{2} = 0, \quad d_3^1 = \frac{58-18}{2} = 20, \quad d_4^1 = \frac{21-15}{2} = 3.$$

A questo punto ad ogni coppia di valori (a,b) possiamo sostituire la media m e la differenza d (viceversa dalla media e differenza possiamo ricostruire i valori a,b): abbiamo una differente rappresentazione del segnale originale. Dal punto di vista dell'algebra lineare questo corrisponde ad un cambiamento di base (possiamo anche riordinare le medie e le differenze)

$$S \rightarrow S^1 = \{m_1^1, m_2^1, m_3^1, m_4^1, d_1^1, d_2^1, d_3^1, d_4^1\}$$

$$\mathrm{W}_1\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^1 \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37 \\ 35 \\ 28 \\ 28 \\ 58 \\ 18 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 38 \\ 18 \\ 1 \\ 0 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{S}^1 = \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 38 \\ 18 \\ 1 \\ 0 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Medie

differenze

a questo punto posso considerare i valori delle medie come un segnale e procedere calcolando le medie e le differenze di queste e procedere in questo modo

Trasformata

37 35 28 28 58 18 21 15		**S**
36 28 38 18	1 0 20 3	**S**^{1}
32 28	4 10	**S**^{2}
30	2	**S**^{3}

30 2 4 10 1 0 20 3

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

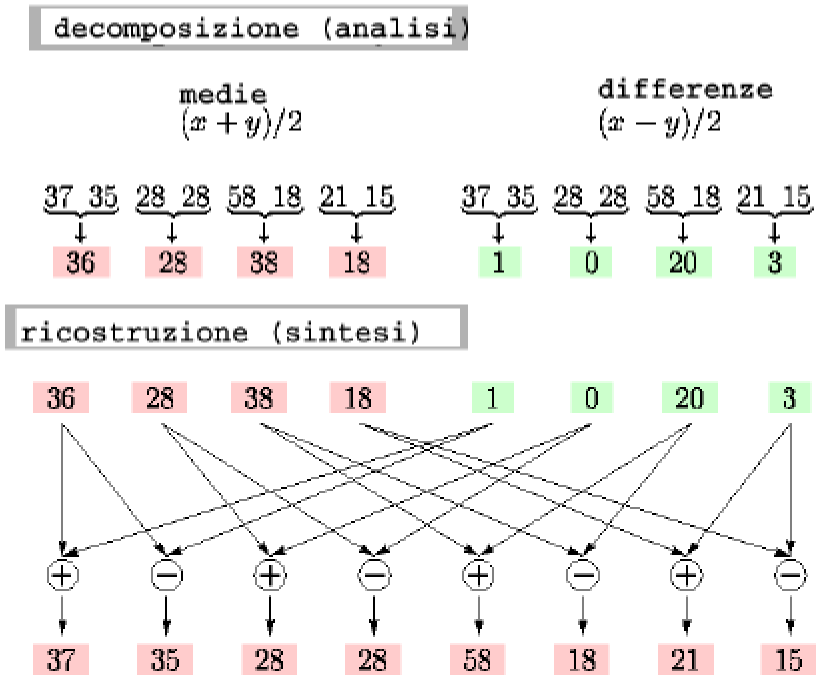
$$W_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}^3 = W_3\, \boldsymbol{S}^2 = W_3 W_2 \boldsymbol{S}^1 = W_3 W_2 W_1 \boldsymbol{S} = WS$$

$$W_3 W_2 W_1 = W$$

Ogni passo della trasformata è invertibile perché da m=(a+b)/2   d=(a-b)/2   si ha la ricostruzione a=m+d, b=m-d

quindi posso ricostruire le varie medie fino ai valori iniziali del segnale.



Nota.   Dove i valori d sono piccoli in modulo vuol dire che la media rappresenta una buona approssimazione dei valori. Dove i valori dei coefficienti d sono in modulo alto ho una grande variazione, come un bordo (ad una certa scala). Posso mettere in atto un Algoritmo di compressione (con perdita di informazione): calcolo la trasformata Haar discreta, decido delle soglie e metto a zero i coefficienti d in modulo minori delle soglie. Se riesco a memorizzare efficientemente vettori/matrici con molti zeri poso avere un risparmio notevole di memoria.

Nota. Le righe delle matrici W_i sono ortogonali ma non sono ortonormali. Posso normalizzare le medie e le differenze:

$$m = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad d = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{m+d}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{m-d}{\sqrt{2}}$$

ed ora $W_i \; W_i^T = I$ e la trasformata inversa è facile da implementare. Attenzione: i coefficienti non sono più potenze di due ma posso solo approssimarli.

Posso interpretare le operazioni di media e differenza come prodotti scalari. Rifacendoci all'esempio fatto.

Al primo passo:

- Le medie della trasformata sono ottenute calcolando i prodotti scalari tra S ed i vettori
  (1/2 1/2 0 0 0 0 0 0 0 0)^T (0 0 1/2 1/2 0 0 0 0)^T (0 0 0 0 1/2 1/2 0 0)^T (0 0 0 0 0 0 1/2 1/2)^T
- Le differenze invece rappresentano i prodotti scalari con i vettori:
  (1/2 -1/2 0 0 0 0 0 0 0 0)^T (0 0 1/2 -1/2 0 0 0 0)^T (0 0 0 0 1/2 -1/2 0 0)^T (0 0 0 0 0 0 1/2 -1/2)^T

Al secondo passo considero solo le componenti con le medie per cui (rispetto alle componenti del vettore di partenza **S**) abbiamo che

- Le medie sono i prodotti scalari del segnale iniziale con i vettori
  (1/4 1/4 1/4 1/4 0 0 0 0 0 0)^T (0 0 0 0 1/4 1/4 1/4 1/4)^T
- le differenze invece sono i prodotti scalari con i vettori
  (1/4 1/4 -1/4 -1/4 0 0 0 0 0 0)^T (0 0 0 0 1/4 1/4 -1/4 -1/4)^T

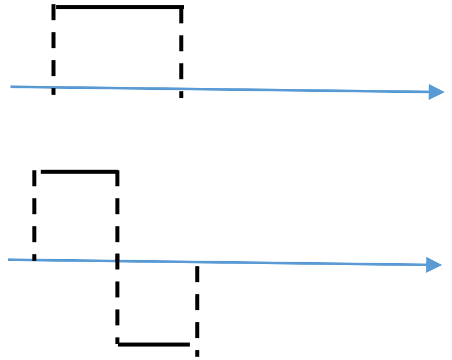
Al terzo ed ultimo passo abbiamo (sempre in riferimento alla trasformazione delle componenti del segnale iniziale **S**)

- La media è uguale al prodotto scalare con il vettore

(1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8)^T

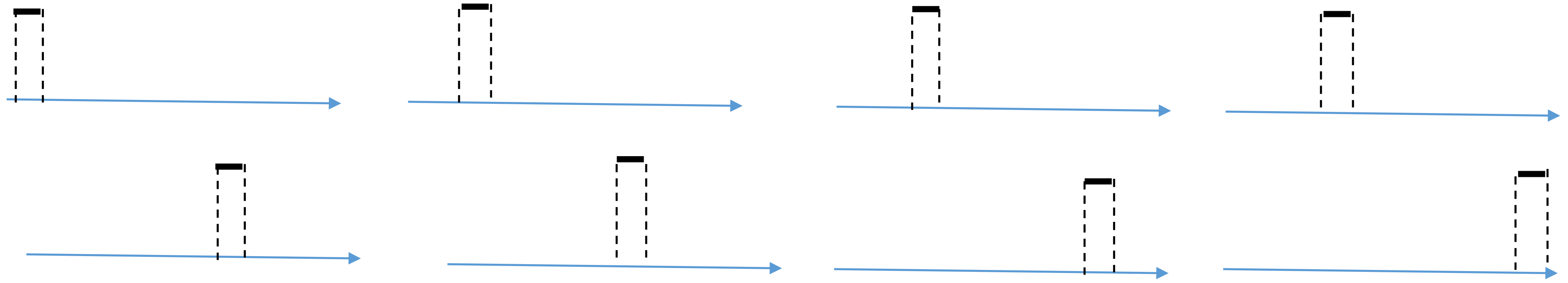
- La differenza è uguale al prodotto scalare con il vettore

(1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 1/8 -1/8 -1/8 -1/8 -1/8)^T

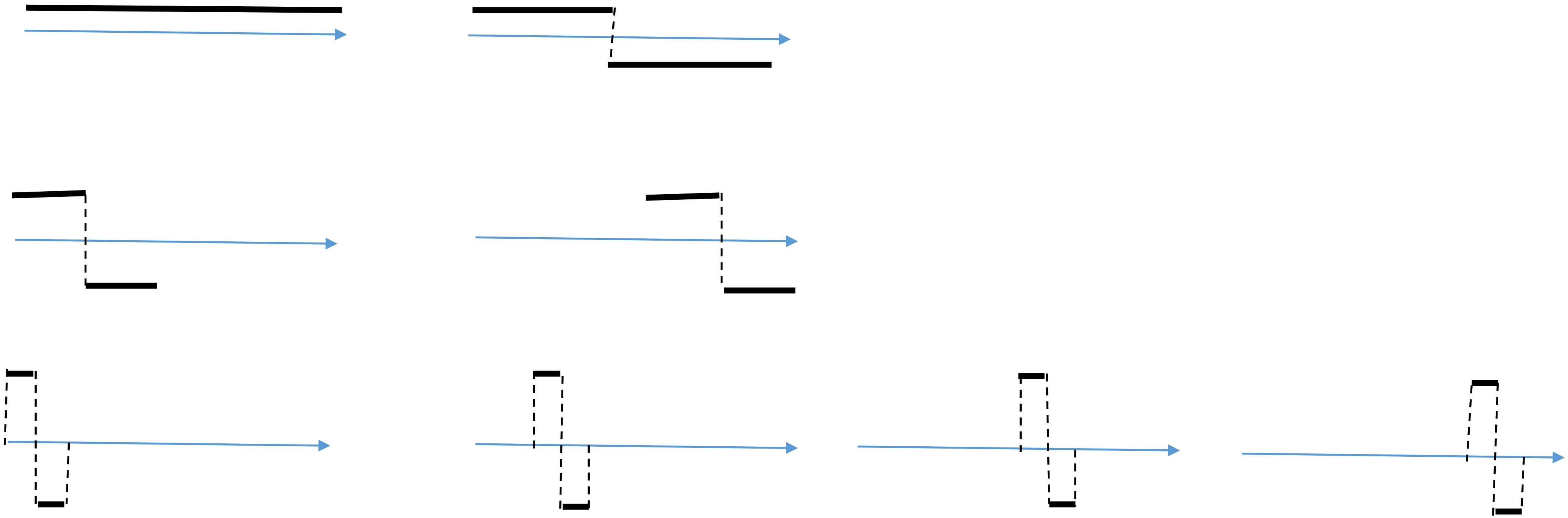


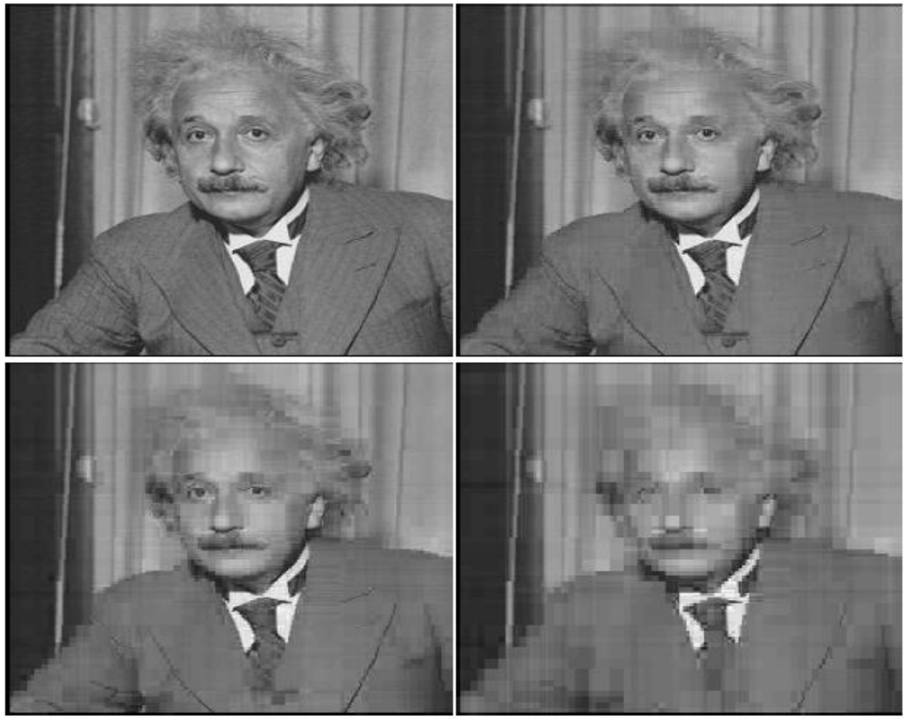
Ad ogni passo ho quindi il prodotto scalare con segnali del tipo
Riscalati, dilatati, traslati.

Base iniziale
(base canonica)



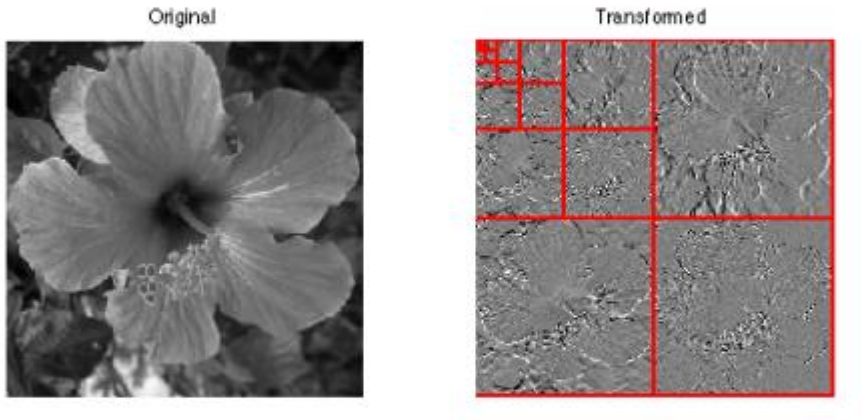
Base finale
(Haar)





Esempio di compressione con trasformata di Haar 2D, la figura originale, in alto a sinistra, viene compressa con percentuale sempre maggiore fino alla figura in basso a destra

Un passo trasformata 2D di Haar



Più passi trasformata 2D di Haar

Nota. Per le immagini posso osservare che la trasformata è separabile: posso eseguire trasformata sulle righe (1D) e poi Fare trasformata sulle colonne di quest'ultima.
In altro modo posso considerare il prodotto tensoriale delle basi 1D