

Esercizi Laboratorio Calcolo Numerico 1

- Settimana 12 -

Nota: per i comandi non esplicitamente introdotti nel video di spiegazione si può utilizzare `help` oppure `doc` dei comandi stessi

1. Data $f(x) = 5 \cos(x) \sin(x)$, si approssimi il suo valor medio integrale

$$M = \frac{1}{\frac{3}{2}\pi} \int_0^{\frac{3}{2}\pi} f(t) dt$$

con la formula dei trapezi composta, utilizzando N sottointervalli di uguale ampiezza. Sia $M_T^{(N)}$ il valore approssimato ottenuto.

- 1.1) Implementare, per $N = 1, 2, \dots$ una procedura che si arresti quando l'errore assoluto $|M - M_T^{(N)}|$ risulta minore od uguale a ϵ , con $\epsilon = 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}$

2. Si vuole approssimare il valore dell'integrale

$$I = \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{2},$$

applicando la formula dei trapezi composta all'integrale

$$I_b = \int_0^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx,$$

con M sottointervalli di ampiezza uguale a 1. Sia I_b^M il valore approssimato ottenuto.

- 2.1) Implementare una procedura che calcoli I_b^M per $b = 2, 3, 4, \dots$, e si arresti quando l'errore assoluto $|I - I_b^M|$ risulta minore o uguale a 10^{-8} .

3. Si vuole approssimare l'integrale improprio

$$I = \int_{-1}^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$$

con il metodo dei trapezi composti applicato ai due integrali I_1 e I_2 :

$$I_1 = \int_{-1}^{-\epsilon} \frac{e^x - 1}{x} dx, \quad I_2 = \int_{\epsilon}^1 \frac{e^x - 1}{x} dx$$

tali che $I \approx I_1 + I_2$.

- 3.1) Calcolare il valore approssimato per $\epsilon = 0.01, 0.001, 0.0001$, utilizzando $m = 250, 500$ sottointervalli su ciascuno dei due sottointervalli $[-1, -\epsilon]$ e $[\epsilon, 1]$.

4. Approssimare l'integrale definito

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

rispettivamente con il metodo dei trapezi e il metodo di Cavalieri Simpson composti, utilizzando $m = 2^n$ sottointervalli, $n \geq 1$. Siano I_m^T e I_m^C i rispettivi valori ottenuti.

4.1) Determinare l'intero M , definito come il minimo valore di m tale per cui si verifica

$$E_M = |I_M^T - I_M^C| < 10^{-4}.$$

4.2) Determinare l'intero N , definito come il minimo valore di m tale per cui si verifica

$$E_N = |I_N^T - I| < 10^{-4}.$$

5. Per il calcolo degli integrali

$$I_k = \int_0^1 x^k e^{x-1} dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

si considerino:

5.1) la formula ricorsiva $I_k = 1 - kI_{k-1}$, con $I_1 = 1/e$. Per $K = 12, 14, 16, 18$, si calcolino i valori I_K con la formula ricorsiva proposta

5.2) la formula di quadratura dei trapezi composti. Per gli stessi valore K di sopra, si calcolino i valori I_K utilizzando $M = 100, 200$ sottointervalli

Esercizio consigliato: nr. 3 T.E. 27/04/2017