Esercizi Laboratorio Calcolo Numerico 1
- Settimana 7 -

Nota: per i comandi non esplicitamente introdotti nel video di spiegazione si può utilizzare `help` oppure `doc` dei comandi stessi

1. Dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$ di dimensione n, con A avente elementi diversi da zero sulla prima riga, sulla prima colonna e sulla diagonale principale:
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/4 & 1/9 & ... & 1/n^2 \\ 1/2 & 2 & 0 & ... & 0 \\ 1/3 & 0 & 3 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1/n & 0 & 0 & ... & n \end{bmatrix}, \quad f_i = (-1)^i, \; i = 1, ..., n,$$
lo si risolva utilizzando la fattorizzazione $PA = LU$, con $n = 10, \; 20, \; 40$.
Successivamente si risolva il sistema perturbato $A_\epsilon \mathbf{x}_\epsilon = \mathbf{f}_\epsilon$, dove
$$A_\epsilon = A + \begin{bmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon & ... & \epsilon \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon & ... & \epsilon \end{bmatrix}, \; (\mathbf{f}_\epsilon)_i = f_i + \epsilon, \; i = 1, ..., n$$
utilizzando la fattorizzazione $P_\epsilon A_\epsilon = L_\epsilon U_\epsilon$ della matrice perturbata A_ϵ, con $\epsilon = 10^{-3}$ e $\epsilon = 10^{-6}$.
Calcolare le perturbazioni relative $p_\mathbf{x} = \frac{\|\widehat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_\epsilon\|_2}{\|\widehat{\mathbf{x}}\|_2}, \; p_A = \frac{\|A - A_\epsilon\|_2}{\|A\|_2}$.

2. È dato il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{f}$, con A matrice $n \times n$ data da (qui mostrato nel caso $n = 6$ e gli altri analogamente)
$$A_n = \begin{bmatrix} n & 2 & 0 & 0 & 0 & -10 \\ -2 & n & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & n & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & n & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & n & 2 \\ 10 & 0 & 0 & 0 & -2 & n \end{bmatrix}, \qquad n = 6, 8, 10.$$
e $\mathbf{f}$ tale che la soluzione esatta sia il vettore $\mathbf{x} = (1, 1, \ldots, 1)^t$. Approssimare la soluzione di tale sistema e calcolare il determinante di A sfruttando la fattorizzazione $PA = LU$. Approssimare poi, sfruttando la fattorizzazione $P_\epsilon A_\epsilon = L_\epsilon U_\epsilon$, la soluzione del sistema perturbato $A_\epsilon \mathbf{x}_\epsilon = \mathbf{f}$, dove $A_\epsilon = A + \epsilon B$, con (qui mostrato nel caso $n = 6$ e gli altri analogamente)
$$B = \begin{bmatrix} n & n-1 & n-2 & n-3 & 2 & 1 \\ 0 & n-1 & n-2 & n-3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & n-2 & n-3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & n-3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \epsilon = 10^{-4}.$$

Calcolare infine per ogni valore di n le perturbazioni relative

$$p_A = \frac{||A - A_\epsilon||_2}{||A||_2}, \qquad p_{\mathbf{x}} = \frac{||\mathbf{x} - \mathbf{x}_\epsilon||_2}{||\mathbf{x}||_2}.$$

3. Per ogni $n = 20, 40, 60, 80, 100$ si consideri la matrice A di elementi

   $a_{ii} = 2n,\ i = 1, ..., n,$
   $a_{ij} = 2n + 2$, se $i = j + 1,\ j = 1, ..., n - 1,$
   $a_{ij} = n - 2$, se $j = i + 3,\ i = 1, ..., n - 3,$
   $a_{ij} = 1$, altrimenti.

   - Fattorizzare la matrice A e utilizzare la fattorizzazione per risolvere il sistema lineare $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, dove $\mathbf{b}$ è un vettore avente tutti elementi uguali a 1. Calcolare la quantità $r_{[n]} = \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$, $n = 20, 40, 60, 80, 100$.
   - Costruire la matrice $C = A^3$ e la matrice D di elementi $d_{ij} = (a_{ij})^3,\ i, j = 1, ..., n$. Calcolare le quantità:

     $$e_{[n]} = \|C - D\|_2, \quad c_{[n]} = \frac{K_2(C)}{K_2(D)}, \quad d_{[n]} = \frac{\rho(C)}{\rho(D)}, \quad n = 20, 40, 60, 80, 100,$$

     e le medie aritmetiche M_c e M_d, rispettivamente, dei valori $c_{[n]}$ e $d_{[n]}$.

4. Si consideri la matrice A di dimensione $n \times n$, con $n = 1600$ generata dal comando

   ```
   A = gallery('neumann', 1600) + speye(1600);
   ```

   Per ogni $k = 1, ..., n$, detta A_k la sottomatrice principale formata dalle prime k righe e dalle prime k colonne di A, calcolare la fattorizzazione $A_k = L_k U_k$. Per ciascuna delle sottomatrici A_k, calcolare la percentuale di *fill-in* del relativo fattore U_k rispetto alla corrispondente porzione della matrice originale

5. Sia H_n la matrice di Hilbert di ordine n, per $n = 1, ...,$ e sia $\mathbf{b}$ il termine noto tale che la soluzione esatta del sistema $H_n\mathbf{x} = \mathbf{b}$ sia il vettore $\mathbf{x} = [1, 1, ..., 1]^t$.

   - Si verifichi fino a quale valore di $n = \overline{n}$ la matrice H_n risulta essere, in aritmetica finita, simmetrica e definita positiva. In particolare, quale proprietà delle due elencate viene meno?
   - Si calcoli, per $n < \overline{n}$, usando il comando Matlab `chol` il fattore R_n triangolare superiore tale che $R_n^T R_n = H_n$ e si risolva con tale fattorizzazione il sistema lineare. Per quale valore di n la norma 2 relativa dell'errore è maggiore di 10^{-1}?
   - Si consideri la seguente scrittura del generico termine diagonale della matrice R_n

     $$r_{jj} = \sqrt{2j - 1}\frac{((j-1)!)^2}{(2j-1)!}, \quad j = 1, \ldots, n$$

     Per quale valore di n si ha per la prima volta $r_{nn} < 10^{-8}$?