Esercizi Laboratorio Calcolo Numerico 1
- Settimana 11 -

Nota: per i comandi non esplicitamente introdotti nel video di spiegazione si può utilizzare `help` oppure `doc` dei comandi stessi

1. Data la funzione $f(x) = x\cos(x)$, sia S_3 la spline cubica con condizioni *not-a-knot* che interpola f in $n+1$ nodi equispaziati dell'intervallo $I = [0, 4\pi]$, con $n = 40, 80, 160$. Si considerino le funzioni g e s, rispettivamente derivata prima di f e di S_3:

$$g(x) = f'(x), \qquad s(x) = S_3'(x), \quad \forall x \in I$$

   Sia infine S_1 la spline lineare che interpola g nei medesimi $n+1$ nodi equispaziati dell'intervallo I per $n = 40, 80, 160$.

   1.1) Dati 201 nodi equispaziati t_j di $I, j = 1, \ldots, 201$, ($t_0 = 0, \ldots, t_{200} = 4\pi$) si calcolino i seguenti errori:

$$E_1 = \max_{j=0,\ldots,200} |g(t_j) - s(t_j)|, \qquad E_2 = \max_{j=0,\ldots,200} |g(t_j) - S_1(t_j)|$$

   1.2) Sapendo che

$$E_1 \approx C_1 n^{-p_1} \qquad E_2 \approx C_2 n^{-p_2}$$

   dedurre dai risultati i valori di p_1 e p_2, motivando la risposta

2. Si considerino i seguenti dati relativi alla posizione di un'auto in funzione del tempo

tempo [s]	0	3	5	8	13
posizione [m]	0	72	121	206	331

   2.1) si usi una spline *not-a-knot* per determinare quale fosse la posizione dell'auto al tempo 10 s.

   2.2) utilizzando la approssimazione al punto precedente, si determini considerando l'ascissa data dal comando `z=linspace(0,13)` per quale intervalli di tempi, se ve ne sono, l'auto ha viaggiato ad una velocità inferiore a 24 m/s

   2.3) quale è stata l'accelerazione massima dell'auto? A quale tempo si è verificata?

3. Sia $f(x) = \sin(x)$ e si voglia approssimare numericamente l'integrale

$$I = \int_0^{\pi/2} f(x)\,dx (= 1).$$

   3.1) Si costruisca con il comando Matlab `spline` la spline cubica $s_3(x)$ che interpola $f(x)$ considerando una discretizzazione in m intervalli omogenei, per $m = 5, 50, 500$.

3.2) Sia C la matrice dei coefficienti di tale spline. Utilizzando gli elementi di C si calcoli in modo esatto l'integrale

$$I_s = \int_0^{\pi/2} s_3(x)\, ds.$$

Si ricordi che la spline calcolata da Matlab è, sul generico intervallo di discretizzazione $[x_i, x_{i+1}]$, della forma

$$s_3(x) = a(x - x_i)^3 + b(x - x_i)^2 + c(x - x_i) + d,$$

essendo a, b, c, d i coefficienti del polinomio cubico sull'intervallo considerato ricavati dalla matrice C.

3.3) Si riporti l'errore $|I - I_s|$ al variare di m.

4. Sia

$$I = \int_a^b f(x)\, dx,$$

che si considera essere calcolato in modo "esatto" con il comando Matlab `integral`. Sia inoltre $S_3(x)$ la spline cubica interpolante $f(x)$ su $[a, b]$ ottenuta con il comando Matlab `spline`. Si consideri la approssimazione

$$I \simeq I_s = \int_a^b S_3(x)\, dx.$$

Si scelga $f(x) = 10\mathrm{e}^{-x/25} \sin(x)$, $a = 0, b = 50$.

4.1) Si calcoli l'errore $e_s = |I - I_s|$ utilizzando successivamente $m = [5, 50, 500, 5000]$ intervalli per il calcolo della spline.