Esercizio n. 3 - Tema d'esame 19 febbraio 2014

Si consideri il problema dell'approssimazione per difetto delle quantità $\|A\|_1$, $\|A\|_2$,$\|A\|_\infty$, dove A è una matrice quadrata di dimensione $n = 20$, avente elementi non nulli sulla diagonale principale, sulla prima e ultima riga, sulla prima e ultima colonna, così definita:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{\sqrt{n}} & \dots & \frac{1}{\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{2\sqrt{n}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sqrt{n-1} & -\frac{1}{2\sqrt{n}} \\ \frac{1}{\sqrt{n}} & \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2\sqrt{n}} & \frac{1}{2\sqrt{n}} & \dots & \sqrt{n} \end{pmatrix}.$$

A tale scopo, sfruttando la definizione di norma di matrici:

$$\|A\| = \sup_{\mathbf{u} \neq \mathbf{0}} \frac{\|A\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|},$$

si calcolino le quantità N_1, N_2 e N_∞, dove:

$$N_\ell \equiv \max_{k=1,\dots,n} \frac{\|A\mathbf{u}_k\|_\ell}{\|\mathbf{u}_k\|_\ell}, (N_\ell \leq \|A\|_\ell), \quad \ell = 1, 2, \infty,$$

e i vettori $\mathbf{u}_k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, ..., n$, sono assegnati come segue:

$$\mathbf{u}_k = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{elemento } 1 \\ \longrightarrow \text{elemento } 2 \\ \vdots \\ \longrightarrow \text{elemento } k \\ \longrightarrow \text{elemento } k+1 \\ \longrightarrow \text{elemento } k+2 \\ \vdots \\ \longrightarrow \text{elemento } n \end{array}$$

RISULTATI: $N_1 = \dots\dots\dots\dots$ $N_2 = \dots\dots\dots\dots$ $N_\infty = \dots\dots\dots\dots$

```
%
% Calcolo Numerico 1 - Milano - Esercizio 3 - 19 febbraio 2014
%


clear all
n=20;
in=1./sqrt(n); in2=in*0.5;

%costruzione della matrice A
v=sqrt([1:n]);
a=diag(v);
a(1,2:n)=in;
a(2:n,1)=in;
a(n,2:n-1)=in2;
a(2:n-1,n)=-in2;
x=zeros(n,1);

for k=1:n
  %costruzione degli n vettori u_k
  %moltiplicazione A*u_k
  %calcolo dei rapporti ||A*u_k||/||u_k|| per ciascuna delle 3 norme
  x(1:k)=1;
  ax=a*x;
  n_1(k)=norm(ax,1)/norm(x,1);
  n_2(k)=norm(ax)/norm(x);  %norm(x)=norm(x,2)
  n_inf(k)=norm(ax,inf)/norm(x,inf);
end
%calcolo del max per k=1,...,n
n1=max(n_1);
n2=max(n_2);
ninf=max(n_inf);

fprintf('Norma 1=%9.6f \t Norma 2=%9.6f \t Norma inf=%9.6f \n',n1,n2,ninf);

% Norma 1= 5.248529      Norma 2= 3.703629    Norma inf= 6.708204
```

Esercizio n. 3 - Tema d'esame 23 settembre 2019

Dato il sistema lineare $A_{[n]}\mathbf{x}_{[n]} = \mathbf{b}_{[n]}$ di dimensione n, con $n = 2^k,\ k = 5, 6, 7, 8, 9, 10$:

$$A_{[n]} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & ... & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & ... & 3 & 3 & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 2 & 3 & ... & n-2 & n-2 & n-2 \\ 1 & 2 & 3 & ... & n-2 & n-1 & n-1 \\ 1 & 2 & 3 & ... & n-2 & n-1 & n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{[n]} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \ddots \\ n-2 \\ n-1 \\ n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_{[n]} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \ddots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

si risolva il sistema perturbato $\hat{A}_{[n]}\hat{\mathbf{x}}_{[n]} = \hat{\mathbf{b}}_{[n]}$, dove:
$\hat{A}_{[n]}(n, n) = n + 1,\ \ \hat{A}_{[n]}(i, j) = A_{[n]}(i, j)$ per ogni altra coppia di indici i, j;
$\hat{b}_{[n]}(n, 1) = n + \frac{1}{n},\quad \hat{b}_{[n]}(i, 1) = b_{[n]}(i, 1)$ per ogni altro indice i.
Calcolare il numero di condizionamento $K_\infty(A_{[n]})$ e la perturbazione sulla soluzione $\|\hat{\mathbf{x}}_{[n]} - \mathbf{x}_{[n]}\|_\infty$ al variare di n.
Ipotizzando che

$$\lim_{n\to\infty} \|\hat{\mathbf{x}}_{[n]} - \mathbf{x}_{[n]}\|_\infty = \ell, \quad K_\infty(A_{[n]}) = O(n^p),$$

quali sono i valori di ℓ e di p? A tale scopo si calcolino i rapporti $K_\infty(A_{[n]})/K_\infty(A_{[n/2]})$.
Riportare i valori nella tabella.

n	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
$\|\hat{\mathbf{x}}_{[n]} - \mathbf{x}_{[n]}\|_\infty$						
$K_\infty(A_{[n]})$						
$K_\infty(A_{[n]})/K_\infty(A_{[n/2]})$	——					

$\ell =$
$p =$ Commento:

```
%
% Tema d'esame 23 settembre 2019 - Matematica Esercizio 3
%
clear all, close all

nn=2.^[5:10];
for k=1:length(nn)
    n=nn(k);
    for i=1:n
        for j=i:n
            a(i,j)=i;
            a(j,i)=i;
        end
    end
%x_vera=zeros(n,1); x(n,1)=1;
    Ka(k)=cond(a,inf);
    b=[1:n]';
    x=a\b;
    ae=a;
    ae(n,n)=n+1; be=b;
    be(n,1)=n+1/n;
    xe=ae\be;
    err(k)=norm(x-xe,inf);
    clear a
end
err
Ka
K_rapp=Ka(2:end)./Ka(1:end-1)

%err =      0.4844   0.4922   0.4961   0.4980   0.4990   0.4995

%Ka =       2112     8320     33024    131584   525312   2099200

%K_rapp =            3.9394   3.9692   3.9845   3.9922   3.9961
```

$\ell = 0.5$

$$K_\infty(A_{[n]}) = O(n^p) = C n^p$$

$$\frac{K_\infty(A_{[n]})}{K_\infty(A_{[\frac{n}{2}]})} = \frac{C n^p}{C\left(\frac{n}{2}\right)^p} \approx 2^p \approx 4 \quad \text{per "} n \to \infty \text{"}$$

$$\Downarrow \quad 2^p \approx 4$$

$$\boxed{p = 2}$$