Esercizi Laboratorio Calcolo Numerico 1
- Settimana 3 -

Nota: per i comandi non esplicitamente introdotti nel video di spiegazione si può utilizzare `help` oppure `doc` dei comandi stessi

1. Scrivere una *function* MATLAB che restituisca il valore intero N^*, tale che, detto s_n l'ennesimo termine della serie di Fibonacci (con $s_0 = s_1 = 1, s_{n+1} = s_n + s_{n-1}, n = 1, \dots$) siano verificate le condizioni:

$$s_{N^*} < 1000, \qquad s_{N^*+1} \geq 1000$$

2. Dato il polinomio
$p_n(x) = (x-1)(x-2)(x-3)\dots(x-n)$, riscriverlo nella forma

$$p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

calcolando i coefficienti $a_k, k = 0, 1, \dots, n$ mediante opportune istruzioni MATLAB. Successivamente si consideri il polinomio

$$p_{n,\varepsilon}(x) = a_{n,\varepsilon}x^n + a_{n-1,\varepsilon}x^{n-1} + a_{n-2,\varepsilon}x^{n-2} + \dots + a_{2,\varepsilon}x^2 + a_{1,\varepsilon}x + a_{0,\varepsilon},$$

ottenuto perturbando i coefficienti di p_n come segue:

$$a_{k,\varepsilon} = a_k + (k+1) * \varepsilon, \qquad k = 0, 1, \dots, n:$$

Siano r_j e $r_{j,\varepsilon}, j = 1, \dots, n$, le radici rispettivamente di p_n e $p_{n,\varepsilon}$. Calcolare gli errori:

$$e_m = |\min_{j=1,\dots,n} |r_j| - \min_{j=1,\dots,n} |r_{j,\varepsilon}||, \qquad e_M = |\max_{j=1,\dots,n} |r_j| - \max_{j=1,\dots,n} |r_{j,\varepsilon}||$$

dove il simbolo $|\cdot|$ denota sia il valore assoluto di un numero reale, sia il modulo di un numero complesso. Utilizzare: $n = 5, 10, \varepsilon = 10^{-3}, 10^{-2}$

3. Sia $P_{20}(x)$ il polinomio definito come

$$P_{20}(x) = \prod_{k=1}^{20}(x-k).$$

- Si trovi con l'uso di opportuni comandi Matlab il coefficiente c_{19} del termine x^{19}
- Si consideri ora la famiglia di polinomi perturbati $\widehat{P}_{20}(x) = P_{20}(x) - \alpha x^{19}$, dove $\alpha = 2^{-t}, t = 23, \dots, 28$. Si calcolino, al variare di α, le radici $\widehat{x}_k, k = 1, \dots, 20$ del corrispondente polinomio perturbato e si riporti al variare di α la quantità $M(\alpha) = \max_{k=1,\dots,20} |x_k - \widehat{x}_k|$ (si usi `format short e`)

- Si valuti il condizionamento del calcolo della radice k-esima $x_k, k = 1, \ldots, 20$, del polinomio $P_{20}(x)$ rispetto al parametro α calcolando la quantità

$$\mathcal{K}_k = \frac{|x_k^{19}|}{P'_{20}(x_k)}$$

dove $P'_{20}(x_k)$ è la derivata prima di $P_{20}(x)$ rispetto a x valutata in $x = x_k$. Quale è l'indice $\widehat{k}$ corrispondente alla radice per cui $\mathcal{K}_k$ è massimo? Si calcoli infine il rapporto R tra il massimo e il minimo valore di $\mathcal{K}_k$ per $k = 1, \ldots, 20$ (si usi `format short e`) e si commentino i risultati

4. Dati il polinomio $p_4(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x$ e il polinomio $p_3(x) = p'_4(x)$ trovare le radici r_j di p_4, $(r_1 < r_2 < r_3 < r_4)$, e le radici s_k di p_3, $(s_1 < s_2 < s_3)$.

   Successivamente si considerino i polinomi

   $$p_{4,\varepsilon}(x) = p_4(x) + \varepsilon, \quad p_{3,\varepsilon}(x) = p_3(x) + \varepsilon$$

   ottenuti perturbando i termini noti di p_4 e p_3.

   Siano $r_{j,\varepsilon}$, $(r_{1,\varepsilon} < r_{2,\varepsilon} < r_{3,\varepsilon} < r_{4j,\varepsilon})$ le radici di $p_{4,\varepsilon}$ e $s_{k,\varepsilon}$, $(s_{1,\varepsilon} < s_{2,\varepsilon} < s_{3,\varepsilon})$ le radici di $p_{3,\varepsilon}$.

   Calcolare gli errori:

   $$E_r = \max_{1 \le j \le 4} |r_j - r_{j,\varepsilon}|, \quad E_s = \max_{1 \le j \le 3} |s_j - s_{j,\varepsilon}|.$$

   Utilizzare $\varepsilon = 10^{-1}, 10^{-2}$.

5. Si vuole approssimare numericamente l'integrale $I_n = \mathrm{e}^{-1} \int_0^1 x^n \mathrm{e}^x \, dx$, per $n = 100$ e $n = 200$. Si usino a questo scopo i due approcci:

   a) : metodo in avanti (sia $I_{a,n}$ il valore ottenuto)

   $$I_{a,1} = \mathrm{e}^{-1}, \qquad I_{a,j+1} = 1 - (j+1) I_{a,j}, \qquad j = 1, \ldots, n-1;$$

   b) : metodo all'indietro (sia $I_{b,n}$ il valore ottenuto)

   $$I_{b,M} = 0, \quad \text{per } M \gg n, \quad (\text{si assuma } M = 1000), \quad I_{b,j} = \frac{1 - I_{b,j+1}}{j+1}, \quad j = M{-}1 : -1 : n.$$

   Considerando come valore "esatto" dell'integrale quello calcolato dal comando Matlab `quad`, si dica quanto valgono $e_{a,n} = |I - I_{a,n}|$ e $e_{b,n} = |I - I_{b,n}|$, rispettivamente.