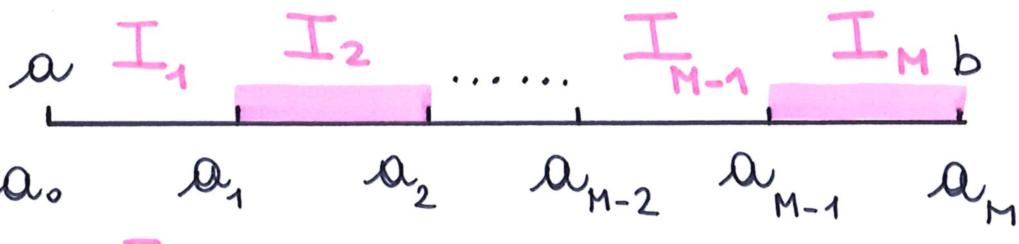
Formule di quadratura di Newton-Cotes composite.

Le formule di quadratura composite, che sono le formule più comunemente usate, si definiscono operando una preliminare suddivisione dell'intervallo di integrazione $[a, b]$ in sottointervalli e, utilizzando la proprietà additiva dell'integrale, si scrive l'integrale assegnato come una somma di integrali definiti su ciascun intervallo della suddivisione e si approssimano tali integrali definiti mediante formule di quadratura semplici. I motivi che suggeriscono l'introduzione delle formule composite sono sostanzialmente gli stessi che suggeriscono l'introduzione dell'interpolazione composita.

Posto $M \geq 1$:

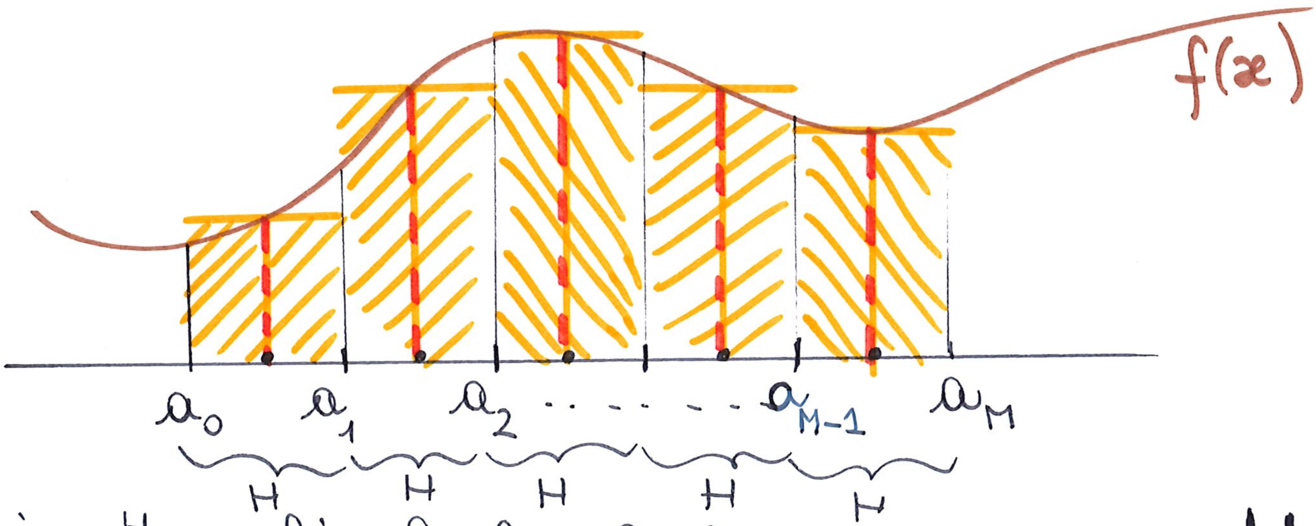
$$H = \frac{b-a}{M}, \quad a_i = a + iH, \; i = 0, ..., M, \; a = a_0, \; b = a_M.$$

($M = 1 \Rightarrow$ Formule di quadratura semplici).



$I_i = [a_{i-1}, a_i] \quad i = 1, \dots, M$

Formula di quadratura del PUNTO MEDIO (composita)



base dei rettangoli: $a_1 - a_0,\ a_2 - a_1,\ \dots,\ a_M - a_{M-1} = \mathbf{H}$

altezze dei rettangoli:

1) $f\left(\frac{a_0+a_1}{2}\right) = f\left(a_0 + \frac{H}{2}\right) = f\left(a_1 - \frac{H}{2}\right)$

2) $f\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right) = f\left(a_1 + \frac{H}{2}\right) = f\left(a_2 - \frac{H}{2}\right)$

⋮

M) $f\left(\frac{a_{M-1}+a_M}{2}\right) = f\left(a_{M-1} + \frac{H}{2}\right) = f\left(a_M - \frac{H}{2}\right)$

- Formula del punto medio composita

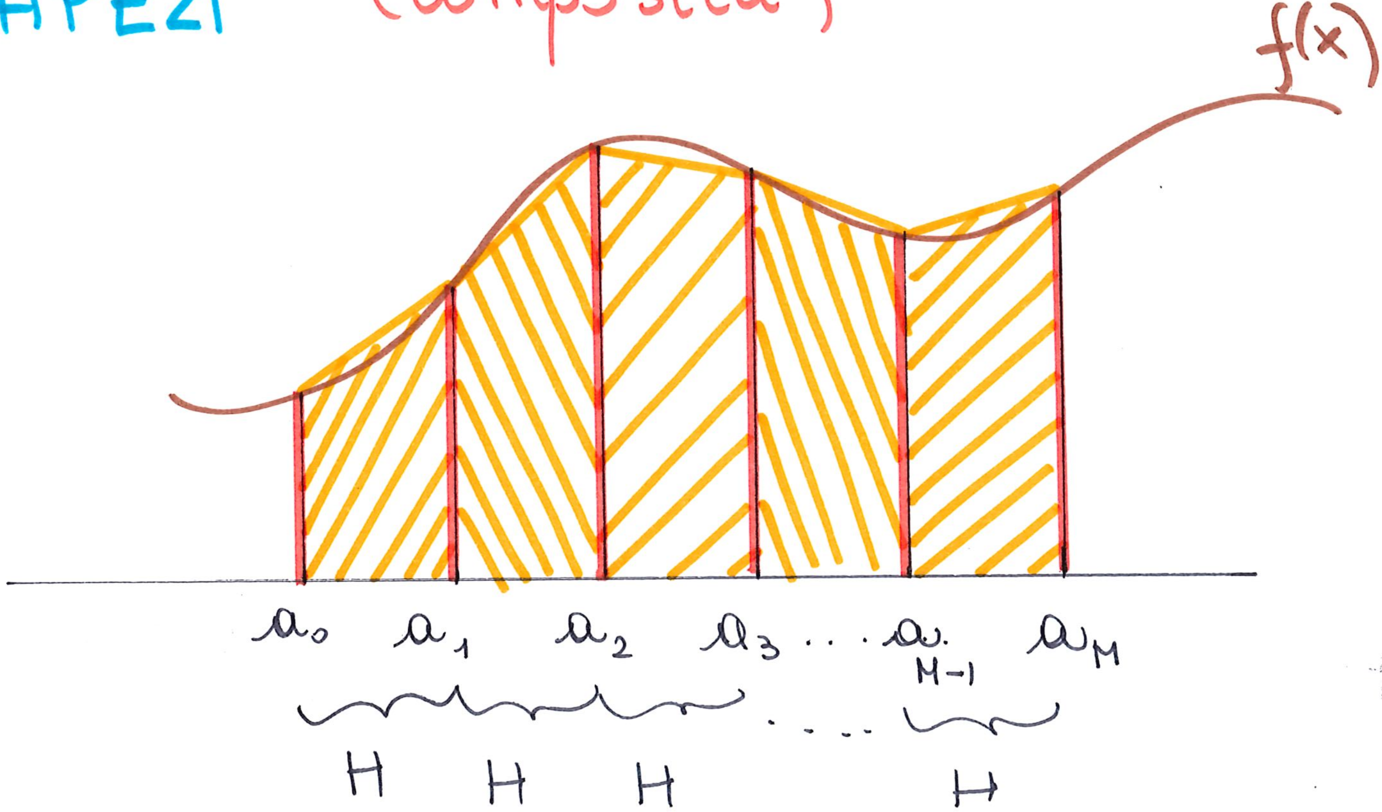
$$\boxed{\tilde{I}_{PM}^{(c)}} = \boxed{H \sum_{i=1}^{M} f\left(a_i - \frac{H}{2}\right)}$$

Errore:

$$I(f) - \tilde{I}_{PM}^{(c)} = \tfrac{b-a}{24} H^2 f^{(2)}(\eta), \;\; \eta \in (a,b) \;\; \text{(formula classica)}$$

$$I(f) - \tilde{I}_{PM}^{(c)} = \tfrac{H^2}{24} [f^{(1)}(b) - f^{(1)}(a)] \qquad \text{(formula asintotica).}$$

Formula di quadratura dei TRAPEZI (composita)



basi dei trapezi

$$f(a_0), f(a_1), f(a_2), \dots, f(a_{M-1}), f(a_M)$$

altezze dei trapezi rettangoli

$$a_1 - a_0,\ a_2 - a_1, \dots, a_{M-1} - a_{M-2},\ a_M - a_{M-1}$$

- <u>Formula dei trapezi composita</u>

$$\boxed{\tilde{I}_T^{(c)}} = \frac{H}{2}\sum_{i=1}^{M}[f(a_{i-1}) + f(a_i)] = \boxed{\frac{H}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\sum_{i=1}^{M-1} f(a_i)\right]}$$

Errore:

$$I(f) - \tilde{I}_T^{(c)} = -\tfrac{b-a}{12}H^2 f^{(2)}(\eta),\ \eta \in (a,b) \quad \text{(formula classica)}$$

$$I(f) - \tilde{I}_T^{(c)} = \tfrac{H^2}{12}[f^{(1)}(a) - f^{(1)}(b)] \qquad \text{(formula asintotica).}$$