Esercizi Laboratorio Calcolo Numerico 1
- Settimana 4 -

Nota: per i comandi non esplicitamente introdotti nel video di spiegazione si può utilizzare `help` oppure `doc` dei comandi stessi

1. Sia
$$g(x) = \ln(x+3), \qquad x \in (0, +\infty)$$

   - Si approssimi il suo punto fisso di ascissa positiva, detto α, con il metodo iterativo $x_n = g(x_{n-1})$, $n \geq 1$, $x_0 = 0$. Si utilizzi a tale scopo il test di arresto
$$|x_n - x_{n-1}| < 10^{-2}, \quad n \geq 1.$$
Quante iterazioni sono necessarie? Qual è il valore approssimato di α così ottenuto?
   - Sia ora
$$G(x) = g(x) - \frac{g'(x)}{1 - g'(x)}(x - g(x)).$$
Si verifichi che α è anche punto fisso di G se lo è di g. Si applichi il metodo iterativo $y_m = G(y_{m-1})$, $m \geq 1$, con valore di innesco dato dall'ultima approssimazione trovata al punto precedente e test di arresto
$$|y_m - y_{m-1}| < 10^{-6}, \quad m \geq 1.$$
Calcolare il modulo degli errori assoluti associati alle due approssimazioni trovate, considerando come valore "esatto" di α quello ottenuto dalla function `fzero` di Matlab

2. Sia $f(x) = x - \mathrm{e}^{-x}$ e sia α l'unico zero di f. Per l'approssimazione di α, si considerino i seguenti due metodi iterativi, aventi rispettivamente funzione di punto fisso:

   a) $h(x) = \mathrm{e}^{-x}$

   b) $g(x) = h(x) - \dfrac{h'(x)f(x)}{1 - h'(x)}$

   - Si determini in ciascuno dei due casi il numero di iterazioni $N_{a,b}$ necessarie affinché sia soddisfatto il test d'arresto $|f(x_{N_{a,b}})| \leq 10^{-8}$
   - Successivamente, basandosi sul valore della derivata prima delle funzioni di punto fisso, si deduca l'ordine di convergenza di ciascun metodo. Per il secondo metodo, si consideri il valore approssimato della derivata prima
$$g'(\alpha) \approx \frac{g(x_N) - g(x_{N-1})}{x_N - x_{N-1}}.$$

3. Dati $f(t) = \sin(5/4t) + \exp(1/4t)$ e il sistema lineare
$$\begin{cases} y = f(x) \\ x = f(y) \end{cases}$$

- Identificare graficamente la posizione della soluzione
- Implementare la seguente procedura iterativa: assegnati i valori di innesco al primo passo $k = 1, x^{(1)} = 1, y^{(1)} = 2$, $\forall k \geq 1$ calcolare

$$\begin{cases} y^{(k+1)} = f(x^{(k)}), \\ x^{(k+1)} = f(y^{(k+1)}) \end{cases}$$

  Calcolare il numero di iterazioni K necessario affinché:

$$\max(|x^{(K)} - x^{(K-1)}|; |y^{(K)} - y^{(K-1)}|) \leq 10^{-4}$$

4. Sia data la funzione

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \sin(x), \quad x \in [a, b]$$

- dopo averne verificato le ipotesi di applicabilità per $a = -1, b = 0$, si usi il metodo di bisezione per approssimare lo zero della funzione $f(x)$ usando `toll=1e-4`. Considerando come valore esatto per lo zero quello ottenuto dal comando `fzero`, si calcoli l'errore commesso. Quante iterazioni sono necessarie?
- Si scriva un semplice codice che implementa il metodo di bisezione modificato tramite la seguente legge, per $k \geq 1$

$$x_k = \begin{cases} a_k + \frac{1}{3}(b_k - a_k), & \text{se} \quad |f(a_k)| \leq |f(b_k)|, \\ a_k + \frac{2}{3}(b_k - a_k), & \text{se} \quad |f(a_k)| > |f(b_k)| \end{cases}$$

  con $a_0 = a$, $b_0 = b$. Si osservi che essa calcola il nuovo estremo dell'intervallo alla frazione 1/3 e non 1/2 dell'intervallo attuale. Si basi il test di arresto sulla differenza in valore assoluto tra due iterate successive. Quanto vale ora l'errore commesso? Quante iterazioni sono necessarie?

5. Sia $f(x) = 5\left(x + \frac{3}{5}\right)\left(x + \frac{1}{10}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$. Si vogliono calcolare le intersezioni $\alpha_1 < 0$ e $\alpha_2 > 0$ di tale funzione con la circonferenza C di raggio unitario centrata nell'origine. A tale scopo:

- si stimi graficamente la posizione delle due intersezioni
- dopo averne verificato la applicabilità, si usi il metodo di bisezione per approssimare le intersezioni con `toll=1e-6` e intervalli iniziali $[-1, 0]$ e $[0, 1]$, rispettivamente, per α_1 e α_2. Si calcoli quindi il valore assoluto dell'errore commesso nell'approssimare ciascun punto di intersezione, assumendo come esatti i valori prodotti dalla function Matlab `fzero`.