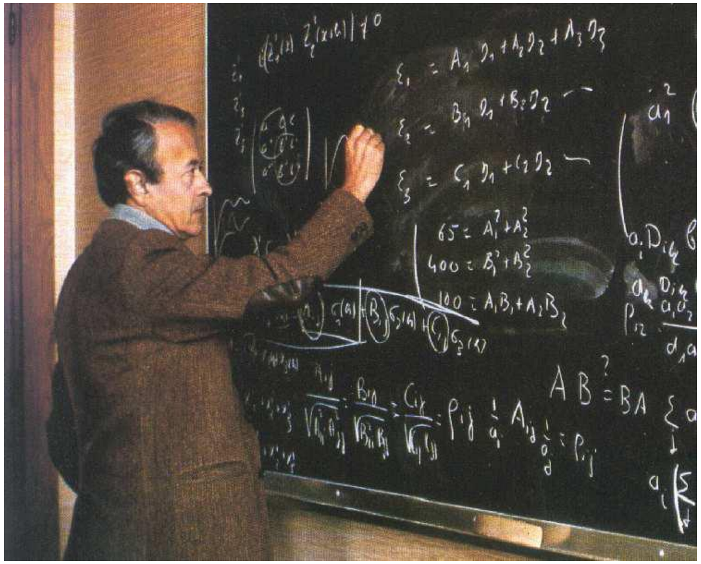
Elaborazione di Immagini – Morfologia Matematica (MM)

morfología = *lat.* MORPHOLOGÍA dal *gr.* MORPHÈ *forma* (di cui taluno erroneamente pretende sia trasposizione il *lat.* FÒRMA, col quale combina soltanto nel significato) e LÒGIA = LÒGOS *discorso, trattato.*
Storia delle forme che può rivestire la materia; Trattato della conformazione esterna degli animali; Metamorfosi.
Cfr. *Amorfo; Polimorfo; Morfologico.*

L'analisi delle immagini si basa sulla forma e la struttura geometrica delle regioni di interesse. All'inizio le operazioni nell'ambito della morfologia matematica erano definite utilizzando opportune "operazioni" insiemistiche:
- si modificano le forme con operatori locali;
- alcuni operatori sono simili alla convoluzione ma utilizzano operazioni tra insiemi;
- utile per alcuni ambiti quali: enhancing di proprietà geometriche/strutturali, segmentazione, descrizione quantitativa,…

MM è nata a metà degli anni ’60 in Francia alla Ecole des Mines de Paris, in Fontainebleau (alla Ecole des erano interessati all’analisi di dati geologici e relativi alla struttura dei materiali).
I maggiori contributi vennero da Georges Matheron e Jean Serra.



•Il nome ‘Mathematical Morphology’ pare sia Stato coniato in un

•La tecnica è diventata nota internazionalmente in seguito ad un articolo di Haralick/Sternberg/Zhuang su PAMI in 1987

La teoria è stata inizialmente sviluppata per immagini binarie, in seguito è stata estesa ad immagini a livelli di grigio attraverso insiemi di livello.

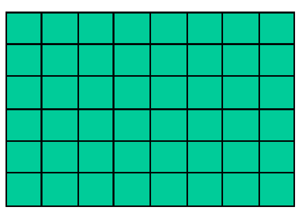
Alcuni concetti risalgono a Minkowski (1901), Birkhoff (1948) e Hawidger (1957).
Attualmente è compresa nelle teorie:
◦ Scale-space
◦ PDE-based filtering

Alcuni concetti risalgono a Minkowski (1901), Birkhoff (1948) e Hawidger (1957).

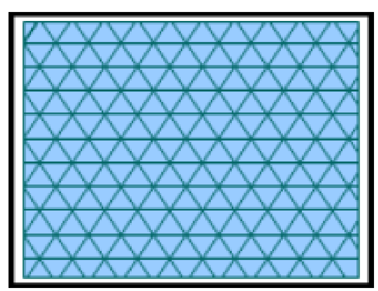
Attualmente è compresa nelle teorie:
◦ Scale-space
◦ PDE-based filtering

Fino ad ora una immagine (monocromatica) è stata definita come una funzione $I(x,y)$ a valori reali in due variabili reali (x,y) nel caso continuo o due variabili discrete $I(m,n)$.
Una alternativa a consiste nel considerare una immagine come una collezione (o insieme) di coordinate (continue o discrete) corrispondenti a punti o pixel appartenenti ad un oggetto dell'immagine stessa.

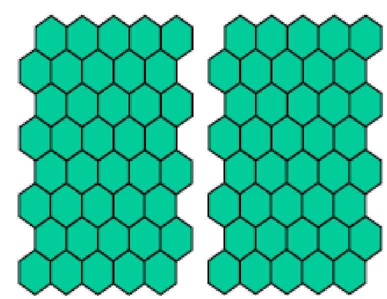
Quadrata



Triangolare



Esagonale



Basic Structures

Linear signal processing :

The basic structure in linear signal processing is the ***vector space*** *i.e.* a set of vectors V and a set of scalars K such that

1) - K is a field ;
   - V is a commutative group

2) - There exists a multiplicative law between scalars and vectors.

Mathematical morphology :

The basic structure is a ***complete lattice*** *i.e.* a set $\mathcal{L}$ such that:

1) $\mathcal{L}$ is provided with a partial ordering, *i.e.* a relation $\leq$ with

$$\mathbf{A \leq A}$$
$$\mathbf{A \leq B,\ B \leq A \quad \Rightarrow \quad A = B}$$
$$\mathbf{A \leq B,\ B \leq C \quad \Rightarrow \quad A \leq C}$$

2) For each family of elements $\{Xi\} \in P$, there exists in $\mathcal{L}$:

a greatest lower bound $\wedge\{Xi\}$, called ***infimum*** (or inf.)

a smallest upper bound $\vee\{Xi\}$, called ***supremum*** (or sup.)

Basic Operations

Linear Signal Processing

Since the structure is that of a vector space, whose fundamental laws are **addition** and **scalar product**, then

The basic operations are those which preserve these laws, *i.e.* which commute under them:

$$\Psi(\Sigma\, \lambda_i\, f_i\,) = \Sigma\, \lambda_i\, \Psi\,(f_i\,)$$

The resulting operator is called **convolution.**

Mathematical Morphology

Since the Lattice structure lies on the ordering relation, on the sup and the inf, the basic operations are those which preserve these fundamental laws, namely

Ordering Preservation :

$\{X \leq Y \Rightarrow \Psi(X) \leq \Psi(Y)\} \Leftrightarrow$ **increasingness**

Commutation under Supremum.:

$$\Psi\,(\vee X_i\,) = \vee \Psi\,(X_i\,) \Leftrightarrow \textbf{Dilation}$$

Commutation under Infimum:

$$\Psi\,(\wedge X_i\,) = \wedge \Psi\,(X_i\,) \Leftrightarrow \textbf{Erosion}$$

Examples of Lattices

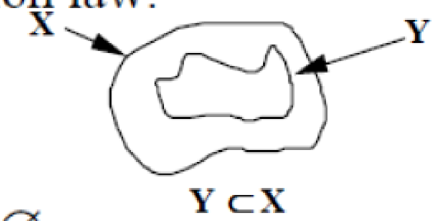
Lattice of subsets P(E) of a set E:

The **partial** ordering is defined by the inclusion law:

Sup: ∪

Inf: ∩

Extremes: E, ∅



Lattices of real or integer numbers:

This **total** ordering is given by the succession of the values:

Sup: ∨ (usual sense)

Inf: ∧

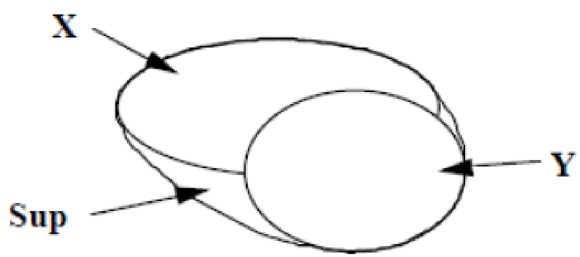
Extremes: $-\infty, +\infty$

Lattice of convex sets:

The order is defined by the inclusion law:

Sup : Convex hull of the union

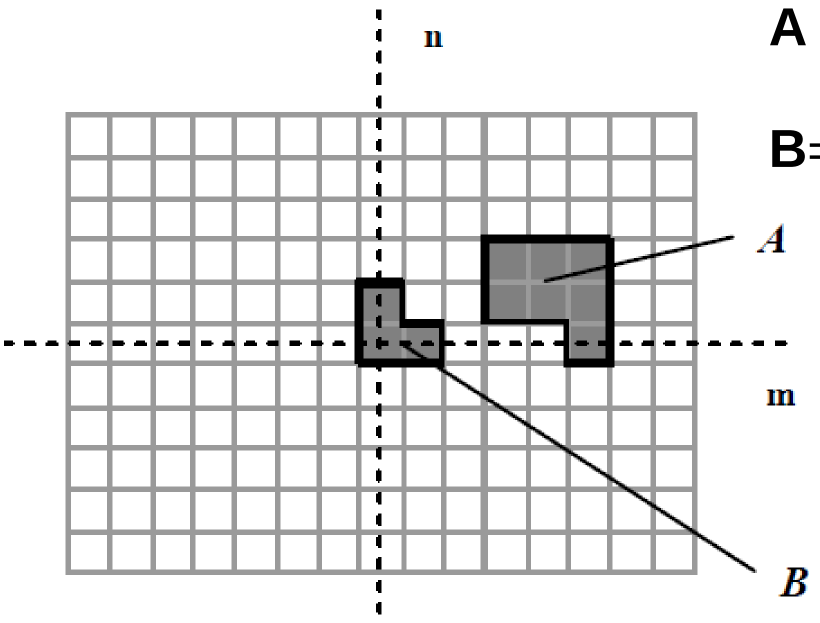
Inf : Intersection



Fino ad ora una immagine (monocromatica) è stata definita come una funzione $I(x,y)$ a valori reali in due variabili reali (x,y) nel caso continuo o due variabili discrete $I(m,n)$. Una alternativa a consiste nel considerare una immagine come una collezione (o insieme) di coordinate (continue o discrete) correspondenti a punti o pixel appartenenti ad un oggetto dell'immagine stessa.

Riportiamo nella figura sottostante una immagine che contiene due oggetti o insiemi ***A*** e ***B*** (si noti che occorre fissare un sistema di coordinate).

Considerando immagini binarie restringiamo la discussione a sottoinsiemi dello spazio $\boldsymbol{Z}^2$.



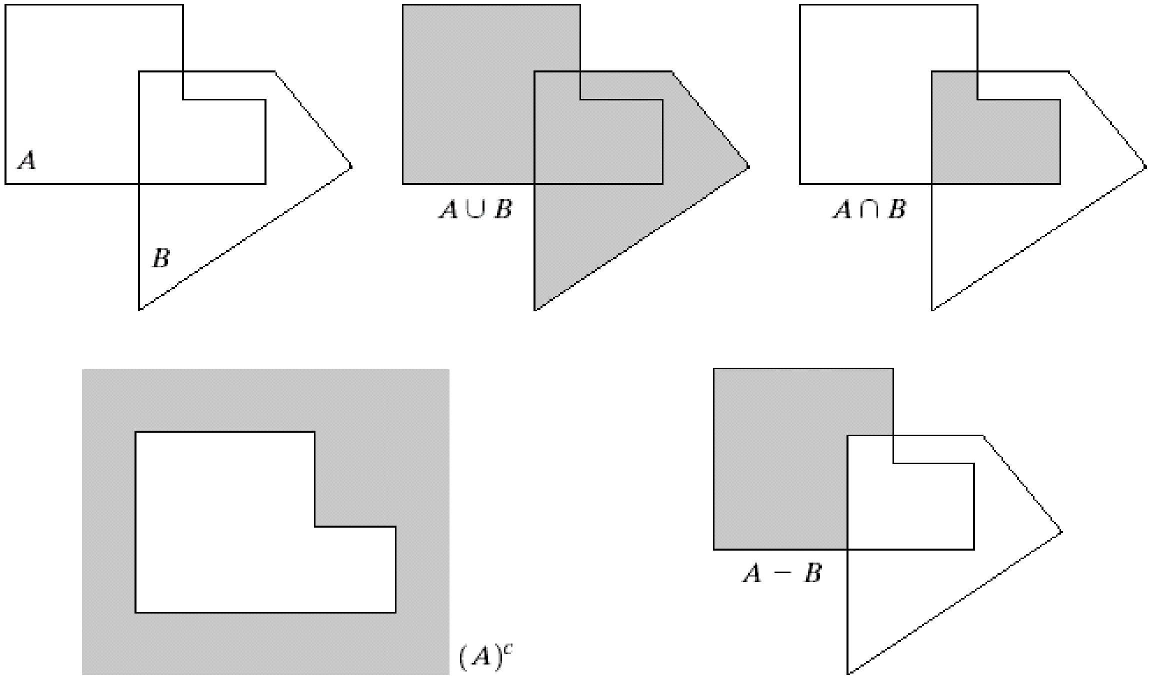
A =\{(5,0),(3,1),(4,1),(5,1),(3,2),(4,2),(5,2) \}

B=\{(0,0), (1,0), (0,1) \}

Potremmo definire gli oggetti come

A = \{ (m,n) tale che *P*(m,n) vera \} dove

P è una certa "proprietà".



a b c
d e

FIGURE 9.1
(a) Two sets A and B. (b) The union of A and B. (c) The intersection of A and B. (d) The complement of A. (e) The difference between A and B.

Operazioni insiemistiche classiche, complementare $\mathbf{A}^c$ di $\mathbf{A}$:

$\mathbf{A}^c = \{ (x,y): \ (x,y) \notin \mathbf{A} \}$

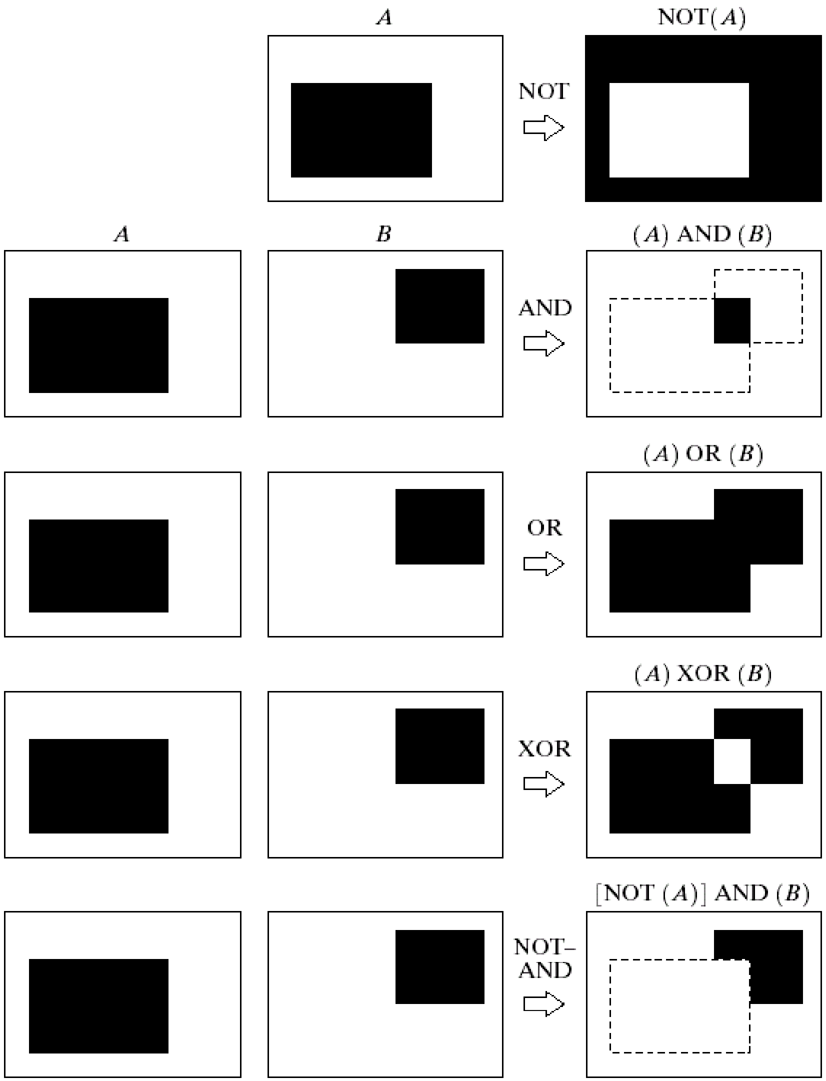


FIGURE 9.3 Some logic operations between binary images. Black represents binary 1s and white binary 0s in this example.

Operazioni logiche per immagini
Binarie: 1=nero, 0=bianco

TABLE 9.1 The three basic logical operations.

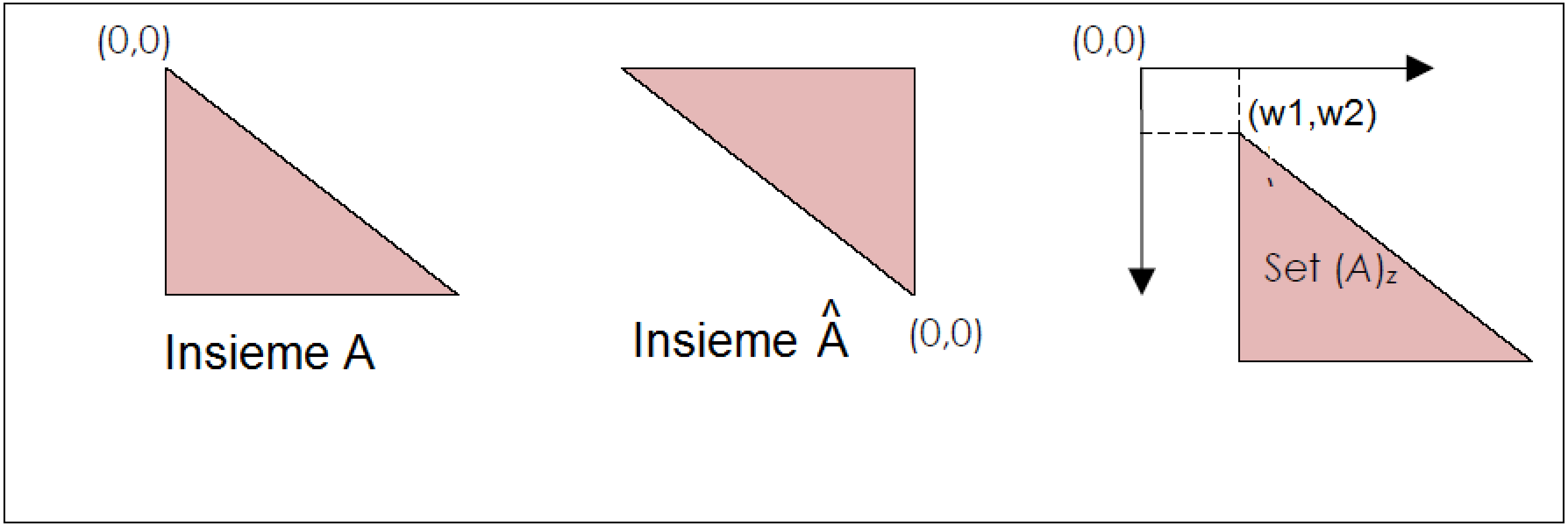
p	q	p AND q (also $p \cdot q$)	p OR q (also $p + q$)	NOT (p) (also $\bar{p}$)
0	0	0	0	1
0	1	0	1	1
1	0	0	1	0
1	1	1	1	0

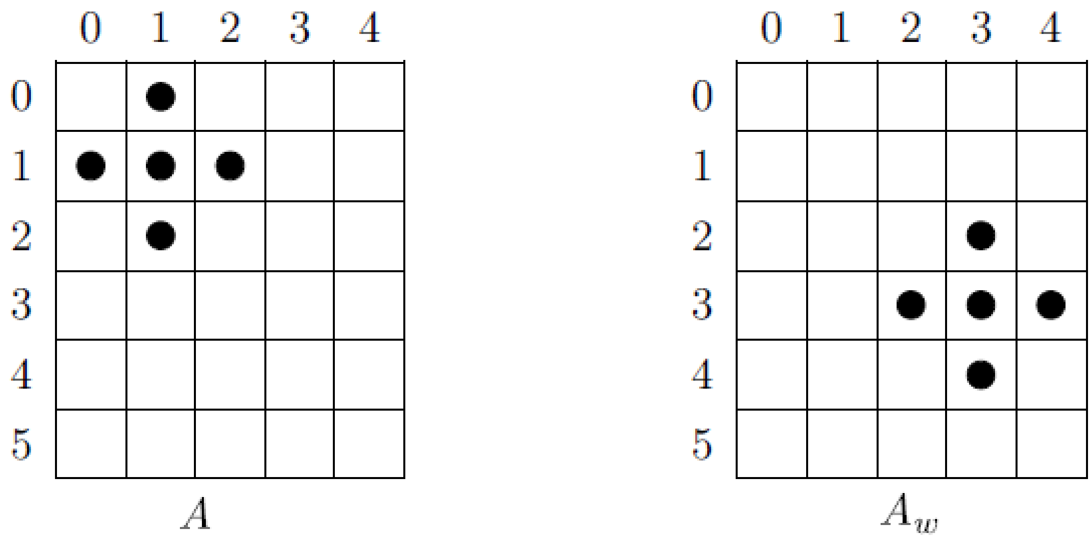
Siano, $\mathbf{A} \subset Z^2$, $w=(w_1,w_2) \in Z^2$, definisco la traslazione $\mathbf{A}_w$ come

$$\mathbf{A}_w = \mathbf{A} + w = \{ c : c = a + w;\ \text{con}\ \ a \in \mathbf{A} \}$$

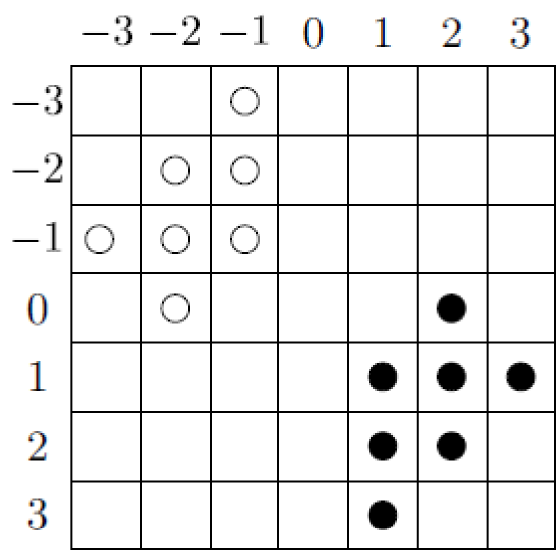
E la riflessione $\hat{\mathbf{A}}$ come:

$$\hat{A} = \{(-x, -y) : (x, y) \in A\}.$$





Traslazione



Riflessione

Le due trasformazioni morfologiche di base sono:

- *erosione*

- *dilatazione*

Consideriamo l'interazione tra A (oggetto di interesse) ed un insieme B detto "elemento strutturante" che caratterizzerà il cambiamento morfologico.
Operazioni insiemistiche di base:

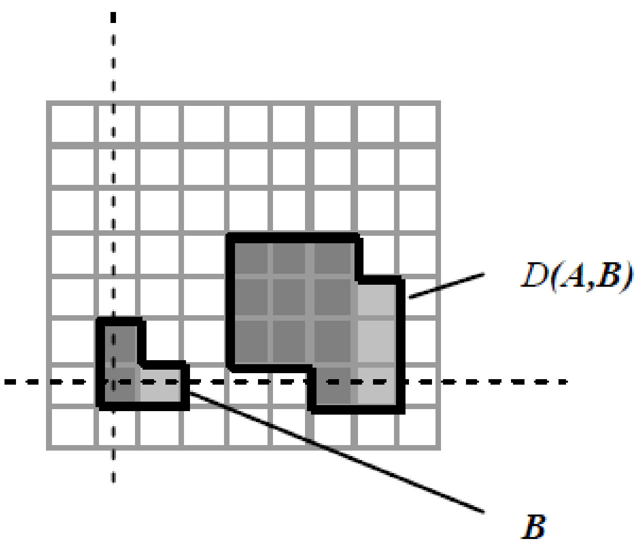
Addizione di Minkowski - $$A \oplus B = \bigcup_{\beta \in B} (A + \beta)$$

Sottrazione di Minkowski - $$A \ominus B = \bigcap_{\beta \in B} (A - \beta)$$

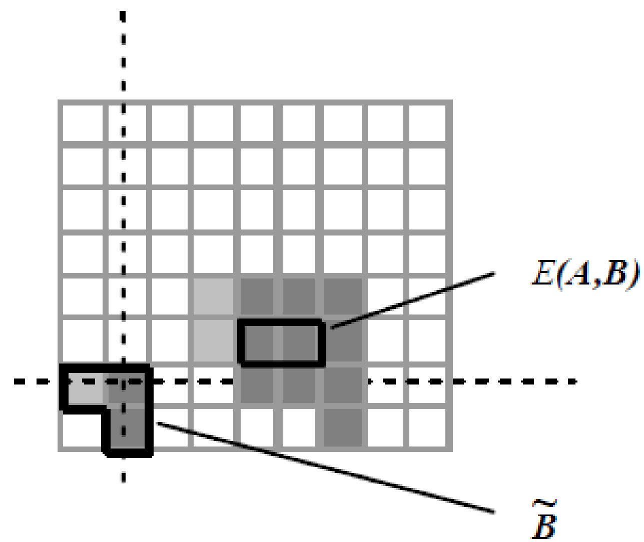
Dilatazione - $$D(A,B) = A \oplus B = \bigcup_{\beta \in B} (A + \beta)$$

Erosione - $$E(A,B) = A \ominus B = \bigcap_{\beta \in \hat{B}} (A + \beta)$$

(si può scrivere utilizzando
la riflessione di B)



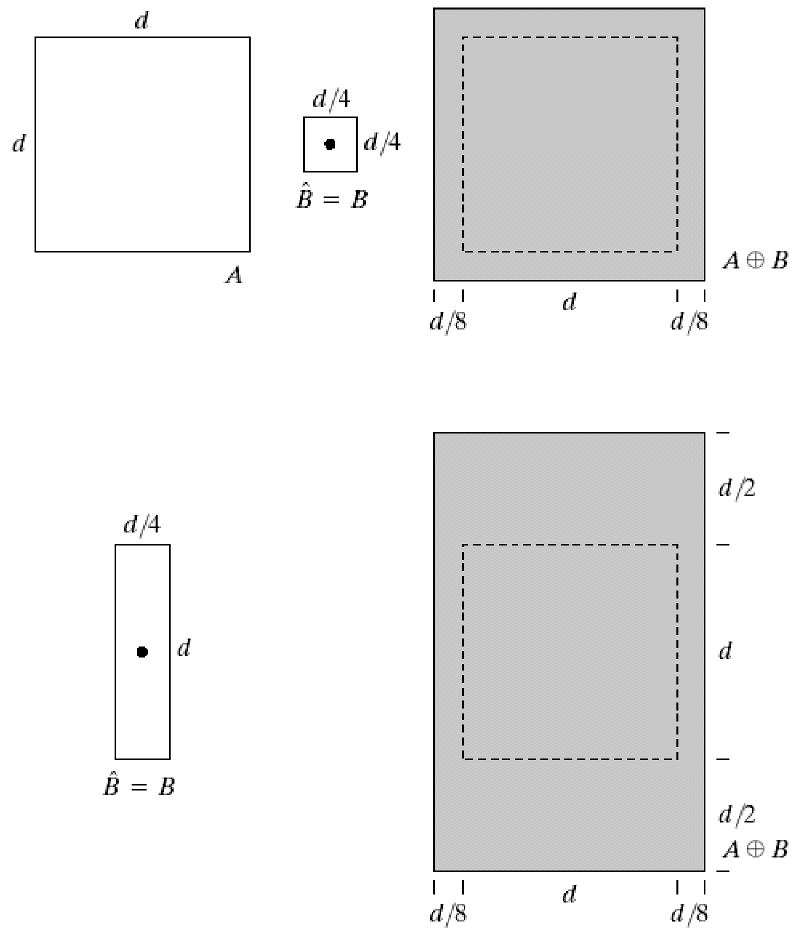
(a) Dilation $D(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$



(b) Erosion $E(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})$

a b c
d e

FIGURE 9.4
(a) Set A.
(b) Square structuring element (dot is the center).
(c) Dilation of A by B, shown shaded.
(d) Elongated structuring element.
(e) Dilation of A using this element.



Dilatazione con diversi elementi strutturanti

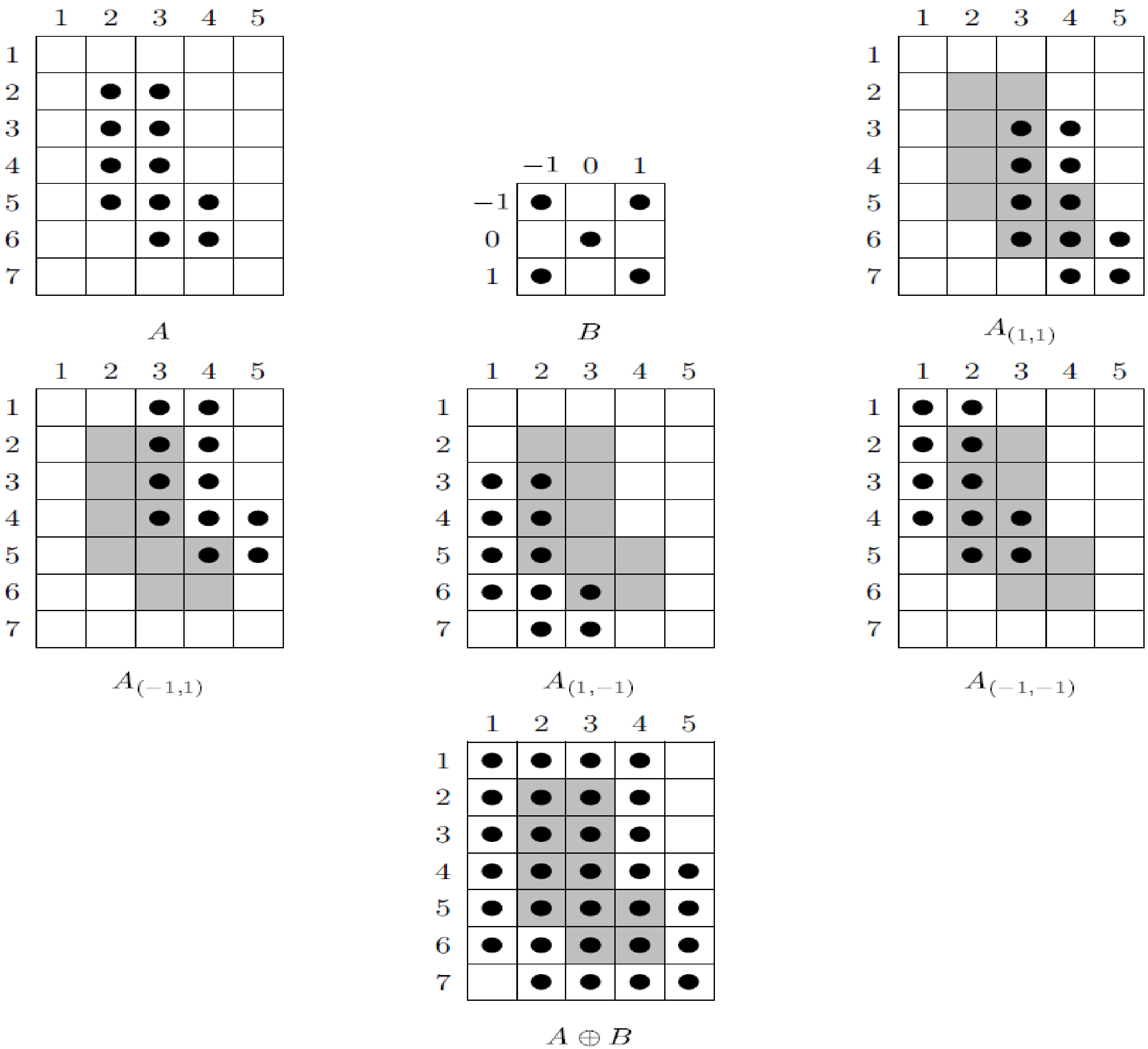
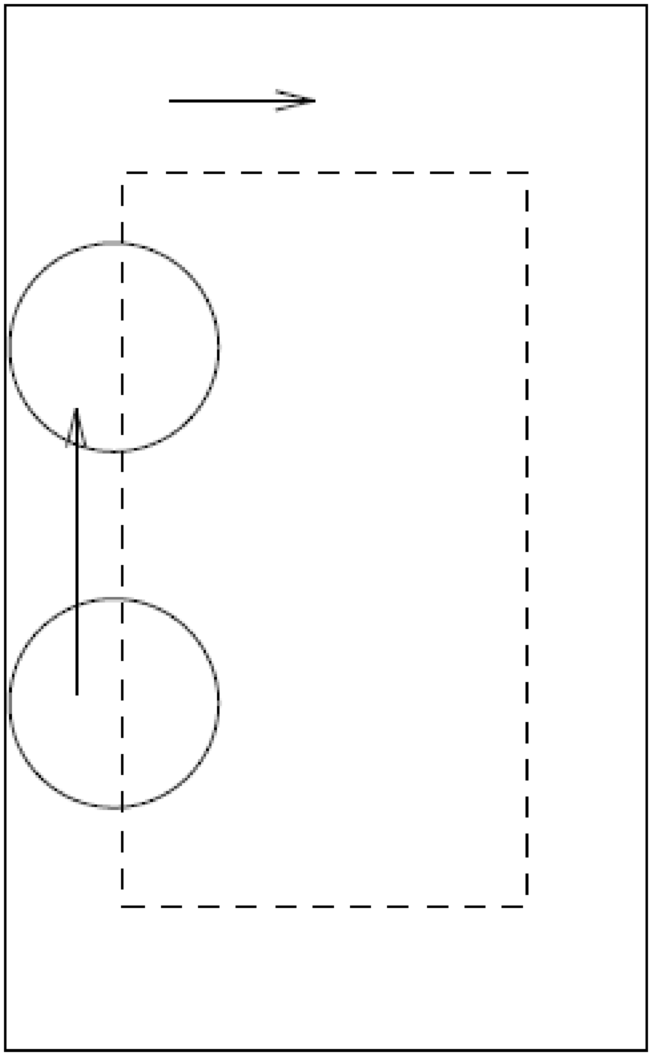
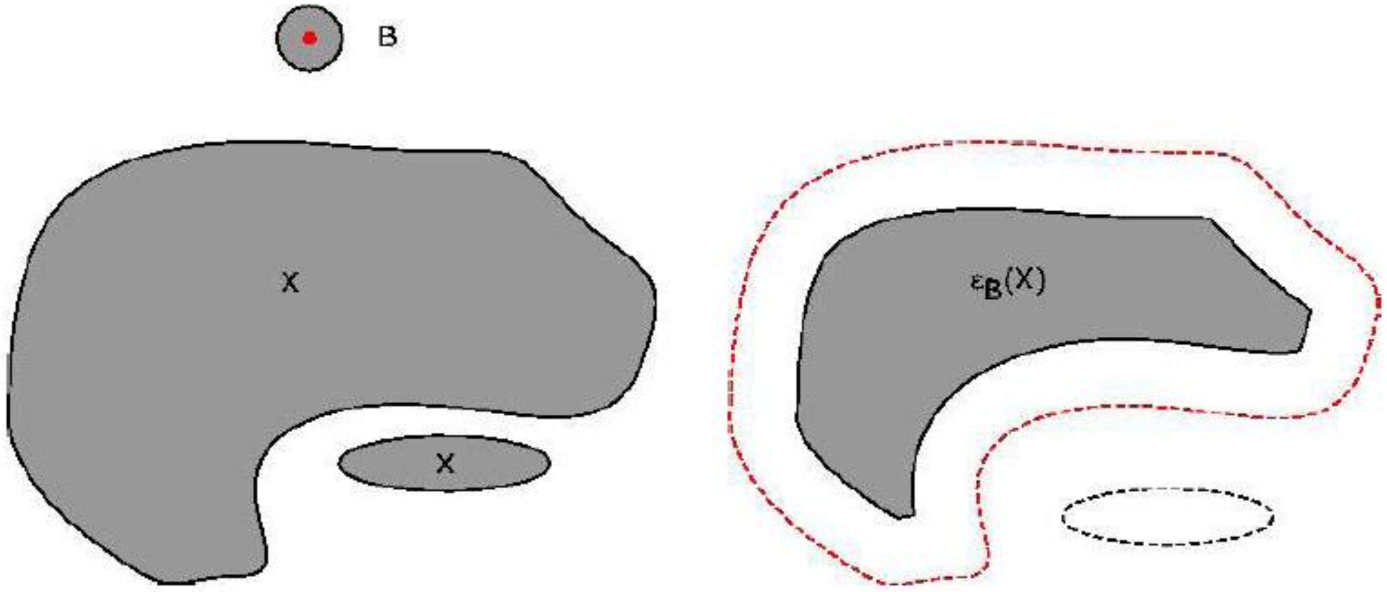


Figure 9.3: Dilation

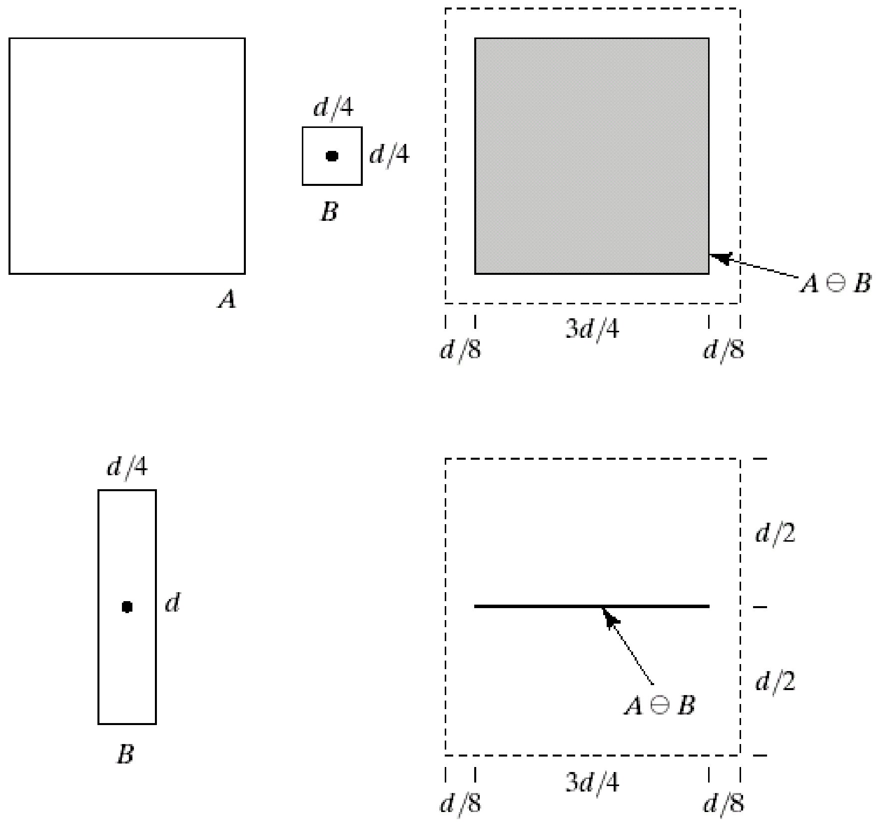
$$A \ominus B = \{x : B_x \subseteq A\}.$$



Erosione



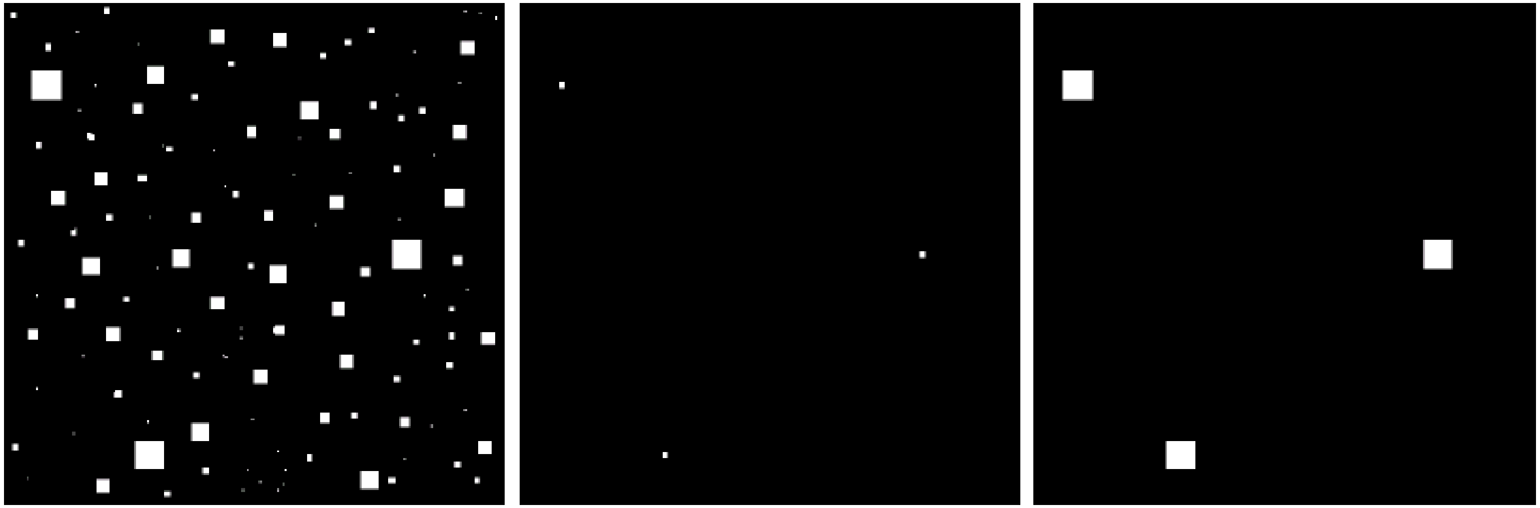
Erosione



a b c
d e

FIGURE 9.6 (a) Set A. (b) Square structuring element. (c) Erosion of A by B, shown shaded. (d) Elongated structuring element. (e) Erosion of A using this element.

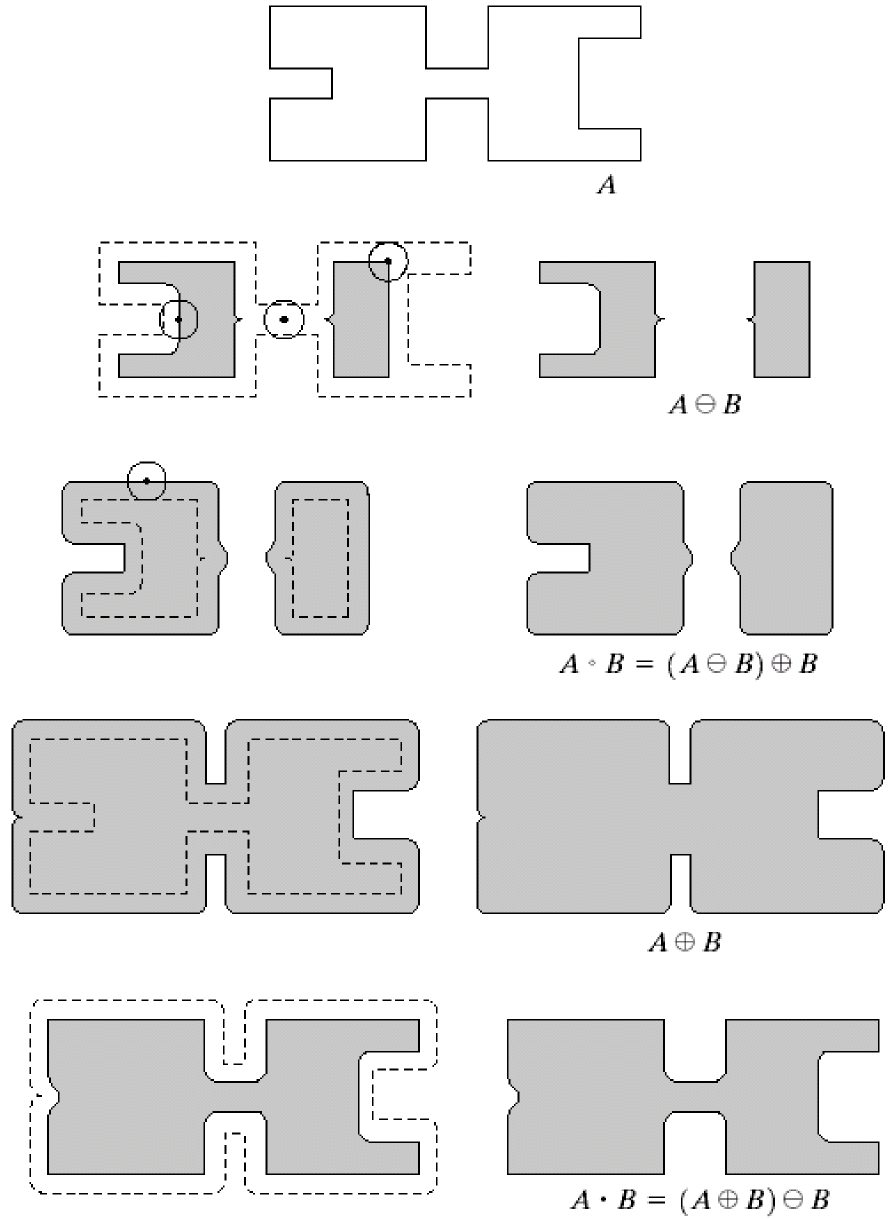
Erosione



a b c

FIGURE 9.7 (a) Image of squares of size 1, 3, 5, 7, 9, and 15 pixels on the side. (b) Erosion of (a) with a square structuring element of 1's, 13 pixels on the side. (c) Dilation of (b) with the same structuring element.

Erosione + Dilatazione: NON SONO UNA L'INVERSO DELL'ALTRA



a
b c
d e
f g
h i

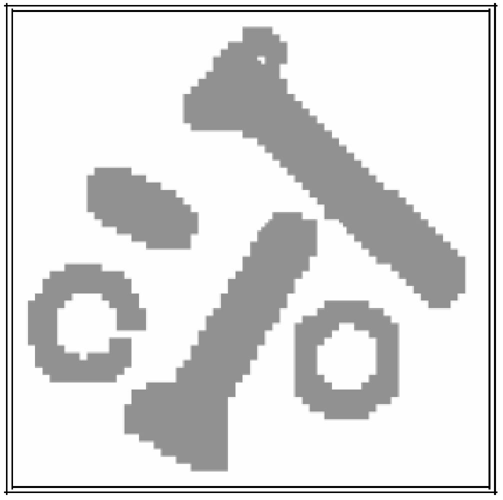
FIGURE 9.10 Morphological opening and closing. The structuring element is the small circle shown in various positions in (b). The dark dot is the center of the structuring element.

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{N}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} - & - & - \\ - & 1 & - \\ - & - & - \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}_2 = \begin{bmatrix} - & 1 & - \\ 1 & - & 1 \\ - & 1 & - \end{bmatrix}$$

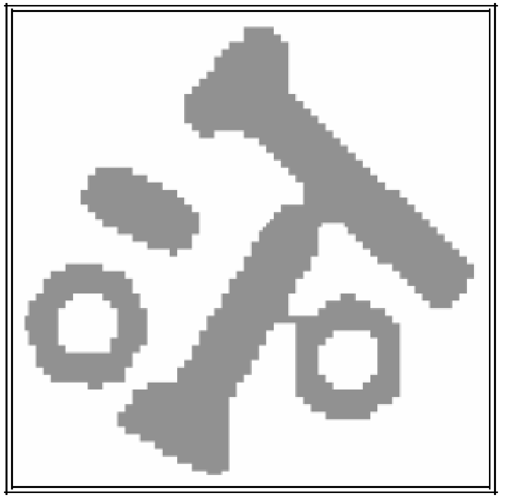
(a) **(b)** **(c)**

Figure 40: Structuring elements $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B}_1$, and $\boldsymbol{B}_2$ that are 3×3 and symmetric.

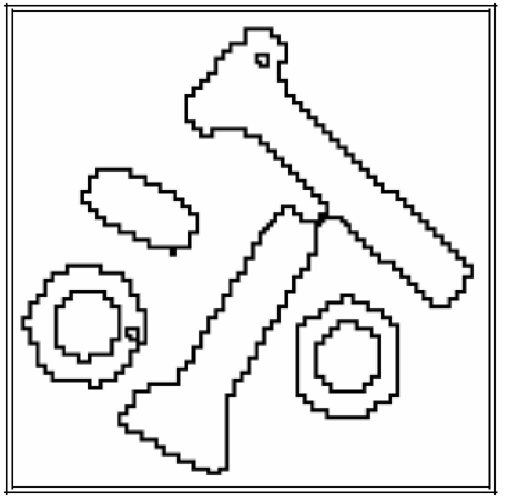
a) Image A **b)** *Dilation* with $2\boldsymbol{B}$ **c)** *Erosion* with $2\boldsymbol{B}$



d) *Opening* with 2***B***



e) *Closing* with 2***B***



f) *8-c contour:* ***A***–*E*(***A***,***N***$_8$)

$$A \circ B = (A \ominus B) \oplus B.$$ Operazione di opening

$$A \bullet B = (A \oplus B) \ominus B.$$ Operazione di closing