EdI – 2020/21

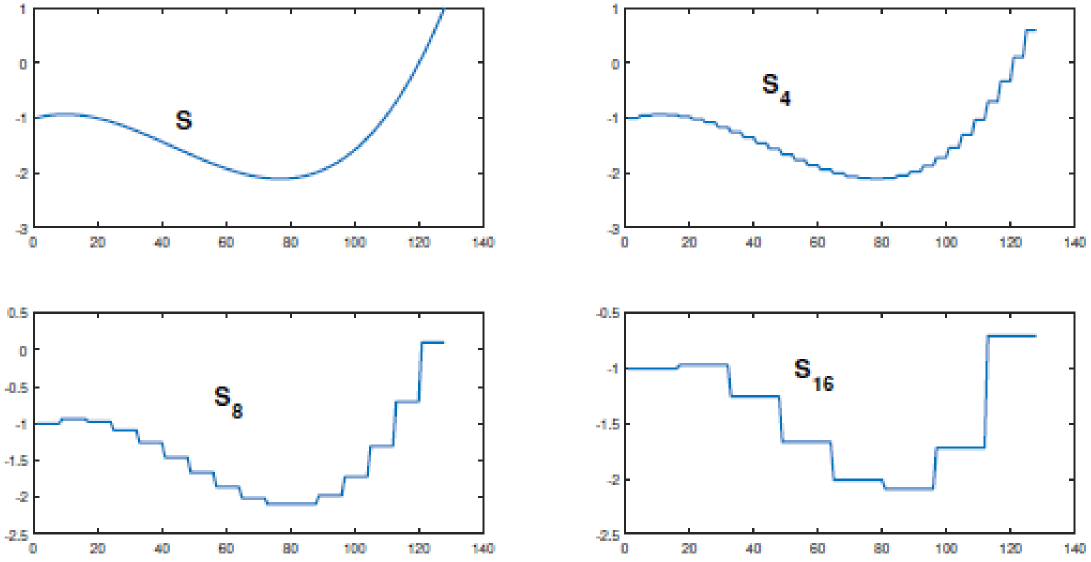
Trasformata di Haar 1D e 2D

Giovanni Naldi- ESP UNIMI

Trasformata discreta di Haar

Diversi approcci:
- Analisi del segnale con operatori locali (a differenti scale)
- Algebra Lineare e basi
- Statistico
- Analisi armonica (discretizzazione trasformata continua)
- ….

Uno dei concetti fondamentali legati a questa trasformata (codifica) è la **scala** (**risoluzione**) a cui si osserva un segnale (qui e nel seguito utilizzeremo principalmente segnali unidimensionali).



Esempio di un segnale S, qui continuo, e alcune sue approssimazioni con funzioni costanti a tratti per scale (risoluzioni spaziali) individuate da un indice numerico, differenti. Cercheremo di «combinare» le differenti approssimazioni (o scale)

Esempio. Consideriamo un segnale discreto di partenza di sole otto componenti

S = { 37 , 35, 28, 28, 58, 18, 21, 15}

che sono considerate alla scala più fine. Analizzare coppie di valori contigue

{37, 35} {28 , 28} {58, 18} {21,15}

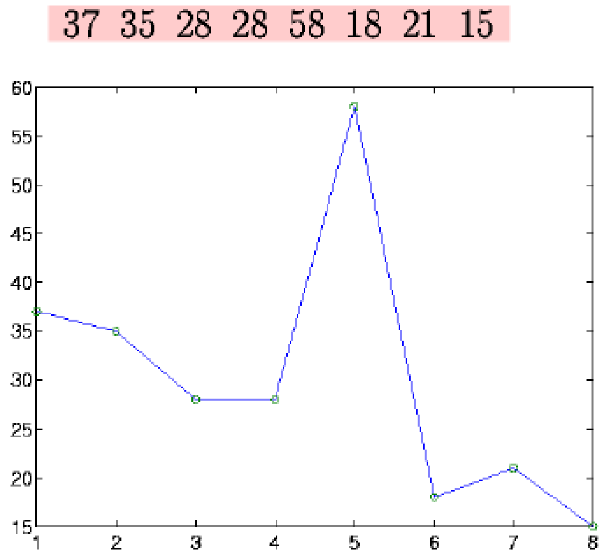
vuol dire guardare il segnale in particolari sottodomini. Calcoliamo le medie m_i^1

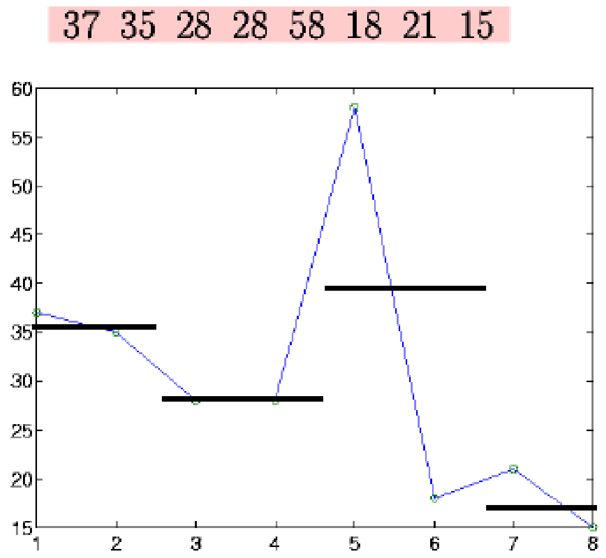
media:

37 35 28 28 58 18 21 15

$$m_1^1 = \frac{37+35}{2} = 36, \quad m_2^1 = \frac{28+28}{2} = 28, \quad m_3^1 = \frac{58+18}{2} = 38, \quad m_4^1 = \frac{21+15}{2} = 18.$$

Potrei sostituire al posto di ogni coppia il corrispondente valore medio: risparmierei memoria ma non ho indicazioni riguardo l’errore commesso e non potrei ricostruire i valori originali.





Scelgo quindi un indice di variabilità adeguato, per Se per esempio la variazione/dettaglio d_i^1 differenza tra i valori della coppia divisa per 2 (per utilizzare una “normalizzazione” simile alla media),

differenza:

$$\underbrace{37 \quad 35} \qquad \underbrace{28 \quad 28} \qquad \underbrace{58 \quad 18} \qquad \underbrace{21 \quad 15}$$

$$d_1^1 = \frac{37-35}{2} = 1, \quad d_2^1 = \frac{28-28}{2} = 0, \quad d_3^1 = \frac{58-18}{2} = 20, \quad d_4^1 = \frac{21-15}{2} = 3.$$

A questo punto ad ogni coppia di valori (a,b) possiamo sostituire la media m e la differenza d (viceversa dalla media e differenza possiamo ricostruire i valori a,b): abbiamo una differente rappresentazione del segnale originale. Dal punto di vista dell’algebra lineare questo corrisponde ad un cambiamento di base (possiamo anche riordinare le medie e le differenze)

$$S \rightarrow S^1 = \{m_1^1, m_2^1, m_3^1, m_4^1, d_1^1, d_2^1, d_3^1, d_4^1\}$$

$$\mathrm{W}_1\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^1 \qquad \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 37 \\ 35 \\ 28 \\ 28 \\ 58 \\ 18 \\ 21 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 38 \\ 18 \\ 1 \\ 0 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$S^1 = \begin{pmatrix} 36 \\ 28 \\ 38 \\ 18 \\ 1 \\ 0 \\ 20 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

Medie

differenze

a questo punto posso considerare i valori delle medie come un segnale e procedere calcolando le medie e le differenze di queste e procedere in questo modo

Trasformata

37 35 28 28 58 18 21 15	**S**
36 28 38 18 ↙ ↘ 1 0 20 3	**S**^{1}
32 28 ↙ ↘ 4 10	**S**^{2}
30 ↙ ↘ 2	**S**^{3}

30 2 4 10 1 0 20 3

$$W_1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

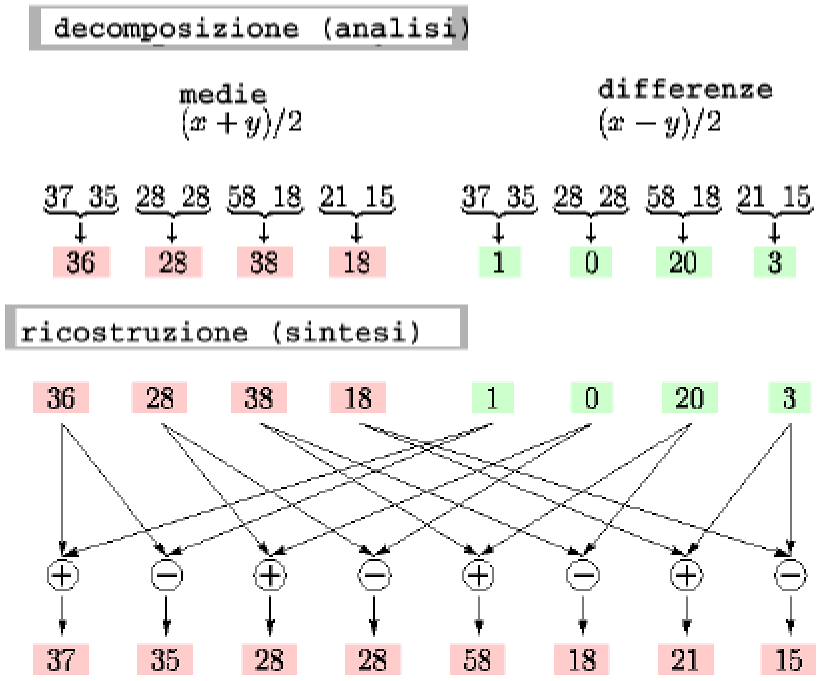
$$W_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{S}^3 = W_3\,\boldsymbol{S}^2 = W_3 W_2 \boldsymbol{S}^1 = W_3 W_2 W_1 \boldsymbol{S} = WS$$

$$W_3 W_2 W_1 = W$$

Ogni passo della trasformata è invertibile perché da m=(a+b)/2   d=(a-b)/2   si ha la ricostruzione a=m+d, b=m-d

quindi posso ricostruire le varie medie fino ai valori iniziali del segnale.



Nota.   Dove i valori d sono piccoli in modulo vuol dire che la media rappresenta una buona approssimazione dei valori. Dove i valori dei coefficienti d sono in modulo alto ho una grande variazione, come un bordo (ad una certa scala). Posso mettere in atto un Algoritmo di compressione (con perdita di informazione): calcolo la trasformata Haar discreta, decido delle soglie e metto a zero i coefficienti d in modulo minori delle soglie. Se riesco a memorizzare efficientemente vettori/matrici con molti zeri poso avere un risparmio notevole di memoria.

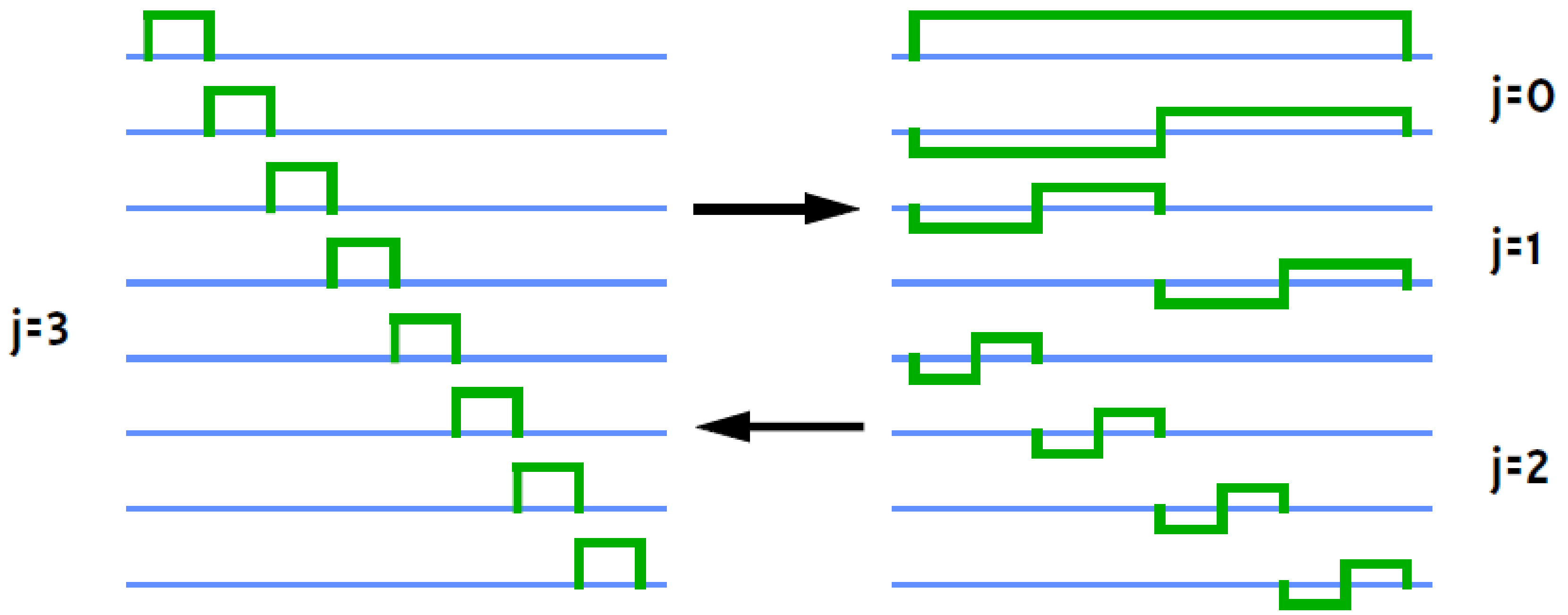
Nota. Le righe delle matrici W_i sono ortogonali ma non sono ortonormali. Posso normalizzare le medie e le differenze:

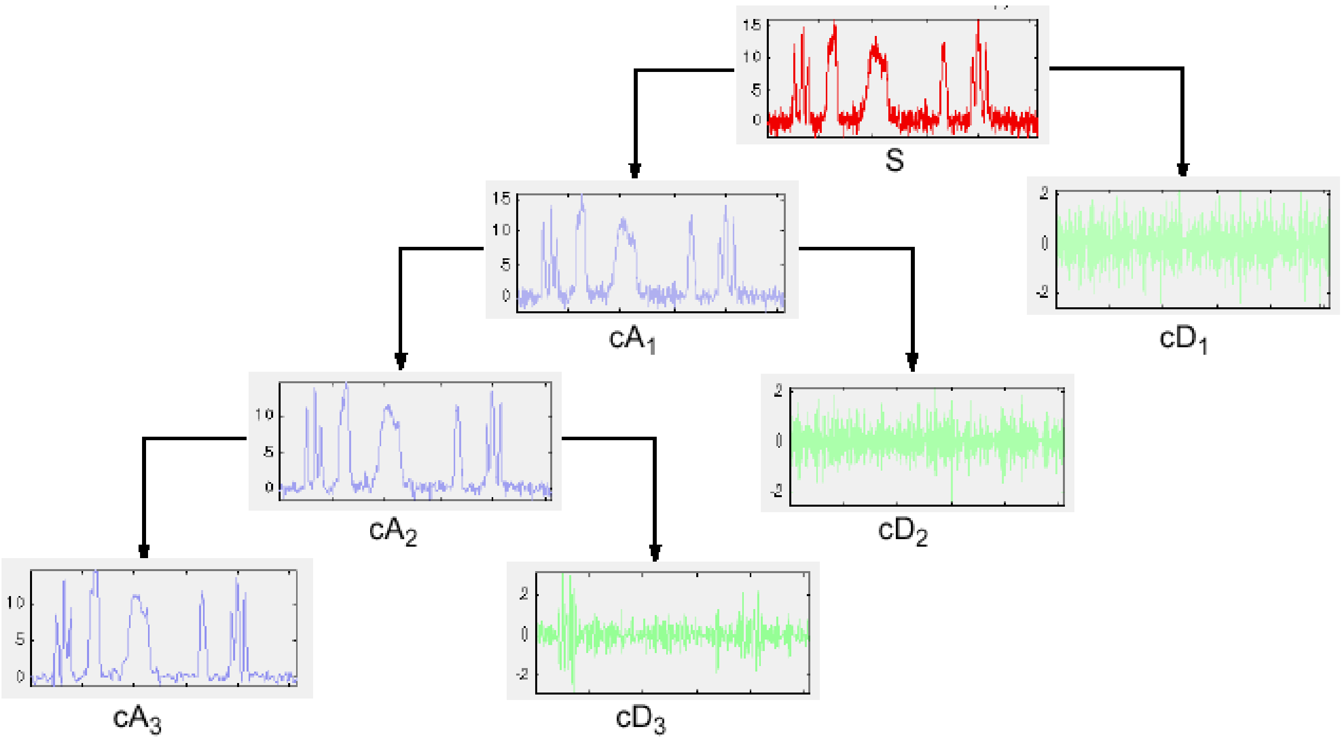
$$m = \frac{x+y}{\sqrt{2}}, \quad d = \frac{x-y}{\sqrt{2}}$$

$$x = \frac{m+d}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{m-d}{\sqrt{2}}$$

ed ora $W_i \; W_i^T = I$ e la trasformata inversa è facile da implementare. Attenzione: i coefficienti non sono più potenze di due ma posso solo approssimarli.

Cambio di base:





Nota Possiamo riconsiderare (ed è stato il modo in cui è stata introdotta la base di Haar in origine) la decomposizione a livello di spazi di funzioni (quali?) e di approssimazione di funzioni rispetto ad una gerarchia di sottospazi lineari (ogni sottospazio si riferisce ad una particolare scala). Se consideriamo funzioni con dominio $\mathbb{R}$: $\ldots \subset V_{-2} \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \ldots$ ed ogni sottospazio V_j $j \in \mathbb{Z}$ si riferisce alla scala con suddivisione uniforme di ampiezza 2^{-j}, ogni sottospazio è quindi generato dalla corrispondente funzione caratteristica $\chi_{[0,2^{-j})}$ traslata. Inoltre, le funzioni corrispondenti alla scala j si ottengono riscalando la funzione caratteristica $\chi_{[0,1)}$.

Inoltre $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ (somma diretta): il sottospazio W_j è generato dalle traslate e riscalate della funzione

$$\psi(x) = \begin{cases} 1 \;\; se\ x \in [0, {}^{1}/_{2}) \\ -1 \;\; se\ x \in [{}^{1}/_{2}, 1) \end{cases}$$

Infine si possono considerare normalizzazioni per ottenere base ortonormale.

Approccio trasformata di Haar (esplicito I prodotti scalar riga W per segnale)

Passo base:

Si consideri il vettore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_N)$ con N pari, si vuole ottenere il vettore: $(\mathbf{s} \mid \mathbf{d}) = (s_1, \ldots, s_{N/2} \mid d_1, \ldots, d_{N/2})$ con

$$s_k = \frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2}, \qquad k = 1, \ldots, N/2$$

$$d_k = \frac{x_{2k-1} - x_{2k}}{2}, \qquad k = 1, \ldots, N/2$$

I passi successivi sono esattamente come il passo base ma considerando il vettore **s** con N/2 componenti al posto del vettore **x**.

Nota. Nel caso si volesse procedere con basi normalizzate basta cambiare il 2 con $\sqrt{2}$ (conveniente?)
Nel caso di trasformazione lineare ortogonale: mantengo la norma euclidea (può essere un vantaggio)

Ogni singolo passo è invertibile:

$$s_k + d_k = \frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2} + \frac{x_{2k-1} - x_{2k}}{2} = x_{2k-1}$$

$$s_k - d_k = \frac{x_{2k-1} + x_{2k}}{2} - \frac{x_{2k-1} - x_{2k}}{2} = x_{2k}$$

Per la trasformata inversa possiamo quindi risolvere il passo fondamentale: partire dal vettore
(**s** | **d**) = $(s_1, \dots, s_{N/2} \mid d_1, \dots, d_{N/2})$ e ricostruire **x** = $(x_1, x_2, \dots, x_N)$

Nota. Per la trasformata inversa: si parte dai vettori s e d con numero più piccolo di componenti e si procede ricostruendo vettori di lunghezza maggiore.

Implementare trasformata diretta ed inversa di Haar:

- In ingresso abbiamo vettore **x** di lunghezza 2^p
- decomporre fino ad un livello L (non è detto che si voglia procedere con tutte le scale disponibili ma ne bastano alcune)
- Ritornare il vettore che contiene i coefficienti della trasformata **s** e **d** (attenzione alla posizione)

- Per l'inversa abbiamo in ingresso vettore con i coefficienti trasformata **s** e **d** ed il numero di livelli considerati
- Ricostruire il segnale **x**

Compressione (con perdita di informazione)

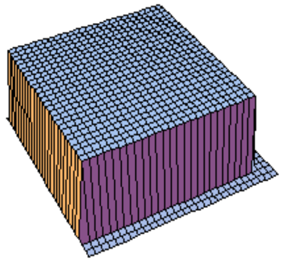
E' possibile, prima della ricostruzione, inserire un processo di selezione dei coefficienti: si cerca di «scartare» quelli meno significativi per avere una rappresentazione «sparsa» del segnale. Perdo informazione ma conservo quella essenziale.
Vi sono vari metodi di sogliatura, alcuni sono stati analizzati. E' possibile pensare a soglie uguali per ogni scala o soglie variabili per scale differenti (in ogni caso si considerano i valori assoluti dei coefficienti **d**).

NOTA. Per avere beneficio da codifica sparsa devo utilizzare opportune strutture dati.

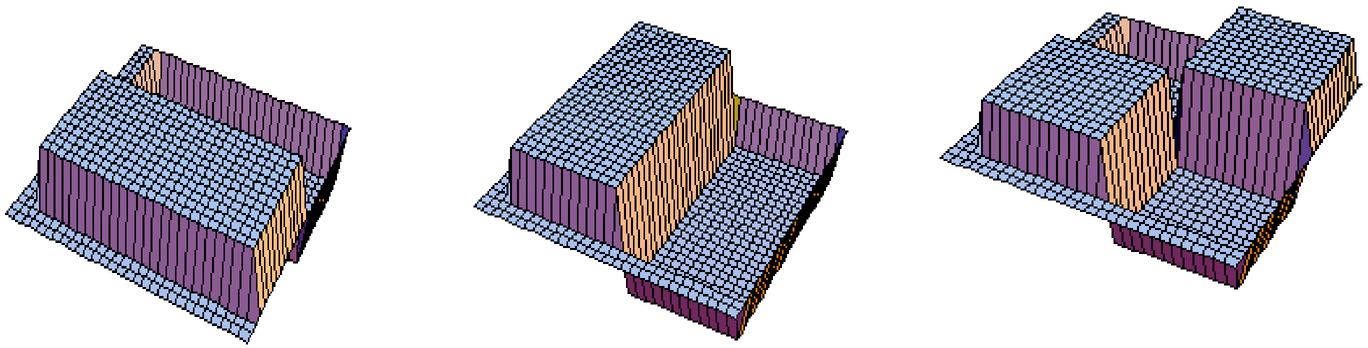
- D. L. Donoho, Denoising via soft thresholding. IEEE transaction on Information Theory, Vol. 41, pp.613-627, May 1995
- D. L. Donoho, IM Johnstone, Ideal spatial adaptation via wavelet shrinkage. Biometrika, vol.81, pp 425-455, September 1994
- …

Nota. Per le immagini posso osservare che la trasformata è separabile: posso eseguire trasformata sulle righe (1D) e poi Fare trasformata sulle colonne di quest'ultima. In altro modo posso considerare il prodotto tensoriale delle basi 1D.

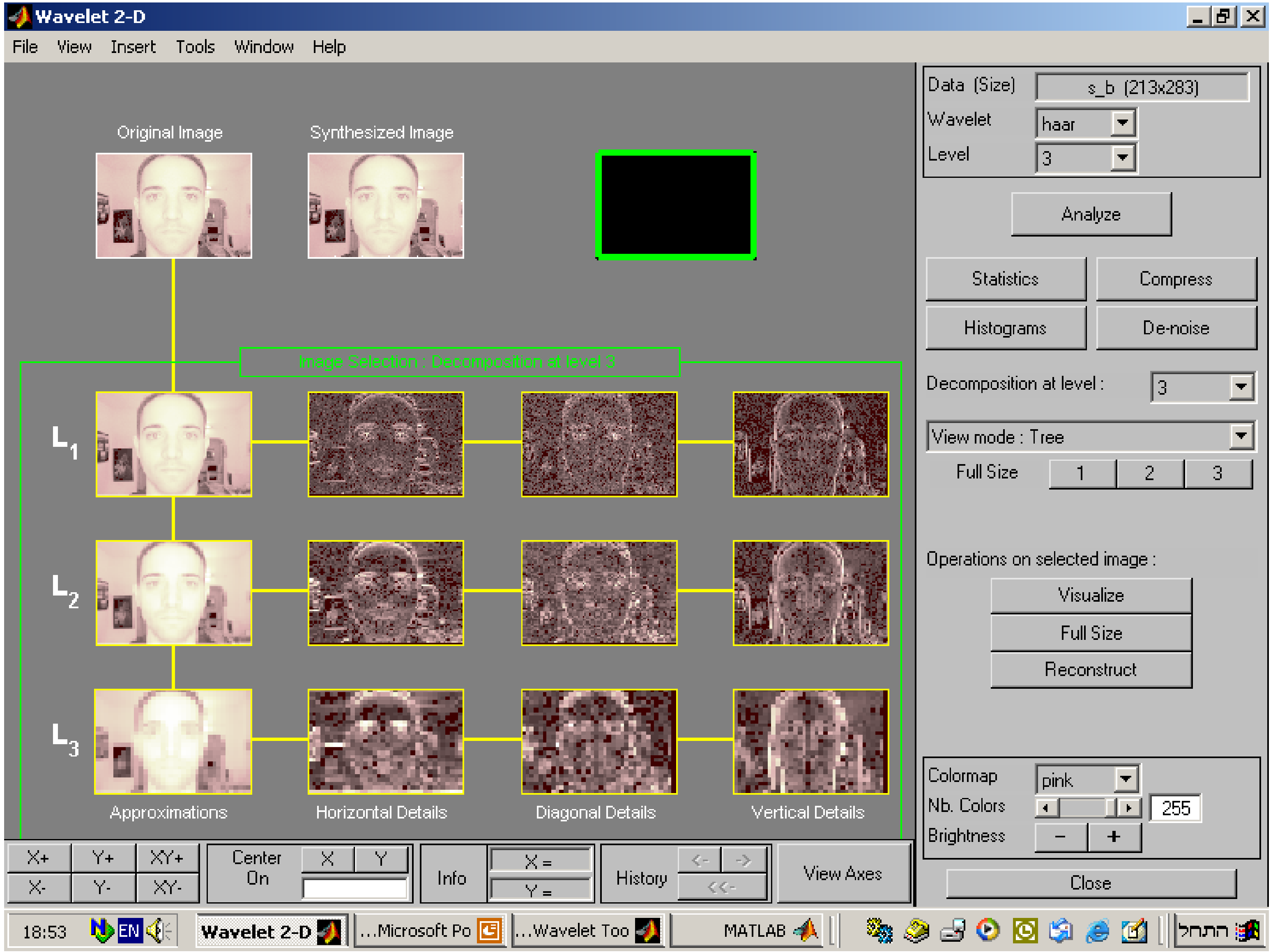
T (f(x)g(y))=Ty (g(y)Tx (f(x))



2D funzione scaling di Haar (la nostra media)



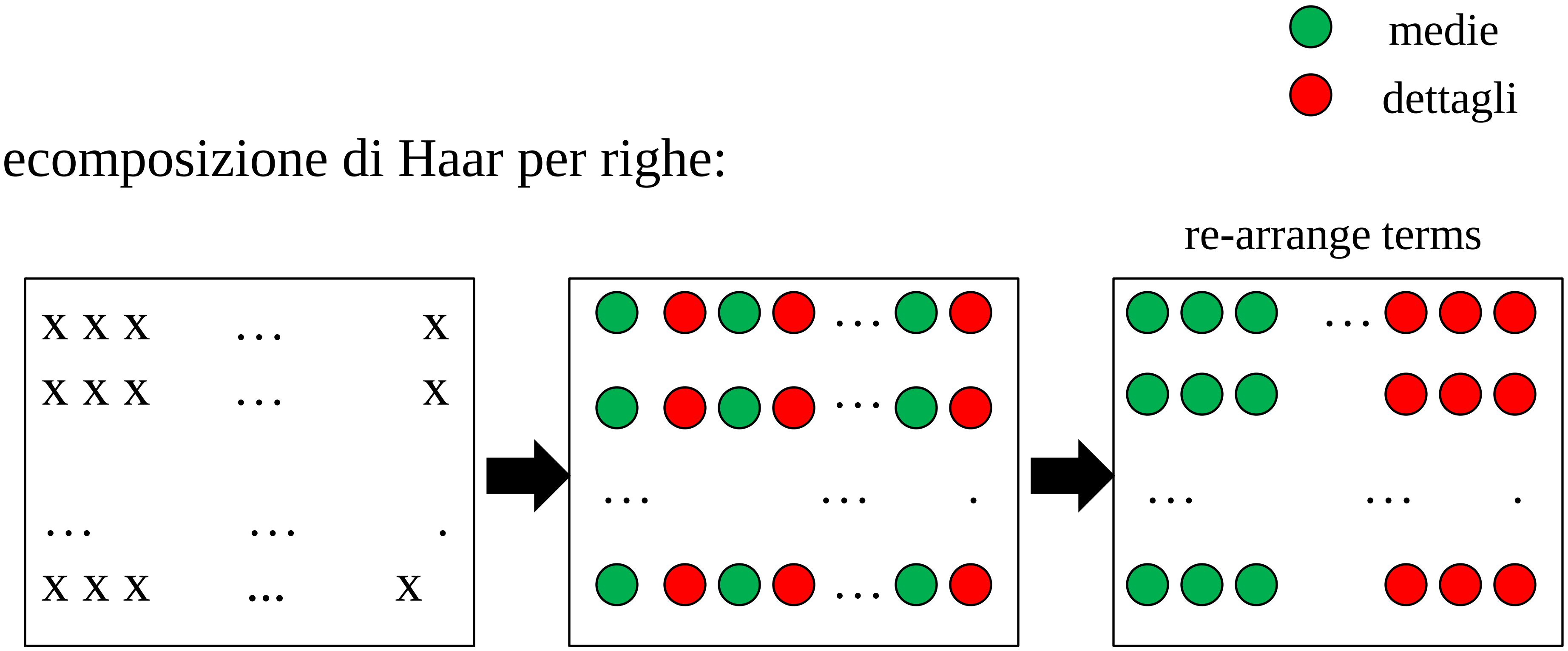
2D Haar wavelets (le nostre variazioni)



Utilizzando wavelet toolbox di Matlab

Standard Haar wavelet decomposition

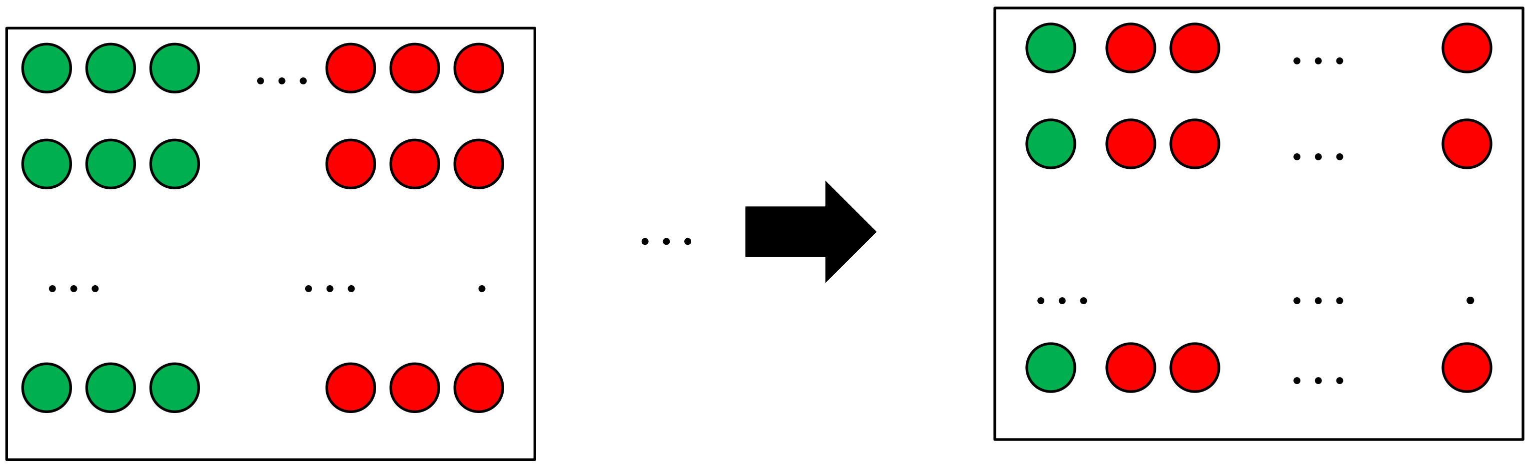
(1) Decomposizione di Haar per righe:



Standard Haar wavelet decomposition

(1) Decomposizione di Haar per righe:

Trasformata complete per righe



Standard Haar wavelet decomposition

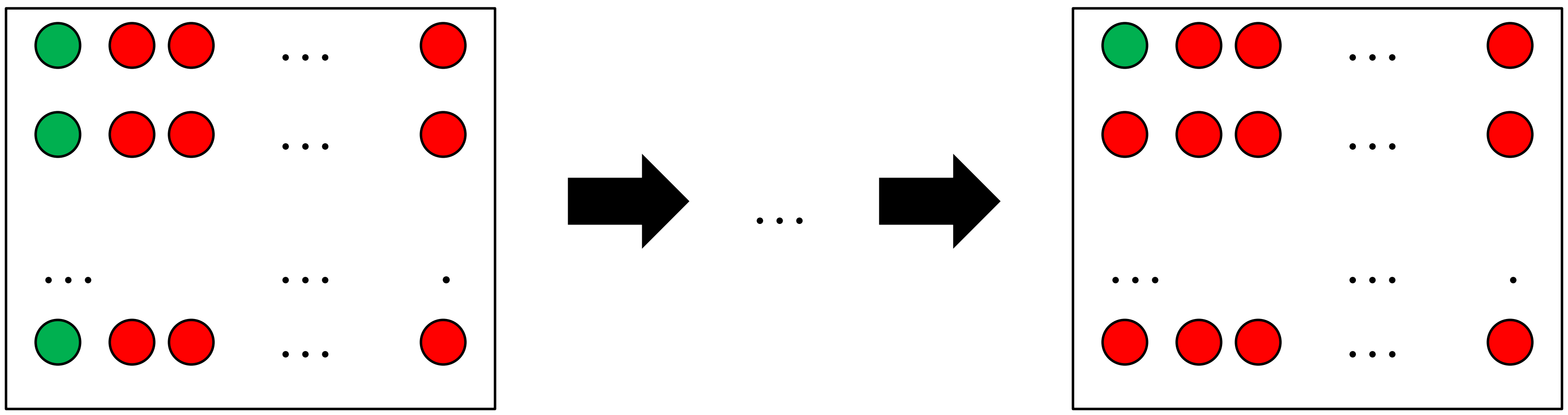
medie

dettagli

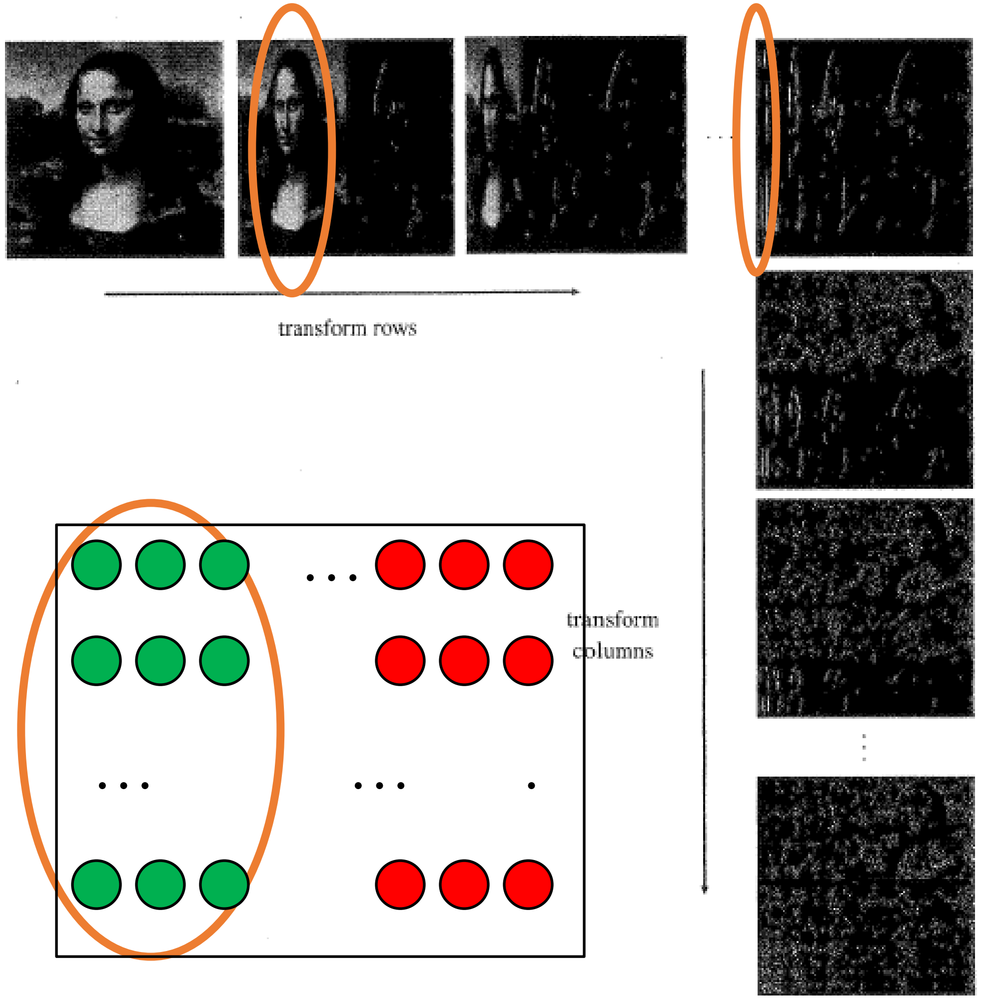
(2) Decomposizione di Haar per colonne:

Risultato trasformata per righe

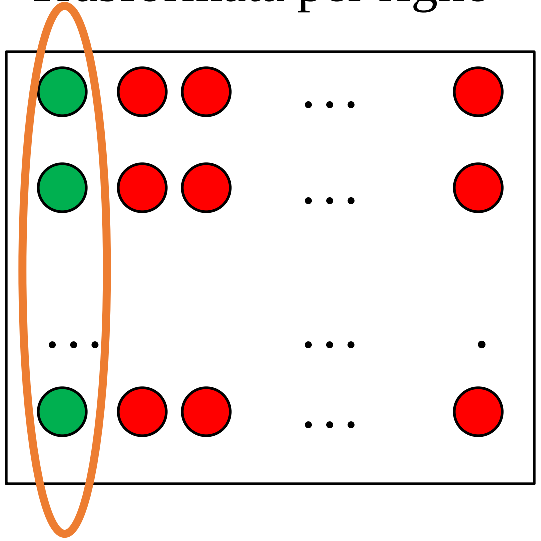
Risultato trasfromata per colonne



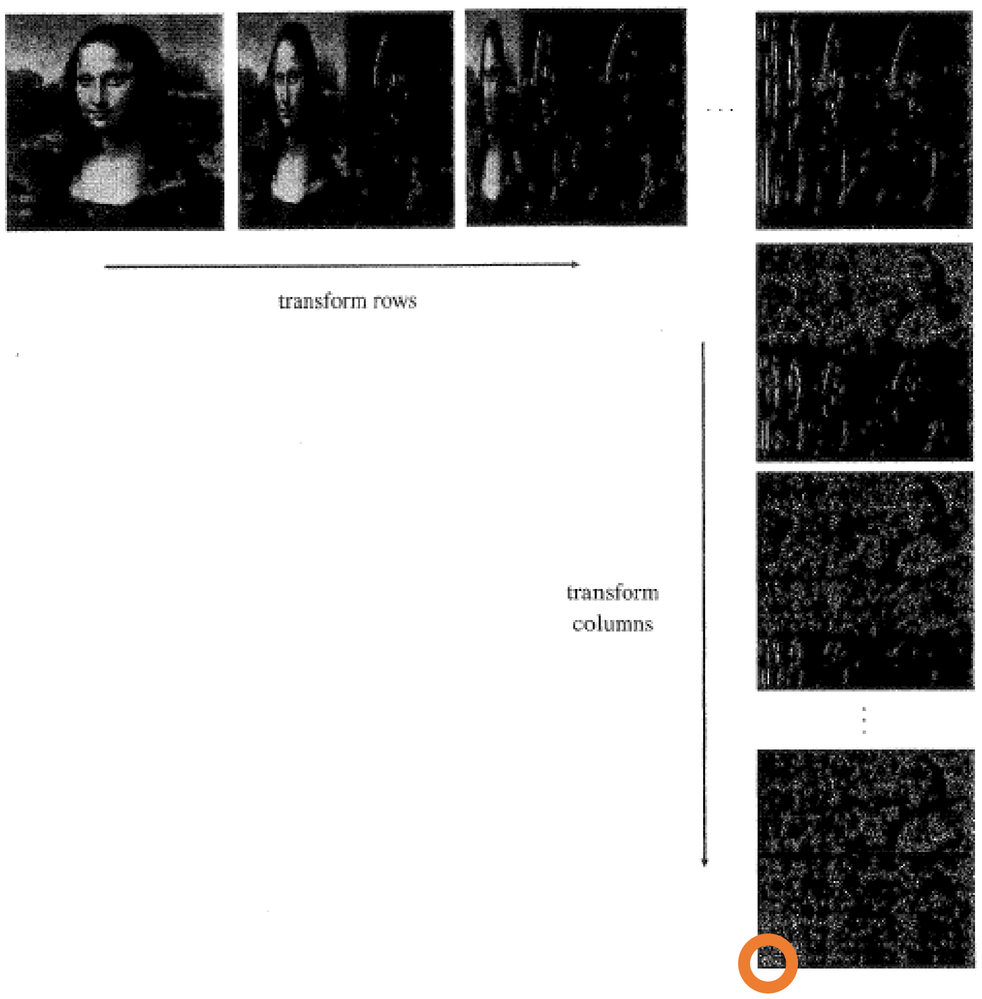
Esempio



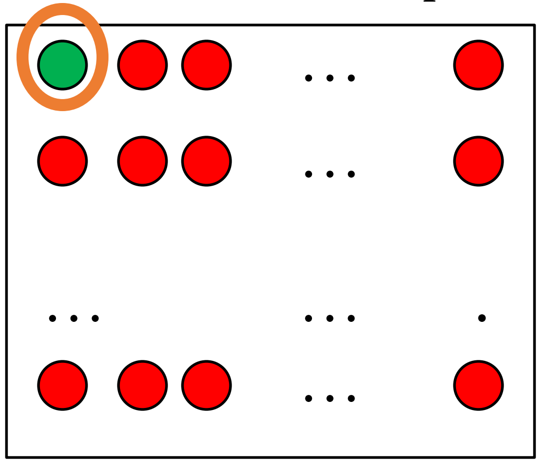
Trasformata per righe



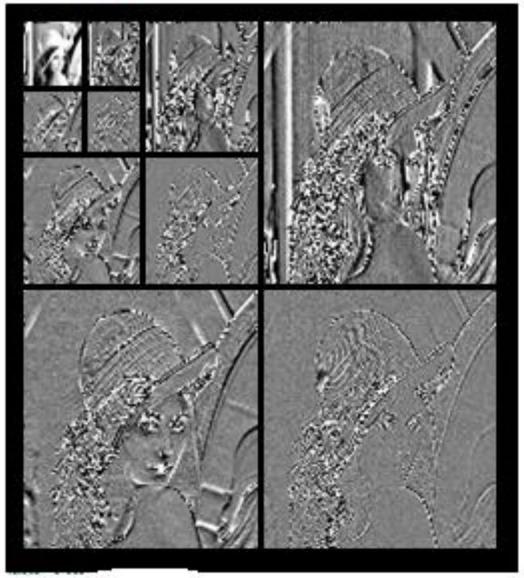
Esempio

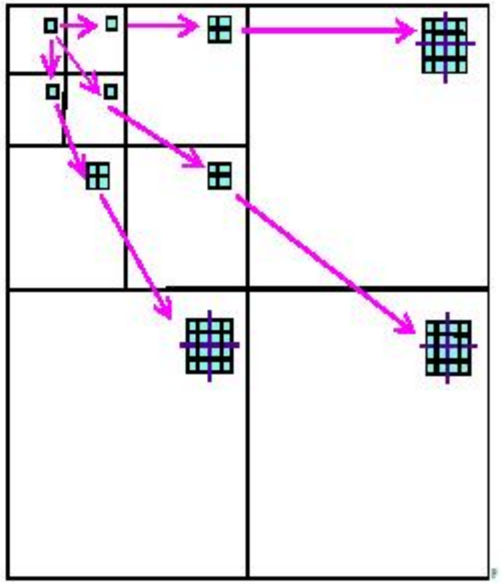


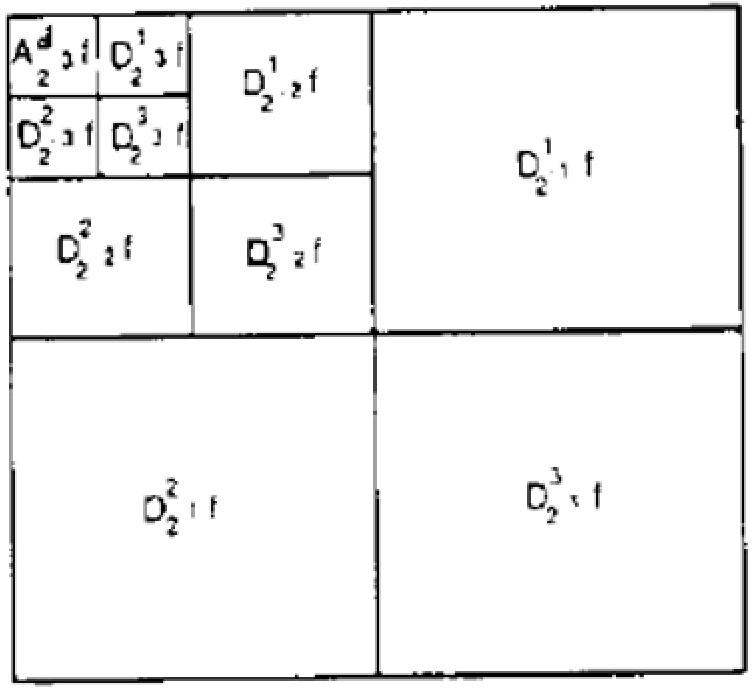
Risultato trasformata per colonne



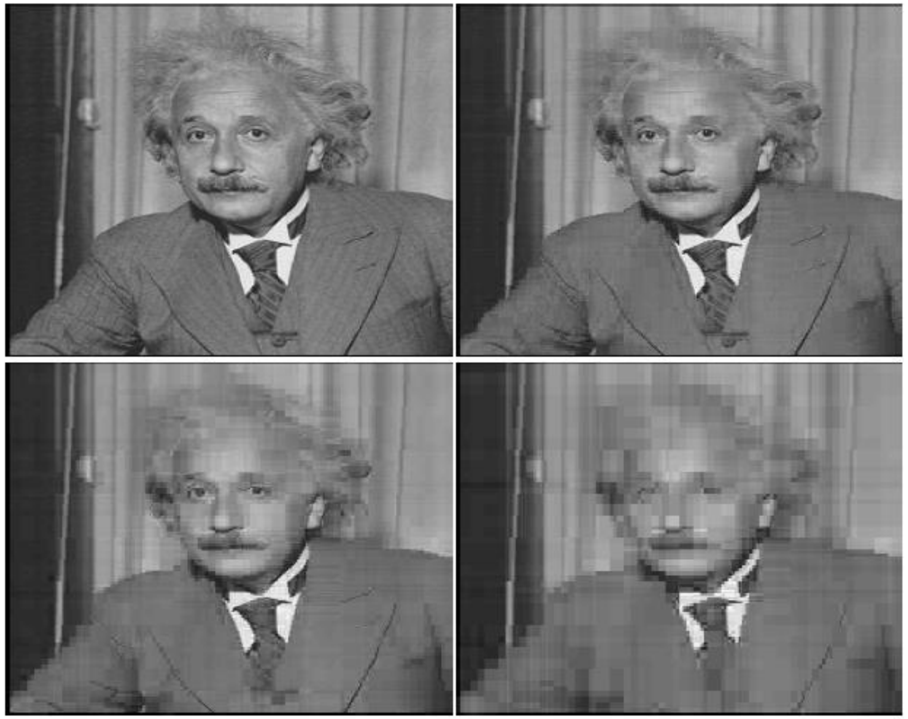
LENA





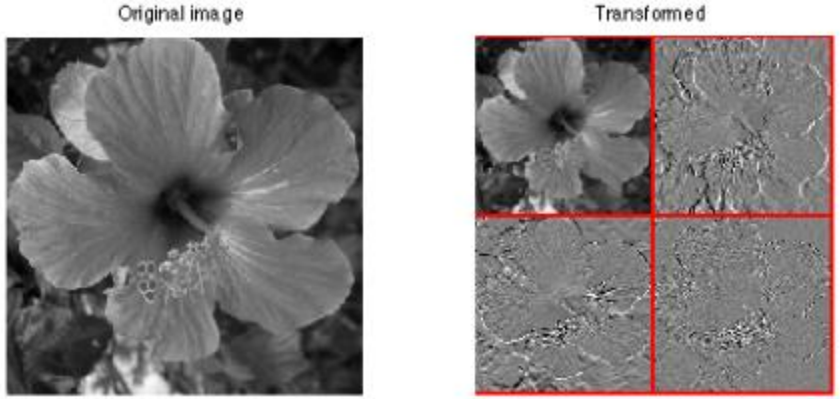


$A^d_{2^{-3}}f$
$D^1_{2^{-3}}f$
$D^2_{2^{-3}}f$
$D^3_{2^{-3}}f$
$D^1_{2^{-2}}f$
$D^2_{2^{-2}}f$
$D^3_{2^{-2}}f$
$D^1_{2^{-1}}f$
$D^2_{2^{-1}}f$
$D^3_{2^{-1}}f$

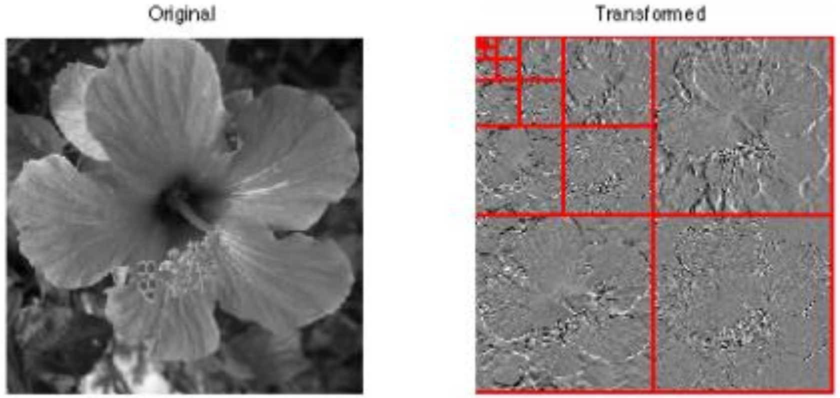


Esempio di compressione con trasformata di Haar 2D, la figura originale, in alto a sinistra, viene compressa con percentuale sempre maggiore fino alla figura in basso a destra

Nota. Per la rappresentazione occorre considerare che ho ordini di grandezza differenti dei coefficienti alle varie scale per cui (ai fini della Rappresentazione potrebbe essere utile una riscalatura differente in base alla scala che si considera altrimenti la rappresentazione diventa meno efficace (ampie zone scure con qualche valore chiaro).



Un passo trasformata 2D di Haar



Più passi trasformata 2D di Haar

Esempio di tecnica per memorizzare matrici sparse

Sia $A(n \times n)$ una matrice sparsa non strutturata con nz elementi non nulli, nz<<n.
Il metodo ***CSC*** (Compressed Sparse Column format) è il seguente:si memorizza la matrice tramite tre array monodimensionali R(nz), I(nz), C(n+1) :

- R : contiene gli elementi non nulli di A memorizzati per colonna
- I : I_k contiene l'indice di riga di R_k in A
- C : contiene il puntatore al primo elemento di ogni colonna in R e I,ossia C_k contiene la posizione in R del primo elemento della k-ma colonna ,e C_{n+1}=nz+1

La complessità è S(n)=2nz+n+1. Ad esempio: n=5,nz=12

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Si ha:

R =	1	3	6	4	7	10	2	5	8	11	9	12
I =	1	2	3	2	3	4	1	2	3	4	3	5
C=	1	4	5	7	11	13						

Il numero di elementi in colonna m=C(m+1)-C(m); per identificare $a_{3,5}$ basta identificare la posizione in R degli elementi in colonna 5, che vanno da C(5)-C(6)-1, cioè da 11 a 12.