Proprietà [modifica | modifica wikitesto]

La convoluzione soddisfa le seguenti proprietà:

- Commutatività

  $f * g = g * f$

Dimostrazione

Partendo dalla definizione:

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau$$

si applica la sostituzione:

$$\tau = t - y \rightarrow t - \tau = y$$

da cui:

$$\frac{d\tau}{dy} = -1 \rightarrow d\tau = -dy$$

Ricordando che gli estremi di integrazione sono espressi in funzione di τ, esprimendoli in funzione di y l'estremo inferiore diventa:

$$\tau = t - y \rightarrow -\infty = t - y \rightarrow \underbrace{-\infty - t}_{=-\infty} = -y \rightarrow y = \infty$$

mentre l'stremo superiore:

$$\tau = t - y \rightarrow \infty = t - y \rightarrow \underbrace{\infty - t}_{=\infty} = -y \rightarrow y = -\infty$$

Dato che nel caso di integrali definiti o impropri è possibile invertire gli estremi di integrazione:

$=\infty$

Dato che nel caso di integrali definiti o impropri è possibile invertire gli estremi di integrazione:

$$(f * g)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t-\tau) d\tau = -\int_{\infty}^{-\infty} f(t-y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) f(t-y) dy = (g * f)(t)$$

- Associatività

  $f * (g * h) = (f * g) * h$

- Distributività

  $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$

- Associatività per moltiplicazione per scalare

  $a(f * g) = (af) * g = f * (ag)$

  per ogni numero reale (o complesso) a.

- Regola di differenziazione

  $\mathcal{D}(f * g) = \mathcal{D}f * g = f * \mathcal{D}g$

  dove con $\mathcal{D}f$ si è denotata la derivata di f o, nel caso discreto, l'operatore differenziale:

  $\mathcal{D}f(n) = f(n+1) - f(n)$