

中图分类号: TN911.72

密级: 公开

UDC: 654.9

学校代码: 10082

河北科技大学

HEBEI UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

硕士学位论文

基于均匀圆阵的 DOA 算法研究

论文作者: 朱丽华

指导教师: 王亚芳 副教授

副指导教师: _____

申请学位类别: 工学硕士

学科、领域: 通信与信息系统

所在单位: 信息科学与工程学院

答辩日期: 2014 年 5 月

河北科技大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师的指导下，独立进行研究工作所取得的成果。对本文的研究做出重要贡献的个人和集体，均已在文中以明确方式标明。除文中已经注明引用的内容外，本论文不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写过的作品或成果。本人完全意识到本声明的法律结果由本人承担。

学位论文作者签名：朱丽华

指导教师签名：王芳

2014年5月24日

2014年5月24日

河北科技大学学位论文版权使用授权书

本学位论文作者完全了解学校有关保留、使用学位论文的规定，同意学校保留并向国家有关部门或机构送交论文的复印件和电子版，允许论文被查阅和借阅。本人授权河北科技大学可以将本学位论文的全部或部分内容编入有关数据库进行检索，可以采用影印、缩印或扫描等复制手段保存和汇编本学位论文。

☐ 保密，在____年解密后适用本授权书。

本学位论文属于

☒ 不保密。

(请在以上方框内打“√”)

学位论文作者签名：朱丽华

指导教师签名：王芳

2014年5月24日

2014年5月24日

Classified Index: TN91

Secrecy Rate: Publicized

UDC: 654.9

University Code: 10082

Hebei University of Science and Technology

Dissertation for the Master Degree

Research on DOA Algorithm based on Uniform Circular Array

Candidate: Zhu Lihua

Supervisor: Prof. Wang Yafang

Associate Supervisor:

Academic Degree Applied for: Master of Engineering

Specialty: Communication and Information System

Employer: School of Information Science and Engineering

Date of Oral Examination: May, 2014

摘 要

阵列信号处理是信号处理领域的一个重要分支，在无线通信、雷达、声纳等领域有着极其广泛的应用。研究阵列信号处理过程中很重要的工作之一就是要确定空间信号的波达角方向。波达角估计对于所要搜寻的目标进行全面的侦察、精确定位和监视中起着十分重要的作用。因此，在空间谱估计研究中，研究波达角估计算法具有重要的现实意义。

由于均匀线阵(ULA)的 DOA 估计算法是研究均匀圆阵测向的基础，因此在本论文研究均匀圆阵 DOA 估计算法之前，首先研究了均匀线阵的 DOA 估计算法，分析了窄带信号模型下均匀线阵测向的几种经典算法，重点研究了经典 MUSIC 算法和 Root-MUSIC 算法。分析了均匀圆阵的数学模型特征，以求根 MUSIC 算法为研究基础，提出了基于均匀圆阵进行测向的两种改进算法。为了减小运算量，满足实际工程的需要，本文提出了一种实值波束域的 Root-MUSIC 的改进算法，这种改进算法能够达到减小运算量目的。针对实际应用中天线阵元个数多、占用空间范围大的问题，本文提出了一种稀疏矩阵的 Root-MUSIC 的改进算法，通过稀疏矩阵处理阵列流形，在保证估计精度、分辨率的前提下，可以减小天线的阵元数目，节约成本。对这两种改进算法进行了 MATLAB 编程仿真，结果证明了改进算法的有效性。

关键词 均匀圆阵；MUSIC 算法；虚拟线阵的形成；Root-MUSIC 算法；稀疏矩阵；实值的特征值分解

Abstract

Array signal processing is an important branch of the signal processing and it has been widely used in wireless communication, radar, sonar and other fields. An important task in the process of researching on array signal processing, is to determine the direction of arrival (DOA) of the spatial signal. The direction of arrival (DOA) estimation plays a very important role in the comprehensive reconnaissance of targets, precise positioning and monitoring. Therefore, in the study of spatial spectrum estimation, the algorithm of the direction of arrival (DOA) estimation is of considerable realistic significance.

Because the direction-finding of the uniform circular array is based on DOA estimation of the uniform linear array (ULA), this thesis first researches the algorithm of DOA estimation of the uniform linear array (ULA) before exploring the algorithm of uniform circular array's DOA estimation. Then, the thesis analyzes several classical algorithms of the direction-finding of the uniform linear array, which is in the models of narrowband signal, and the MUSIC algorithm and Root-MUSIC algorithm are mainly studied. After analyzing the features of the mathematical model of the uniform circular array, on the basis of Root-MUSIC algorithm, two improved algorithms that concern about the direction-finding of the uniform circular array have been proposed. To reduce the computation and meet the actual needs of the project, this thesis put forwards an improved Root-MUSIC algorithm for real valued beam space, which will realize the purpose of reducing computation. Considering the great number of array elements in reality and the large occupied space, this thesis has proposed an improved Root-MUSIC algorithm of a sparse matrix. This algorithm will deal with the noise sub-space algorithm through the sparse matrix, and, on the premise that the estimation accuracy and the resolution could be guaranteed, decrease the number of array elements to save cost. The result of the MATLAB programming simulation of these two improved algorithms has proved the effectiveness of the improved algorithms.

Key words Uniform circular array; MUSIC algorithm; Beam space conversion;

Root-MUSIC algorithm; Sparse matrix; Real eigenvalue decomposition

目 录

摘 要	I
Abstract	II
第 1 章 绪 论	1
1.1 课题背景及研究的意义	1
1.2 国内外技术发展历史及现状	2
1.2.1 波束形成技术的研究历史和发展现状	2
1.2.2 UCA 测向算法研究现状	2
1.3 本论文主要工作安排	3
第 2 章 基本阵列模型及信号模型	5
2.1 接受阵列模型	5
2.1.1 均匀线阵的阵列模型	5
2.1.2 均匀矩形的阵列模型	9
2.1.3 均匀圆阵的阵列模型	11
2.2 均匀圆形阵列的结构特点分析	12
2.3 窄带信号模型	12
2.4 噪声模型	13
2.5 DOA 估计性能的参数	13
2.5.1 估计精度	14
2.5.2 分辨力	14
2.5.3 克拉美罗界	14
2.6 本章小结	15
第 3 章 传统波达角估计算法	17
3.1 基于均匀线阵的 DOA 估计的传统方法	17
3.1.1 波束形成法	17
3.1.2 Capon 最小方差法	18
3.1.3 子空间法	19
3.1.4 基于线阵的求根 MUSIC 算法	22
3.2 均匀圆阵的数学模型	23
3.3 模式空间虚拟均匀线阵的形成	25
3.4 基于均匀圆阵的传统 MUSIC 算法及性能分析	26

3.4.1	传统 MUSIC 算法介绍	26
3.4.2	算法仿真及性能分析	28
3.5	求根 MUSIC 算法及性能分析	30
3.5.1	求根 MUSIC 算法介绍	31
3.5.2	算法仿真及性能分析	31
3.6	本章小结	35
第 4 章	基于均匀圆阵的改进算法及仿真	37
4.1	实值波速域的 Root-MUSIC 的算法及性能分析	37
4.1.1	阵列信号模型和复值协方差	37
4.1.2	实值的协方差矩阵	38
4.1.3	Unitary-Root-MUSIC 算法	39
4.1.4	算法仿真及性能分析	41
4.2	稀疏矩阵的 UCA-Root-MUSIC 算法及性能分析	44
4.2.1	波束空间转换	44
4.2.2	稀疏矩阵的 UCA-Root-MUSIC 算法	45
4.2.3	仿真结果及性能分析	46
4.3	本章小结	50
结 论	51
参考文献	53
攻读硕士学位期间所发表的论文	57
致 谢	59

第 1 章 绪 论

1.1 课题背景及研究的意义

信号是信息的载体，是人们能感知到的信息的表达形式。信号处理的基本原理是在事件变化过程中尽可能地利用、提取和恢复蕴含在信号特性之中的有用信息，经过去干扰、分析、综合、变换和运算等处理之后，从而得到反映事件变化的本质或者处理者感兴趣的信息的过程。因此，它的重要内容之一就是在复杂的电磁环境下对信号的特征参数进行有效的精确估计和检测。最近十几年，信号处理学科经历了很大的变化，是信息科学中发展最为迅速的学科之一。尤其是随着无线通信的极速发展，信号处理更是获得了巨大的推动，随之诞生了通信信号处理这一门新的学科领域。现在，信号处理已经在各个技术与科学领域获得了极其广泛的应用。可以说，现代信号处理的理论、技术和应用已成为电子、通信、自动化等各个学科的迫切需求^[1,2]。

阵列信号处理作为信号处理的一个重要分支，已经成为最近几年极速发展的一种信号处理技术，在信号处理领域起着重要作用。在军事阵列信号处理和民间得到了广泛的应用。阵列信号处理的过程是首先通过传感器阵列接受空间信号；其次是将接受的信号进行预处理，以提高期望信号的功率，抑制干扰；再对有用信号进行特征和信息的提取。而传感器阵列的形成是按照实际应用的需求将传感器阵元安置在相应位置上，这样就形成了形状各异的阵列。其中均匀圆形阵列由于其对称性，使得阵列有很多优良特性，能够消除互耦效应，各个阵元上的增益和特性相同，干扰相互抵消等。这些优良特性使得均匀圆阵最近几年以来得到了蓬勃发展。

伴随着阵列信号处理的高速发展，空间谱估计已经成为人们关注的焦点。由时域信号处理和频域信号处理的理论推理可知，空间谱^[3,4]就是指信号在空间方向上的能量分布。空间谱估计就是将接受到的信号进行数字化处理，并且消除干扰和噪声，保留所期望的有用信息。对有用信息估计所需参数，包括：信号频率、信号个数、来波方向等。

空间谱估计又称 DOA(direction of arrival)估计^[3]。它的主要功能是估计信号源的位置、提高信号源方向上的分辨率、提高估计精度和减小运算量等。早在 20 世纪 40 年代就开始了对空间谱估计的研究。最早采用的是机械扫描的方法，由于该方法受到瑞利限的约束，因此没办法满足实际需求的精度和速度。然而随着信息时代的迅速发展，通信系统和雷达探测系统的需求日益增加，迫切的需要找到超分辨率算法来增强信息的获取能力。最近几十年，人们采用新的技术——非线性处理技术。这

种技术不再受瑞利限的约束。该技术利用信号模型分类法进行空间谱估计,使得超分辨率算法取得了极速发展。其中最经典的算法是多重信号分类(MUSIC)算法和旋转不变子空间(ESPRIT)算法。

均匀圆形阵列具有自身的优良特性。它是一个对称的平面阵,每个阵元的特性相同,因此能够抑制阵元间产生的互耦,它能够为每个方向上的信号提供相似的估计精度和分辨率。而且每个阵元都是全向的,能够实现 360°全方位扫描。相对于线阵,关键的一点是圆阵不仅能够测得方位角信息,而且能够测得俯仰角信息。

1.2 国内外技术发展历史及现状

1.2.1 波束形成技术的研究历史和发展现状

波束形成(BF)也称作空域滤波^[5,6],是阵列处理的一个主要组成部分,逐渐成为阵列信号处理的标志之一。该技术的工作原理是通过将每个阵元接受到的信号乘以一个加权因子,以达到降低干扰和噪声的功率和增强有用信号的功率的目的。自适应波束形成是根据信号的反馈来调节各个阵元的权值,以符合电磁场环境的变化。自适应波束形成算法的重点自始至终是对自适应研究,而且经过前辈学者的不断努力,很多好的算法已经被总结出来。自适应阵列^[7]的优良特性通过自适应算法来实现,通过各种标准来确定自适应的加权因子,包括:最大似然比(ML)^[2]准则、最小均方误差^[2](MSE)准则、最小噪声方差准则、最大信号干扰噪声比(SINR)准则。在理想环境下,得到的这四个准则的权是相同的。所以选择哪一种准则衡量并不重要,而调整阵列波束方向图进行自适应控制算法的选择才是非常重要的。自适应算法主要分为两类:一类是开环自适应算法,另一类是闭环自适应算法。早期研究人员主要集中在研究闭环算法。

自适应阵列天线波束形成技术在理论上具有非常良好的性能,但在实践中却不尽人意,探究其中原由是阵列天线难免存在误差^[11],例如通道频率响应误差、阵元位置扰动误差、阵元间互耦^[12]等。各种误差可以通过使用各阵元振幅和相位的误差来表示。在过去的几年中,很多文章从不同的角度出发分析了阵列误差对自适应阵列性能的影响,文献[13]对各种误差的影响进行了分析综述。

1.2.2 UCA 测向算法研究现状

根据实际应用的不同需求人们会选择相应的阵列形状。最近几年,正是因为均匀圆阵具有独特的性质,所以受到了研究者的高度关注,并研究出来许多显有成效的算法。但是由于均匀圆阵的阵列流形不符合范德蒙结构^[9,10],对基于均匀圆阵的测向算法带来诸多不便。因此在研究 UCA 测向问题的时候,首先要简化均匀圆阵的阵列流型,使其满足范德蒙矩阵的形式,这样就可以使用 ULA 中的算法,提高算法

效率，满足实际应用的要求。对于这个问题的研究，已经有很多学者提出相应的解决方案，并提出适用于均匀圆阵的一些优良算法。

研究均匀圆阵的测向问题经历了以下几个阶段^[14]：第一个阶段模式激励技术^[15]的提出，达到波束空间转换的目的。在此基础上，形成了模式空间变换法，用于圆阵阵列该方法是一种有效变换方法。第二个阶段是 Friedlander 提出了将不符合范德蒙形式的阵列流形变换为虚拟线阵。第三个阶段是 Mathew 等人提出利用模式激励技术使波束形成合成一个波束域阵列流形，然后对数据的协方差矩阵进行实值特征值分解代替复值特征值分解来获得信号子空间和噪声子空间^[16]。

目前，研究信号波达方向的估计仍然是学科的热点。经典谱估计算法通常是在理想环境下实现的。但阵列误差在实际环境下总是存在的，从而导致空间谱估计性能的弱化，甚至产生错误的估计。除此之外，对相关信号源去相关问题的研究仍在进行。这是因为当空间有多个信号时，其必存在相关性，相关性的存在会妨碍信息的提取和处理，以提高估计精确度，满足实际工程的应用。迄今为止，对均匀圆阵的二维 DOA 测向算法的研究我国的研究水平落后于国外发达国家，这主要是因为理论基础较薄弱，没有相对完善的实验体系，导致无法获得较为准确的实际测量数据，因此对二维波达角的研究是具有非常重要的实际意义。

1.3 本论文主要工作安排

本论文是研究基于均匀圆形阵列对信号波达角(DOA)进行估计。首先介绍了基本阵列模型及信号模型。在此基础上研究均匀圆阵阵列流型，需要利用波束空间转换技术构造虚拟线阵，以便于将均匀线阵的算法应用到均匀圆阵中，获得信号的方位角和俯仰角，并考察其估计性能。利用 MATLAB 软件进行仿真和性能分析，验证算法有效性。

本论文共分为四个部分，主要内容如下：

第 1 章为绪论，本章阐述了该课题的研究背景，并根据国内外研究现状，并对阵列信号处理的现实意义进行了概括。

第 2 章介绍了阵列信号处理的基础知识，包括基本阵列模型、信号模型和 DOA 估计性能参数。本章主要对阵列模型的结构特性进行了概括介绍，包括均匀线阵阵列、均匀矩形阵列和均匀圆阵阵列。然后介绍了窄带信号模型，以及加性噪声，之后介绍了 DOA 估计的性能参数。

第 3 章为波达角估计算法，本章首先介绍了基于均匀线阵的 DOA 估计的传统算法，然后介绍了 UCA 的数学模型。本章的主要内容是模式空间转换，将均匀圆阵的阵列流形转换为虚拟均匀线阵的形成。接下来介绍了传统的 MUSIC 算法和求根 MUSIC 算法，并进行了仿真和性能分析。

第 4 章针对于运算量和阵元数两方面进行改进，提出了针对于减小运算量的实值波束域的特征值分解的改进算法。并且出于对实际应用中空间有限的考虑，减小阵元数，提出了稀疏矩阵的求根 MUSIC 改进算法。分别对这两种算法进行了仿真和性能分析。

第 2 章 基本阵列模型及信号模型

阵列信号处理的应用非常广泛，尤其在雷达、监控和侦察方面的应用更是备受关注。根据实际应用的需求阵列天线的形式可以是线阵、矩形阵、圆阵等^[17]。

对于线阵的结构而言，阵元之间存在互耦的干扰，对接受到的信号造成影响，并且一维的阵列只能测得一维的角度即方位角，方位角的范围是 $[-90^\circ, 90^\circ]$ ，也就是说他只能测 180° 范围内的方向角。然而相对于二维平面阵而言，比较典型是矩形阵列结构，这样的结构需要的阵元数量比较大，那么相应的需要的处理的数据比较多，导致运算复杂，运算量大，但是相比于线阵它能够测得二维角度。另外一个比较典型的平面阵是均匀圆形阵列，这个阵列在近几年受到学者们的普遍关注，是因为均匀圆阵的一些优良特性。首先由于它是二维阵列，因此可以测得二维角度；其次阵元是对称的分布在圆周上的，因此可以互相消除阵元间的互耦，不会对接受到的信号造成不良影响。再者每个阵元都是全向一致的，因此可以对信号进行全方位的扫描，因此均匀圆形阵列测得方位角度的范围是 $[0^\circ, 360^\circ]$ ，并且每个阵元对接受到的信号估计参数大致相同的。虽然圆阵和矩形阵列都属于二维平面阵，但是同样的条件下，圆阵相比矩形阵列所用到的天线数要少。也正是这个原因使得圆阵在实际应用中更受欢迎，实际工程中由于受到空间上的限制，对天线的尺寸和形状要求比较严格。因此均匀圆阵的形状与特性引起人们的兴趣^[18]。

本章中还介绍了信号模型和噪声模型，由于本论文主要针对的是窄带信号和加性噪声进行处理，因此只介绍了窄带信号的模型和高斯白噪声模型。接下来介绍了 DOA 估计性能的参数，在仿真结果中需要用这些参数的比较来衡量算法的合理性和有效性。

2.1 接受阵列模型

阵列模型的建立^[18,19]是阵列信号处理的基石，只有确定了阵列的形状（即阵列流形），才能进行下一步的工作安排。阵列模型中包含着许多信息，如阵列流形，各阵元上的权值等，这些为以后的处理奠定基础。本节主要介绍了均匀线阵、均匀矩形阵、均匀圆阵三个阵列模型。

2.1.1 均匀线阵的阵列模型

阵列结构当中阵元排列最基本的阵列是均匀线阵^[17-19](ULA, uniform linear array)，处理最简单的阵列模型，其阵列流形符合范德蒙结构，因此它是发展最为迅速，算法研究最为成熟的一种阵列结构。均匀线阵可以测得一维的角度，只能判断

信号源的方位角。

均匀线阵接受信号模型如图 2-1 所示，阵元等间距分布在同一直线上，阵元间距为 d ，假定阵列是由 M 个单元组成的均匀线阵^[29]，以法线为基准的信号入射角度为 θ 。入射信号被假设为远场信号，如图 2-1 中所示，信号到达阵元 1 时相对于参考阵元 0 的波程差为 $d \sin \theta$ ，信号到达阵元 2 相对于参考阵元 0 的波程差为 $2d \sin \theta$ 。同理可得，信号到达阵元 m 时相对于参考阵元 0 的波程差为 $md \sin \theta$ 。对于平面波的计算，信号到达阵元 m 时相对于参考阵元 0 的传播时延为

$$\tau_m = \frac{md \sin \theta}{c} = m\tau \quad (2-1)$$

其中， c 是光速， $\tau = \frac{d \sin \theta}{c}$ 为信号到达阵元 1 时相对于参考阵元 0 的传播时延。

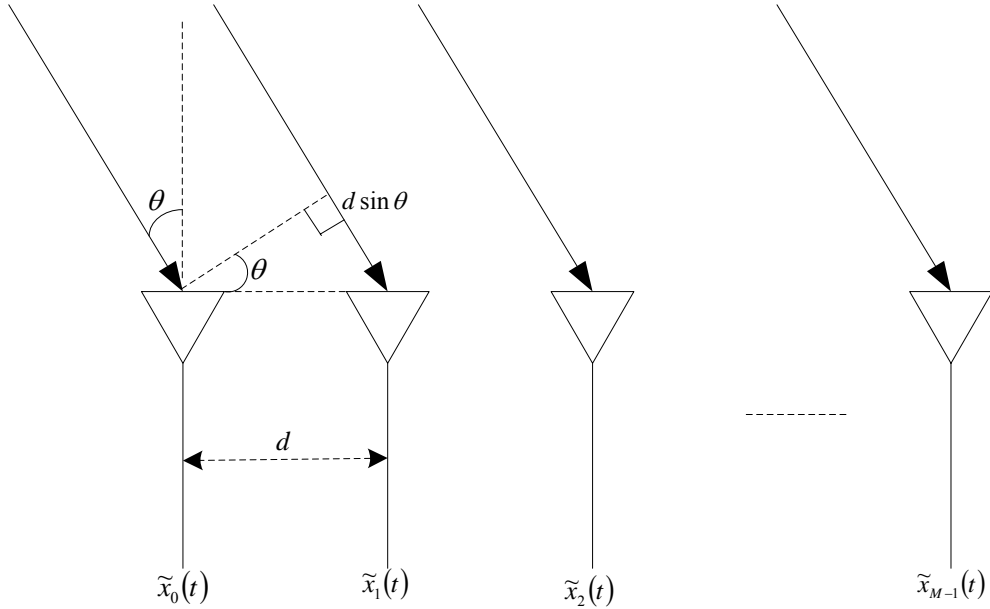


图 2-1 均匀线阵接受信号模型

假设空间远场有一窄带信号 $\tilde{s}(t)$ 入射到空间均匀线阵上，离散时间窄带信号的复数表示同样适合连续时间信号，窄带信号 $\tilde{s}(t)$ 可表示为如下的复数形式：

$$\tilde{s}(t) = s(t) e^{j\omega_0 t} \quad (2-2)$$

其中， ω_0 是接受信号的载波角频率； $s(t) = u(t) e^{j\psi(t)}$ 是信号 $\tilde{s}(t)$ 的复包络， $u(t)$ 和 $\psi(t)$ 分别是信号的幅度和相位。

如果假设参考阵元 0 接受的信号为

$$\tilde{x}(t) = \tilde{s}(t) = s(t) e^{j\omega_0 t} \quad (2-3)$$

则阵元 m 接受的信号为

$$\tilde{x}_m(t) = \tilde{x}(t - \tau_m) = \tilde{s}(t - \tau_m) \quad (2-4)$$

因为信号 $\tilde{s}(t)$ 是窄带的，即 $s(t)$ 是慢变化的，有

$$s(t) \approx s(t - \tau_m), \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (2-5)$$

所以有

$$\tilde{x}_m(t) = \tilde{s}(t - \tau_m) = s(t - \tau_m) e^{j\omega_0(t - \tau_m)} \approx s(t) e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega_0 \tau_m} \quad (2-6)$$

等价地记为

$$\tilde{x}_m(t) = \tilde{s}(t) e^{-j\omega_0 \tau_m} = \tilde{s}(t) e^{-jm\omega_0 \tau} \quad (2-7)$$

定义空间相位^[30]

$$\phi = \omega \tau = 2\pi f_0 d \sin \theta / c = 2\pi d \sin \theta / \lambda \quad (2-8)$$

其中 f_0 是入射信号的载波频率， λ 是载波的波长，且 $c = f_0 \lambda$ 。由于阵元 0 为参考阵元，则阵元 m 的接受信号相对于参考阵元 0 的空间相位差为 $m\phi$ 。分别取 $m = 0, 1, \dots, M-1$ ，将式 (2-7) 写成向量形式为

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_0(t) \\ \tilde{x}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{M-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\phi} \\ \vdots \\ e^{-j(M-1)\phi} \end{bmatrix} \tilde{s}(t) \quad (2-9)$$

定义列向量

$$\tilde{x}(t) = [\tilde{x}_0(t) \quad \tilde{x}_1(t) \quad \dots \quad \tilde{x}_{M-1}(t)]^T$$

和

$$a(\theta) = [1 \quad e^{-j\phi} \quad \dots \quad e^{-j(M-1)\phi}]^T, \quad \phi = 2\pi d \sin \theta / \lambda \quad (2-10)$$

则式 (2-9) 可表示为

$$\tilde{x}(t) = a(\theta) \tilde{s}(t) = a(\theta) s(t) e^{j\omega_0 t} \quad (2-11)$$

信号 $s(t)$ 的方向向量被称作 $a(\theta)$ ，通常也把向量 $a(\theta)$ 叫做导向矢量或阵列的阵列流形。通过式 (2-10) 可以得知，如果 $\theta \in (0^\circ, 90^\circ)$ ，则有 $\phi > 0$ ，也就是入射信号到达阵元 0 的时间先于到达阵元 m 的时间， $m = 0, 1, \dots, M-1$ ；如果 $\theta \in (-90^\circ, 0^\circ)$ ，则有 $\phi < 0$ ，即入射信号到达阵元 0 的时间落后于信号到达阵元 m 的时间， $m = 0, 1, \dots, M-1$ 。由此可知，均匀线阵能够处理的一维入射信号的范围为 $\theta \in (-90^\circ, 90^\circ)$ 。

一般情况下用于信号调制的复载波 $e^{j\omega_0 t}$ 不含有用信息，因此阵列信号处理通常不考虑调制以后的信号，只考虑基带信号。

式 (2-11) 所对应的基带信号可表示为：

$$x(n) = a(\theta)s(n) \quad (2-12)$$

其中，式 (2-12) 中 n 表示时间变量，对 $x(t)$ 在第 n 时刻进行阵元接受的信号进行采样，通常变量 n 被称为快拍数。对于窄带随机信号 $\tilde{s}(t)$ ，由离散时间平稳过程理论得知 $s(n)$ 是一个复高斯随机过程。

当有 K 个信号源分别从 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_K$ 方向辐射到阵列时，则传感器阵列接受到的基带信号是各个入射信号源之和，表达式为

$$x(n) = a(\theta_1)s_1(n) + a(\theta_2)s_2(n) + \dots + a(\theta_K)s_K(n) \quad (2-13)$$

其中，第 k 个信号源的导向矢量为

$$a(\theta_k) = [1 \quad e^{-j\phi_k} \quad \dots \quad e^{-j(M-1)\phi_k}]^T, \quad \phi_k = 2\pi d \sin \theta_k / \lambda, \quad k = 1, 2, \dots, K \quad (2-14)$$

给出信号向量 $s(n)$ 和信号方向矩阵 A 为

$$\begin{aligned} s(n) &= [s_1(n) \quad s_2(n) \quad \dots \quad s_K(n)]^T \in C^{K \times 1} \\ A &= [a(\theta_1) \quad a(\theta_2) \quad \dots \quad a(\theta_K)] \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\phi_1} & e^{-j\phi_2} & \dots & e^{-j\phi_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j(M-1)\phi_1} & e^{-j(M-1)\phi_2} & \dots & e^{-j(M-1)\phi_K} \end{bmatrix} \in C^{M \times K} \end{aligned} \quad (2-15)$$

则式 (2-13) 可写成向量形式，即

$$x(n) = As(n) \in C^{M \times 1} \quad (2-16)$$

根据式 (2-16)，阵列接受信号由信号方向矩阵或方向向量完全决定。由于接收端不可避免地存在加性噪声，实际工程中的阵列接受信号为

$$x(n) = As(n) + v(n) \quad (2-17)$$

其中， $v(n) \in C^{M \times 1}$ 为加性噪声向量。式 (2-17) 的展开形式为

$$\begin{bmatrix} x_0(n) \\ x_1(n) \\ \vdots \\ x_{M-1}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{-j\phi_1} & e^{-j\phi_2} & \dots & e^{-j\phi_K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j(M-1)\phi_1} & e^{-j(M-1)\phi_2} & \dots & e^{-j(M-1)\phi_K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(n) \\ s_2(n) \\ \vdots \\ s_K(n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_0(n) \\ v_1(n) \\ \vdots \\ v_{M-1}(n) \end{bmatrix} \quad (2-18)$$

综上所述，阐述了均匀线阵的结构，线阵的结构最容易实现，处理方法简单。是许多阵列结构研究的基础，也是阵列信号处理中研究最为成熟的一个阵列。

2.1.2 均匀矩形的阵列模型

均匀矩形阵列是二维平面阵列形式中的一种，其阵列结构的波束流形比较简单，不仅能够测得方位角，还能够测得俯仰角。但是均匀矩形阵列所需要的阵元数较多，那么相应的数据量也多，计算相对复杂。

均匀矩形面阵的阵列几何结构^[17]如图 2-2 所示，具有 $M \times N$ 个阵元的均匀矩形阵的几何结构， d_x 和 d_y 分别表示平行于 x 轴方向和 y 轴方向上的阵元间距。以坐标原点作为参考点，信号的入射方向的点为向量由式 (2-19) 定义，即

$$r = [\sin \theta \cos \varphi \quad \sin \theta \sin \varphi \quad \cos \theta] \quad (2-19)$$

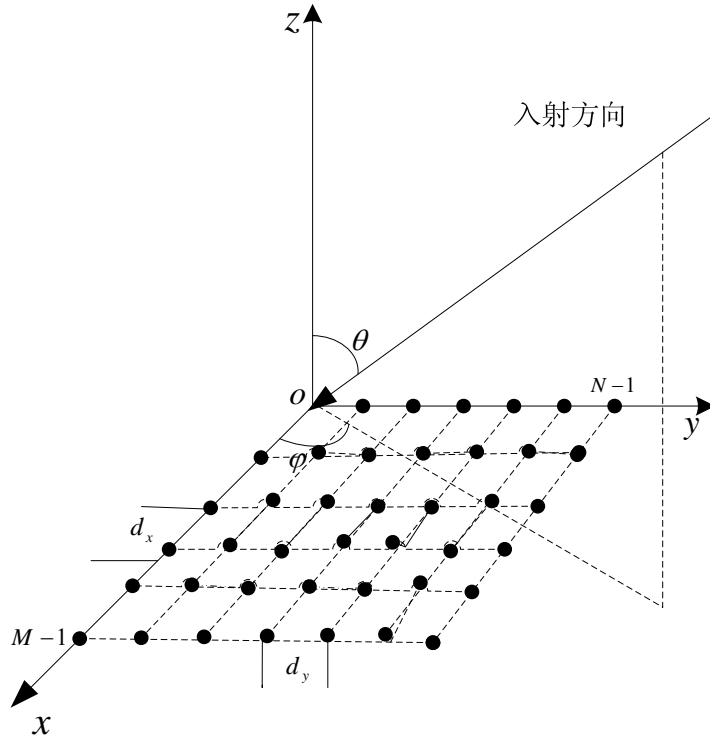


图 2-2 均匀矩形面阵的阵列几何结构

阵元位置坐标向量为

$$P_{m \times n} = [md_x \quad nd_y \quad 0], \quad m = 0, 1, \dots, M-1; n = 0, 1, \dots, N-1$$

假设入射波到达阵元 $P_{m \times n}$ 的时间比到达参考点 $P_{0 \times 0}$ 的时间超前（或滞后），即该阵元相对于参考信号点的时延为

$$\tau_{m \times n} = \frac{-\langle P_{m \times n}, r \rangle}{c} = \frac{md_x \sin \theta \cos \varphi + nd_y \sin \theta \sin \varphi}{c} \quad (2-20)$$

相应的信号相移为

$$\phi_{m \times n}(\theta, \varphi) = \frac{-2\pi}{\lambda} (m d_x \sin \theta \cos \varphi + n d_y \sin \theta \sin \varphi) = m \phi_x + n \phi_y \quad (2-21)$$

$$m = 0, 1, \dots, M-1; \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

其中， ϕ_x 和 ϕ_y 分别是平行于 x 轴和 y 轴的空间相位，即

$$\phi_x = \phi_x(\theta, \varphi) = \frac{2\pi}{\lambda} d_x \sin \theta \cos \varphi, \quad \phi_y = \phi_y(\theta, \varphi) = \frac{2\pi}{\lambda} d_y \sin \theta \sin \varphi$$

此时，导向向量可以表示为

$$a(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\phi_{0x1}(\theta, \varphi)} & e^{-j\phi_{0x2}(\theta, \varphi)} & \dots & e^{-j\phi_{0x(N-1)}(\theta, \varphi)} & \dots & e^{-j\phi_{(M-1) \times (N-1)}(\theta, \varphi)} \end{bmatrix}^T$$

均匀矩形阵列是由一系列的均匀线阵组成，所以平行于 x 轴或平行于 y 轴的每行线阵的方向向量还具有一定的特殊关系。平行于 x 轴的第 n 行阵元的方向向量可以表示为（ $n = 0, 1, \dots, N-1$ ）

$$\begin{aligned} a_{x,n}(\theta, \varphi) &= \begin{bmatrix} 1 & e^{-jn\phi_y} & e^{-j\phi_y - jn\phi_y} & \dots & e^{-j(M-1)\phi_y - jn\phi_y} \end{bmatrix}^T \\ &= e^{-jn\phi_y} a_{x,0}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (2-22)$$

其中，向量 $a_{x,0}(\theta, \varphi)$ 是 x 轴上的均匀线阵导向向量，有

$$a_{x,0}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\phi_x} & \dots & e^{-j(M-1)\phi_x} \end{bmatrix}^T \quad (2-23)$$

因此，平行于 x 轴的各行阵元的方向向量满足如下关系：

$$a_{x,0}(\theta, \varphi) = e^{jn\phi_y} a_{x,0}(\theta, \varphi) \quad (2-24)$$

同理可得平行于 y 轴的各行阵列的方向向量满足如下关系：

$$\begin{aligned} a_{y,n}(\theta, \varphi) &= \begin{bmatrix} 1 & e^{-jm\phi_x} & e^{-jm\phi_x - j\phi_y} & \dots & e^{-jm\phi_x - j(N-1)\phi_y} \end{bmatrix}^T \\ &= e^{-jm\phi_x} a_{y,0}(\theta, \varphi) \end{aligned} \quad (2-25)$$

其中，向量 $a_{y,0}(\theta, \varphi)$ 是 y 轴上的均匀线阵导向向量，有

$$a_{y,0}(\theta, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\phi_y} & \dots & e^{-j(N-1)\phi_y} \end{bmatrix}^T \quad (2-26)$$

通过式（2-23）和式（2-26）所定义的导向矢量 $a_{x,0}(\theta, \varphi)$ 和 $a_{y,0}(\theta, \varphi)$ ，二者形式与上一节介绍的均匀线阵的方向向量方程式类似。区别在于，由于矩形阵列是二维的，所考虑的是三维空间的阵列接受信号，因此，导向向量 $a_{x,0}(\theta, \varphi)$ 和 $a_{y,0}(\theta, \varphi)$ 的相移与两个角度有关。而对于均匀线阵的导向向量，信号和阵元在一个二维空间中，其相移只与一个角度有关。 $a_{x,n}(\theta, \varphi)$ 和 $a_{y,n}(\theta, \varphi)$ 分别与 $a_{x,0}(\theta, \varphi)$ 和 $a_{y,0}(\theta, \varphi)$ 相差一个

相位因子，这是由于选取原点处阵元为参考阵元所致。一般来说，选取参考阵元不同，方向向量的表达式也会不同。

2.1.3 均匀圆阵的阵列模型

假设有一个圆形天线阵列^[20,21]，它由 M 个具有任意方向性的阵元均匀分布在圆周上，如图 2-3 所示。选取圆心为参考点，对应的方向向量记为 $a(\theta)$ ，它表示为：

$$a(\theta) = [e^{-j\gamma_1}, e^{-j\gamma_2}, \dots, e^{-j\gamma_M}]^T \quad (2-27)$$

式 (2-27) 中 $\gamma_k = \frac{2\pi R}{\lambda} \cos\left(\theta_1 - (m-1)\frac{2\pi}{M}\right)$, $m = 1, 2, \dots, M$

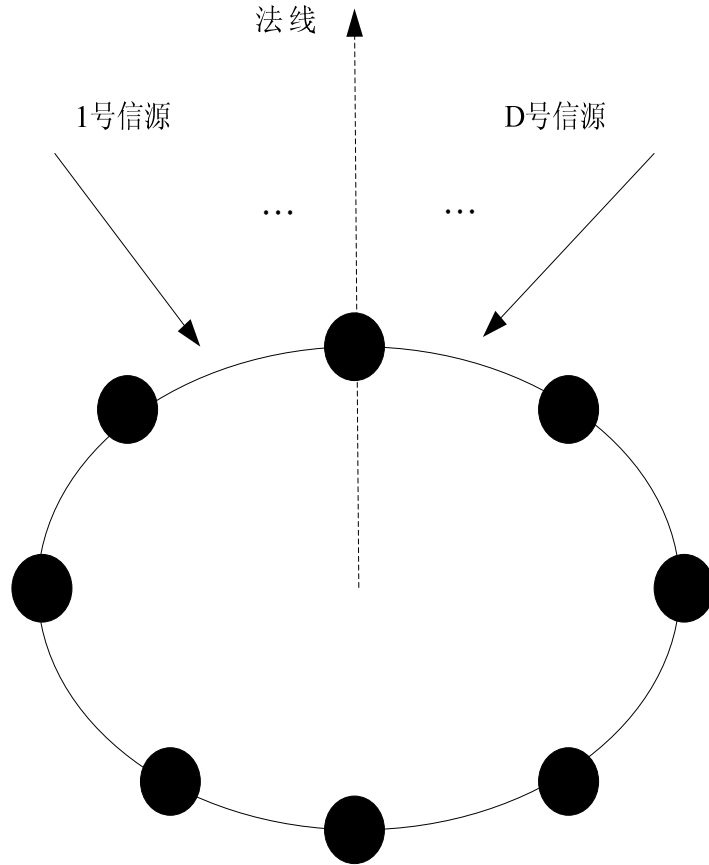


图 2-3 均匀圆阵示意图

其中， R 为圆阵半径， θ 为波传播方向角， λ 为电磁波的波长。

关于接受天线阵的假设为：（1）位于空间已知坐标处的无源阵元按一定的形式排列而成；（2）理想情况下，把每个阵元当作一个点，忽略它自身的尺寸大小。阵元的特征只与它在阵列中所处的位置有关系；（3）由于阵列的对称性，所以忽略阵元间的互耦，并且各阵元上对信号的估计精度和分辨率是相似的。4）各阵元上的噪声相互统计独立，且噪声与信号是统计独立的^[32]。

2.2 均匀圆形阵列的结构特点分析

均匀圆阵是由等间距的阵元排列在一个圆周上的二维平面阵。因为圆具有对称性，因此均匀圆阵具有很多优点。圆阵相对于线阵来讲，首先，它能够测得二维角度；其次，均匀圆阵可以进行全方位扫描，因此测得的方位角的范围是 $[0^\circ, 360^\circ]$ ，并且天线是无模糊的。而线阵，它只能测量到 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 的方位角。均匀圆阵与均匀矩形阵比较而言，均匀矩形阵列形成的波束空间比均匀圆阵简单，但是均匀圆阵所需要的天线比均匀矩形阵列单元少，数据量就相应减少，处理方法比较简单^[33,34]。

综上所述，均匀圆阵有它自身的特殊性^[22]。首先，它的天线都是全向的，这说明无论在任何方向上，天线测得角度的分辨率和估计精度都是近似或相同的。但是均匀圆阵的阵列流形比较复杂，它的表达方式与线阵的表达方式不同，不具有范德蒙矩阵形式，这样就导致了能够在均匀线阵下估计波达角的方法不能估计出均匀圆阵下的波达角。

由上述均匀圆阵的结构特点，通过利用模式空间激励算法可以有效的把均匀圆阵的阵列流形转换为均匀线阵阵列流形的形式。也就是将阵元接受到的信号数据先通过波束域的转换，把均匀圆阵的阵列流形转换为虚拟线阵^[23]。然后才可以利用传统算法进行波达角估计。

2.3 窄带信号模型

信号带宽^[24]是相对而言的，并非是一个绝对的物理量。信号带宽远小于中心频率的是窄带信号，窄带信号的功率集中在中心频率附近，即

$$B / f_0 < 1/10 \quad (2-28)$$

式(2-28)中： B 为信号带宽； f_0 为中心频率。通常情况下，典型的窄带信号就是用正弦信号表示，本论文中所提及的窄带信号如式(2-29)表示为

$$s(t) = u(t) \cos(2\pi f_0 t + v(t)) \quad (2-29)$$

其中： $u(t)$ 为慢变幅度调制函数，称为实包络； $v(t)$ 为慢变化的相位调制函数。

对于窄带信号，用复数形式表达窄带信号更为简洁，可表示为：

$$s(t) = u(t) e^{j[2\pi f_0 t + v(t)]} \quad (2-30)$$

一般情况下， $u(t)$ 和 $v(t)$ 包含了全部的有效信息。

假设有 K 个具有相同中心频率 f_0 ，波长为 λ 的空间窄带平面波分别以波方向 $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_K$ 入射到由 M ($M > K$)个具有各向同性的阵元构成的均匀圆形阵列。其中 $\Theta_i = (\theta_i, \phi_i)$ ($i=1, 2, \dots, K$)。 θ_i ， ϕ_i 分别是第 i 个入射信号的方位角和俯仰角，其中， $0 \leq \theta_i < 90^\circ$ ， $0 \leq \phi_i < 360^\circ$ 。

这时，阵列第 m 个阵元的输出可以表示为：

$$x_m(t) = \sum_{k=1}^K s_k(t - \tau_{m0}) + n_m(t) \quad (2-31)$$

其中： $s_k(t - \tau_{m0})$ 为入射到阵列的第 k 个信号； $n_m(t)$ 为第 m 个阵元上的加性噪声； τ_{m0} 为来自信号源入射到第 m 个阵元时，相对于参考点的时延。将式（2-31）写成矩阵的形式如下：

$$X(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T \quad (2-32)$$

$$N(t) = [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T \quad (2-33)$$

$$S(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_K(t)]^T \quad (2-34)$$

其中 $A(\Theta)$ 为 $M \times K$ 阶矩阵的导向矢量矩阵，即

$$A(\Theta) = [a(\Theta_1), a(\Theta_2), \dots, a(\Theta_K)] \quad (2-35)$$

矩阵 $A(\Theta)$ 中任一列向量 $a(\Theta_i)$ 是阵列接收的空间信号源中一个来波方向为 Θ_i 的导向矢量，它的矩阵是 $M \times 1$ 维列矢量，即

$$a(\Theta_i) = [e^{-j2\pi f_0 \tau_{i0}}, \dots, e^{-j2\pi f_0 \tau_{M0}}]^T \quad (2-36)$$

因此，如果用矩阵形式描述，通常情况下，阵列信号模型也可简单地表示为：

$$X(t) = A(\Theta)S(t) + N(t) \quad (2-37)$$

综述所述可知，矩阵 $A(\Theta)$ 与信号源的来波方向、阵列的形状有密切关系。通常在实际应用中，天线阵元的排列一旦固定，阵列的形状就不会改变了，因此矩阵 $A(\Theta)$ 中任意一列总是能够反映出某个空间信号源的来波方向。

实验中，为了更好的体现算法的性能，需要对信号模型作一些基本条件的假设。使系统处于理想化状态^[25]。信号在理想介质中传播，不受到其他因素的干扰，各向均匀同性，使信号在此介质中向前直线传播。假设信号源与阵列间的距离无限远，因此被看作是平面波，在信号到达阵列前。而且每个到达阵列的信号被看作是平行的。且每个信号源的方向是唯一确定的，信号源的个数已知，小于阵元的个数。

2.4 噪声模型

阵元接受信号时将产生噪声，假设阵元接收到的噪声为平稳零均值高斯白噪声，方差为 σ^2 。各阵元间的噪声互不相关，彼此独立，且与目标源不相关^[32]。噪声向量 $n(t)$ 的二阶矩满足：

$$E[n(t_1)n^H(t_2)] = \sigma^2 I \delta_{t_1, t_2} \quad (2-38)$$

$$E[n(t_1)n^T(t_2)] = 0 \quad (2-39)$$

2.5 DOA 估计性能的参数

参数的估计是判断一种算法性能是否合理的标准。参数，也叫参变量，在对某个问题进行研究的时候，通过改变与之相关的几个变量，观察这个问题的变化。引入的这一个或几个变量并不是研究这个问题必须的变量，这样的变量被称为参变量

或参数^[27]。

对于 DOA 估计参数来说包括阵元的个数、信号的参数、信号的个数、信号的相关性、估计角度的精度、分辨力、克拉美罗界等。在上一节中对信号源进行了假设，假设信号为已知个数的非相干的信号源。噪声假设为平稳零均值高斯白噪声。本节主要对估计精度、分辨力、克拉美罗界做详细介绍。

2.5.1 估计精度

一般情况下通过参数标准差的估计来衡量估计精度的性能，假设试验次数为 N ，信源个数为 P ，第 n 次试验中第 p 个信号源估计值为 $(\hat{\theta}_p, \hat{\varphi}_p)$ ，其真实值为 (θ_p, φ_p) ，那么第 p 个信号源方位角与俯仰角方向估计标准差定义为：

$$RMSE(\theta_p) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\hat{\theta}_p - \theta_p)^2} \quad (2-40)$$

$$RMSE(\varphi_p) = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (\hat{\varphi}_p - \varphi_p)^2} \quad (2-41)$$

P 个信号源的估计标准差定义为它的算术平均值：

$$RMSE(\theta) = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P RMSE(\theta_p) \quad (2-42)$$

$$RMSE(\varphi) = \frac{1}{P} \sum_{p=1}^P RMSE(\varphi_p) \quad (2-43)$$

2.5.2 分辨力

在对空间信号进行谱估计的过程中，需要对一定的角度范围作谱峰搜索来测向。令 $\hat{P}(\theta, \varphi)$ 表示角度谱，当：

$$E(\hat{P}(\theta_m, \varphi_m)) < E\left(\frac{\hat{P}(\theta_1, \varphi_1) + \hat{P}(\theta_2, \varphi_2)}{2}\right) \quad (2-44)$$

时，两个角是可辨的，是通过判断两信号角度谱峰的平均值小于两个入射信号谱峰的平均值，其中： $\theta_m = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$ ， $\varphi_m = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}$ 。

2.5.3 克拉美罗界

克拉美-罗界(CRB)给出了估计均方误差的方法，即有效估计值的均方误差是其下限，而且这个下限一定大于实际估计的均方误差。可以通过 Fisher 信息阵获取 CRB，它的定义为：

$$FIM_{p,k} = N \text{Tr}\left(\frac{dR}{da_p} R^{-1} \frac{dR}{da_k} R^{-1}\right), \quad p, k = 1, \dots, 2n \quad (2-45)$$

$$a = [\theta^T, \varphi^T]^T, \quad \theta = [\theta_1, \dots, \theta_n], \quad \varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_n]$$

其中， R 表示阵列接受数据的协方差矩阵， a 表示估计参数， N 表示快拍数， Tr 表示矩阵的迹。

2.6 本章小结

本章节主要介绍了阵列的基本模型和信号模型。均匀线阵是目前研究最成熟的一种阵列模型，它的阵元排列结构简单，方便计算，可以测得一维的波达角。因此均匀线阵得到学者们的极大关注，并得到应用广泛。因此基于均匀线阵的模型下的研究方法很多。均匀矩形阵列是一种平面阵，能够测得二维波达角，但是这种结构所需要的阵元数比较多，计算比较复杂。均匀圆阵具有自身的特性，其本质是一个平面阵列，阵元等间距的分布在圆周上。它除了可以提供 $[0^\circ, 360^\circ]$ 的方位角信息，还可以提供俯仰角信息。而均匀线阵只能提供有限的方位角信息，即 $[-90^\circ, 90^\circ]$ 的范围。由于均匀圆阵结构具有对称性，因此无论在哪个天线上都具有相似的估计精度和分辨率。但是均匀圆阵的阵列流形比较复杂，不符合范德蒙矩阵形式^[37]，导致很多优良的算法不能直接应用到其中。本章还介绍了 DOA 估计性能的参数，用这些性能参数来判断一种算法的是否合理，在仿真结果中利用估计精度和估计时间来比较算法的优越性。

第3章 传统波达角估计算法

无线电应用越来越广泛，最早是在航海中的应用。目前在航空、航海、消防、商业都使用，卫星导航系统、宇航动力、雷达、天文学等等许多方面有广泛的应用^[28]。因此，如何正确快速的确定空间信号的二维波达角成为了关键问题，对目标进行全面的定位，侦测和监视起着十分关键作用。

均匀线阵的 DOA 估计是研究均匀圆阵的基础，因此本章在研究均匀圆阵的 DOA 估计之前，先详细讨论了基于均匀线阵的 DOA 估计的传统算法。然后以 MUSIC 算法为基础研究均匀圆阵的 DOA 估计算法。但是在此之前需要对均匀圆阵的阵列流形进行预处理，利用波束转换技术使均匀圆阵的阵列流形符合范德蒙矩阵的形式，这也是本章的主要内容之一。经过这样的转换之后就可以将适用于均匀线阵的传统经典算法应用到均匀圆阵中。在本章的前半部分，对均匀线阵的 DOA 估计的传统算法进行介绍，然后对均匀圆阵(UCA)的数学模型进行讨论研究，之后介绍了相位模式激励，将圆阵的阵列流形转换成虚拟线阵，最后对传统的 MUSIC 算法和求根 MUSIC 算法进行仿真，并对仿真结果进行了分析^[29]。

3.1 基于均匀线阵的 DOA 估计的传统方法

早期的传统 DOA 估计方法通过对各个阵元上的加权值的控制来找到最大的输出功率，得到估计的角度。传统的方法需要的阵元个数较多，为了使获取的分辨率更高就需要使用更多的阵元数。最早的传统算法只能对单个信号进行估计。当有多个信号时，只能对其中一个检测，其他被视为干扰。其中较为典型的算法是波束形成法和 Capon 最小方差法。传统方法没有利用信号的统计特性，而子空间算法是通过对接收到的信号和噪声的统计特性，利用它们的正交特性，得到功率输出寻找其最大值。其中最为经典的算法是多重信号分类法和旋转不变子空间算法。本节介绍了基于均匀线阵的 DOA 估计的几种传统算法，包括波束形成法、Capon 最小方差法、MUSIC 算法和 Root-MUSIC 算法^[30,31]。

3.1.1 波束形成法

如图 3-1 是波束形成器的结构图，接受的信号源是窄带信号。传统的波束形成法是最基础的波达角估计算法之一，它是通过控制各阵元上的加权因子来获取信号的功率输出。

其中 $u(t)$ 是阵元接收的信号， $w(t)$ 是加权因子， $y(t)$ 是输出信号，输出的结果等于各个阵元输出的线性加权和，三者之间的关系满足式 (3-1)

$$y(k) = w^H u(k) \quad (3-1)$$

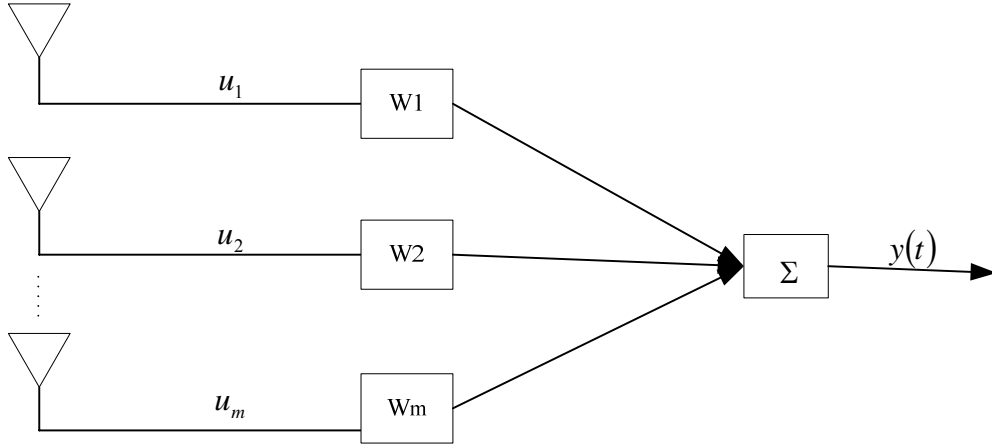


图 3-1 波束形成器结构

波束形成法的总输出功率可表示为：

$$P = E[y(k)^2] = E[w^H u(k)]^2 = w^H R_w w \quad (3-2)$$

当一个信号 $s(t)$ 以角度 θ_d 辐射到阵列上，那么波束形成器的总输出功率 P_{cbf} 为：

$$\begin{aligned} E[w^H u(k)]^2 &= E[w^H (a(\theta_d)s(k) + n(k))]^2 \\ &= |w^H a(\theta_d)|^2 (E[s(k)^2] + E[n(k)^2]) \end{aligned} \quad (3-3)$$

从式 (3-3) 可以看出，当 $w = a(\theta_d)$ 时，它的输出功率达到最大值。这个原因是 $w = a(\theta_d)$ 可在传感器处与来自 θ_d 来波方向上的信号相匹配，因此可以使波束形成法的输出功率达到最大，此时，输出端的输出功率与波达角的关系为：

$$P_{cbf} = w^H R w = a^H(\theta) R a(\theta) \quad (3-4)$$

波束形成法的天线只接受与之相匹配的信号，来自不同方向的信号对应不同的加权矢量 $w = a(\theta)$ ，从而波束形成法功率输出也不同，输出的最大功率对应与之相匹配的信号源，即对应的角度为信号的来波方向。

波束形成器的缺点有：(1) 波束形成法所需的阵元数较多；(2) 阵列所有的自由度都用在观测方向上形成一个波束；(3) 当空间有多个信号辐射到阵列时，信号之间会产生旁瓣互扰，影响波束形成法对信号的估计，从而导致分辨率的降低，甚至当相邻的信号角度相差比较小的时候，波束形成法可能估计不到正确的来波方向。

3.1.2 Capon 最小方差法

Capon 最小方差法^[32]与波束形成法的方法不同，它只用了其中一部分的自由度在感兴趣的观测方向上，形成一个波束的方法，把剩下的自由度用在处理干扰信号

的方向上，使干扰信号形成零陷。当有多个信号源辐射到阵列时，总输出功率有两部分组成：一个是有用信号的功率，另一个是干扰信号的功率。对于这样的总输出功率，Capon 最小方差法是将干扰降到最低，而在有用信号上的增益保持为 1。这样也使得总输出功率达到最小，那么干扰也就越小。式（3-5）表示如下：

$$\min E[y(k)]^2 = \min w^H R w \quad (3-5)$$

观测方向上使增益为常数 1，约束条件为：

$$w^H a(\theta_d) = 1 \quad (3-6)$$

式（3-6）利用拉格朗日乘子方法求解，得：

$$w = \frac{R^{-1} a(\theta)}{a^H(\theta) R^{-1} a(\theta)} \quad (3-7)$$

式（3-7）中的加权矢量常常被称为最小方差无畸变响应波束形成器权值。

3.1.3 子空间法

虽然 Capon 最小方差是波束形成的经典方法，一般情况下比较有效，但是这种方法本质上受到分辨率上的限制，通常只能对单个信号进行测向。产生这个情况的原因是由于没有利用输入信号模型结构，如式（3-8）所示：

$$u(t) = \sum_{k=0}^{K-1} s_k(t) b_k(t) + n(t) \quad (3-8)$$

Schmidt 在 1979 年提出了多重信号分类（MUSIC）算法^[33]，它的出现标志着空间谱估计测向进入了繁荣发展的阶段。它将“向量空间”的概念引入了空间谱估计领域，经过三十年的发展，可以说其理论已经比较成熟。

80 年代以来，人们对超分辨率空间谱估计的基于特征分解的算法进行了广泛的研究，并取得了一系列高效的处理方法，其中最经典的一个是多重信号分类（MUSIC）算法，该算法需要通过一维谱峰搜索才能求出信源的来向，但是相比最大似然（ML）和加权子空间拟合（WSF）等算法的运算量已经减少了很多。以 MUSIC 为代表的算法存在一个缺点，对相干信号处理的不尽如人意。针对相干信号源比较经典的处理方法是空间平滑技术。但是空间平滑技术只适用于均匀线阵，并且它的使用也会对阵列的有效孔径产生影响^[34]。

空间谱估计算法是在已知信号源个数下的计算，但在实际应用中是不可能的，只能通过观测数据对源数目进行估计。R.O.Schmidt 提出了基于阵列协方差矩阵的特征值分布来估计该信号源的方法。这种方法在理论上是可实现的，至少对独立源和部分相关源是正确的，但实际上由于该数据长度有限，很大程度上只能依赖主观判断，以确定信号源的数。

多重信号分类(MUSIC)算法是超分辨率算法中最为经典，发展最成熟的算法之一。对于 MUSIC 算法不用考察阵列的结构，在任何情况下的阵列中都能将接受的数据处理并进行协方差运算，得到信号和噪声的统计特性，利用这两个子空间正交的性质得到最大的谱峰，即为信号的来波方向。下面讨论如何利用子空间进行多个信号分类^[35]。

由第二章介绍的窄带信号模型，那么可以很容易得到信号的协方差矩阵，见式(3-9)：

$$\begin{aligned} R_{xx} &= E[XX^H] \\ &= AE[SS^H]A^H + \sigma^2 I \\ &= APA^H + \sigma^2 I \end{aligned} \quad (3-9)$$

因为信号为非相关的，因此矩阵 R_{xx} 是一个对称矩阵。令其特征值分解为：

$$R_{xx} = U\Sigma U^H \quad (3-10)$$

由于 A 满列秩，信号个数小于阵元个数 ($p < m$)。所以，有

$$U^H R_{xx} U = U^H APA^H U + \sigma^2 U^H U = \text{diag}(a_1^2, \dots, a_p^2, 0, \dots, 0) + \sigma^2 I \quad (3-11)$$

式(3-10)表示自相关矩阵 R_{xx} 的特征值。

显然，当信噪比较高时，矩阵 R_{xx} 可以很明显的分为两部分：第一部分由前面 p 个大特征值组成的信号子空间的特征值；第二部分由剩下的 $m-p$ 个小的特征值组成的噪声子空间特征值。由此，可以根据信号特征值和噪声特征值将特征矩阵 U 的列向量分为两部分，即

$$U = [S:G]$$

考查

$$R_{xx}G = [S:G]\Sigma \begin{bmatrix} S^H \\ G^H \end{bmatrix} G = [S:G]\Sigma \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} = \sigma^2 G \quad (3-12)$$

又由

$$R_{xx}G = APA^H G + \sigma^2 G \quad (3-13)$$

由两个式子(3-12)和式(3-13)可以得到：

$$APA^H G = 0, \quad G^H APA^H G = 0 \quad (3-14)$$

故式(3-14)成立的充分必要条件是

$$A^H G = 0 \quad (3-15)$$

将阵列流形 $A = [a(\omega_1), \dots, a(\omega_p)]$ 代入式(3-15)既有：

$$a^H(\omega)G = 0^T, \quad \omega = \omega_1, \dots, \omega_p \quad (3-16)$$

将式(3-16)改写成标量的形式，由此可以得到一种功率谱的函数：

$$P(\omega) = \frac{1}{a^H(\omega)GG^H a(\omega)} \quad (3-17)$$

式 (3-17) 取峰值的 p 个 ω 值 $\omega_1, \dots, \omega_p$ 给出 p 个信号的波达方向 $\theta_1, \dots, \theta_p$ 。

由式 (3-17) 所表示的函数 $P(\omega)$ 给出了来波方向上的功率分布，因此可称之为空间谱。由于这种算法能够分辨多个信号的角度，也把这种方法称为多重信号分类法 (multiple signal classification)，简称为 MUSIC 算法。

MUSIC 算法实现步骤^[36]如下：(1) 由阵列接收到的信号数据计算其自相关矩阵 R_{xx} ；(2) 利用特征值分解法，将协方差矩阵分解为信号子空间 S 和噪声子空间 G ；(3) 通过式 (3-17) 描述的空间谱的计算公式得到 $P(\omega)$ ；(4) 在一定范围内进行谱峰搜索，得到与信号个数相对应的峰值，峰值所对应的角度就是信号源的入射方向。

接下来对基于线阵的经典 MUSIC 进行仿真。

实验内容：基于均匀线阵的经典 MUSIC 算法的 DOA 估计性能分析。

仿真条件：均匀线阵 (ULA) 结构由 8 个阵元等间距排列组成，阵元间距 $d = \lambda/2$ ，噪声为零均值的复高斯白噪声。

实验主要检测的信号是两个非相关的窄带信号源，两个信源的入射角度分别为 40° 和 60° ，快拍数为 200。用传统 MUSIC 算法作 DOA 估计。

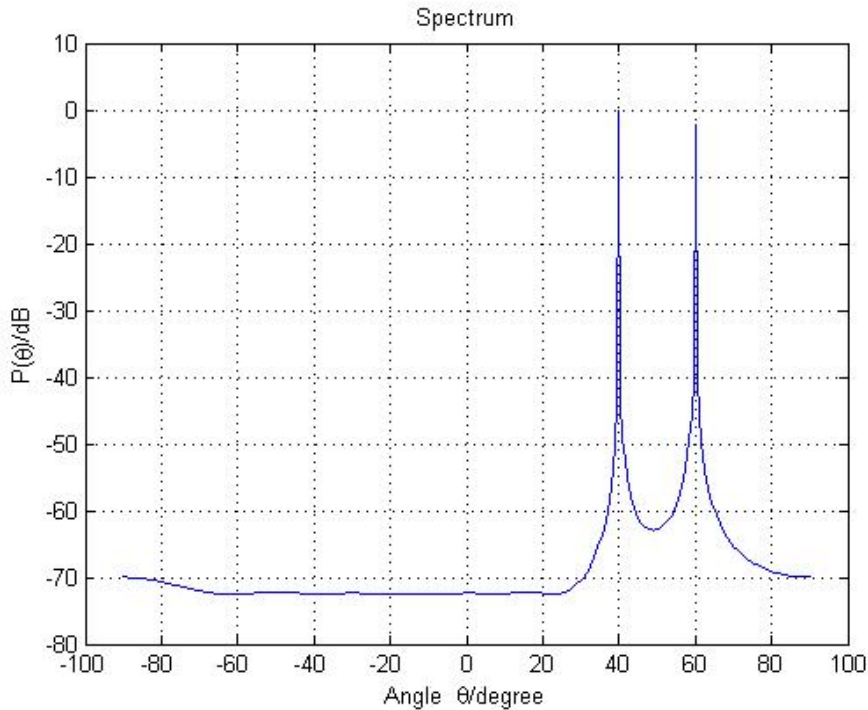


图 3-2 均匀线阵的 MUSIC 算法的 DOA 估计

基于均匀线阵的经典 MUSIC 算法的 DOA 估计如图 3-2 所示。从图示可以看到在 40° 和 60° 两个角度上有两个谱峰比较尖锐，这说明 MUSIC 算法利用谱峰搜索

能够比较精确的得到波达角。这种算法也是超分辨率算法中最经典的一种。

3.1.4 基于线阵的求根 MUSIC 算法

求根 MUSIC 算法来源于经典 MUSIC 算法^[37]，它的算法原理是对 MUSIC 算法得到功率谱的多项式进行求根运算，就可以得到信号源的来波方向，该算法因此而得名求根 MUSIC (Root-MUSIC) 算法。即求得多项式的根就确定了信号的波达角方向。

先定义如 (3-18) 多项式：

$$f(z) = e_i^H p(z), \quad i = P+1, \dots, M \quad (3-18)$$

式中， e_i 是噪声子空间 $M - P$ 个小的特征值对应的特征向量，其中

$$p(z) = [1 \quad z \quad \dots \quad z^{M-1}]^T \quad (3-19)$$

由以上公式可知，只有 $z = \exp(j\omega)$ 时，也就是说，当多项式的根正好落在单位圆上时， $p(\exp(j\omega))$ 就是多项式的根对应的导向矢量。由特征值分解算法可知， $p(\exp(j\omega)) = p_m$ 就是信号的方向向量，在信号为非相关时，它与噪声子空间是正交的。因此，综合利用所有噪声特征向量提取空间参数信息，可将多项式修改如 (3-20) 所示：

$$f(z) = p^H(z) U_N U_N^H p(z) \quad (3-20)$$

通过式 (3-20) 可以看出，多项式中不但有 z ，而且还有 z^* 的幂次项的出现，这样对多项式进行求根的过程就变的比较烦琐。由于只对单位圆上的 z 值感兴趣，那么可将多项式 (3-20) 修改如式 3-21 的形式：

$$f(z) = z^{M-1} p^T(z^{-1}) U_N U_N^H p(z) \quad (3-21)$$

现在就可以求得多项式 $f(z)$ 的根，也就获得了信号源的波达方向的信息。多项式 $f(z)$ 是 $2(M-1)$ 次多项式，也就是说镜像对称的有 $(M-1)$ 对根，在这些根中有 P 个幅值最大的根的 z_1, \dots, z_P 的相位正好落在单位圆上，且

$$z_i = \exp(j\omega_i), 1 \leq i \leq P \quad (3-22)$$

通过式 (3-22) 在允许的误差范围内，有 P 个多项式的根在单位圆附近，就测得了信号波达方向的估计。方向角的计算公式如下：

$$\theta_i = \arcsin\left(\frac{\lambda}{2\pi d} \arg\{z_i\}\right), i = 1, \dots, P \quad (3-23)$$

求根 MUSIC 算法实现步骤^[38]如下：(1) 与 MUSIC 算法步骤的第一部分相同，也是求出信号数据的协方差矩阵 R ；(2) 利用特征值分解法，将协方差矩阵分解为信号子空间 U_s 和噪声子空间 U_N ；(3) 可以根据 R 的大特征值判断信号源个数；(4) 通过式 (3-21) 的多项式 $f(z)$ 进行求根运算；(5) 寻找位于单位圆上值，根据式 (3-23)

可以求出相应的信号源波达方向。

接下来对 Root-MUSIC 算法进行仿真。

实验内容：基于均匀线阵的求根 MUSIC 算法及性能分析。

仿真条件为：均匀线阵（ULA）的结构由 50 个阵元等间距排列组成，阵元间距 $d = \lambda/2$ ，信噪比为 20dB，方位角已知，噪声为零均值的复高斯白噪声。

实验针对两个非相干信号进行 DOA 估计，信号入射角度分别为 -40° 和 40° ，用求根 MUSIC 算法作 DOA 估计。

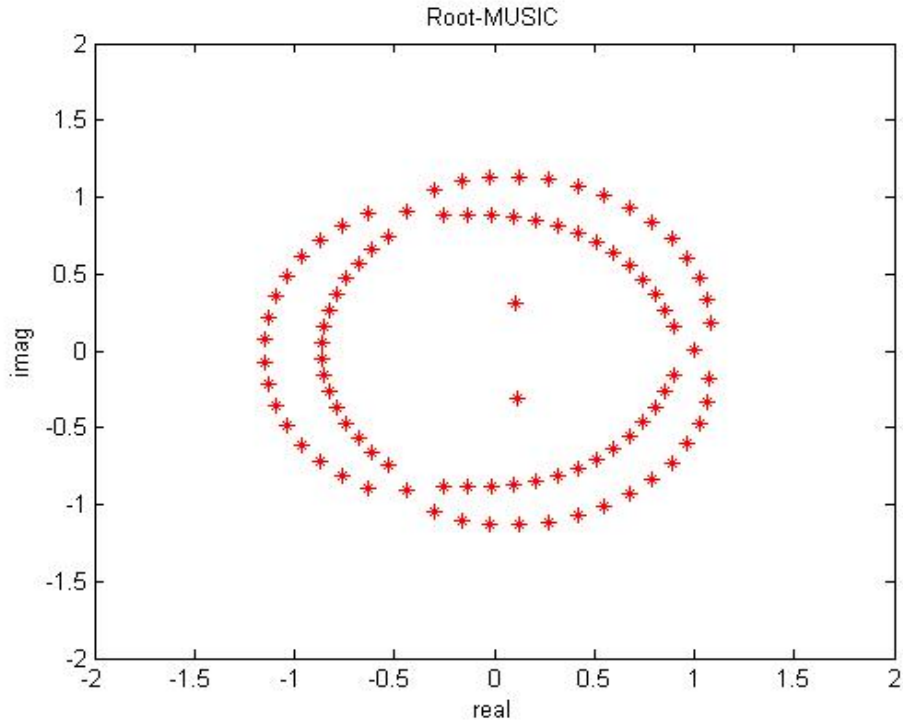


图 3-3 均匀线阵 Root-MUSIC 算法 DOA 估计单位圆图

均匀线阵 Root-MUSIC 算法 DOA 估计如图 3-3 表示，估计的是两个对称角度。从图中可以看出两个对称的根落在单位圆上，且范数接近于 1。那么这两个点位测得的角度。

3.2 均匀圆阵的数学模型

在第 2 章中对均匀圆阵进行了简单的介绍，主要是对阵列进行了理性化的假设。本节主要对均匀圆阵的结构进行深入讨论，从阵列流形的角度出发，讨论均匀圆阵的数学模型。阵列流形决定了阵列的结构，通过本节介绍可以从理论上看出它与均匀线阵的不同之处。

均匀圆阵的阵列结构如图 3-4 所示。均匀圆阵的几何结构^[39]由 M 个阵元组成，半径为 R 。阵元 m 的坐标为 $p_m = [R \cos(2\pi m/M) \quad R \sin(2\pi m/M) \quad 0]$ ，选取坐标原点为

参考点，信号的入射方向的归一化向量为：

$$r = [\sin\theta\cos\phi \quad \sin\theta\sin\phi \quad \cos\theta]。$$

阵元 m 接受到的入射波的时间超前（或滞后）于信号到达参考点（原点）的时间，这个时间上的差距称为时延。此时的时延可表示为：

$$\tau_m = -\frac{1}{c} \left(R \cos \frac{2\pi m}{M} \sin \theta \cos \phi + R \sin \frac{2\pi m}{M} \sin \theta \sin \phi \right) \quad (3-24)$$

简化式 (3-24) 可得

$$\tau_m = -\frac{R}{c} \sin \theta \cos \left(\phi - \frac{2\pi m}{M} \right) \quad (3-25)$$

其中， $c = 2\pi/\lambda$ ， λ 为电磁波的波长。

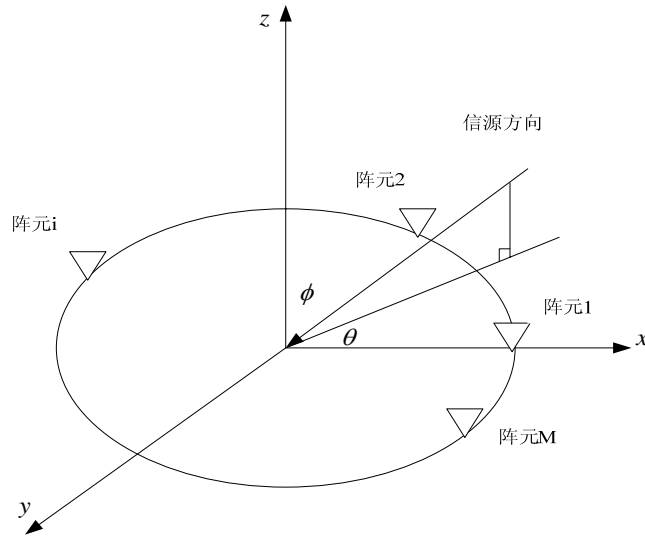


图 3-4 均匀圆阵的阵列结构模型

相对应的相移为

$$\Theta(\theta, \phi) = -\frac{2\pi}{\lambda} R \sin \theta \cos \left(\phi - \frac{2\pi m}{M} \right), \quad m = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3-26)$$

方向矢量可表示为

$$a(\theta, \phi) = [e^{-j\Theta_0(\theta, \phi)} \quad e^{-j\Theta_1(\theta, \phi)} \quad \dots \quad e^{-j\Theta_{M-1}(\theta, \phi)}]^T \quad (3-27)$$

如果有 K 个信号源辐射到阵列时，阵列接受到了信号可以表示成矩阵的形式：

$$X(t) = A(\Theta)S(t) + N(t) \quad (3-28)$$

将式 (3-28) 展开为

$$\begin{bmatrix} x_0(t) \\ x_1(t) \\ \vdots \\ x_{M-1}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-j\Theta_{0,1}} & e^{-j\Theta_{0,2}} & \dots & e^{-j\Theta_{0,K}} \\ e^{-j\Theta_{1,1}} & e^{-j\Theta_{1,2}} & \dots & e^{-j\Theta_{1,K}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-j\Theta_{M-1,1}} & e^{-j\Theta_{M-1,2}} & \dots & e^{-j\Theta_{M-1,K}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(t) \\ s_2(t) \\ \vdots \\ s_K(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n_0(t) \\ n_1(t) \\ \vdots \\ n_{M-1}(t) \end{bmatrix} \quad (3-29)$$

其中, $\Theta_{m,k} = \Theta_m(\theta_k, \phi_k)$, $m = 0, 1, \dots, M-1$, $k = 1, 2, \dots, K$ 。

通过式 (3-27) 和式 (2-10) 对比来看, 均匀圆阵的阵列流形与均匀线阵的阵列流形的形式是不同。而均匀线阵的阵列流形符合范德蒙矩阵的形式, 而均匀圆阵的阵列流形则不符合范德蒙矩阵的形式。从而不能直接移植适合均匀线阵的波达角估计算法。

3.3 模式空间虚拟均匀线阵的形成

由于均匀圆阵的阵列流形不具有范德蒙结构, 导致许多应用于均匀线阵的测向算法不能直接应用到均匀圆阵, 所以需要对均匀圆阵的阵列流形做预处理, 使预处理后的阵列流形的结构具有类似范德蒙的结构^[40]。

均匀圆阵由 N 个各向同性的天线阵元均匀分布在一个半径为 R 的圆周上。天线阵元接受频率为 f 的信号, 相对应的波数为 $k = 2\pi f/c = 2\pi/\lambda$ 。UCA 的阵元空间导向矢量可表示为:

$$a(\theta, \varphi) = [a(\theta, \varphi - \gamma_1), a(\theta, \varphi - \gamma_2), \dots, a(\theta, \varphi - \gamma_N)] \quad (3-30)$$

其中, $\gamma_n = (n-1)(2\pi/N)$, 它决定了第 n 个天线上的角度位置。特征函数 $a(\theta, \varphi)$ 决定了 UCA 的接受特点。

天线全向同性和非耦合的情况下, 各向同性归一化的天线阵列的特征函数表示为:

$$a(\theta, \varphi) = e^{jkR \sin \theta \cos \varphi} \quad (3-31)$$

一个各向同性非耦合的天线阵列是一种理想化模型, 在现实中天线阵列的流形就不同于上式。

由于任意一个激励函数都是周期函数 (周期为 2π), 因此可以用傅里叶级数表示。并且特征函数用傅里叶级数表示仍然保留其特性。

$$a(\theta, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m(\theta) e^{jm\varphi} \quad (3-32)$$

存在互耦的情况下, 相位模式 $a_m(\theta)$ 不同于 $j^m J_m(kR \sin \theta)$ (J_m 为第一类 Bessel 函数, 阶数为 m), 它是一个各向同性天线的相位模式。在文献中, 作者已经证明了在互耦或非互耦的情况下^[38,40], 相位模式 $a_m(\theta)$ 都是呈指数 $|m| > kR$ 衰减。 M 表示最高模

式的阶数，规定 $M = \lfloor kR \rfloor$ ， $\lfloor \dots \rfloor$ 表示向下取整符号。

利用圆阵天线对称的阵列流形从阵列空间映射到波束空间内，第 m 个相位模式激励的权向量表示为，

$$w_m^H = \frac{1}{N} [e^{jm\gamma_1}, e^{jm\gamma_2}, \dots, e^{jm\gamma_N}] \quad (3-33)$$

利用模式 k 激励 UCA 产生的导向矢量为：

$$w_m^H a(\theta, \varphi) = a_m(\theta) e^{jm\varphi} + \sum_{q=1}^{+\infty} [a_{m+qN}(\theta) e^{j(m+qN)\varphi} + a_{m-qN}(\theta) e^{j(m-qN)\varphi}] \quad (3-34)$$

当阵元间距小于 $\lambda/2$ 或者 $N > 2M$ 时，上式中的第一部分为主要部分。其中 $\sum_{q=1}^{+\infty} [a_{m+qN}(\theta) e^{j(m+qN)\varphi} + a_{m-qN}(\theta) e^{j(m-qN)\varphi}]$ 为剩余项。

波束空间的阵列流形由阵列空间的阵列流形到波束空间的转换的权向量为：

$$W = \sqrt{N} [w_{-M}, \dots, w_0, \dots, w_M] \quad (3-35)$$

因此，波束空间的阵列流形可以表示为： $b(\theta, \varphi) = W^H a(\theta, \varphi)$ 。由上式可得：

$$b(\theta, \varphi) = b_o(\theta, \varphi) + \Delta b(\theta, \varphi) = F(\theta) a_e(z) + \Delta b(\theta, \varphi) \quad (3-36)$$

其中， $F(\theta) = \text{diag}[a_{-M}(\theta), \dots, a_M(\theta)]$ ， $a_e(z) = [z^{-M}, \dots, z^M]^T$ ， $z = e^{j\varphi}$ ， $\Delta b(\theta, \varphi)$ 是上式的第二部分。

当阵元数 $N > 2M$ 时，残余项 $\Delta b(\theta, \varphi)$ 的影响可以忽略不计， $b(\theta, \varphi)$ 是波束空间阵列流形，符合范德蒙结构。这时，均匀线阵估计波达角的方法就可以直接应用到均匀圆阵的波达角测向^[41]。

3.4 基于均匀圆阵的传统 MUSIC 算法及性能分析

MUSIC (Multiple Signal Classification 多重信号分类) 算法^[42]的提出是空间谱估计发展历史上的重要基石。它是超分辨算法中最为经典，应用最广泛的一种算法。对于 MUSIC 算法不用顾虑阵列的结构，无论在什么样的阵列中都能将接受的数据进行协方差运算，并对协方差矩阵进行特征值分解，也就是说该算法并不考虑阵列的结构。下面讨论如何在均匀圆阵中利用子空间进行多个信号分类。

3.4.1 传统 MUSIC 算法介绍

当有 K 个信号源入射到阵列时，均匀圆阵的接受信号可以表示为：

$$X(t) = A(\Theta)S(t) + N(t) \quad (3-37)$$

由式 (3-37) 容易得到它的协方差矩阵：

$$\begin{aligned}
R_{xx} &= E[XX^H] \\
&= AE[SS^H]A^H + \sigma^2 I \\
&= AR_s A^H + \sigma^2 I
\end{aligned} \tag{3-38}$$

当信号为非相干信号时， R_{xx} 是一个对称矩阵， A 为满列秩，即 $\text{rank}(AR_s A^H) = \text{rank}(R_s) = p$ ，其中 p 为信号源个数，假设 $p < m$ ， m 为阵元个数。对协方差矩阵进行特征值分解为

$$R_{xx} = U \Sigma U^H \tag{3-39}$$

式 (3-39) 中 $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1^2, \dots, \sigma_m^2)$ 。

于是，就可以得到：

$$U^H AR_s A^H U = \text{diag}(\alpha_1^2, \dots, \alpha_p^2, 0, \dots, 0) \tag{3-40}$$

式中 $\alpha_1^2, \dots, \alpha_p^2$ 是无加性噪声时观测信号的自相关矩阵 $AR_s A^H$ 的特征值。

用 U 右乘和 U^H 左乘 R_{xx} ，则得

$$\begin{aligned}
U^H R_{xx} U &= U^H AR_s A^H U + \sigma^2 U^H U \\
&= \text{diag}(\alpha_1^2, \dots, \alpha_p^2, 0, \dots, 0) + \sigma^2 I
\end{aligned} \tag{3-41}$$

这说明自相关矩阵 R_{xx} 的特征值为：

$$\lambda_i = \begin{cases} \alpha_i^2 + \sigma^2, & i = 1, \dots, p \\ \sigma^2, & i = p+1, \dots, m \end{cases} \tag{3-42}$$

通过式 (3-42) 可以看出，如果接受到的信号中存在加性噪声，那么观测数据的协方差矩阵可以分为两部分，第一部分由信号自相关矩阵的特征值 α_i^2 和加性白噪声方差 σ^2 之和的 p 个特征值组成，即信号子空间；第二部分全部为加性白噪声的方差组成的后面 $m-p$ 个特征值，即噪声子空间。

在信噪比较高的情况下，信号子空间的特征值与噪声子空间的特征值比较容易区分。根据信号特征值和噪声特征值，可以将 R_{xx} 分为两部分，即

$$R_{xx} = U_s \Sigma_s U_s^H + U_n \Sigma_n U_n^H \tag{3-43}$$

式 (3-43) 中， U_s 是由 p 个大的特征值对应的信号子空间，而 U_n 是 $m-p$ 个小特征值对应的噪声子空间。

若非相关条件下的信号，由数据协方差分解的信号子空间与噪声子空间是严格正交的，很显然其各自的空间方向矢量也是正交的^[42]。

$$\alpha^H(f_0, \theta)U_N = 0^T \quad (3-44)$$

因为有噪声的存在或者信号间的互扰，所以噪声子空间与信号子空间中的方向矢量不可能完全相互正交，因此上式并不一定成立。

将式（3-44）改写成标量的形式，定义一个与功率谱的函数^[43]相似的公式：

$$P_{MUSIC} = \frac{1}{\alpha^H(f_0, \theta)U_N U_N^H \alpha(f_0, \theta)} \quad (3-45)$$

由式（3-45）所示的函数 P_{MUSIC} 反映了空间信号方向上的功率分布，而且MUSIC算法不用考虑阵列的形式，是其自身的优良特性。与线阵的MUSIC算法相同，即把信号分成信号子空间和噪声子空间，利用两者之间的正交，得到谱峰，也就是所测得到角度^[43]。

3.4.2 算法仿真及性能分析

实验内容：传统 MUSIC 算法的 DOA 估计性能分析。

仿真条件：均匀圆阵的结构是由 8 个全向阵元组成的，半径 $R=0.5$ ，噪声为零均值的复高斯白噪声。

实验 1 对入射到阵列上的三个非相干窄带信号源进行 DOA 估计，三个信号的入射角度分别为 $[80^\circ, 10^\circ]$ 、 $[58^\circ, 30^\circ]$ 、 $[69^\circ, 60^\circ]$ ，快拍数为 1024。用传统 MUSIC 算法作 DOA 估计。

图 3-5、图 3-6 的结果是在信噪比不同，而其他条件完全相同的情况下测得的波达角。图 3-5 为信噪比为 10dB 的情况下，测得的波达方向，图 3-6 表示信噪比为 20dB 的情况下，测得的波达方向。

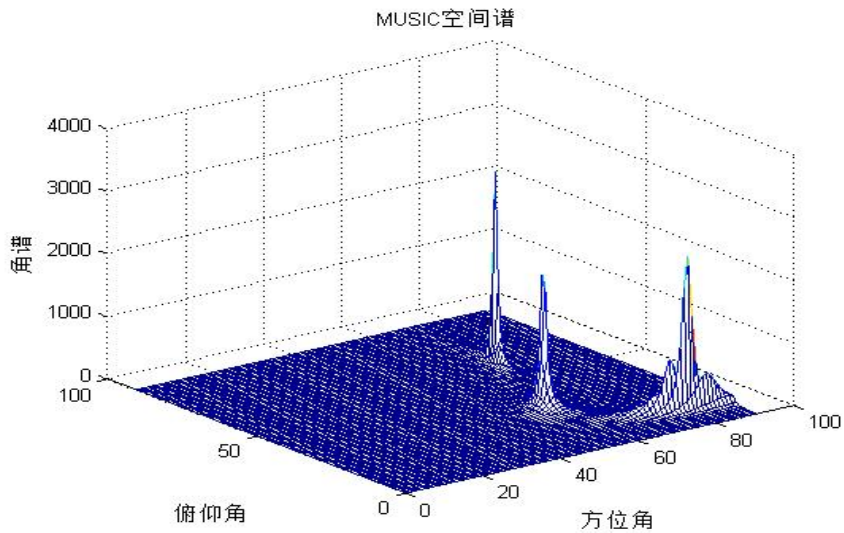


图 3-5 10dB 的信噪比情况下测向示意图

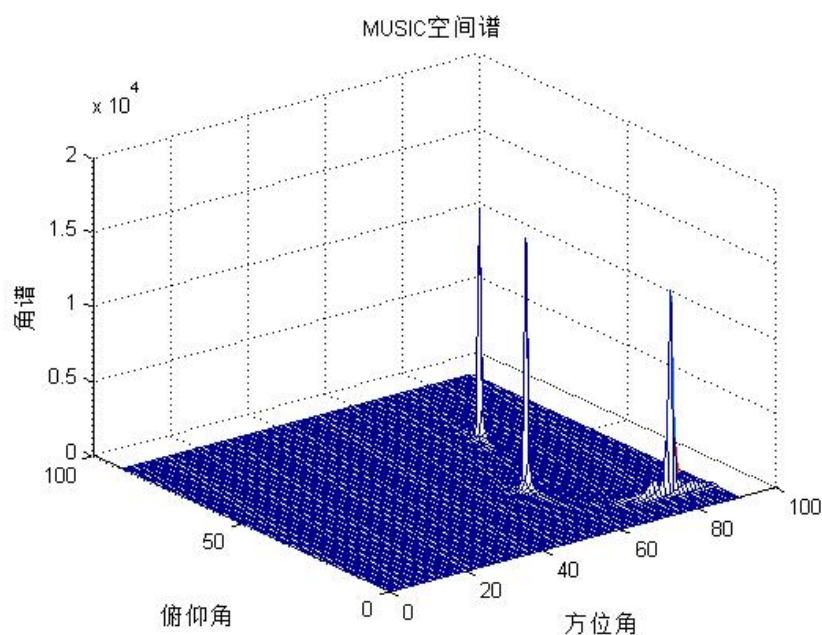


图 3-6 20dB 的信噪比情况下测向示意图

由图 3-5 和图 3-6 可以比较得出，在信噪比为 10dB 的情况下，空间谱的谱峰位置旁瓣比较多，谱峰不够尖锐，在信噪比增加到 20dB 的情况下，空间谱的谱峰比较尖锐，估计效果有了明显改善。

实验 2 对两个非相关窄带信号进行 DOA 估计，两个信号的入射角度分别为 $[80^\circ, 50^\circ]$ 、 $[80^\circ, 90^\circ]$ 。信噪比为 20dB 的环境。用传统 MUSIC 算法作 DOA 估计。

图 3-7、图 3-8 是在不同的快拍数下空间功率谱的分析。图 3-7 表示的是快拍数为 256 的情况下得到的空间谱估计的仿真结果。图 3-8 表示的是快拍数为 1024 的情况下得到的空间谱估计的仿真结果。

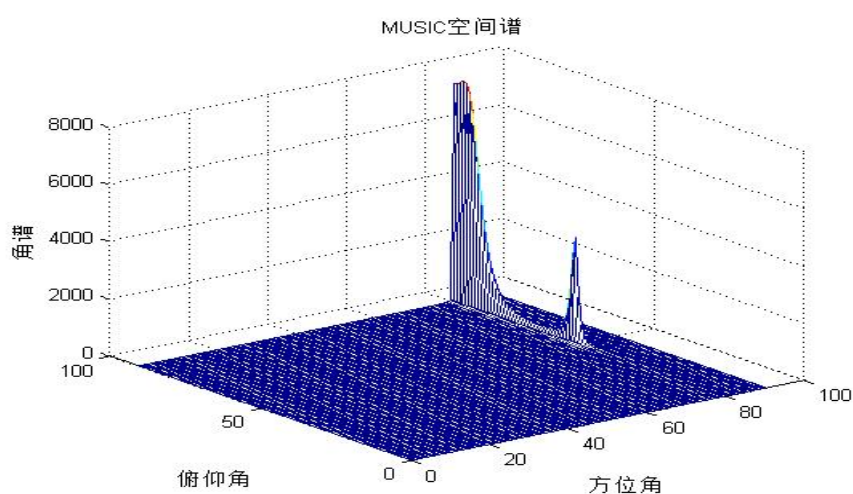


图 3-7 UCA-MUSIC 算法快拍数为 256

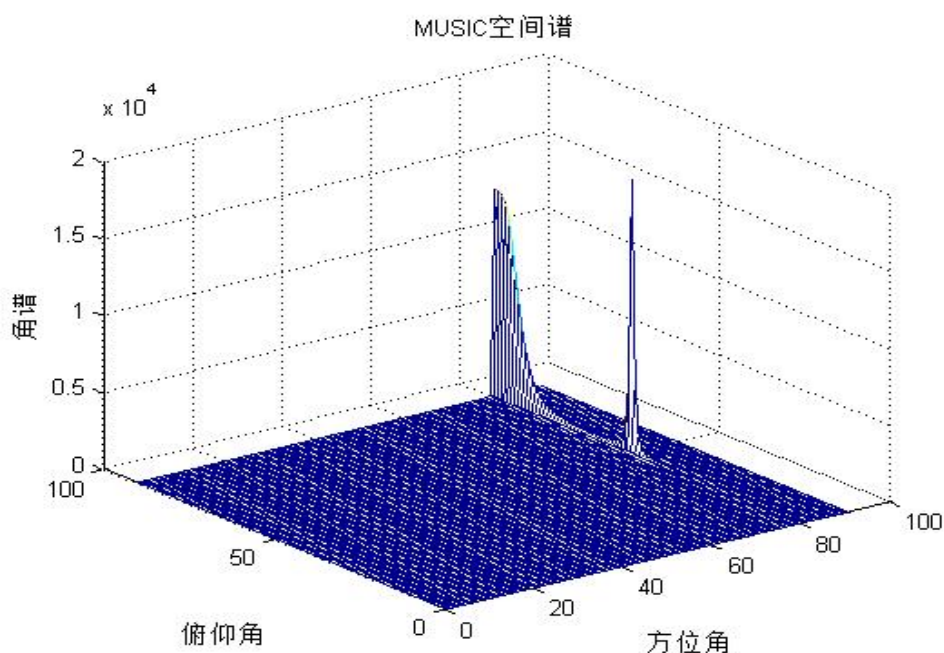


图 3-8 UCA-MUSIC 算法快拍数为 1024

图 3-9 是在实验 2 条件下，快拍数为 1024 时，MUSIC 算法的用时。由于 MUSIC 算法需要利用谱峰搜索来获得目标角度，所以它的计算量较大，用时长。

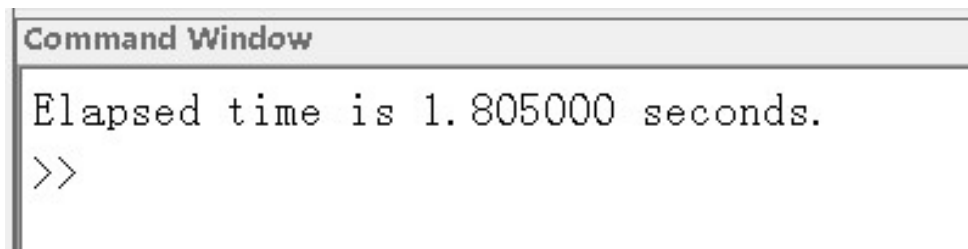


图 3-9 MUSIC 算法的用时

由图 3-5 和图 3-6 可以得出信噪比越高的情况下，搜索出来的空间谱旁瓣越低，谱峰越尖锐。由图 3-7 和 3-8 可以得出快拍数越大，搜索出来的谱峰越尖锐。这说明抽样次数越多，搜索出来的角度越精确。综上所述，MUSIC 算法在信噪比高的条件下，在快拍数大的环境下，可以得到较精确的估计值。但该算法运算量比较大，用时较长，是由于测向需要对谱峰作二维搜索，如图 3-9 所示，用时比较长。

3.5 求根 MUSIC 算法及性能分析

在上一节中介绍了传统的 MUSIC 算法，该算法不用考虑阵列形式就能进行空间谱估计，但是求根 MUSIC 算法则不能。由于均匀圆阵的阵列流形不符合范德蒙结构，因此需要利用相位模式激励，将圆阵的阵列流形转换为虚拟线阵的形式。传统的 MUSIC 算法计算量比较大，精度与搜索的步进有关系。而求根 MUSIC 算法不需要

谱峰搜索，因此运算量少^[44-46]。

3.5.1 求根 MUSIC 算法介绍

假设有 P 个信号辐射到圆阵中来，这些信源的角度为 (θ_p, φ_p) ，其中 $p=1,2,\dots,P$ 。圆阵接受的数据，经过波束空间转换得到的协方差矩阵可表示为

$$R = BSB^H + \sigma^2 I \quad (3-46)$$

其中， S 为信号协方差矩阵， I 为单位矩阵， B 是由 P 个阵列流形矢量 (θ_p, φ_p) 的估计值形成的矩阵。

DOA 估计值的实质是通过对协方差矩阵的特征值分解获得的， R 的特征值分解表示为：

$$R = E_S \Lambda_S E_S^H + E_N \Lambda_N E_N^H \quad (3-47)$$

其中， E_S 和 E_N 分别表示信号子空间特征向量和噪声子空间特征向量，对角矩阵 Λ_S 和 Λ_N 分别表示信号子空间特征值和噪声子空间特征值。

MUSIC 算法的原理是将导向矢量映射到噪声子空间，它的零值即是 P 个入射信号源的 DOA 估计值。

$$b^H(\theta, \varphi) E_N E_N^H b(\theta, \varphi) = 0 \Rightarrow (\hat{\theta}_p, \hat{\varphi}_p) \quad (3-48)$$

求根 MUSIC 算法能够明显的减小运算量是因为它不用像 MUSIC 算法那样进行谱峰搜索，而是通过求多项式的根来获得^[45]。

当阵元个数满足 $N > 2M$ 时，波束空间导向矢量结构符合范德蒙矩阵形式。这时，残余项 $\Delta b(\theta, \varphi)$ 的影响就可以忽略不计，并且可以通过求多项式的根来估计出方位角。

$$f(z) = a_e^H(z) F^H(\theta) E_N E_N^H F(\theta) a_e(z) \quad (3-49)$$

假设信号的方位角是已知的，文献^[46]中，作者已经证明了，在高信噪比下 UCA-Root-MUSIC 算法得到的是有偏估计。虽然该算法在大量阵元数目的情况下能够进行测向，但是 UCA-Root-MUSIC 算法不包含也不能忽略残余项，这样就导致了在高信噪比下的有偏估计。当阵元数 $N < 2M$ 时，波束空间的第一项 $b_0(\theta, \varphi)$ 就不能起决定性作用了，并且 UCA-Root-MUSIC 算法也不能在任何信噪比水平下得到正确的角度估计值。

3.5.2 算法仿真及性能分析

实验内容：求根 MUSIC 算法及性能分析。

仿真条件为：均匀圆阵结构由 61 个全向阵元组成，半径 $R = 0.5$ ，信噪比为 20dB，快拍数为 1024。方位角已知，噪声为零均值的复高斯白噪声。

实验 1 对入射到阵列上的两个非相干信号进行测向，信号入射角度分别为^{[45°},

10°]、[45°, -10°]，用求根 MUSIC 算法作 DOA 估计。

图3-10表示的是有两个对称俯仰角度及两个对称的根落在单位圆上，且范数接近于1。

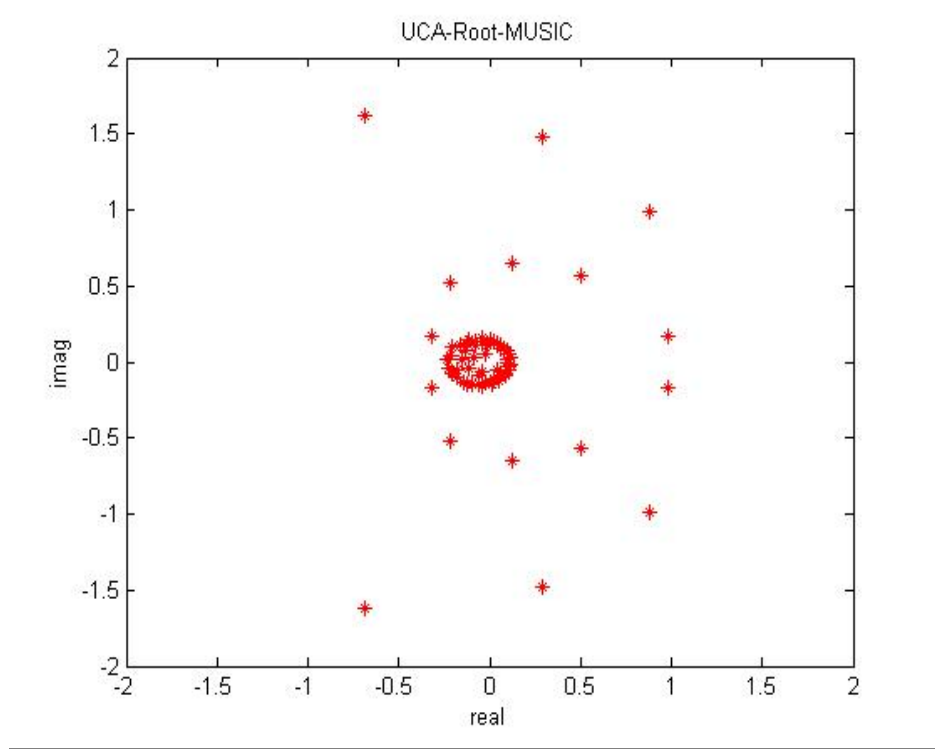


图3-10 求根MUSIC算法的单位圆图

图3-11表示的是实验1的条件下测得的两个对称信号源的测向结果和均方误差。

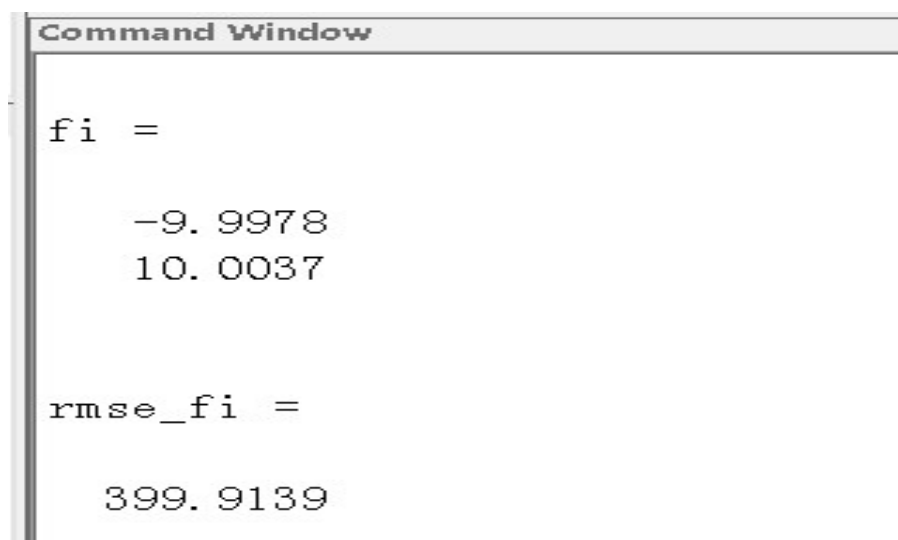


图3-11 信号源俯仰角测向

从图3-11可以得到，虽然仿真得到它的均方根误差较大，但是求根MUSIC算法能够测到较精确的角度值。

实验 2 对入射到阵列上的两个非相干信号进行测向，假定信号入射角度分别为 $[45^\circ, 50^\circ]$ 、 $[45^\circ, 100^\circ]$ 。用求根 MUSIC 算法作 DOA 估计。

图3-12表示的是有两个不对称俯仰角度，及两个根落在单位圆上，且范数接近于 1 为测得的角度。但是这样的结果没有图3-7的到的效果明显。

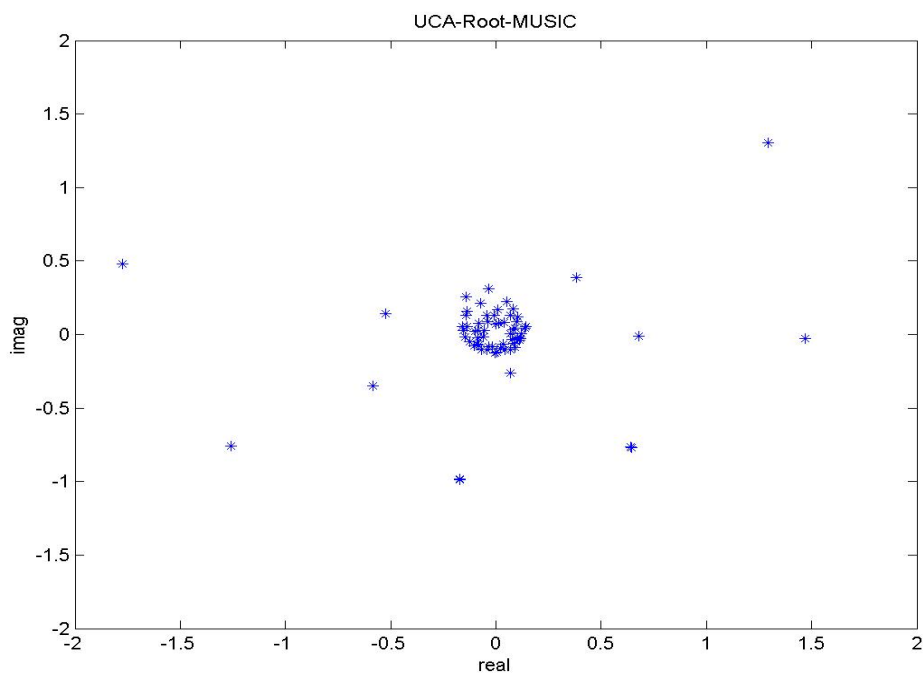


图3-12 求根MUSIC算法的单位圆图

图 3-13 表示的是实验 2 的条件下测得的两个不对称信号源的测向结果和均方误差。

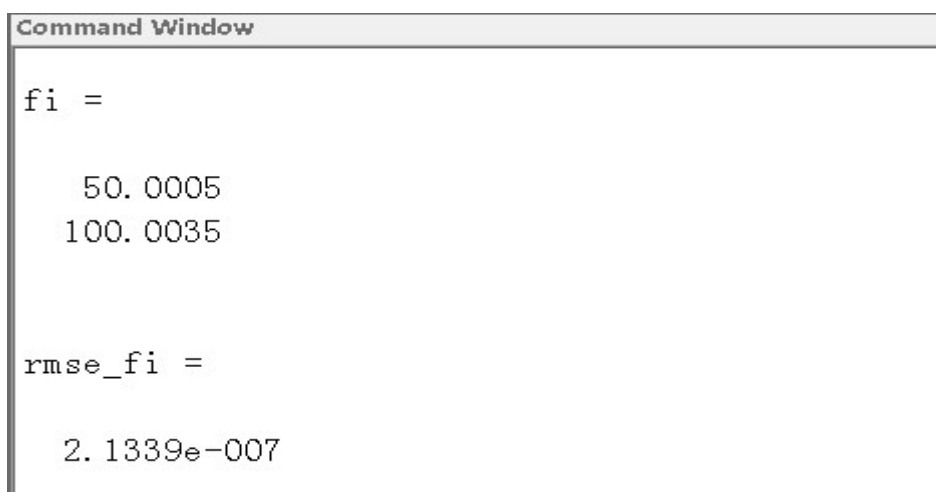


图 3-13 信号源俯仰角估计值及均方根误差

图 3-14 为极坐标图，从图中可以看到两个点，表示信号源的个数。

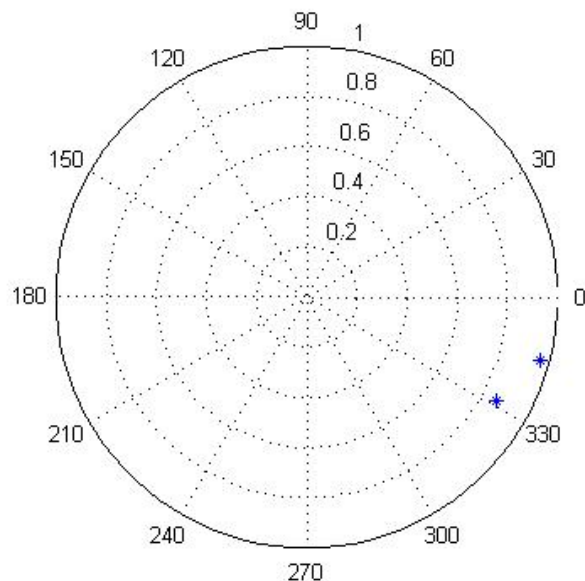


图 3-14 求根 MUSIC 算法测得信号源个数

图 3-15 是在实验 2 条件下的求根 MUSIC 算法的用时。由于求根 MUSIC 算法不需要利用谱峰搜索获得目标角度，所以它的计算量大大减小，用时较短。

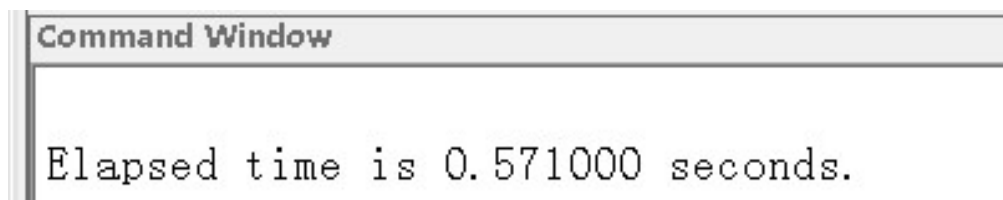


图 3-15 求根 MUSIC 算法的用时

由图 3-10 和图 3-12 所示，可以看到红色或蓝色的点，表示信号子空间与噪声子空间正交多项式的根。但是只有落在了单位圆上的点为检测到的目标方向上的根。从图示可以得到虽然两个角度对称时，均方根误差较大，容易辨别位于单位圆上的点；当两个角度不对称时，均方根误差特别小，也很容易的从 3-12 中不容易看得出。

由图 3-11 和图 3-13 可以看出，图 3-13 比图 3-11 的均方误差小很多。这样的结果表明，当两个信号源的角度不对称，或者角度相差越远，那么测得的角度精度越高，均方根误差越小。由图 3-14 可以得知算法可以很精确的测得信源个数。

由 MUSIC 算法用时的结果图 3-9 和求根 MUSIC 算法用时的结果图 3-14，可以看出求根 MUSIC 算法的用时远远小于 MUSIC 算法的用时。证明 MUSIC 算法利用谱峰搜索得到目标角度，运算量比较大，用时比较长。而求根 MUSIC 算法利用多项式求根的方法，直接得到角度，运算量较小，用时较短。

3.6 本章小结

本章节首先介绍了基于均匀线阵的 DOA 估计算法，重点讨论了经典 MUSIC 算法和 Root-MUSIC 算法。这两种算法是后续应用到均匀圆阵的基础。其次研究了均匀圆阵的数学模型，由于均匀圆阵的阵列流形不符合范德蒙结构，因此可以通过模式空间激励技术，将均匀圆阵的阵列流形变换成虚拟线阵的阵列流形，这样就可以将只适用于均匀线阵的算法直接移植到均匀圆阵中。接下来介绍了应用于均匀圆阵的传统的 MUSIC 算法、求根 MUSIC 算法，并对这两种算法进行仿真，通过仿真结果可以看出，这两种算法都能够较精确的检测到波达角。而且通过算法运行时间可以看出，求根 MUSIC 算法无需谱峰搜索，因此所用时间较短。

第 4 章 基于均匀圆阵的改进算法及仿真

由第 3 章介绍了传统的 MUSIC 算法、求根 MUSIC 算法的特点。这些算法需要足够的天线数，以避免波束阵列流形侧向时产生混淆。有限数量的天线阵元会导致有偏的 DOA 估计。本章将拟补这些算法中的不足，针对于运算量小的需求进行改进，提出了实值的求根 MUSIC 算法。它首先利用了相位模式激励技术，将均匀圆阵的阵列流形变换成虚拟线阵中，然后对协方差矩阵进行实值分解，大大减小了算法的运算量。针对于阵元数少的需求进行改进，提出了稀疏矩阵的求根 MUSIC 算法。它利用圆阵对称可以处理在少量天线阵元的情况下的 DOA 估计。即使相位模式数比天线阵元数还大，也可以把所有相关的相位模式包含在一个多项式中，得到无偏估计。即使 UCA 中的天线阵元之间存在互耦的情况下，稀疏矩阵的求根 MUSIC 算法也适用。并对这两种算法进行仿真，对得到的仿真结果进行性能分析^[47,48]。

4.1 实值波速域的 Root-MUSIC 的算法及性能分析

实值的 Root-MUSIC 波达角估计算法^[46]在传统的 Root-MUSIC 算法的基础上得到改进。由于它利用了实值的相关矩阵，所以实值的 Root-MUSIC 算法降低了计算的复杂度。

目前这种算法得到了广泛重视，但是只应用于线阵。Huang 和 Yeh 提出了利用 Unitary 转换来改善 MUSIC 算法。Zoltowski 研究了一种实值的波束空间 Root-MUSIC 算法。基于 Unitary 转换，Haardt 和 Nossek 发展了一种 Unitary-ESPRIT 算法，采用了一种具有 centro-Hermitian 矩阵性质的经过前后向平滑的协方差矩阵来实现的^[49]。

本文提出了一种适用于均匀圆阵的 DOA 估计算法，Unitary-Root-MUSIC 算法利用了实特征值分解的方法，降低了计算的复杂度。Unitary 技术可以很好的和传统的 Root-MUSIC 算法相结合。

4.1.1 阵列信号模型和复值协方差

假设均匀圆阵的阵元个数为 M ，快拍数为 N ，信号源个数为 q 。波长为 λ 的空间窄带平面波分别以入射角 $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_q$ 入射到该各向同性的阵元构成的均匀圆形阵列。其中 $\Theta_i = (\theta_i, \phi_i) (i=1, 2, \dots, q)$ 。 θ_i ， ϕ_i 分别是第 i 个入射信号的方位角和仰角，其中， $0 \leq \theta_i < 90^\circ$ ， $0 \leq \phi_i < 360^\circ$ 。

信号源写成矩阵的形式如下：

$$\begin{aligned} X(t) &= [x_1(t), x_2(t), \dots, x_M(t)]^T \\ N(t) &= [n_1(t), n_2(t), \dots, n_M(t)]^T \end{aligned}$$

$$S(t) = [s_1(t), s_2(t), \dots, s_q(t)]^T$$

阵列流形 $A(\Theta)$ 为 $M \times q$ 阶矩阵的方向矩阵，即

$$A(\Theta) = [a(\Theta_1), a(\Theta_2), \dots, a(\Theta_q)] \quad (4-1)$$

其中 Θ 为 $\Theta(\theta, \phi) = -\frac{2\pi}{\lambda} R \sin \theta \cos \left(\phi - \frac{2\pi m}{M} \right)$, $m = 0, 1, \dots, M-1$ 。

因此均匀圆阵的接受信号可以表示为：

$$X(t) = A(\Theta)S(t) + N(t) \quad (4-2)$$

容易得到它的协方差矩阵：

$$\begin{aligned} R &= E[XX^H] \\ &= AE[SS^H]A^H + \sigma^2 I \\ &= AR_{SS}A^H + \sigma^2 I \end{aligned} \quad (4-3)$$

当信号为非相干信号时， R_{SS} 为一个对角矩阵，这时 R 就是 **centro-Hermitian** 矩阵^[49]；当信号为相关信号时， R_{SS} 为一个任意矩阵，这时需要通过构造前后项平滑，公式如下：

$$R_F = JR^*J \quad (4-4)$$

$$R_{FB} = \frac{1}{2}(R + JR^*J) \quad (4-5)$$

其中，矩阵 J 为交换矩阵，它的反对角线上元素为 1，其余全为零。前后项平滑技术经常会被应用于存在相关源的 DOA 估计中，代替了传统的只用前项平滑技术的弊端。

由式 (4-3) 和式 (4-5) 容易得到

$$R_{FB} = \frac{1}{2}(R + JR^*J) = AR_S A^H + \delta^2 I \quad (4-6)$$

其中 $R_S = \frac{1}{2}(R_S + DR_S^*D^H)$, $D = \text{diag}\{e^{-j(2\pi/\lambda)d(M-1)\sin\theta_1}, \dots, e^{-j(2\pi/\lambda)d(M-1)\sin\theta_q}\}$ 。

4.1.2 实值的协方差矩阵

利用 Unitary 转换技术构造实值协方差矩阵^[50]，引入实值协方差矩阵为：

$$C = Q^H R_{FB} Q \quad (4-7)$$

其中矩阵 Q 为一个归一化的， $M \times M$ 的列共轭对称的矩阵，并且满足 $Q = JQ^*$ 性质。

式 (4-7) 中矩阵 Q 根据阵元数为奇数或者偶数，分别选取以下的稀疏矩阵作为归一化矩阵^[48]。

当阵元数为奇数时, 矩阵 Q 为:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & \mathbf{jI} \\ 0^T & \sqrt{2} & 0^T \\ J & 0 & -\mathbf{jJ} \end{bmatrix} \quad (4-8)$$

当阵元数为偶数时, 矩阵 Q 为:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{jI} \\ J & -\mathbf{jJ} \end{bmatrix} \quad (4-9)$$

其中矢量 $0 = [0, 0, \dots, 0]^T$ 。

由以上两个式 (4-5) 和式 (4-7), 可以看出实值矩阵可以借助前后向平滑协方差矩阵获得, 公式如下:

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2} (Q^H R Q + Q^H J R^* J Q) \\ &= \frac{1}{2} (Q^H R Q + (Q^*)^H J R^* J Q^*) \\ &= \text{Re} \{ Q^H R Q \} \end{aligned} \quad (4-10)$$

4.1.3 Unitary-Root-MUSIC 算法

对 $R = E[XX^H]$ 、 $R_{FB} = \frac{1}{2}(R + JR^*J)$ 、 $C = Q^H R_{FB} Q$ 进行特征值分解, 并统一定义如下:

$$R = V \Pi V^H = V_S \Pi_S V_S^H + \delta^2 V_N V_N^H \quad (4-11)$$

$$R_{FB} = U \Lambda U^H = U_S \Lambda_S U_S^H + \delta^2 U_N U_N^H \quad (4-12)$$

$$C = E \Gamma E^H = E_S \Gamma_S E_S^H + \delta^2 E_N E_N^H \quad (4-13)$$

其中 $V_S = [v_1, \dots, v_q]$; $V_N = [v_{q+1}, \dots, v_M]$; $\Pi_S = \text{diag}\{\pi_1, \dots, \pi_q\}$;

$U_S = [u_1, \dots, u_q]$; $U_N = [u_{q+1}, \dots, u_M]$; $\Lambda_S = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_q\}$;

$E_S = [e_1, \dots, e_q]$; $E_N = [e_{q+1}, \dots, e_M]$; $\Gamma_S = \text{diag}\{\gamma_1, \dots, \gamma_q\}$ 。

下标 S 和 N 分别代表信号子空间和噪声子空间。

矩阵 R_{FB} 的特征方程可以写作 $R_{FB}u = \lambda u$, 因此也可以写作下列式子:

$$Q^H R_{FB} u = Q^H R_{FB} Q Q^H u = C Q^H u = \lambda Q^H u \quad (4-14)$$

式 (4-14) 就确定为协方差矩阵 R_{FB} 的实值协方差矩阵, 也可以从中得出 R_{FB} 与 C 的特征向量和特征值的关系, 如式 (4-15) 和式 (4-16) 所示:

$$E = Q^H U \quad (4-15)$$

$$\Gamma = \Lambda \quad (4-16)$$

传统的 Root-MUSIC 算法的多项式为：

$$\begin{aligned} f_{MUSIC}(z) &= a^T \left(\frac{1}{z} \right) V_N V_N^H a(z) \\ &= a^T \left(\frac{1}{z} \right) \left(I - V_S V_S^H \right) a(z) \end{aligned} \quad (4-17)$$

其中 $a(z) = [1, z, \dots, z^{M-1}]^T$, $z = e^{jw}$, $w = \left(\frac{2\pi}{\lambda} \right) d \sin \theta$ 。

前后向平滑的 Root-MUSIC 算法的多项式为：

$$\begin{aligned} f_{FB-MUSIC}(z) &= a^T \left(\frac{1}{z} \right) U_N U_N^H a(z) \\ &= a^T \left(\frac{1}{z} \right) \left(I - U_S U_S^H \right) a(z) \end{aligned} \quad (4-18)$$

通过简单变换前后向平滑的 Root-MUSIC 算法多项式，可以得到 Unitary-Root-MUSIC 算法的多项式，公式如下：

$$\begin{aligned} f_{FB-MUSIC}(z) &= a^T \left(\frac{1}{z} \right) Q Q^H U_N U_N^H Q Q^H a(z) \\ &= a^T \left(\frac{1}{z} \right) Q E_N E_N^H Q^H a(z) \\ &= \tilde{a}^T \left(\frac{1}{z} \right) E_N E_N^H \tilde{a}(z) \\ &= f_{U-MUSIC}(z) \end{aligned} \quad (4-19)$$

其中 $\tilde{a}(z) = Q^H a(z)$ 。

实值协方差矩阵为：

$$C = Q^H A R_S A^H Q + \delta^2 Q^H Q = A_q R_S A_q^H + \delta^2 I \quad (4-20)$$

其中 $A_q(z) = Q^H A(z)$ 。

从式 (4-19) 可以看出，Unitary-Root-MUSIC 算法的多项式是因为它利用了 $C = Q^H R_{FB} Q$ 的实值特征值分解代替了 R_{FB} 的复矩阵。而且，可以看出前后向平滑的 Root-MUSIC 算法和 Unitary-Root-MUSIC 算法的多项式是一致的，它们都可以应用到有相关信号源的环境中，而传统的 Root-MUSIC 算法则不能应用。

Unitary-Root-MUSIC 算法的多项式中应用了一个列共轭对称矩阵 Q ，用矩阵 $C = Q^H R_{FB} Q$ 来代替矩阵 R_{FB} ，尽管 $f_{FB-MUSIC}$ 和 $f_{U-MUSIC}(z)$ 的两个公式是相等的，但是 $f_{U-MUSIC}(z)$ 的系数计算要简单的多，实值特征值分解能够降低计算的复杂性。

Unitary-Root-MUSIC 算法整个的计算量只是传统 Root-MUSIC 算法计算量的1/4。在此需要指出,这个结论不能推广到谱峰搜索 MUSIC 算法当中,因为谱峰搜索 MUSIC 算法的计算量主要是花费在谱峰搜索上,而不是在特征值分解上。

Unitary-Root-MUSIC 算法与传统的 Root-MUSIC 算法的技术不同。传统的 Root-MUSIC 算法依靠中心阵元的假设,而这种假设在实际应用中不容易达到,Unitary-Root-MUSIC 算法则不需要这样的假设。再者,Unitary-Root-MUSIC 算法提出了实值技术,这种算法忽略了波束空间协方差矩阵的复杂性。

4.1.4 算法仿真及性能分析

实验内容:实值波束域的求根 MUSIC 算法及性能分析。

仿真条件为:由 61 个全向性阵元组成的均匀圆阵 (UCA),根据阵元个数与模式数之间的关系 $N = 2M + 1$,则设定模式数为 $M = 30$ 。半径 $R = 0.5$,信噪比为 20dB,快拍数为 1024。方位角已知且相同,设定方位角为 $\theta = 45^\circ$,噪声为零均值的复高斯白噪声。

实验 1 针对两个非相干入射信号的检测,信号入射角度分别为 $[45^\circ, 50^\circ]$ 、 $[45^\circ, 100^\circ]$,仿真出复数协方差矩阵的数据和实值的协方差数据。用实值波束域求根 MUSIC 算法作 DOA 估计。

图4-1表示的是复数协方差矩阵,图4-2表示的是实值协方差矩阵。用本节提出的实值波束域的算法进行DOA估计。将复数域的协方差利用 $C = Q^H R Q$ 变换成实值域的协方差矩阵,变换之后再对实值的矩阵进行特征值分解。

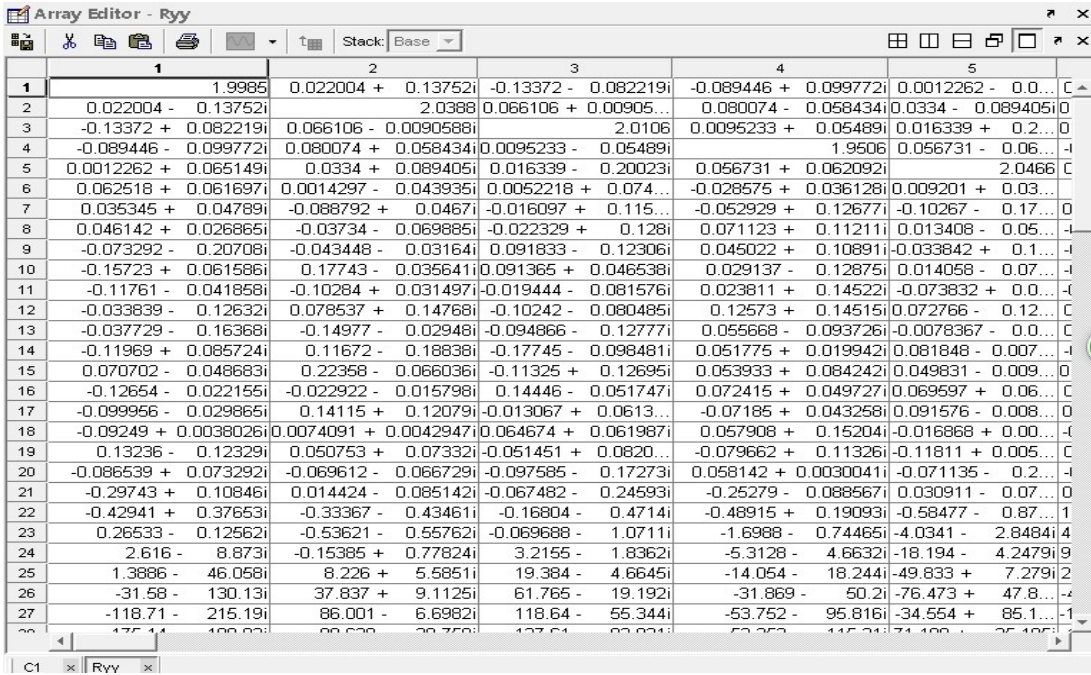


图4-1 复数域的协方差矩阵

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1.9833	-0.051076	0.0091997	0.059963	-0.12802	0.026063	0.047561	0.082523	-0.011204
2	-0.051076	2.0927	-0.22951	-0.078307	0.017202	-0.047859	-0.039041	0.11131	-0.032285
3	0.0091997	-0.22951	2.0557	-0.021101	0.13143	-0.046736	0.038799	-0.066429	-0.054447
4	0.059963	-0.078307	-0.021101	1.9659	-0.14278	-0.053082	0.0052093	-0.0029828	0.074943
5	-0.12802	0.017202	0.13143	-0.14278	2.0863	0.097441	-0.019295	-0.038175	0.082893
6	0.026063	-0.047859	-0.046736	-0.053082	0.097441	1.8798	-0.10239	-0.044914	-0.0039685
7	0.047561	-0.039041	0.038799	0.0052093	-0.019295	-0.10239	2.1726	-0.048068	-0.099365
8	0.082523	0.11131	-0.066429	-0.0029828	-0.038175	-0.044914	-0.048068	1.9623	0.075923
9	-0.011204	-0.032285	-0.054447	0.074943	0.082893	-0.0039685	-0.099365	0.075923	1.8749
10	0.09578	0.038086	-0.029293	-0.017208	0.13276	-0.0046555	0.059197	0.0079704	0.0038405
11	0.022008	0.069947	0.12347	-0.0056239	-0.044614	-0.035547	0.0033849	0.0314	0.073972
12	-0.11276	-0.045383	-0.051058	0.077847	-0.012115	0.021411	0.0026866	-0.14331	-0.03917
13	0.083473	0.061694	-0.11204	0.047009	-0.045094	0.017599	-0.025635	-0.12809	-0.061575
14	-0.0081131	-0.083783	0.0075998	-0.13701	-0.045652	0.075072	-0.042528	0.11325	0.12524
15	0.11034	-0.019289	0.13028	-0.061144	-0.094252	0.030346	0.20175	0.12014	0.07894
16	-0.044686	-0.030081	0.066913	0.11262	-0.079274	0.070687	-0.089943	-0.10568	-0.088243
17	-0.092492	0.041113	-0.046979	0.13714	0.14689	0.039438	0.048413	0.073927	-0.04657
18	-0.081467	-0.12536	-0.081198	0.071959	-0.058138	-0.069438	0.19101	0.063049	-0.010269
19	0.62554	0.6785	-0.002926	0.38097	-0.2587	-0.31844	0.33844	-0.15271	-0.32216
20	0.27769	0.5599	-0.11616	0.13781	0.39508	-0.47505	0.46103	-0.13736	0.12147
21	1.9839	1.6719	-0.013264	1.336	-0.95386	-1.223	1.6625	-0.46443	-0.80265
22	2.7857	4.6463	-2.2637	0.51861	2.8867	-3.5416	2.9091	-1.2135	0.8337
23	0.61294	-5.8292	0.21587	-1.0173	1.2399	-4.5144	-2.6774	1.1866	4.3118
24	-0.6098	1.988	-1.0208	0.99241	0.14077	-0.33139	3.1124	-1.0766	-0.080266
25	0.34191	2.3089	-0.073559	0.70593	-0.67705	1.2161	1.4421	-0.52826	-1.5972
26	2.4554	-0.85483	0.81505	-1.8682	1.2831	-1.3006	-3.7579	0.94236	0.60033
27	-1.1033	-1.2599	-0.17493	-1.3798	1.4903	-0.050245	-1.7784	0.23454	1.232
28	0.5158	-0.35126	0.48031	1.1527	-1.4659	0.085327	0.67896	-0.044601	-0.75356

图4-2 实值域的协方差矩阵

由图 4-1 和图 4-2，可以看出图 4-1 为复数的协方差矩阵数据，而图 4-2 为实值的协方差矩阵数据。传统的 UCA-Root-MUSIC 算法是在复数域进行协方差计算，即特征值分解，利用信号和噪声子空间正交得到 DOA 估计。而进行实值变换后，协方差变为了实值，再对实值的协方差进行特征值分解，这样的计算量就大大减小。

实验 2 针对两个非相干信号入射到阵列上，信号入射角度分别为 $[45^\circ, 50^\circ]$ 、 $[45^\circ, 100^\circ]$ 。仿真出俯仰角度、仿真所用时间和信源个数。用实值波束域求根 MUSIC 算法作 DOA 估计。

图4-3表示的是有两个俯仰角度，即单位圆上的根。从图中可以看出这两个根落在单位圆上，且范数接近于1为测得的角度。

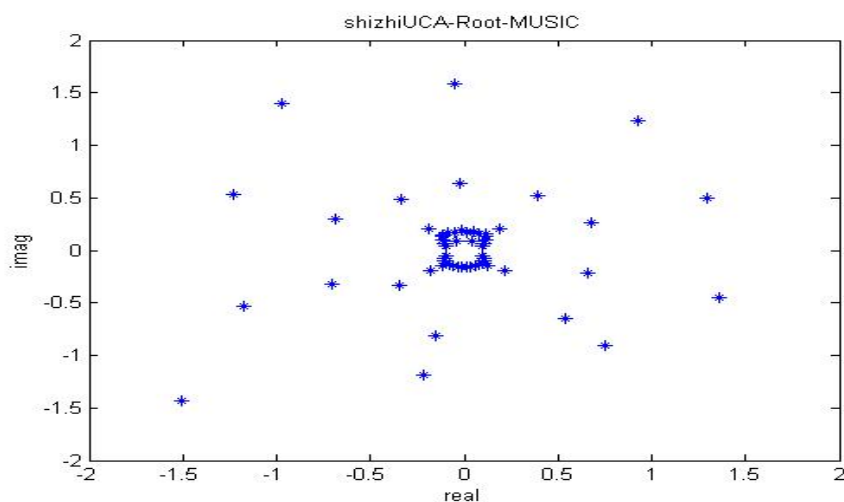


图 4-3 实值的求根 MUSIC 算法的单位圆图

图 4-4 表示的是实验 2 的条件下实值的 UCA-Root-MUSIC 算法测得的两个信号源的测向结果和均方误差。

```
Command Window

fi =

    50.2709
   100.4448

rmse_fi =

    0.0734
```

图4-4 实值的UCA-Root-MUSIC算法测向

图4-5为极坐标图，从图中可以看到两个点，表示信号源的个数。

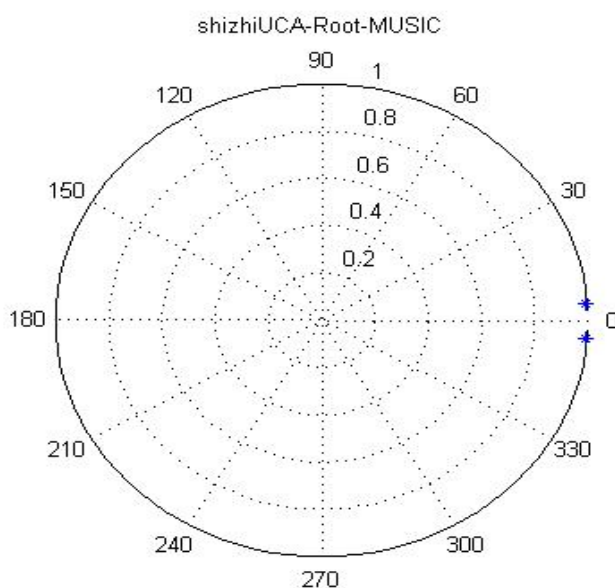


图4-5 实值求根MUSIC算法测得信号源个数

图4-6是在实验2条件下的实值波束域的求根MUSIC算法的用时。由于算法利用了实值域的协方差矩阵的特征值分解，所以运算量就大大减小，用时较短。

```
Command Window

Elapsed time is 0.156000 seconds.
>>
```

图4-6 实值的UCA-Root-MUSIC算法用时

由图 4-4 可以看出实值的 UCA-Root-MUSIC 算法在相同的条件下，虽然没有求根 MUSIC 算法的均方根误差低，但是它也能够有效的并且比较精确的测得信号源的角度。

由图 4-6 和图 3-15 比较可以看到两种算法的运行用时，从图中可以明显看到实值的 UCA-Root-MUSIC 算法用时比传统 UCA-Root-MUSIC 算法的用时要小的多。因为实值的 UCA-Root-MUSIC 算法利用了实值波束域转换，将复数协方差矩阵变换成实值协方差误差，这样的使得运算量为传统算法运算量的 1/4，相应的用时大概是传统 UCA-Root-MUSIC 算法用时的 1/4。

通过图 4-6 和图 3-15 的比较可以看到实值的 UCA-Root-MUSIC 算法的用时远远小于经典 MUSIC 算法的用时。因为经典 MUSIC 算法是在复数域进行运算，并且需要对空间按照设定的步进谱峰搜索，因此算法过程运算量比较大，运算起来费时间。而实值的 UCA-Root-MUSIC 算法将复数的协方差变换成实值的协方差，因此运算过程是在实数域进行，得到的特征值与特征向量也为实数，并且求根 MUSIC 算法不需要对空间进行谱峰搜索，而是对多项式的进行求根运算。这样的算法较经典 MUSIC 算法节省了两部分运算，所以实值的 UCA-Root-MUSIC 算法的运算量大大降低，它的用时大概是经典 MUSIC 算法用时的 1/12。

4.2 稀疏矩阵的 UCA-Root-MUSIC 算法及性能分析

4.2.1 波束空间转换

UCA 的阵列流形不符合范德蒙矩阵的结构^[51]，导致很多经典算法不能运用到均匀圆阵中。因此本节将利用模式激励对 UCA 输出进行变换来解决这一难题。

由于任意一个激励函数都是周期函数（周期为 2π ），因此可以用傅里叶级数表示。对任意 $\omega(\gamma)$ 可表示为 $\omega(\gamma) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ik\gamma}$ ，其第 k 个相位模式为 $\omega_k(\gamma) = e^{ik\gamma}$ ，利用它激励圆形阵列产生的归一化远场方向图为：

$$f_k^c(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega_k(\gamma) e^{i\beta \cos(\theta-\gamma)} d\gamma = j^k J_k(\beta) e^{ik\theta} \quad (4-26)$$

其中 $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} r \sin(\phi)$ ， $\phi \in [0, \pi/2]$ ， $J_k(\beta)$ 为第一类 k 阶 Bessel 函数。当 $k > \beta$ 时， $J_k(\beta)$ 的幅度很小，约等于零。所以模式激励的最大模式数为：

$$K = \left\lfloor \frac{2\pi}{\lambda} r \right\rfloor, \quad k \in [-K, +K] \quad (4-27)$$

式 (4-27) 中 $\lfloor \dots \rfloor$ 是向下取整。

相位模式对均匀圆阵的圆孔径进行均匀采样，定义归一化波束加权矢量^[51]为：

$$\begin{aligned} w_k^H &= \frac{1}{M} [e^{jk\gamma_0}, \dots, e^{jk\gamma_{M-1}}] \\ &= \frac{1}{M} [1, e^{j2\pi k/M}, \dots, e^{j2\pi k(M-1)/M}] \end{aligned} \quad (4-28)$$

因此利用模式 k 激励均匀圆阵产生的方向图为：

$$f_k^s(\theta) = \frac{1}{M} \sum_{m=0}^{M-1} e^{jk\gamma_m} e^{j\beta \cos(\theta - \gamma_m)} = w_k^H a(\theta) \quad (4-29)$$

当 $|k| < M$ 时，式 (4-29) 可简化为：

$$f_k^s(\theta) = j^k J_k(\beta) e^{jk\theta} + \sum_{q=1}^{\infty} [j^g J_g(\beta) e^{-jg\theta} + j^h J_h(\beta) e^{-jh\theta}] \quad (4-30)$$

其中 $\sum_{q=1}^{\infty} [j^g J_g(\beta) e^{-jg\theta} + j^h J_h(\beta) e^{-jh\theta}]$ 为剩余项， $g = Mq - k$ ， $h = Mq + k$ 。

剩余项中最大项所对应的索引号为 $q=1$ ，其幅度为 $M - |k|$ 阶 Bessel 函数。因为 K 为 k 的最大值，在 $[0, 2\pi/\lambda]$ 内， $J_{M-|k|}(\beta)$ 单调递增，当 $k \rightarrow K$ 时，剩余项的贡献越来越大。为了能够进行波束空间转换应当适当选取 M 和 K ，可使 $M > 2K$ ，这时剩余项的影响可以忽略。此约束条件和相邻阵元间距小于 0.5λ 的要求等效。

4.2.2 稀疏矩阵的 UCA-Root-MUSIC 算法

稀疏矩阵的 UCA-Root-MUSIC 算法利用圆阵对称性可以在天线数量较少的情况下估计 DOA。即使相位模式数比天线阵元数大，也可以把所有相关的相位模式包含在一个多项式中，得到无偏估计^[52]。

一个圆形阵列的接受特征是由 $2M+1$ 个有效的相位模式 $a_m(\theta)$ 决定的，天线阵元的个数 $N > 2M$ ，这样在波束域可以避免混叠效应的产生。现在假设天线阵元数为 $N = 2K+1$ ， $K < M$ 。我们称这样的 UCA 为稀疏 UCA。利用 $2K+1$ 个权向量来激励阵列流形，权向量表示为^[52]：

$$W = \sqrt{N} [w_{-K}, \dots, w_0, \dots, w_K] \quad (4-31)$$

因此，波束空间的阵列流形表示为 $b(\theta, \varphi) = W^H a(\theta, \varphi)$ ，它仍然可以写成两部分的和的形式：

$$b(\theta, \varphi) = b_0(\theta, \varphi) + \Delta b(\theta, \varphi) = F(\theta) a_e(z) + \Delta b(\theta, \varphi) \quad (4-32)$$

其中， $F(\theta) = \text{diag}[a_{-K}(\theta), \dots, a_K(\theta)]$ ， $a_e(z) = [z^{-K}, \dots, z^K]^T$ ， $z = e^{j\varphi}$ 。第二部分的 k 阶表示为：

$$[\Delta b(\theta, \varphi)]_k = \sum_{q=1}^{+\infty} [a_{k+qN}(\theta)e^{j(k+qN)\varphi} + a_{k-qN}(\theta)e^{j(k-qN)\varphi}] \quad (4-33)$$

通过式 (4-28) 是可以很明显的看出, 当相位模式 $a_k(\theta)$ 的阶数为 $K < |k| < M$ 时, 残余项的值就不能被忽略, 然而波束空间阵列流形的计算忽略了残余项, 这样就导致了阵列流形与噪声子空间不再正交^[53]。即:

$$E_N^H b_0(\theta_p, \varphi_p) \neq 0 \quad p = 1, 2, \dots, P \quad (4-34)$$

没有经过预处理的传统的 UCA-Root-MUSIC 算法是有偏估计。由于为了避免混叠效应的产生, 残余项不能再被忽略。但是阵元中存在圆对称特性, 它对处理残余项是有帮助的。所以我们要重新改写一下波束域的阵列流形, 将所有与相位模式有关的都写进主要部分。

$$b(\theta, \varphi) = HF(\theta)a_e(z) + \delta(\theta, \varphi) \quad (4-35)$$

其中, $H = [J_l : I : J_r]$ 。矩阵 H 的扩展包括了波束空间内所有重要的相位模式。很明显矩阵 H 的形成是由于阵元天线数量较少的代价。I 为 $(2K+1) \times (2K+1)$ 的单位矩阵。 J_l 为 $(2K+1) \times (M-K)$ 矩阵, 它构成了矩阵 H 的第一块的 $M-K$ 列单位矩阵。 J_r 为 $(2K+1) \times (M-K)$ 矩阵, 它构成了矩阵 H 的最后一块的 $M-K$ 列单位矩阵。残余项 $\delta(\theta, \varphi)$ 中包含了阶数为 $|m| > M$ 的相位模式, 只有通过增加主项的模式数才能使残余项

达到任一小值。不用谱峰搜索也可以估计出 DOA, 通过式 (4-35), MUSIC 算法可以写成:

$$f_{MUSIC}(\theta, \varphi) = a_e^H(z) F^H(\theta) H^H E_N E_N^H HF(\theta) a_e(z) \quad (4-36)$$

上述方差是 $z = e^{j\varphi}$ 的多项式。

尽管 UCA 的天线数量小于主要相位模式数, 但是它仍可以正确地将所有 $2M+1$ 个重要相位模式映射到波束空间, 并且保证波束空间内求根运算估计出无偏估计的方位角。

传统的 UCA-Root-MUSIC 算法是一个特殊情况下的稀疏 UCA-Root-MUSIC 算法。当 $M < K$ 时, 传统的 UCA-Root-MUSIC 算法与稀疏的 UCA-Root-MUSIC 算法是等价的^[53]。

4.2.3 仿真结果及性能分析

实验内容: 稀疏矩阵的 UCA-Root-MUSIC 算法及性能分析。

仿真条件为: 由 9 个全向性阵元组成的均匀圆阵 (UCA), 根据阵元与模式数的关系 $N = 2M + 1$, 则设定模式数为 $M = 2$ 。半径 $R = 0.5$, 信噪比为 20dB, 快拍数为

1024。方位角已知且相同，设定方位角为 $\theta = 45^\circ$ ，噪声为零均值的复高斯白噪声。

实验 1 针对两个非相干入射信号的检测，信号入射角度分别为 $[45^\circ, 50^\circ]$ 、 $[45^\circ, 100^\circ]$ ，用稀疏矩阵的 UCA-Root-MUSIC 算法作 DOA 估计。

图4-7表示的是有两个俯仰角度，即单位圆上的根。从图中可以看出这两个根落在单位圆上，且范数接近于1为测得的角度。

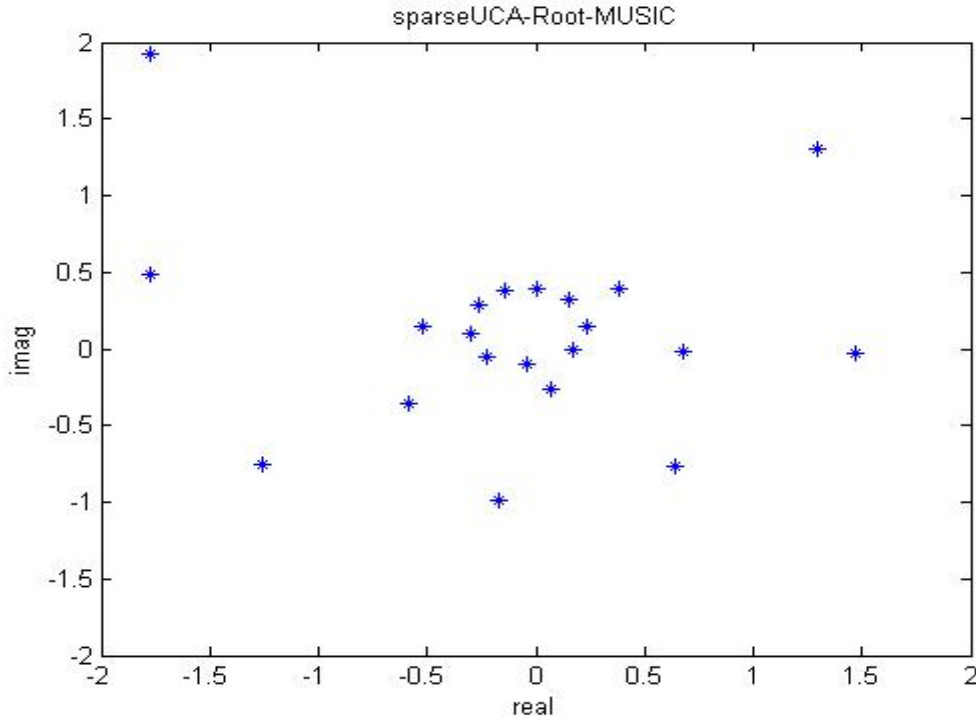


图 4-7 稀疏矩阵的求根 MUSIC 算法的单位圆图

图4-8表示的是在实验1的条件下，稀疏矩阵的UCA-Root-MUSIC算法测得的俯仰角和均方根误差。图4-4表示的是在相同条件下实值的UCA-Root-MUSIC算法测得的俯仰角和均方根误差。这两种算法都是基于传统的UCA-Root-MUSIC算法改进得到的。通过两种算法的仿真结果对比出哪种算法精度更高。

通过图 4-4 和图 4-8 可以看出在相同的仿真条件下，稀疏矩阵的 UCA-Root-MUSIC 算法的均方根误差远小于实值的 UCA-Root-MUSIC 算法。因为在实值的 UCA-Root-MUSIC 算法过程中只取了协方差的实部，把虚部去掉了，同时也把虚部中所包含的有用信息也去掉了。这样的运算使得测到的 DOA 出现有偏估计。而稀疏矩阵的 UCA-Root-MUSIC 算法利用较少数量的天线，并且把所有相关的相位模式包含在内，得到了无偏估计。所以稀疏矩阵的 UCA-Root-MUSIC 算法的精度更高，均方根误差就远远的小于实值的 UCA-Root-MUSIC 算法的均方根误差。

```

Command Window

fi =

    50.0132
    99.9831

rmse_fi =

    1.7474e-004

```

图 4-8 稀疏矩阵的 UCA-Root-MUSIC 算法测向

图4-9为极坐标图，从图中可以看到两个点，表示信号源的个数。

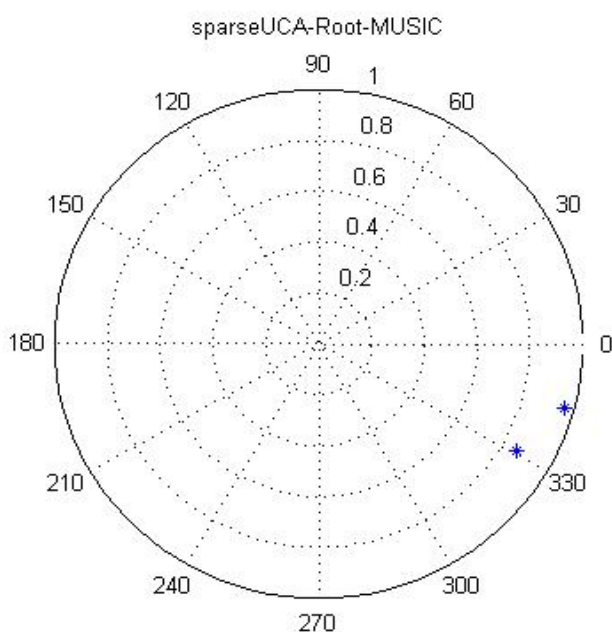


图 4-9 稀疏矩阵的求根 MUSIC 算法测得信号源个数

通过图 4-9 可以看出，稀疏矩阵的求根 MUSIC 算法能够准确的测到信号的个数。

实验 2 针对两个非相干信号入射到阵列上，入射角度分别为 $[45^\circ, 50^\circ]$ 、 $[45^\circ, 53^\circ]$ 的信号分别用稀疏矩阵的 UCA-Root-MUSIC 算法和是实值的 UCA-Root-MUSIC 算法作 DOA 估计。

在相同的仿真条件下，图 4-10 和图 4-11 分别用来显示这两种算法 DOA 估计的分辨率。图 4-10 是用稀疏矩阵的 UCA-Root-MUSIC 算法测入射信号的俯仰角为 50° 和 53° 。图 4-11 是实值的 UCA-Root-MUSIC 算法测入射信号的俯仰角为 50° 和 53° 。

```
Command Window

50.0578
52.9787

rmse_fi =

0.0033
```

图4-10 稀疏矩阵的UCA-Root-MUSIC算法测向

```
Command Window

fi =

51.5070
156.3637

rmse_fi =

2.2711
```

图4-11 实值的UCA-Root-MUSIC算法测向

通过图4-10和图4-11可以明显的看出，当两个信号的角度离的比较接近的时候，稀疏矩阵的UCA-Root-MUSIC算法还能够有效的比较正确的估计出角度。说明这种算法的分辨率比较高。而通过图4-11的显示可以看出，这两个信号的角度与真实角度已经不接近了，甚至产生了错误，算法所测得均方根误差也比较大，说明实值的UCA-Root-MUSIC算法的分辨率低。产生这种结果是因为实值的UCA-Root-MUSIC算法中只有实部的信息，虚部中所包含的有用信息被去掉了。即使它用了大量的阵元，也无法弥补有偏的DOA估计。

实验 3 针对两个非相干信号入射到阵列上，信号入射角度分别为 $[45^\circ, 50^\circ]$ 、 $[45^\circ, 100^\circ]$ ，测得稀疏矩阵的UCA-Root-MUSIC算法作DOA估计的运算时间。

```
Command Window

Elapsed time is 0.078000 seconds.
>>
```

图4-12 稀疏矩阵的UCA-Root-MUSIC算法用时

通过图4-6和图4-12的对比可看出，在同样的仿真条件下稀疏矩阵的

UCA-Root-MUSIC算法的用时比实值的UCA-Root-MUSIC算法的用时还小,说明稀疏矩阵的UCA-Root-MUSIC算法的运算量小。在上一节的分析中得知,实值的UCA-Root-MUSIC算法是将协方差矩阵进行实值变换,只对实部进行特征值分解,减小了运算量。稀疏矩阵的UCA-Root-MUSIC算法是将空间矩阵做稀疏处理,因此大大减小了运算量,进而算法的用时短。

在稀疏矩阵的UCA-Root-MUSIC算法中,值得关注的一点是它用的阵元数特别少。仿真条件相同的条件下,稀疏矩阵的UCA-Root-MUSIC算法只用了9个阵元,而实值的UCA-Root-MUSIC算法用了61个阵元。阵元个数的相差太多。需要的阵元数太多对实际的应用带来很多不便。近几十年,阵列信号处理在军事和民事上发展迅速,并且空间有限,在这样的实际环境下需要尽可能少的天线数量。因此稀疏矩阵的UCA-Root-MUSIC算法理论上来讲比较适合实际应用。

4.3 本章小结

本章针对于两个问题进行了研究,其一是运算量问题,其二是阵元数量问题。这两个问题关系到算法在实际应用中是否合理一直是人们所关注的。由于实际环境在通信、声纳、雷达、地震勘探尤其应用于军事定位等领域内,不仅要求精确的检测到角度,而且要求能够快速的运算。所以需要阵元数少、运算精确并且运算的时间短。这样对后续的处理分析奠定基础。本章提出了解决办法,首先提出了一种实值波束域的UCA-Root-MUSIC算法,它的改进是基于传统的UCA-Root-MUSIC算法。由于均匀圆阵的阵列流形不符合范德蒙矩阵的形式,不能直接将Root-MUSIC算法应用到其中。所以利用模式转换技术将圆阵的阵列流形转成虚拟线阵的阵列流形。这种做法和传统的UCA-Root-MUSIC算法是一致的。但是在之后的对协方差矩阵进行特征值分解时,实值波束域的UCA-Root-MUSIC算法将复数域的协方差矩阵转换为实值的,这样在运算过程中计算量就大大降低。通过与传统UCA-Root-MUSIC算法的用时仿真结果的对比,也达到了计算量小,用时短的目的。然后提出了一种稀疏矩阵的UCA-Root-MUSIC算法,它的改进主要针对于UCA-Root-MUSIC算法所需阵元数量太大提出的。并且现实应用中空间有限,在能够有效的估计出角度的前提下,需要阵元数越少越好。稀疏矩阵的UCA-Root-MUSIC算法也需要先利用模式激励技术将均匀圆阵的阵列流形转换为虚拟线阵的阵列流形。然后在复数域中对协方差矩阵进行分解,分解为的信号子空间和噪声子空间。此时要对波束域的阵列流形进行稀疏处理,得到稀疏矩阵,然后进行正交运算。这样的处理不会产生有偏估计,所以它的计算精度高,分辨率高。最重要的是它所需要的阵元数特别少,在实际应用中这个优点就体现出来了。

结 论

本论文在均匀线阵 DOA 估计的基础上,研究了基于均匀圆阵的二维波达角估计算法。由于均匀圆阵的阵列流形不满足范德蒙阵列的形式,为了移植均匀线阵下的 MUSIC、Root-MUSIC 等传统的经典算法,利用相位模式激励技术对阵列流形进行处理,使其符合范德蒙结构。以 Root-MUSIC 算法为基础,提出了两种改进算法:实值波束域的 Root-MUSIC 的改进算法和稀疏矩阵的 Root-MUSIC 的改进算法。

本论文主要完成了以下工作:

1) 文章首先研究了阵列信号处理中常见的阵列模型和信号模型,重点研究了均匀圆阵的数学模型及阵列流形。由于基于均匀线阵的经典算法是研究均匀圆阵 DOA 测向的基础,因此本文对两种经典算法 MUSIC 算法和 Root-MUSIC 算法进行了深入研究。

2) 由于均匀圆阵的阵列流形不符合范德蒙结构,不能直接应用经典的 MUSIC 算法和 Root-MUSIC 算法。因此分析了模式空间转换技术,将均匀圆阵的阵列流形转换为虚拟线阵,使其符合范德蒙结构。对两种基于均匀圆阵的传统 DOA 估计算法作了性能仿真,通过仿真结果得出两种算法的特性: MUSIC 算法精度高,程序运算时间较长;而 Root-MUSIC 算法无需谱峰搜索,运算时间约为 MUSIC 算法的 $1/3$ 。但是它所需的阵元数多。相同条件下,通过用时可以得出, MUSIC 算法运算时间较长,实际应用中容易产生延时,而 Root-MUSIC 算法用时少。

3) 由于考虑到算法运算量的问题,本论文提出了一种实值波束域的特征值分解的改进方法。这种算法也是基于求根 MUSIC 算法改进得到,但是改进算法将复数域的协方差矩阵进行处理转换为实值的协方差运算,接下来只对实值的协方差进行特征值分解,通过仿真结果可以看出改进算法的用时约是传统算法的 $1/4$,说明改进算法可以大大减小运算量,与理论计算值相一致。

4) 针对实际应用中天线阵元个数多、占用空间范围大的问题,需要考虑如何减少阵元个数。本论文提出了另一种改进算法,稀疏矩阵的求根 MUSIC 算法。这种算法先做相位模式变换,再对变换后的信号进行特征值分解,得到信号子空间和噪声子空间。主要是对阵列流形作了稀疏处理,然后做正交运算。这样就可以在保证测向精确度的前提下,使用少量的天线数。通过仿真结果可以看出稀疏矩阵的求根 MUSIC 算法只需要用 9 个阵元就能进行测向,而传统的求根 MUSIC 算法则需要用到 61 个阵元。因此在实际应用中改进算法的使用比较方便,并且节约成本。改进算法的用时约是传统算法的 $1/7$,运算时间比较短。

本文对 DOA 测向算法的研究还存在许多不足之处。本文主要侧重的是对二维

DOA 估计算法性能的比较研究。随着研究的逐步深入及实际工程上的应用，对二维 DOA 估计问题还有更多的亟待解决的问题。例如，本文针对的信号源为窄带非相关信源，对于宽带信号、分布式信号等信号源没有涉及到。并且当信源相关时，如何做去相关处理是要解决的问题。阵列信号处理中常遇到的互耦效应，如何作有效的平衡互耦的问题。如何在信号源未知的情况下，对信号作精确的二维 DOA 估计，是十分重要的现实意义，需作进一步研究。

参考文献

- [1] 张贤达, 保铮. 通信信号处理. 北京:国防工业出版社, 2000
- [2] 张贤达, 现代信号处理. 第2版. 北京: 清华大学出版社, 2002
- [3] 张小飞, 汪飞, 徐大专. 阵列信号处理的理论和应用. 北京: 国防工业出版社, 2010
- [4] 王永良, 陈辉, 彭应宁. 空间谱估计理论与算法. 北京: 清华大学出版社, 2004
- [5] 覃岭. 无线电侦测中的阵列处理算法研究.[电子科技大学博士学位论文]. 四川: 电子科学, 2010
- [6] 吴曼青. 数字阵列雷达及其进展.中国电子科学研究学报, 2006, 1(1): 8-16
- [7] 何子述, 夏威. 现代数字信号处理及应用. 北京: 清华大学出版社, 2009
- [8] R. ROY, T. KAILATH. ESPRIT-estimation of Signal Parameters via Rotational Invariance Techniques. IEEE Trans.on ASSP, 1989, 37(7): 984-995
- [9] 李颖, 邢向飞, 黄晓涛. 均匀圆阵列天线仿真系统设计. 计算机仿真, 2005, 22(12):238-241
- [10] 赵雅靓. 圆形阵列波束形成与综合方法研究 [河南大学硕士学位论文]. 河南:河南大学, 2005
- [11] S. U. PILLAI, B. H. KWON. Forward-backward Spatial Smoothing Techniques for Coherent Signal Identification. IEEE Trans. Acoust. Speech Signal Process, 1989, 37(1): 8-15
- [12] 鲁祖坤, 高鹰, 石宇. 基于均匀圆阵的互耦误差校正算法研究.电子用, 2013, 39(5): 107-113
- [13] 李秋实. 基于互耦条件下的阵列信号校正方法研究. [西安科技大学硕士学位论文]. 西安: 西安科技大学, 2012
- [14] 杨延光. 均匀圆阵列天线侧向算法研究. [国防科学技术大学硕士学位论文]. 湖南: 国防科学技术大学, 2004
- [15] S. M. KAY, S. L. MARPLE. Spectrum Analysis-A Modern Perspective.Proc. of the IEEE, 1981, 65(7): 1206-1218
- [16] 顾陈. 高分辨阵列信号处理方法研究. [南京理工大学博士学位论文], 南京: 南京理工大学, 2009
- [17] 刘洪盛. 高分辨测向阵列几何结构研究. [电子科技大学博士学位论文]. 四川: 电子科技大学, 2009
- [18] 侯碧波. 基于均匀圆阵的 2D DOA 估计算法研究及实现. [电子科技大学工学硕士论文].四川: 电子科技大学, 2008
- [19] H. WINERS. JACK . Smart Antennas Forwireless Systems. IEEE Personal Communications , 1998, 23(7): 3557-3575
- [20] 徐青. 基于均匀圆阵的 DOA 估计算法研究. [电子科技大学工学硕士学位论文]. 四川: 电子

科技大学, 2008

- [21] 向利. 均匀圆阵中到达角 (DOA) 估计算法关键技术研究. [中国科学技术大学工学硕士学位论文]. 安徽: 中国科学技术大学, 2007
- [22] 李邵滨, 赵宜楠, 胡航. 均匀圆阵波束空间二维 DOA 估计算法. 哈尔滨工业大学学报, 2004, 36(6): 344-364
- [23] CHANG ANN, CHEN JEN, CHI WEI. Subspace-Based Techniques for 2-D DOA Estimation with Uniform Circular Array under Local Scattering. Journal of the Chinese Institute of Engineers, 2006, 29(4): 663-673
- [24] 胡广书. 数字信号处理——理论、算法与实现. 北京: 清华大学出版社, 2003
- [25] 陈晋央. 独立分量分析在阵列信号处理中的应用研究. [解放军信息工程大学硕士学位论文], 河南: 解放军信息工程大学, 2011
- [26] X. MESTR, M. A. LANGUNAS. Modified Subspace Algorithms for DOA Estimation with Large Arrays. IEEE Transactions on Signal Processing, 2008, 56(2): 598-614
- [27] 李毅, 关德新, 秦洪新. 基于均匀圆阵的多信号多参量估计中的参数配对问题. 电子与信息学报, 2004, 26(10): 1631-1637
- [28] D. J. RABIDEAU, R. J. GALEJS. An Subband Digital Array Radar Testbed. IEEE Int.Symp.on Phased Array System and Technology, 2003, 51(3): 113-158
- [29] 谢兰菊. 共形相控阵波束形成与 DOA 估计算法研究. [电子科技大学博士学位论文]. 四川: 电子科技大学, 2012
- [30] 唐忠礼, 武思军, 张曙. 基于均匀圆阵的二维 DOA 估计的新算法. 哈尔滨工程大学学报, 2005, 26(2): 247-251
- [31] 刘艳. UCA-RB-MUSIC 算法的仿真分析. 信息通信, 2013, 1(8): 25-26
- [32] J. CAPON. High-Resolution Frequency-Wavenumber Spectrum Analysis. Proc. of IEEE, 1969, 57(8): 1408-1418
- [33] R. O. SCHMIDT. Multiple Emitter Location and Signal Parameter Estimation. IEEE Trans on Signal Processing, 1986, 34(3): 276-280
- [34] A. B. GERSHMAN, M. HARDT. Improving the Performance of Unitary ESPRIT via Pseudo Noise Resampling. IEEE Trans. Signal Processing, 1999, 47(2): 2305 - 2318
- [35] 刘刚, 吕新华, 攸杨. 阵列信号处理中基于 MUSIC 算法的空间谱估计. 微计算机信息, 2006, 22(4): 302-304
- [36] 姚林宏, 高 鹰, 石 宇, 等. 基于均匀线阵的改进 MUSIC 算法. 吉林大学学报, 2010, 28(6): 558-562
- [37] M. D. ZOLTOWSKI, G. M. KAUTZ, S. D. SILVERSTEIN. Beamspace Root-MUSIC. IEEE Trans. Signal Processing, 1993, 41(2): 344-364

- [38] B. D. RAO , K. V. S. HARI. Performance Analysis of Root-MUSIC. IEEE Trans. Signal Processing, 1989, 37(5): 1939-1949
- [39] R. GOOSSENS, H. ROGIER. A Hybrid UCA-RARE/Root-MUSIC Approach for 2-D Direction of Arrival Estimation in Uniform Circular Arrays in the Presence of Mutual Coupling. IEEE Trans. Signal Processing, 2007, 43(6): 841-849
- [40] F. BELLONI , V. KOIVUNEN. BeamSpace Transform for UCA: Error Analysis and Bias Reduction. IEEE Trans. Signal Processing, 2006, 54(5): 3078-3089
- [41] R. GROVER, D. A. PADOS, M. J. MEDLEY. Subspace Direction Finding with An Auxiliary-Vector Basis. IEEE Trans. Signal Processing, 2007, 55(3): 758-763
- [42] 吴国庆, 陈善继. 基于解相干的 MUSIC 算法估计性能分析. 现代电子技术, 2011, 34(7): 93-96
- [43] 李鹏, 李莉. TD-SCDMA 系统智能天线波束形成算法的研究. 河北工业科技, 2011, 28(3): 170-172
- [44] B. PORAT, B. FRIEDLANDER. Analysis of the Asymptotic Relative Efficiency of the MUSIC Algorithm. IEEE Trans. on ASSP, 1988, 36(4): 532-543
- [45] 胡秀娟, 孙灿飞, 刘佳伟,等. 基于模式空间变换的圆阵无源测向算法研究. 航空科技技术, 2012, 46(2): 47-50
- [46] 谢白玉, 赵 鹏. 基于改进 MUSIC 算法的信号 DOA 估计. 微计算机信息, 2011, 27(11): 162-164
- [47] 许莹, 赵军. 一种基于超分辨的二维信号参量估计方法. 河北科技大学学报, 2013, 2(34): 128-133
- [48] MARIUS PESAVENTO, B. ALEX. GERSHMAN. Unitary Root-MUSIC with a Real-Valued Eigendecomposition: A Theoretical and Experimental Performance Study. IEEE Trans. On Singal Processing, 2000, 48(5): 1306-1314
- [49] X. D. CHEN, K. AGARWAL. MUSIC Algorithm for Two-Dimensional Inverse Problems with Special Characteristics of Cylinders. IEEE Trans.on Antennas Propagation. 2008, 56(6): 1808- 1812
- [50] PAN JIE, ZHOU JIANJING. BeamSpace PM-Root-MUSIC for Uniform Circular Array Based on MST. International Joint Conference on Computational Sciences and Optimization, 2009, 42(9): 899-901
- [51] ROALD GOOSSENS, HENDRIK, ROGIER. UCA Root-MUSIC With Sparse Uniform Circular Arrays. IEEE Trans.Signal Processing, 2008, 56(8): 4095-4099
- [52] 郑春弟, 解春维, 李有才. 基于实值特征值分解的求根 MUSIC 算法. 数据采集与处理, 2010, 25(2): 154-159

- [53] 李绍滨, 赵宜楠, 胡航. 均匀圆阵波束空间二维 DOA 估计算法. 哈尔滨工程大学学报, 2004, 36(6): 796-798
- [54] R. MICHAEL, B. ALEX. Direction-of-Arrival Estimation for Nonuniform Sensor Arrays from Manifold Separation to Fourier Domain MUSIC methods. IEEE Transactions on Signal Processing, 2009, 57(2): 588-599
- [55] CARINE ELKASSI, JOSE PICHERAL, CHAFIC MOKBEL. Advantages of Uniform Arrays Using Root- MUSIC. IEEE Trans. Signal Processing, 2010, 90(2): 689-695

攻读硕士学位期间所发表的论文

- [1] 朱丽华, 王亚芳, 栾泰珍, 等. 基于均匀圆阵的求根 MUSIC 算法测向研究. 无线互联科技, 2014, (2): 162
- [2] 栾泰珍, 王亚芳, 朱丽华, 等. MIMO 系统中多用户分集技术. 无线互联科技, 2014, (2): 239
- [3] 张志彬, 王亚芳, 朱丽华, 等. 基于目标精确定向的分裂波束算法研究. 无线互联科技, 2014, (2): 156

致 谢

论文即将完成之际，首先向我的导师王亚芳老师表示衷心感谢，本论文是在她的悉心指导下完成的。王老师在我论文的结构和内容等各个方面，都进行了悉心指导，并给我提出了许多宝贵的建议。另外无论是在学习上，还是在生活中，王老师都给了我很大的帮助和鼓励。

感谢苏佳老师，在我的学习上给予的指导，不仅理论知识和实践经验得到了提高，而且开阔了思路，有了比较系统的思维方式，使我受益匪浅。

感谢我的父母，他们殷切的期望是我前进的动力，他们无微不至的关怀，使我的论文能够顺利完成。

同时还要感谢通信教研室的全体教师，感谢诸位老师的关心与指导。

此外，在我研究生的学习期间，得到了实验室许多师兄师姐和同学的关心和帮助。在此，向所有关心帮助过我的师兄师姐和同学们表示由衷的谢意！尤其感谢我的同学们，真心感谢你们。

最后，谨向论文评阅人和各位评委专家表示最衷心的感谢！