Universidad de Granada

Análisis Matemático II

Grado en Estadística

Curso 2017/18

Índice

El espacio euclídeo

Como punto de partida para el estudio de las funciones de varias variables reales, debemos familiarizarnos con la estructura y propiedades del espacio en el que dichas funciones tendrán su conjunto de definición, el espacio euclídeo n-dimensional, donde n es un número natural. Al tiempo que estudiamos algunas propiedades de dicho espacio, las iremos abstrayendo, para entender ciertos conceptos generales que son importantes en Análisis Matemático. Partimos de la definición de $\mathbb{R}^n$ y su estructura algebraica básica, la de espacio vectorial. Al estudiar el producto escalar en $\mathbb{R}^n$, completamos la definición del espacio euclídeo, así llamado porque formaliza analíticamente los axiomas y resultados de la geometría de Euclides.

Definición 1.1 (Espacio euclídeo). Definimos el espacio euclídeo n-dimensional como el producto cartesiano de n copias de $\mathbb{R}$, es decir, el conjunto de todas las posibles n-uplas de números reales:

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \ x \ \mathbb{R} \ x \ \ldots^{(n)} \ x \ \mathbb{R} = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in R, \forall i \in 1 \ldots n\}$$

Sin embargo, no siempre es conveniente usar subíndices para denotar las componentes de los elementos de $\mathbb{R}^n$, pues podemos necesitar los subíndices para otra finalidad. Para valores concretos de n, podemos denotar las componentes con letras diferentes, siendo habitual escribir:

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in R\}$$

$$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in R\}$$

En $\mathbb{R}^n$ disponemos de las operaciones de suma y producto por escalares, definidas, para $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, por

$$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Proposición 1.1. Sea $n \in \mathbb{N}, x, y, z \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Entonces:

$a)$ $(x + y) + z = x + (y + z)$ (Propiedad asociativa)

$b)$ $0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n \implies x + 0 = 0 + x = x$

$c)$ Dado $x = (x_1, \ldots, x_n) \implies \exists! v \in \mathbb{R}^n : x + v = v + x = 0 \implies v = (-x_1, \ldots, -x_n) = -x$

$d)$ $x + y = y + x$

$e)$ $1 * x = x$

$f)$ $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$

$g)$ $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$

$h)$ $(\lambda\beta)y = \lambda(\beta y)$

Definición 1.2 (Producto escalar). Sea $n \in \mathbb{N}$. Definimos el producto escalar de $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ como

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Proposición 1.2. Sea $n \in \mathbb{N}$:

$a)$ $x, y, z \in \mathbb{R}^n \implies < x + y, z >=< x, z > + < y, z >$

$b)$ $x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R} \implies < \lambda x, y >= \lambda < x, y >$

$c)$ $< x, y >=< y, x > \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n$

Proposición 1.3 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz). Sean $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$, entonces:

$$(< x, y >)^2 \leq (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)(\sum_{i=1}^{n} y_i^2)$$

Demostración.
Para $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, $y = (y_1, ..., y_n)$, es cierto que $0 \leq \sum_{i=1}^{n}(ax_i + y_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(a^2x_i^2 + y_i^2 + 2ax_iy_i) = a^2(\sum_{i=1}^{n} x_i^2) + (\sum_{i=1}^{n} y_i^2) + 2a(\sum_{i=1}^{n} x_iy_i)$ para todo número real y es igualdad si, y sólo si, cada término de la suma es cero. Esta desigualdad puede escribirse en la forma: $Ax^2 + Bx + C$ donde $A = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i$, $C = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$. En particular, la desigualdad se cumple para $\frac{-B}{2A}$: $A(\frac{-B}{A})^2 + 2B(\frac{-B}{A}) + C \geq 0 \implies C \geq \frac{B^2}{2} \implies B^2 \leq AC$. $\square$

Definición 1.3 (Norma). Dado $n \in \mathbb{N}$, $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, se define la norma de x como:

$$||x|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} = \sqrt{< x, x >}$$

Proposición 1.4. Sea $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}^n, \lambda \in \mathbb{R}$.

$a)$ $||x|| \geq 0 \wedge ||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n$

$b)$ $||\lambda x|| = |\lambda|||x||$

$c)$ $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$ (Desigualdad triangular)

Demostración. (Desigualdad triangular)
$||x + y||^2 =< x + y, x + y >=< x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y >= ||x||^2 + ||y||^2 + 2 < x, y >$
$\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x||||y|| = (||x|| + ||y||)^2$ $\square$

Definición 1.4 (Distancia). Sea $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}^n$, se define la distancia de x a y como

$$d(x, y) = ||x - y||$$

Proposición 1.5. Sea $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}^n$.

$a)$ $d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

$b)$ $d(x, y) = d(y, x)$

$c)$ $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Topología en $\mathbb{R}^n$

Definición 2.1 (Bola de centro a y radio r). Sea $n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^n, r > 0$. Se definen las bolas abiertas, cerradas y esferas, respectivamente, de centro a y radio r como:

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, y) < r\}$$

$$\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, y) \leq r\}$$

$$S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, y) = r\}$$

Definición 2.2 (Sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$). Sea $n \in \mathbb{N}$, y $\{x_n\}$ una sucesión convergente en $\mathbb{R}^n$. Diremos que $\{x_n\}$ es convergente hacia un límite $a \in \mathbb{R}^n$ si

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies d(x_n, a) < \varepsilon$$

Proposición 2.1. Sea $n \in \mathbb{N}, x, y \in \mathbb{R}^n, \{x_n\}, \{y_n\}$ dos sucesiones en $\mathbb{R}^n$.

$a)$ $\{x_n\} \to x, \{x_n\} \to y \implies x = y$ (Unicidad de límites)

$b)$ $\{x_n\} \to x, \{y_n\} \to y \implies \{x_n + y_n\} \to x + y$

$c)$ $\{x_n\} \to x, \lambda \in \mathbb{R} \implies \{\lambda x_n\} \to \lambda x$

$d)$ $\{x_n\}$ converge $\implies$ $\{x_n\}$ acotada. ($\exists M \in \mathbb{N} : ||x_n|| \leq M\ \forall n \in N$) (Acotación)

$e)$ $\{x_n\} \to x, \{y_n\} \to y \implies \{< x_n, y_n >\} \to < x, y >$

$f)$ $\{x_n\} \to x \implies \{||x_n||\} \to ||x||$

Demostración. (Unicidad de límites)
Supongamos $\{x_n\} \to x, \{x_n\} \to y$. Fijo $\varepsilon > 0$ y demuestro $||x - y|| < \varepsilon \implies ||x - y|| = 0 \implies x = y$.
Dado $\varepsilon > 0, \{x_n\} \to x \implies \exists m_1 \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq m_1$ y $\exists m_2 \in \mathbb{N} : ||x_n - y|| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq m_2$. Tomo $n \geq max\{m_1, m_2\} \implies ||x - y|| = ||(x - x_n) + (x_n - y)|| \leq ||x_n - x|| + ||x_n - y|| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \implies x = y$ □

Demostración. (Acotación)

Supongamos $\{x_n\} \to x \implies \exists m \in \mathbb{N} : ||x_n - x|| < 1 \ \forall n \geq m \implies ||x_n|| \leq 1 + ||x|| \implies ||x_n|| \in max\{||x_1||, ||x_2||, ..., ||x_m||, 1 + ||x|| = M\}$ □

Proposición 2.2. Sea $N \in \mathbb{N}$. Tomo $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}^N$con $x = (x^1, ..., x^N), x_n = (x_n^1, ..., x_n^N)$. Entonces

$$\{(x_n^1, ..., x_n^N)\} \to (x^1, ..., x^N) \Leftrightarrow \{x_n^i\} \to x^i \ \forall i \in \{1...N\}$$

Demostración. POR HACER □

Definición 2.3 (Interior, adherente y frontera). Sea $n \in \mathbb{N}, A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces:

a) Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es adherente a A si $\forall \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \implies \overline{A} = \{x_n \in \mathbb{R}^n : x$ adherente a $A\}$ y A cerrado si $A = \overline{A}$.

$b)$ Un punto $a \in A$ es interior a A si $\exists r > 0 : B(a, r) \subseteq A$. Denotaremos $\mathring{A} = \{a \in A : a$ interior a $A\}$ y A abierto si $A = \mathring{A}$.

$c)$ Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es frontera de A si $x \in \overline{A}$ pero $x \notin \mathring{A}$. Denotaremos $Fr(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : x$ es frontera de $A\}$

Ejemplo 2.1. .

$a)$ $A = [0, 1[\cup\{4\} \implies \overline{A} = [0, 1] \cup \{4\}, \ \mathring{A} =]0, 1[, \ Fr(A) = \{0, 1, 4\}$

$b)$ $A = B(a, r) \implies \overline{A} = \overline{B}(a, r), \ \mathring{A} = A, \ Fr(A) = \overline{B}(a, r) - B(a, r)$ DEMOSTRAR

Proposición 2.3 (Caracterización secuencial de la topología). Sea $n \in \mathbb{N}, A \subseteq \mathbb{R}^n$. Entonces:

$a)$ Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es adherente a A si $\Leftrightarrow \exists\{x_n\} \to x : \{x_n\} \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$

$b)$ Un punto $a \in A$ es interior $\Leftrightarrow \ \forall\{x_n\} \to a, x_n \in \mathbb{R}^n \implies \exists m \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq m, \ x_n \in A$

$c)$ Un punto $x \in \mathbb{R}^n$ es frontera de A si $\Leftrightarrow \exists\{x_n\} \to x : \{x_n\} \in A \ \forall n \in \mathbb{N} \wedge \{y_n\} \to x : \{y_n\} \notin A \ \forall n \in \mathbb{N}$

Demostración. . (Apartado a)

$\Rightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ por ser x adherente $\implies \{x_n\} \subseteq A$. Además, $d(x_n, x) \leq \frac{1}{n} \wedge \{\frac{1}{n}\} \to 0 \implies \{x_n\} \to x$.

$\Leftarrow$

Sea $\varepsilon > 0, \{x_n\} \to x \implies \exists n \in \mathbb{N} : d(x_n, x) < \varepsilon \implies x_n \in B(x, \varepsilon)$ y $x_n \in A$ por hipótesis $\implies x_n \in B(x, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing \implies x \in \overline{A}$.

□

Proposición 2.4. Sea $n \in \mathbb{N}$:

a) Los conjuntos abiertos cumplen las siguientes propiedades:

- $\varnothing, \mathbb{R}^n$ son abiertos
- Si $A_1, \ldots, A_n$ abiertos $\implies \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ abierto.
- Si $\{A_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una familia de abiertos $\implies \bigcup_{\alpha \in \Lambda} A_\alpha$ abierto.

b) Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto $\Leftrightarrow \mathbb{R}^n / A$ es cerrado.

c) Los cerrados cumplen:

- $\varnothing, \mathbb{R}^n$ son cerrados
- Si $F_1, \ldots, F_n$ cerrados $\implies \bigcup_{k=1}^{n} F_k$ cerrado.
- Si $\{F_\alpha : \alpha \in \Lambda\}$ es una familia de cerrados $\implies \bigcap_{\alpha \in \Lambda} F_\alpha$ cerrado.

Demostración. . (Apartado b)

$\Rightarrow$

Tomo $x \in \overline{\mathbb{R}^n / A} \implies \forall \varepsilon > 0,\ B(x, \varepsilon) \cap (\mathbb{R}^n / A) \neq \varnothing \implies B(x, \varepsilon) \not\subseteq A \implies x \notin \mathring{A} = A \implies x \in \mathbb{R}^n / A \implies \mathbb{R}^n$ es cerrado.

$\Leftarrow$

Suponemos $\mathbb{R}^n / A$ cerrado y tomo $a \in A \implies a \notin \mathbb{R}^n / A = \overline{\mathbb{R}^n / A} \implies \exists r > 0 : B(a, r) \cap (\mathbb{R}^n / A) = \varnothing \implies B(a, r) \subseteq A \implies a \in \mathring{A} \implies A$ abierto. □

Definición 2.4 (Sucesión parcial). Sea $n \in \mathbb{N},\ \{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$. Una sucesión parcial de $\{x_n\}$ es otra sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ donde $\sigma : N \to N$ es creciente.

Definición 2.5 (Conjunto compacto). Sea $n \in \mathbb{N},\ A \subseteq \mathbb{R}^n$. Diremos que A es compacto si $\forall \{x_n\} \subseteq A,\ \exists \{x_{\sigma(n)}\} \to x \in A$.

Proposición 2.5. Sea $n \in \mathbb{N},\ A \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto. Entonces A es cerrado y acotado.

Demostración. .

Demostremos que A es cerrado. Tomo $x \in \overline{A}$, hay que ver si $x \in A$. Como $x \in \overline{A} \implies \exists \{x_n\} \to x,\ \{x_n\} \in A$. Como A es compacto $\implies \exists \{x_{\sigma(n)}\} \to a \in A$. Por las propiedades de las sucesiones parciales, $\{x_{\sigma(n)}\} \to x \implies x = a \in A$ por unicidad de límites. Es decir, A es cerrado.

Demostremos que A es acotado. Supongamos, por reducción al absurdo, que A no es acotado. Entonces $\forall n \in \mathbb{N}\ \exists x_n \in A : ||x_n|| > M,\ M \in \mathbb{N}$. Tenemos que $\{x_n\}$ no tiene parciales acotadas, luego no tiene parciales convergentes, en contradicción con la definición de compacidad. Es decir, A es acotado. □

Teorema 2.1 (Teorema de Bolzano-Weirstrass n-dimensional). Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces, toda sucesión acotada admite una parcial convergente.

Demostración. COMPLETAR MÁS ADELANTE □

Teorema 2.2. Sea $n \in \mathbb{N}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ cerrado y acotado. Entonces, A es compacto.

Demostración. Tomo $\{x_n\} \subseteq A$. Como A es acotado $\implies$ $\{x_n\}$ acotada. $\implies$ $\{x_n\}$ tiene una parcial convergente a $x \in \mathbb{R}^n$. Como x es límite de una sucesión de puntos de A $\implies$ $x \in \overline{A} = A$ por ser A cerrado $\implies$ A es compacto. □

Ejemplo 2.2. Dado $x \in \mathbb{R}^n, r > 0 \implies A = B(x, r)$ es compacto.

Demostración. Veamos que la bola es cerrada y acotada.
A es trivialmente acotado, pues $A \in\subseteq \overline{B}(0, ||x|| + r)$. Demostremos que es cerrado. Sabemos que $A = \{y \in R^n : ||x - y|| \leq r\}$, veamos que $\mathbb{R}^n/A = \{y \in \mathbb{R}^n : ||x - y|| > r\}$ es abierto. Para ver que es abierto, tomo $y \in \mathbb{R}^n/A$ y $\{y_n\} \to y,\ y_n \in A$. Como $\{y_n\} \to y \implies \{y_n - x\} \to y - x \implies \{||y_n - x||\} \to ||y - x|| > r \implies \exists m : \forall n \geq m \implies ||y_n - x|| > r \implies y_n \in \mathbb{R}^n/A\ \forall n \geq m \implies \mathbb{R}^n/A$ es abierto, luego A es cerrado. □

Ejercicios

Relación 1

Ejercicio 3.1. Sea $A \subseteq R$ compacto. Entonces, A tiene máximo y mínimo.

Solución. HACER

Referencias

.