Cadeias de Markov

Pablo Souza Grigoletti
Serviço Federal de Processamento de Dados

Cadeias de Markov

Pablo Souza Grigoletti[1]

[1]Escola de Informática – Universidade Católica de Pelotas (UCPel)
Rua Felix da Cunha 412 – 96010-140 – Pelotas – RS – Brazil

pablogri@ucpel.tche.br

Abstract. *This article has as objective to present the Models of Markov mainly and the basic concepts of the Chains of Markov. The studies of Chains of Markov come if becoming more important more and for social, biological and administrative sciences, to the measure that these sciences go assuming a nature each more quantitative time.*

Resumo. *Este artigo tem como objetivo apresentar os Modelos de Markov e principalmente os conceito fundamentais das Cadeias de Markov. Os estudos de Cadeias de Markov vem se tornando mais e mais importantes para as ciências sociais, biológicas e administrativas, à medida que essas ciências vão assumindo uma natureza cada vez mais quantitativa.*

1. Introdução

Um Processo de Markov é um processo estocástico onde as distribuições de probabilidade para o seu desenvolvimento futuro, dependem somente do estado presente, não levando em consideração como o processo chegou a tal estado.

Os processos markovianos são modelados formalmente pelos modelos de Markov, que são sistemas de transições de estados, onde os estados são representados em termos de seus vetores probabilísticos, que podem variar no espaço temporal (discreto ou contínuo), e as transições entre estados são probabilísticas e dependem apenas do estado corrente.

Se o espaço de estados é discreto (enumerável), então o modelo de Markov é denominado de cadeias de Markov. As propriedades desses modelos são estudadas em termos das propriedades das matrizes de transições de estados que são utilizadas na sua descrição.

O estudo dos modelos de Markov tem aplicações em áreas como, por exemplo, ciências sociais, biológicas e administrativas.

2. Cadeias de Markov

Uma cadeia de Markov é um processo em que a probabilidade de estar em um certo estado em um tempo futuro pode depender do estado atual do sistema, mas não dos estados em tempos passados. Em outras palavras, em uma cadeia de Markov, dado o estado atual do sistema, o próximo estado é independe do passado (mas poderá depender do estado presente).

2.1. Exemplo

Considere a experiência de jogar repetidamente um par de dados perfeitos. Suponha que apenas existe interesse em saber se o resultado da soma dos dados é 7 ou não, em cada lançamento de dados. Aqui o estado do sistema a qualquer instante poderá ser S (a soma dos dados é 7) ou N (a soma dos dados não é 7).

Tabela 1. Os resultados, após 10 ensaios.

Tempo (ensaios)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Resultados	Não 7	7	Não 7	7	7	Não 7	Não 7	Não 7	7	Não 7
Estado	N	S	N	S	S	N	N	N	S	N
Probabilidade	05/06	01/06	05/06	01/06	01/06	05/06	05/06	05/06	01/06	05/06

Como o resultado de um determinado ensaio não tem nenhuma influência sobre qualquer outro ensaio (os lançamentos são independentes), tem-se, neste caso, uma seqüência de ensaios independentes. Ou seja, o estado do sistema é independente do estado atual e dos estados passados. Por exemplo, a probabilidade de que um estado seja S no tempo 5 é de 1/6 (= probabilidade de ocorrer um 7 no lançamento de um par de dados perfeitos), quaisquer que tenham sido os estados anteriores do sistema.

Entretanto, suponha que estejam interessados no total de vezes em que o resultado do lançamento foi 7, até um determinado instante. Neste caso, o estado do sistema em um dado instante seria dado pelo número de ocorrências de 7 até aquele instante. Alguns resultados típicos, após 10 ensaios, seriam os seguintes:

Tabela 2. Os resultados, após 10 ensaios (Teste 1)

Tempo (ensaios)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Resultados	Não 7	7	Não 7	7	7	Não 7	Não 7	Não 7	7	Não 7
Estado (N de 7)	0	1	1	2	3	3	3	3	4	4
Probabilidade	05/06	01/06	05/06	01/06	01/06	05/06	05/06	05/06	01/06	05/06

Tabela 3. Os resultados, após 10 ensaios (Teste 2)

Tempo (ensaios)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Resultados	7	Não 7	7	Não 7	7	7	Não 7	Não 7	Não 7	7
Estado	1	1	2	2	3	4	4	4	4	5
Probabilidade	01/06	05/06	01/06	05/06	01/06	01/06	05/06	05/06	05/06	01/06

Tabela 4. Os resultados, após 10 ensaios (Teste 3)

Tempo (ensaios)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Resultados	7	7	Não 7	7	Não 7	Não 7	Não 7	Não 7	Não 7	7
Estado	1	2	2	3	3	3	3	3	3	4
Probabilidade	01/06	01/06	05/06	01/06	05/06	05/06	05/06	05/06	05/06	01/06

Tabela 5. Os resultados, após 10 ensaios (Teste 4)

Tempo (ensaios)	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Resultados	Não 7	7	Não 7	Não 7	7	Não 7	Não 7	Não 7	Não 7	Não 7
Estado	0	1	1	1	2	2	2	2	2	2
Probabilidade	05/06	01/06	05/06	05/06	01/06	05/06	05/06	05/06	05/06	05/06

Deve ser evidente que o estado futuro do sistema depende do estado atual (mas não depende de nenhum dos estados passados).

Por exemplo, a probabilidade de o sistema estar no estado 3 no tempo 5 (ou seja, de que o 7 tenha ocorrido três vezes em cinco lançamentos) dado que esteja no estado 2 no tempo 4 (ou seja , dado que tenham ocorrido dois 7 em quatro lançamentos) é exatamente a probabilidade de que ocorra um 7 no quinto lançamento, igual a 1/6. Os estados dos sistemas anteriores ao tempo 4 não tem nenhum efeito sobre essa probabilidade (condicional) (ver Tabelas II e III).

Por outro lado, a probabilidade de o sistema estar no estado 3 no tempo 5 (isto é, três 7 em cinco lançamentos) dado que esteja no estado 3 no tempo 4 (isto é, três 7 em quatro lançamentos), nada mais é que a probabilidade de não ocorrer um 7 no quinto lançamento, igual a 5/6. Vê-se novamente que os estados do sistema anterior ao tempo 4 não tem efeito sobre essa probabilidade condicional (ver Tabela IV).

Finalmente, a probabilidade de o sistema estar no estado 3 no tempo 5, dado que esteja no estado 1 no tempo 4 (ou seja, um 7 em quatro lançamentos), é 0 (zero), visto que é impossível que tal aconteça. De fato, dado que o sistema esteja no estado 1 no tempo 4, haverá apenas duas possibilidades quanto ao estado do sistema no tempo 5. O sistema poderá estar no estado 2 (se ocorrer 7 no quinto lançamento) ou no estado 1 (se não ocorrer 7 no quinto lançamento).

O processo que acabamos de descrever é um exemplo de uma cadeia de Markov.

2.2. Probabilidade de Transição

Em uma cadeia de Markov, o símbolo p_{ij} (probabilidade de passar de *i* para *j* em uma fase) é usado para representar a probabilidade (condicional) de que, dado que o sistema esteja no estado *i* em um certo momento, venha a estar no estado *j* no intervalo de tempo seguinte.

Por exemplo, com referência ao exemplo dado anteriormente, no item 2.1, tem:

$$p_{23} = 1/6 \quad (i = 2,\ j = 3)$$

$$p_{33} = 5/6 \quad (i = 3,\ j = 3)$$

$$p_{13} = 0 \quad (i = 1, j = 3)$$

Se:

A = evento do sistema no estado i no tempo n

B= evento do sistema no estado j no tempo n+1

Então:

$$pij = Pr(A|B)$$

Em geral, os p_{ij} são chamados as probabilidades de transição de cadeias de Markov. De fato, p_{ij} é a probabilidade de ocorrer uma transição do estado *i* para o estado *j*.

Em uma certa linguagem, a probabilidade de ocorrência de uma vogal ou consoante em uma seqüência de letras depende somente da letra precedente e não de quaisquer das letras anteriores a esta. Além disso, a análise de palavras dadas indica como válidas as seguintes probabilidades:

Tabela 6.

Letra Atual	Próxima Letra		
	Letra	**Vogal**	**Consoante**
	Vogal	0	1
	Consoante	0,49	0,51

Em outras palavras, a probabilidade de uma vogal seguir-se a uma consoante é de 0,49; a probabilidade de uma consoante se seguir a outra é de 0,51; a probabilidade de uma vogal seguir-se a outra vogal é de 0; e a probabilidade de uma consoante seguir uma vogal é 1.

Tabela 7.

Estado	Tipo de Letra
1	Vogal
2	Consoante

As probabilidades de transição da cadeia de Markov serão:

Tabela 8.

$p_{11} = 0 \qquad p_{12} = 1$

$p_{21} = 0{,}49 \qquad p_{22} = 0{,}51$

O estado do sistema em um dado tempo é, naturalmente, 1, se a letra observada for uma vogal, e 2, se a letra observada for uma consoante.

As probabilidades de transição indicam que é impossível para uma vogal seguir-se a uma outra vogal ($p_{11} = 0$), e que é ligeiramente mais provável uma consoante seguir-se a outra consoante ($p_{22} = 0{,}51$) do que uma vogal seguir-se a uma consoante ($p_{21} = 0{,}49$).

2.3. Matriz de Transição

Considere uma cadeia de Markov com estados 1,2,...,N. Seja p_{ij} a probabilidade de transição do estado *i* para o estado *j*. Então a matriz NxN $P=[p_{ij}]$ denomina-se matriz de transição de cadeia de Markov.

Por exemplo, se a cadeia de Markov tem quatro estados 1, 2, 3, 4, a matriz de transição pode ser representada assim:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{bmatrix}$$

Em alguns casos, é conveniente numerar os estados a partir de 0, ao invés de 1.

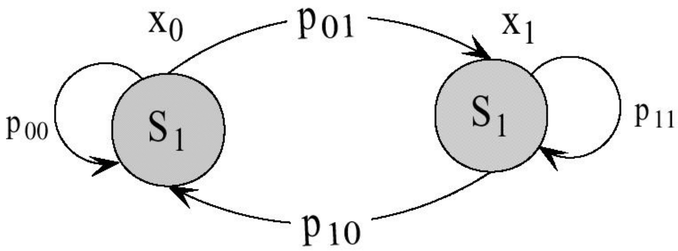

Figura 1: Diagrama da matriz de transições de estados.

2.3.1. Matriz de Transição de Duas Fases

Considere uma cadeia de Markov com a matriz de transição $P = [p_{ij}]$. A probabilidade de transição do estado *i* para o estado *j* em dois períodos de tempo denota-se por $p^{(2)}_{ij}$. A matriz $P^{(2)}=[p^{(2)}_{ij}]$ obtida denomina-se matriz de transição de duas fases da cadeia de Markov.

Suponha uma cadeia de Markov com N estados (digamos 1, 2, ..., N), de modo que a matriz $P=[p_{ij}]$ seja uma matriz NxN. Então a probabilidade de transição do estado *i* para o estado *j*, em dois períodos de tempo, é dada por:

$$p^{(2)}_{ij} = p_{i1} \cdot p_{1j} + p_{i2} \cdot p_{2j} + \dots + p_{iN} \cdot p_{Nj}$$

2.3.2. Matriz de Transição de *N* Fases

Considere uma cadeia de Markov com a matriz de transição $P = [p_{ij}]$. A probabilidade de transição do estado *i* para o estado *j* em *n* períodos de tempo denota-se por $p^{(n)}_{ij}$. A matriz $P^{(n)}=[p^{(n)}_{ij}]$ obtida denomina-se matriz de transição de *n* fases da cadeia de Markov.

Para determinar uma fórmula para $P^{(n)}$ em termos da matriz de transição P nada mais é do que a terceira potência da matriz P.

$$P^{(n)} = P^n$$

2.4. Distribuição de uma Cadeia de Markov

Dado que o estado inicial (tempo 0) do sistema seja *i*, a probabilidade de que o sistema esteja no estado *j* no tempo *n* é $p^{(n)}_{ij}$. Essa probabilidade pode ser determinada usando-se as potências da matriz de transição P. Suponha, entretanto, que o estado inicial não seja conhecido, e que somente as várias probabilidades de o sistema estar em um particular estado no tempo 0 estão disponíveis. Como se poderia então determinar a probabilidade do sistema se achar em um particular estado *j*, no tempo *n*?

2.4.1. Definição

Para cada n ≥ 0, seja $\pi_j^{(n)}$ a probabilidade de que uma cadeia de Markov esteja no estado *j*, no tempo *n*. Em particular, então $\pi_j^{(0)}$ denota a probabilidade de que a cadeia de Markov esteja inicialmente no estado *j*. Se a cadeia de Markov tem *N* estados, digamos, 1,2,..., *N*, convém considerarmos os seguintes vetores linha de comprimento *N*:

$$\pi^{(n)} = [\pi_1^{(n)}, \pi_2^{(n)}, \pi_N^{(n)}]$$

O vetor $\pi^{(n)}$ chama-se a distribuição da cadeia de Markov no tempo *n*. O vetor $\pi^{(0)}$ chama-se também a distribuição inicial da cadeia de Markov.

2.4.2. Teorema

Considere uma cadeia de Markov com distribuição inicial $\pi^{(0)}$ e a matriz de transição P. Então a distribuição da cadeia de Markov a qualquer tempo é dada por:

$$\pi^{(n)} = \pi^{(0)} . P^n$$

3. Cadeias Regulares

Uma das mais importantes características exibidas por muitas cadeias de Markov é um comportamento de equilíbrio em longo prazo. Em outras palavras, "depois de um longo tempo", a distribuição da cadeia de Markov permanece aproximadamente a mesma de período em período de tempo. Isso significa que, em longo prazo, as probabilidades de o sistema estar em cada um dos vários estados pouco ou nada variam à medida que o tempo passa.

Tabela 9.

π(0) = [0,4, 0,5, 0,1]	π(0) = [0,6, 0,25, 0,15]
π(n) = π(0) . Pn	π(n) = π(0) . Pn

Tabela 10.

π(0)	= [0,40000, 0,50000, 0,10000]	**π(0)**	= [0,60000, 0,25000, 0,15000]
π(1)	= [0,30000, 0,54000, 0,16000]	**π(1)**	= [0,40000, 0,41000, 0,19000]
π(2)	= [0,25000, 0,55400, 0,19600]	**π(2)**	= [0,30000, 0,48600, 0,21400]
π(3)	= [0,22500, 0,55740, 0,21760]	**π(3)**	= [0,25000, 0,52160, 0,22840]
π(4)	= [0,21250, 0,55694, 0,23056]	**π(4)**	= [0,22500, 0,53796, 0,23704]
π(5)	= [0,20625, 0,55541, 0,23834]	**π(5)**	= [0,21250, 0,54528, 0,24222]
π(19)	= [0,20000, 0,55001, 0,24999]	**π(19)**	= [0,20000, 0,55001, 0,24999]
π(20)	= [0,20000, 0,55001, 0,24999]	**π(20)**	= [0,20000, 0,55000, 0,25000]
π(21)	= [0,20000, 0,55000, 0,25000]	**π(21)**	= [0,20000, 0,55000, 0,25000]
π(22)	= [0,20000, 0,55000, 0,25000]	**π(22)**	= [0,20000, 0,55000, 0,25000]
π(23)	= [0,20000, 0,55000, 0,25000]	**π(23)**	= [0,20000, 0,55000, 0,25000]

A distribuição da cadeia de Markov permanece inalterada do tempo 20 em diante. De fato, os dados indicam que, para n ≥ 21, $\pi^{(n)}$=[0,20, 0,55, 0,25].

Em ambos os casos, nota-se não apenas uma tendência à estabilização das porcentagens, à longo prazo, mas também que a distribuição de "equilíbrio" é a mesma em ambos os casos, e igual a V. Isto é, para todas as distribuições iniciais até aqui experimentadas, temos $\pi^{(n)}$=V para valores suficientemente grandes de *n* (ou seja, depois de um tempo suficientemente longo).

3.1. Distribuição de Equilíbrio

Observando os resultados obtidos anteriormente, é possível afirmar que "à longo prazo, a probabilidade de estar em um dado estado é fornecida aproximadamente pelo vetor linha V=[0,20, 0,55, 0,25] independentemente da distribuição inicial". Tal afirmação é procedente não apenas para essa cadeia de Markov; um resultado semelhante se verifica para uma grande classe de cadeias de Markov.

3.1.1. Definição I

Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov. Diz-se que P é regular se alguma potência de P contêm somente entradas positivas, Diz-se que a cadeia de Markov é regular se sua matriz de transição é regular. É importante ressaltar o fato de quem, se a matriz de transição P não tem entradas nulas, ela é regular.

Tabela 11.

$P=\begin{bmatrix} 0,6 & 0,3 & 0,1 \\ 0,1 & 0,8 & 0,1 \\ 0,1 & 0,2 & 0,7 \end{bmatrix}$	A matriz P contém somente entradas positivas. Então P é regular.
$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0,49 & 0,51 \end{bmatrix}$	A matriz P contém uma entrada nula. Entretanto, e conseqüentemente a segunda potência de P tem somente entradas positivas. Assim P é regular.
$P=\begin{bmatrix} 0 & 0,2 & 0,8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0,7 & 0,3 \end{bmatrix}$	A matriz P contém entradas nulas e suas potências continuarão nulas. Assim P não é regular (absorvente).

3.1.2. Teorema I

Suponha que a matriz de transição P de uma cadeia de Markov seja regular. Seja $\pi^{(n)}$ a distribuição da cadeia de Markov no tempo n. Então existe um único vetor V para qual $\pi^{(n)}$ tende, isto é:

$$\pi^{(n)} = V, \text{ para } n \text{ grande,}$$

independentemente da distribuição inicial da cadeia de Markov. A esse vetor V denomina-se distribuição de equilíbrio da cadeia de Markov

3.1.3. Definição II

Seja W = [w1, w2, ..., wn], um vetor linha de comprimento N. Diz-se que W é um vetor probabilístico se todas as suas entradas forem não negativas e w1 + ... + wn = 1.

3.1.4. Teorema II

Seja P a matriz de transição de uma cadeia de Markov e suponha que P é regular. Então a distribuição de equilíbrio da cadeia de Markov é o único vetor probabilístico V que satisfaz à equação matricial:

$$\mathbf{VP=V}$$

Esse é um método explícito para determinar a distribuição de equilíbrio de uma cadeia de Markov com matriz de transição regular.

4. Cadeias Não Regulares (Absorventes)

Em algumas das seções anteriores, estudamos a classe de cadeias de Markov conhecidas como cadeias de Markov regulares. Sua propriedade fundamental é a de possuírem uma distribuição de equilíbrio. Isso significa que, a longo prazo, as probabilidades de o sistema estar em cada um dos vários estados estabilizam-se em determinados valores positivos. Em particular, então, após um período de tempo suficientemente longo, haverá uma probabilidade positiva de estar em qualquer dos estados da cadeia de Markov.

Agora estudaremos cadeias de Markov que são, em um certo sentido, o oposto das cadeias de Markov regulares. Trata-se das cadeias de Markov absorventes.

4.1. Definição I

Diz-se que um estado de uma cadeia de Markov é um estado absorvente se, uma vez nesse estado, é impossível sair dele. Em outras palavras, um estado i de uma cadeia de Markov é absorvente se e somente se $p_{ii}=1$ (de modo que $p_{ij}=0$, para $j \neq i$).

4.2. Definição II

Diz-se que uma cadeia de Markov é absorvente se ela tem um estado absorvente e se de cada estado não absorvente é possível ir para algum estado absorvente. Essa última condição significa que, para cada estado não absorvente *i*, existe um estado absorvente *j* tal que, para algum *n*, $p^{(n)i}_{ij} > 0$.

4.3. Teorema

Em uma cadeia de Markov absorvente, o estado do sistema será eventualmente um dos estados absorventes.

Isto quer dizer que, seja qual for o estado inicial da cadeia de Markov absorvente, após um número finito de transições ele estará em um dos estados absorventes e nesse estado ficará definitivamente.

5. Modelos de Markov Ocultos (HMM)

Existem processos de Markov que são modelados como aproximações do mundo real, onde nem todos os estados são perfeitamente conhecidos. Esses modelos são denominados modelos de Markov escondidos (HMM), e a questão central em torno desses modelos é o grau com que são capazes de capturar a essência do processo escondido sob eles.

Os modelos de Markov escondidos, que surgiram originalmente no domínio de reconhecimento da fala, atualmente têm sido empregados como modelos de computação natural, em trabalhos sobre visão computacional e reconhecimento de manuscritos, de formas, de gestos e expressões faciais, em biologia computacional, entre outros.

Referências

W. Yoselogff, Finite Mathematics, Worth Publishing, New York, 1975.

Dimuro, G. P.; Reiser, R. H. S.; Costa A. C. R.; Souza, P. L. R. Modelos de Markov e Aplicações. In: VI OFICINA DE INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL, Pelotas, 2002. Pelotas: Educat, 2002. p. 37 – 59.