John A. Van de Walle

MATEMÁTICA

NO ENSINO FUNDAMENTAL

FORMAÇÃO DE PROFESSORES E APLICAÇÃO EM SALA DE AULA

artmed®

6ª edição

V217m Van de Walle, John A.

Matemática no ensino fundamental [recurso eletrônico] : formação de professores em sala de aula / John A. Van de Walle ; tradução Paulo Henrique Colonese. – 6. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : Artmed, 2009.

Editado também como livro impresso em 2009.
ISBN 978-85-363-2090-8

1. Matemática – Ensino fundamental. 2. Conceitos numéricos. 3. Senso numérico. 4. Operações. I. Título.

CDU 51:373.3

Catalogação na publicação: Renata de Souza Borges CRB-10/1922

capítulo 18

Os Conceitos de Decimal, Porcentagem e o Cálculo Decimal

Nos currículos norte-americanos, os decimais são tipicamente introduzidos na 4ª série e a maior parte do trabalho com o cálculo de decimais ocorre na 5ª série, sendo repetido mais tarde na 6ª e 7ª série. Essa sequência de explorar primeiro as frações e depois os decimais é justificadamente a melhor abordagem. Porém, infelizmente os tópicos de frações e de decimais em geral são desenvolvidos muito isoladamente. Conectar as ideias de frações aos decimais pode ser extremamente útil, tanto de um ponto de vista pedagógico quanto de um ponto de vista prático e social. A maior parte deste capítulo aborda essa conexão.

Ideias importantes

1. Os números decimais são simplesmente outro modo de escrever frações. Ambas as notações têm seu valor. Uma maior flexibilidade é adquirida por meio da compreensão de como os dois sistemas simbólicos estão relacionados.
2. O sistema numérico posicional de base dez se estende infinitamente em dois sentidos: para valores minúsculos como também para valores gigantescos. Entre quaisquer dois valores posicionais vizinhos, a razão de 10:1 permanece a mesma.
3. A vírgula decimal* é uma convenção que foi desenvolvida para indicar a posição das unidades. A posição à esquerda da vírgula decimal é a *unidade* que está sendo contada como conjuntos ou unidades.
4. As porcentagens são simplesmente *centésimos* e, como tal, são um terceiro modo de escrever frações e decimais.
5. A adição e subtração com decimais estão baseadas no conceito fundamental de adicionar e subtrair números em valores posicionais – uma extensão simples dos números inteiros.
6. A multiplicação e a divisão de dois números produzirão os mesmos algarismos, não importando as posições da vírgula decimal. Como resultado, para a maioria dos propósitos práticos, não há razão para desenvolver novas regras para multiplicação e divisão decimais. Em vez disso, os cálculos podem ser realizados com números inteiros com a vírgula decimal posicionada por meio de raciocínio estimativo.

* N. de T.: Em países de língua inglesa, ainda adota-se o ponto em vez da vírgula como indicador e separador da parte inteira e da parte decimal.

Conexões de Conteúdos *Matemáticos*

As conexões mais importantes com decimais construídas nesse capítulo são entre números decimais e os conceitos de frações.

- **Conceitos de fração** (Capítulo 16): Ambos os simbolismos decimal e fracionário representam as mesmas ideias – os números racionais.
- **Medidas** (Capítulo 20): O sistema métrico é modelado após o sistema de base dez e todas as medidas métricas serem expressas em decimais em vez de frações. A conversão de uma medida métrica em outra é bastante simples, desde que haja uma compreensão do sistema decimal.
- **Sistema numérico real** (Capítulo 24): a numeração decimal é útil ao caracterizar e compreender a *densidade* dos números racionais e também para a *abordagem aproximativa* dos números irracionais.

Conectando dois sistemas representacionais diferentes

Os símbolos 3,75 e $3\frac{3}{4}$ representam a mesma quantidade, apesar de superficialmente as duas parecerem bastante diferentes. Especialmente para as crianças, o mundo das frações e o mundo dos decimais são muito distintos.** Até os adultos tendem a pensar em frações como *conjuntos* ou *regiões* (três quartos de algo) enquanto pensam em decimais muito mais como entidades

** N. de T.: Para as crianças o diferenciar caracteriza o pensamento exclusivo que é muito mais fácil do que identificar semelhanças – pensamento inclusivo – ao organizar, agrupar e classificar um grupo de objetos.

numéricas. Ao dizermos às crianças que 0,75 é o mesmo que $\frac{3}{4}$, pode ser motivo de confusão. Embora modos diferentes de escrever os números tenham sido inventados, os números em si não são diferentes. Uma meta importante do ensino das numerações decimal e fracionária deve ser ajudar os alunos a perceber que ambos os sistemas representam os mesmos conceitos.

Para ajudar os alunos a estabelecer a conexão entre frações e decimais, podemos fazer três coisas. *Primeiro*, podemos usar os conceitos de fração e modelos familiares para explorar números racionais que sejam facilmente representados por decimais: décimos, centésimos e milionésimos. *Segundo*, podemos ajudá-los a perceber como o sistema de base dez pode ser estendido para incluir números menores que 1, como também números muito grandes. *Terceiro*, podemos ajudar os alunos a usar modelos para fazer traduções significativas entre frações e decimais. Esses três componentes serão discutidos um de cada vez.

As frações de base dez

As frações com denominadores 10, 100, 1.000, e assim por diante, serão referidas neste capítulo como frações de base dez. Esse é apenas um termo conveniente, mas não é comumente encontrado na literatura. As frações tais como $\frac{7}{10}$ ou $\frac{63}{100}$ são exemplos de frações de base dez.

Modelos de fração de base dez

A maior parte dos modelos comuns para frações são um pouco limitados em relação à finalidade de exibir frações de base dez. Os modelos familiares de fração em geral não conseguem mostrar centésimos ou milionésimos. É importante fornecer modelos para essas frações usando as mesmas abordagens conceituais usadas para frações tais como terços e quartos.

Dois modelos de região muito importantes podem ser usados para modelar frações de base dez. Primeiro, para modelos de décimos e centésimos, discos circulares como mostrado na Figura 18.1 podem ser impressos em papel cartão (veja ficha-modelo). Cada disco é marcado com 100 intervalos iguais em torno da extremidade, sendo recortado ao longo de um raio. Dois discos de cores diferentes, deslizados junto como mostrado, podem ser usados para modelar qualquer fração menor que 1. As frações modeladas nesse disco de centésimos podem ser lidas como frações de base dez, considerando os espaços em torno da extremidade, mas ainda são rememorativos do modelo de *pizza* tradicional.

O modelo mais comum para frações de base dez é um quadriculado 10×10. Esses quadriculados podem ser impressos em papel para os alunos pintarem várias frações (veja Figura 18.2 e a ficha-modelo). Outra variação importante é usar tiras e quadrados de valor posicional de base dez. Como um modelo de fração, um quadriculado de 10 cm usado como o modelo de centenas para números inteiros, agora é tomado como o todo ou 1. Cada tira é então um décimo e cada quadradinho é um centésimo. Nas fichas-modelo você encontrará um grande quadrado subdividido

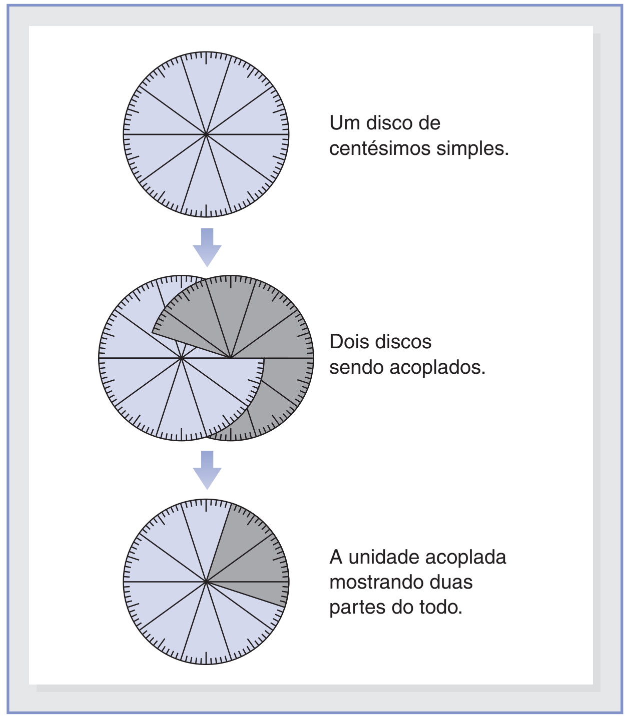


FIGURA 18.1 Um disco de centésimos para modelar frações de base dez.

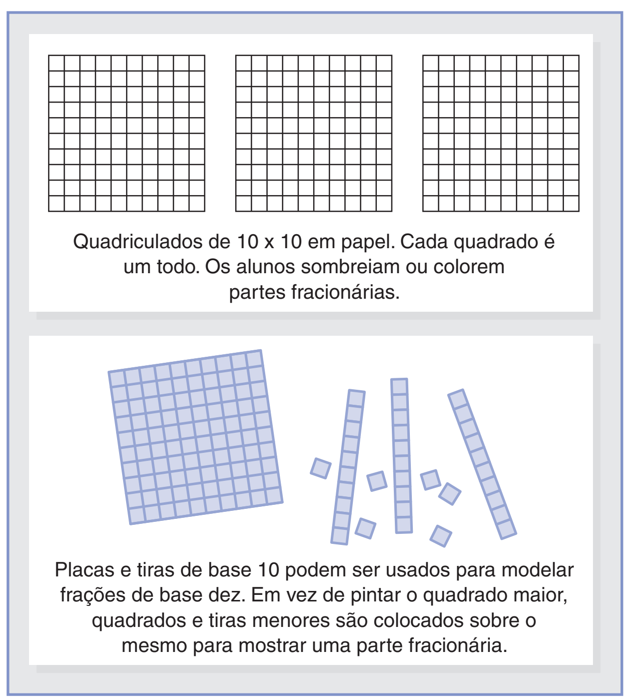


FIGURA 18.2 Quadriculados de 10×10 modelam frações de base dez.

em 10.000 minúsculos quadradinhos. Quando mostrado em um retroprojetor, os quadrados individuais ou de dez milionésimos podem ser facilmente identificados e coloridos com uma caneta para transparências.

Um dos melhores modelos de comprimento é uma *vara ou régua de madeira de um metro*. Cada decímetro é um décimo da vara inteira, cada centímetro é um centésimo e cada milímetro é um milionésimo. Qualquer modelo de reta numérica subdividido em 100 partes é um modelo igualmente útil para os centésimos.

Muitos professores usam o *sistema monetário* (dinheiro) como um modelo para decimais e até certo ponto é útil. Porém, para as crianças, o dinheiro é quase exclusivamente um sistema de duas casas decimais: números tais como 3,2 ou 12,1389 não se relacionam ao dinheiro. O contato inicial das crianças com decimais deve ser mais flexível e, então, o dinheiro não é recomendado como um modelo decimal, pelo menos não no nível introdutório. O dinheiro é certamente uma aplicação importante da numeração decimal.

Múltiplos nomes e formatos

O trabalho inicial com frações de base dez é principalmente planejado para familiarizar os alunos com os modelos, ajudá-los a começar a pensar sobre quantidades em termos de décimos e centésimos e aprender a ler e escrever frações de base dez de diferentes modos.

Faça-os mostrarem uma fração de base dez usando qualquer modelo de fração de base dez. Uma vez que uma fração, digamos, $\frac{65}{100}$ seja modelada, as seguintes coisas podem ser exploradas:

- Essa fração é maior ou menor que $\frac{1}{2}$? Que $\frac{2}{3}$? Que $\frac{3}{4}$? Alguma familiaridade com essas frações pode ser desenvolvida por *comparação* com frações que sejam mais fáceis de considerar.
- Quais são alguns dos diferentes *modos de dizer* essa fração usando décimos e centésimos? (“6 décimos e 5 centésimos”, “65 centésimos”) Inclua milionésimos quando apropriado.
- Mostre dois *modos de escrever* essa fração ($\frac{65}{100}$ ou $\frac{6}{10} + \frac{5}{100}$).

As últimas duas questões são muito importantes. Quando as frações de base dez são mais tarde escritas como decimais, elas são normalmente lidas como uma fração única. Isto é, 0,65 são lidos como “sessenta e cinco centésimos”. Mas para compreendê-los em termos de valor posicional, o mesmo número pode ser pensado e descrito como “6 décimos e 5 centésimos”. Um número misto como $5\frac{13}{100}$ é normalmente lido do mesmo modo como um decimal: 5,13 são “cinco e treze centésimos”. Para propósitos de valor posicional, também deve ser entendido como $5 + \frac{1}{10} + \frac{3}{100}$.

As formas expandidas serão úteis ao traduzir essas funções para decimais. Os exercícios nesse nível introdutório devem incluir todas as conexões possíveis entre os modelos, as várias formas orais e as várias formas escritas. Dado um modelo ou uma fração escrita ou oral, os alunos devem ser capazes de dizer as outras duas formas da fração, inclusive a forma equivalente quando for apropriado.

Estendendo o sistema de valor posicional

Antes de considerar os números decimais com os alunos, é aconselhável revisar algumas ideias sobre números inteiros de valor posicional. Uma das mais básicas é a razão 10:1 entre os valores de quaisquer duas posições adjacentes. Em termos de um modelo de base dez como tiras e placas quadradas, 10 peças de qualquer elemento formarão uma peça do próximo elemento maior e vice-versa.

Uma relação em dois sentidos

A regra 10 [grupos menores] formam 1 [grupo maior] continua indefinidamente para valores posicionais das peças cada vez maiores. Esse conceito pode ser divertido de explorar em termos de descobrir qual será o tamanho de tiras e placas quadradas se você mudar sua posição de seis a oito casas de lugar.

Se você estiver usando o modelo de tiras e placas quadradas, por exemplo, as formas de tira e de placa quadrada se alternam em uma progressão infinita conforme eles ficam cada vez maiores. Tendo estabelecido a progressão para as peças maiores, aborde a ideia de que cada peça à direita nessa série é reduzida por um décimo. Então, a pergunta crítica se torna, “sempre existirá uma peça menor?”. Na experiência dos alunos, a peça menor é a placa quadrada de centímetro ou peça da unidade. Mas até aquele pedaço não poderia ser dividido em 10 tiras menores? E essas pequenas tiras não poderiam ser divididas em 10 placas quadradas muito menores e assim por diante? Para o olho da mente [de nossa imaginação e abstração] não existe “a” menor tira ou placa quadrada.

A meta dessa discussão é ajudar os alunos a perceber que uma razão de 10:1 pode se estender *infinitamente* nos dois sentidos. Não existe “a” peça menor nem “a” peça maior. A relação entre as peças adjacentes é a mesma independente de quais duas peças adjacentes estejam sendo consideradas. A Figura 18.3 ilustra essa ideia.

O papel da vírgula decimal

Uma ideia importante a ser percebida nessa discussão é que não há motivo interno para que qualquer uma das posições deva ser naturalmente escolhida como a *unidade* ou posição das unidades. Em termos de tiras e placas quadradas, por exemplo, qual peça é a peça das unidades? A menor placa quadrada (centímetro)? Por quê? Por que não uma placa maior ou uma menor? Por que não uma tira? *Qualquer peça pode ser eficazmente escolhida como a peça da unidade*.

Como mostrado na Figura 18.4, uma dada quantidade pode ser escrita em diferentes modos, dependendo da escolha da unidade ou de qual peça é usada para contar a coleção inteira. A vírgula decimal é colocada entre duas posições com a convenção de que a posição à esquerda do decimal é a casa ou posição das unidades. Desse modo, o papel da vírgula decimal é *designar a posição das unidades* e ela faz isso se colocando à direita daquela posição.

Uma boa caricatura para a vírgula decimal é mostrada na Figura 18.5. Os “olhos” da vírgula decimal sempre se dirigem ao nome das unidades. Um disco em cartão desse rosto da vírgula

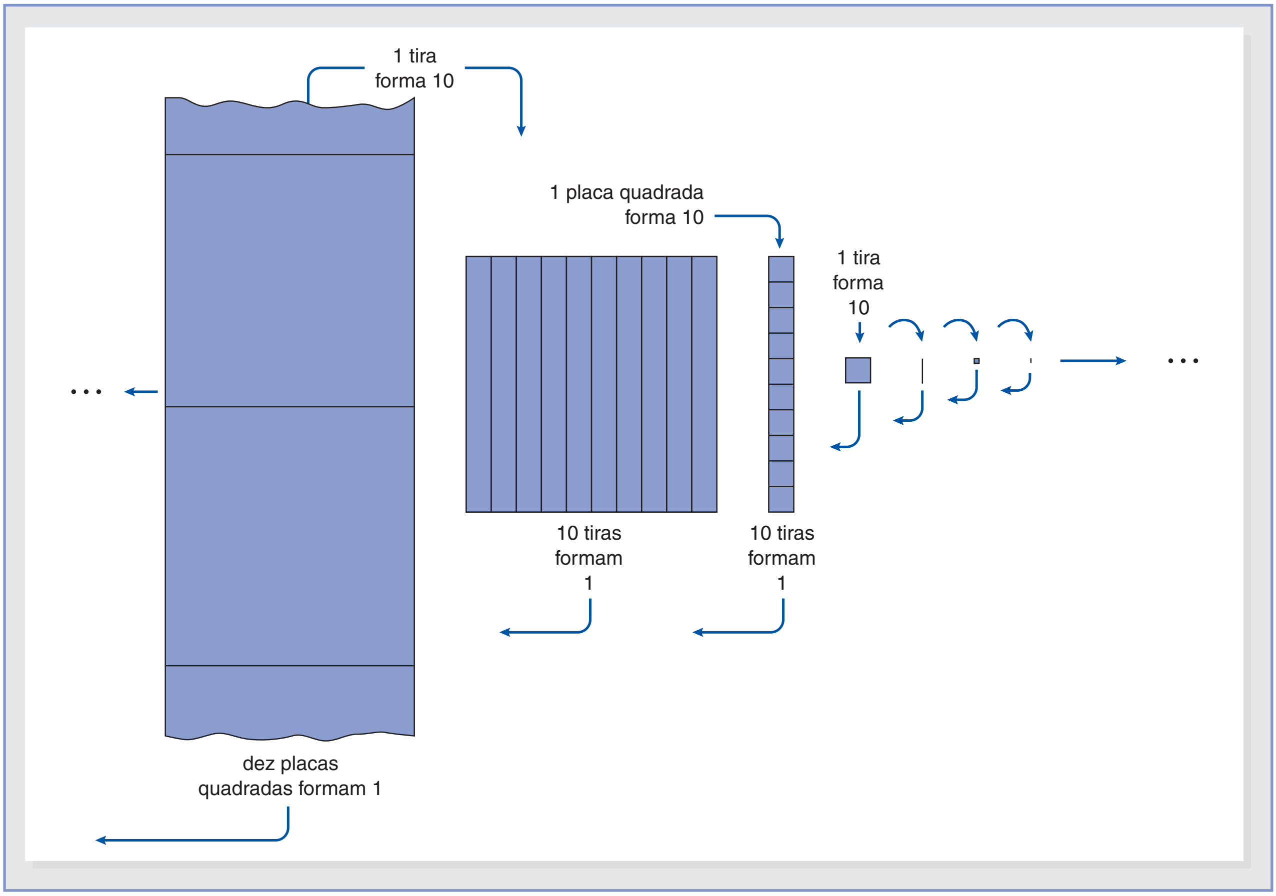


FIGURA 18.3 Teoricamente, as tiras e placas quadradas se estendem infinitamente em ambos os sentidos.

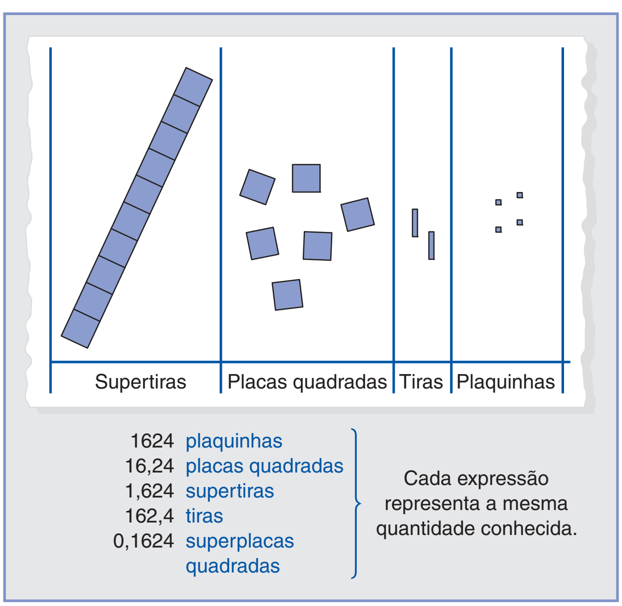


FIGURA 18.4 A vírgula decimal indica em que posição as unidades estão.

decimal pode ser usado entre modelos de base dez adjacentes ou em um quadro de valor posicional (encontrado com o disco de centésimos nas fichas-modelo). Se tal vírgula decimal for colocada entre as placas quadradas e tiras na Figura 18.4, as placas então seriam designadas como as unidades e 16,24 seria a forma escrita correta para o modelo.

Atividade **18.1**

A nomenclatura decimal e a unidade

Peça que os alunos apresentem um certo número de peças de base dez em suas escrivaninhas. Por exemplo, pegue três placas, sete tiras e quatro plaquinhas. Se refira as peças como "placas", "tiras" e "plaquinhas" e chegue a um acordo para os nomes das peças teóricas menores e maiores. À direita das plaquinhas podemos ter "tiras minúsculas" e "placas minúsculas." À esquerda das placas podemos ter "supertiras" e "superplacas". Cada aluno também deve ter um modelo "sorriso" de vírgula decimal. Agora peça aos estudantes para escrever e dizer quantas placas eles têm, quantas supertiras e assim por diante, como na Figura 18.4. Os alunos posicionam sua vírgula decimal adequadamente e também escrevem e dizem as quantidades.

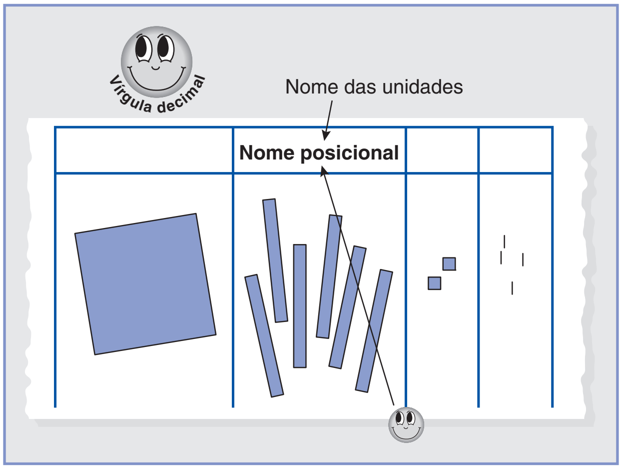


FIGURA 18.5 A vírgula decimal sempre "olha" para o nome da posição das unidades.

A Atividade 18.1 ilustra vivamente a convenção de que a vírgula decimal indica a chamada unidade e que a unidade pode mudar sem mudar a quantidade.

O decimal em medidas e unidades monetárias

A noção de que a vírgula decimal "olha para o lugar das unidades" é útil em uma variedade de contextos. Por exemplo, no sistema métrico, sete valores posicionais possuem nomes mais familiares. Como mostrado na Figura 18.6, a vírgula decimal pode ser usada para designar quaisquer desses lugares como a unidade sem mudar a medida real. Nosso sistema monetário também é um sistema decimal. Na quantidade R$ 172,95, a vírgula decimal designa a posição dos reais como a unidade. Existe 1 centena, 7 dezenas, 2 unidades, 9 moedas de dez centavos e 5 moedas de 1 centavo (de reais) nessa quantidade de dinheiro independente de como seja escrita. Se o centavo for a unidade designada, a mesma quantidade seria escrita como 17.295 *centavos* ou 17.295,0 *centavos*. Poderia da mesma maneira corretamente ser 0,17295 de milhares de reais ou 1.729,5 moedas de dez centavos.

No caso de medidas como comprimentos ou pesos métricos ou no sistema monetário norte-americano, o nome da unidade é escrito após o número em vez de acima do algarismo como em um quadro de valor posicional. Você pode ter 1,62 metros de altura, mas não faz sentido dizer que você tem "1,62 de altura". No jornal, podemos ler sobre os gastos do Congresso R$ 7,3 bilhões. Aqui as unidades são *bilhões de reais* e não reais. Uma cidade pode ter uma população de 2,4 milhões das pessoas. Isso é o mesmo que 2.400.000 indivíduos.

O componente de blocos numéricos do *e-Tools* (Scott Foresman) permite ao usuário colocar qualquer bloco numérico de base dez na tela com os totais mostrados ou em palavras, ou na forma expandida, ou simplesmente como um número. De interesse para a discussão atual é que qualquer um dos quatro tamanhos de placas quadradas pode ser designado como a unidade. Quando uma mudança da unidade é feita, o total é consequentemente alterado.

O *applet Base Blocks – Decimals* (Blocos de Base Decimal) da NLVM (http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html) permite essa mesma mudança da unidade, mas de uma maneira diferente. No *Base Blocks*, você pode escolher o número de valores decimais que você quer mostrar, mas só uma discussão indicaria como a unidade muda com uma mudança dos valores posicionais. ■

Estabelecendo a conexão fração--decimal

Para conectar os dois sistemas de numeração, fracionários e decimais, os alunos devem fazer traduções orientadas por conceitos. Isto é, traduções baseadas em compreensão em vez de uma regra ou algoritmo. O propósito de tais atividades está menos relacionado à habilidade de converter uma fração a um decimal do que com a construção do conceito de que ambos os sistemas são usados para expressar as mesmas ideias. O local certo para começar são com as frações de base dez.

quilômetro	hectômetro	decâmetro	metro	decímetro	centímetro	milímetro
		4	3	8	5	

4 decâmetros, 3 metros, 8 decímetros e 5 centímetros

43.850 milímetros
4.385 centímetros
43,85 metros
0,04385 quilômetros

nomes de unidades

FIGURA 18.6 No sistema métrico internacional (SI), cada posição do valor posicional tem um nome. A vírgula decimal pode ser colocada para designar que comprimento é o comprimento da unidade.

Atividade 18.2

Das frações de base dez aos decimais

Para esta atividade, peça que os alunos usem suas tiras e placas de valor posicional. Chegue a um acordo de que a placa grande representa a unidade. Faça-os cobrirem uma quantidade fracionária de base dez da placa usando suas tiras e plaquinhas. Por exemplo, faça-os cobrirem $2\frac{35}{100}$ das placas. Os números inteiros exigem placas adicionais. A tarefa é decidir como escrever essa fração como um decimal e demonstrar a conexão usando seus modelos concretos.

Nessa última atividade, uma razão típica (e correta) de por que $2\frac{35}{100}$ são o mesmo que 2,35 é que existem 2 conjuntos, 3 décimos e 5 centésimos. É importante ver isso concretamente. Os exatos mesmos materiais que são usados para representar $2\frac{35}{100}$ das placas podem ser reorganizados ou colocados em um quadro imaginário de valor posicional com uma vírgula decimal de papel usada para designar a posição das unidades como mostrado na Figura 18.7.

O inverso dessa atividade também é valioso. Apresente aos alunos um número decimal tal como 1,68 e faça-os mostrarem-no com peças de base dez. A tarefa deles é escrever isso como uma fração e mostrá-lo como uma parte fracionária de uma placa.

Embora essas *traduções* entre decimais e frações de base dez sejam bastante simples, a agenda principal de trabalho é que os alunos aprendam desde o início que os decimais são simplesmente frações.

A calculadora também pode desempenhar um papel significativo no desenvolvimento do conceito decimal.

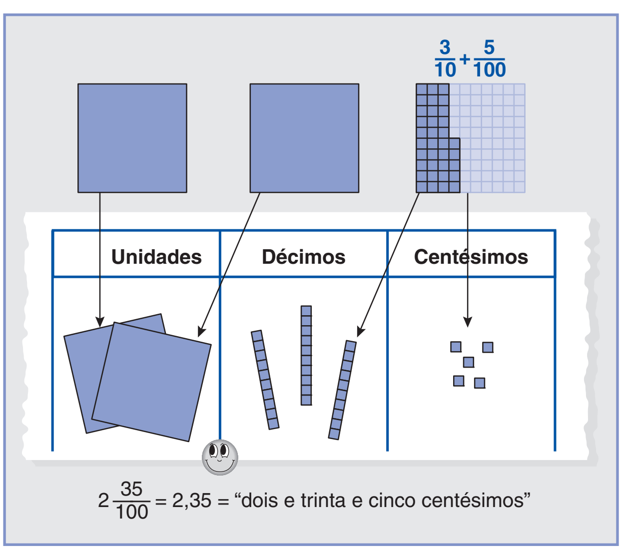


FIGURA 18.7 Tradução de uma fração de base dez para um decimal.

Atividade 18.3

A contagem decimal na calculadora

Relembre como fazer a calculadora “contar” digitando [+] 1 [=] [=]... Agora faça os alunos digitarem [+] 0,1 [=] [=]... Quando a tela mostrar 0,9, pare e discuta o que isso significa e o que a tela exibirá com a próxima digitação.

Muitos predirão 0,10 (pensando que 10 vem após 9). Essa predição é até mais interessante se, a cada digitação, os alunos forem acumulado tiras de base dez como modelos para os décimos. Mais uma digitação significaria mais uma tira, ou 10 tiras.

Por que a calculadora não deve mostrar 0,10? Quando a décima digitação produzir uma exibição de 1 (Calculadoras nunca exibição zeros à direita do decimal), a discussão deve girar ao redor da troca de 10 tiras por uma placa. Continue a contar até 4 ou 5 por décimos. Quantas digitações para conseguir ir de um número inteiro até o próximo? Tente contar por 0,01 ou por 0,001. Essas contagens ilustram o quão pequenos um centésimo e um milésimo realmente são. É necessário 10 contagens para chegar de 0,001 a 0,01 e 1.000 contagens para alcançar 1.

O fato de a Calculadora contar 0,8; 0,9; 1; 1,1 em vez de 0,8, 0,9, 0,10, 0,11 deve provocar a questão “Isso faz algum sentido? Nesse caso, por quê?”.

As calculadoras que permitem a entrada de frações também têm uma função de conversão fração-decimal. Em algumas calculadoras um decimal como 0,25 será convertido na fração de base dez $\frac{25}{100}$ e permitirá ou uma simplificação manual ou automática. As calculadoras gráficas podem ser fixadas de forma que a conversão seja com ou sem simplificação. A habilidade das calculadoras de fração de ir de um lado a outro entre frações e decimais as torna uma ferramenta valiosa quando os alunos começam a conectar o simbolismo fracionário e decimal.

Desenvolvimento do senso numérico decimal

Até agora, a discussão girou em torno da conexão de decimais com frações de base dez. O senso numérico decimal implica mais. Significa ter uma intuição sobre ou uma compreensão “amigável” dos números. Para esse fim, é útil conectar os decimais às frações com as quais as crianças estão familiarizadas, decimais que sejam facilmente comparados e ordenados e a decimais próximos de números familiares úteis.

Frações familiares conectadas a decimais

O capítulo 16 mostrou como ajudar os alunos a desenvolver uma familiaridade conceitual com frações simples, especialmente metades, terços, quartos, quintos e oitavos. Devíamos estender essa familiaridade para os mesmos conceitos expressos como decimais. E uma maneira de fazer isso é solicitar aos alunos que traduzam frações familiares para decimais por meio de um modelo de base dez.

As próximas duas atividades têm o mesmo propósito – ajudar os alunos a pensar sobre decimais em termos de equivalentes de frações familiares e estabelecer essa conexão de um modo conceitual.

Atividade 18.4

De frações amigáveis a decimais

Os alunos recebem algumas frações "amigáveis" para converter em decimais. Primeiro, eles modelam a fração usando ou um quadriculado de 10 × 10 ou tiras e placas de base dez. Usando o modelo como um guia, eles então escrevem e esboçam uma explicação para o equivalente decimal. Se tiras e placas forem usadas, certifique-se de que eles desenharam figuras como parte de suas explicações.

Uma boa sequência é começar com metades e quintos, então quartos e possivelmente oitavos. Terços são utilizados melhor como uma atividade especial.

A Figura 18.8 mostra como as *traduções* na última atividade poderiam acompanhar um quadriculado de 10 × 10. Para quartos, os alunos frequentemente sombreiam uma seção 5 × 5 (metade de uma metade). A pergunta então se torna como traduzir isso para decimais. Pergunte aos estudantes como eles cobririam $\frac{1}{4}$ com tiras e placas se eles só pudessem usar no máximo nove plaquinhas. A fração $\frac{3}{8}$ representa um desafio maravilhoso. Uma sugestão poderia ser achar primeiro $\frac{1}{4}$ e então perceber que $\frac{1}{8}$ é metade de um quarto. Lembre-se de que as peças pequenas seguintes são décimos das placas pequenas. Então, uma metade de uma placa é $\frac{5}{1000}$.

LIÇÃO EXPANDIDA

Um plano de lição expandida baseada na Atividade 18.4, "De frações amigáveis a decimais", pode ser encontrado no *site* www.artmed.com.br.

Como o modelo circular possui um forte vínculo mental às frações, é importante dedicar algum tempo às conversões de fração para decimais usando o disco de centésimos.

Atividade 18.5

Estime, então verifique

Com a face branca do disco virada para os alunos, peça que eles ajustem o disco para mostrar uma fração amigável particular, por exemplo, $\frac{3}{4}$. Em seguida, eles viram o disco e registram quantos centésimos estão na seção que eles estimaram (observe os contrastes de cor quando o disco for virado). Finalmente, eles devem estabelecer um argumento para o número correto de centésimos e o correspondente equivalente decimal.

A componente de estimativa da última atividade acrescenta interesse e o "sentimento" visual de frações é maior que com tiras e placas. Em uma turma de 5ª série que estava tendo dificuldade em encontrar um equivalente decimal para seu disco de fração em centésimos, o professor cortou alguns discos extras em pedaços de décimos e centésimos de modo que essas partes da fração podiam ser colocadas em um quadro. (Veja Figura 18.9.)

A exploração de modelagem de $\frac{1}{3}$ como um decimal é uma boa introdução ao conceito de um decimal infinitamente repetitivo. Tente a partição de uma placa inteira em 3 partes usando

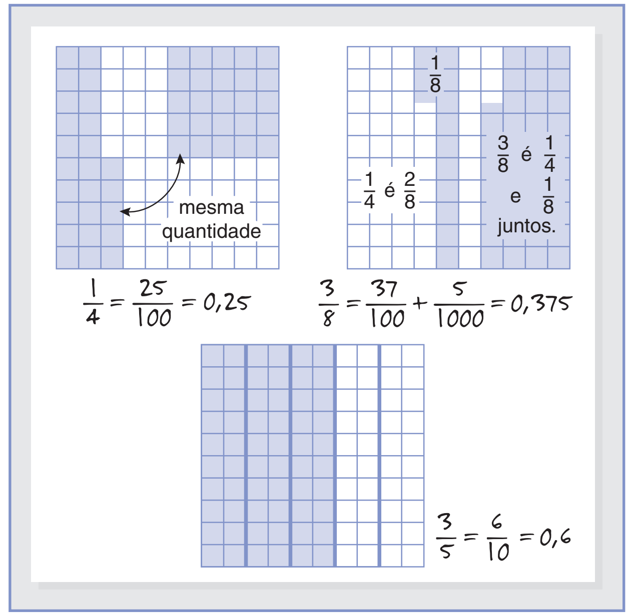


FIGURA 18.8 Frações familiares convertidas em decimais usando um quadriculado 10 x 10.

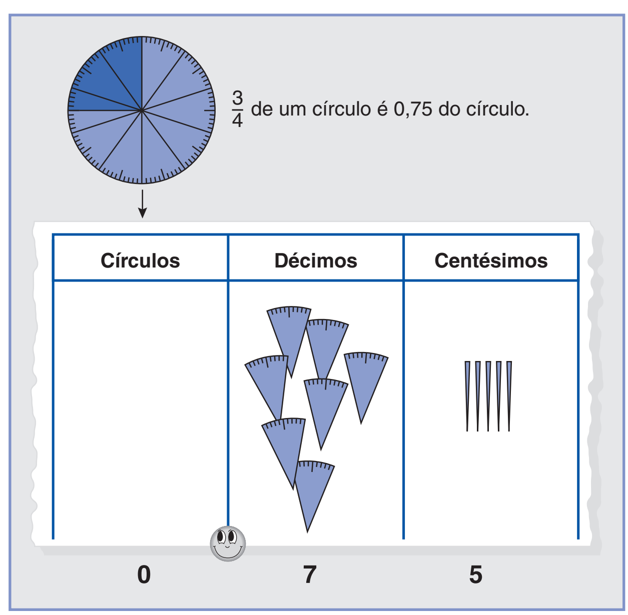


FIGURA 18.9 Os modelos de fração podem ser modelos decimais.

tiras e placas. Cada parte recebe 3 tiras com 1 sobra. Para dividir a tira que sobra, cada parte consegue 3 plaquinhas pequenas com sobra de 1 plaquinha. Para dividir a placa pequena, cada parte obtém 3 tiras minúsculas com sobra de 1 parte (Relembre que com peças de base dez, cada peça menor deve ser $\frac{1}{10}$ do tamanho da peça precedente). Cada uma das 3 partes obterão 3 tiras minúsculas com a sobra de 1. Fica óbvio que esse é um processo sem fim. Como resultado, $\frac{1}{3}$ é o mesmo que 0,333333... ou 0,3. Para a maioria dos propósitos práticos, $\frac{1}{3}$ é mais ou menos 0,333. De modo semelhante, $\frac{2}{3}$ é uma série repetitiva de seis, aproximadamente 0,667. Mais tarde, os alunos descobrirão que muitas frações não podem ser representadas por um decimal finito.

A reta numérica é outro bom modelo para estabelecer conexões. Os alunos são mais hábeis para pensar em decimais como números que aparecem na reta numérica do que para pensar em frações naquele modo. A próxima atividade continua o desenvolvimento das equivalências fração-decimal.

Atividade **18.6**

Decimais em uma reta fracionária amigável

Dê aos alunos cinco números decimais que tenham frações equivalentes amigáveis. Mantenha os números entre dois números inteiros sucessivos. Por exemplo, use 3,5, 3,125, 3,4, 3,75 e 3,66. Em uma ficha de trabalho, mostre uma reta numérica cercando os mesmos números inteiros. As subdivisões na reta numérica devem ser só quartos, só terços ou só quintos, mas sem etiquetas. A tarefa dos alunos é localizar cada um dos números decimais na reta numérica e fornecer a fração equivalente para cada um deles.

Os resultados dos exames do National Assessment of Educational Progress (Avaliação Nacional do Progresso Educacional, NAEP) revelam constantemente que os alunos têm dificuldades com a relação fração-decimal. Kouba e colaboradores (1988a) observam que os alunos conseguem expressar frações adequadas como decimais, mas apenas 40% deles na 7ª série conseguiram apresentar um equivalente decimal a um número misto. No sexto exame NAEP, os estudantes tinham dificuldade em posicionar decimais em uma reta numérica onde as subdivisões eram frações (Kouba, Zawojewski e Strutchens, 1997). No NAEP de 2000, 48% dos estudantes na 4ª série posicionaram corretamente números decimais em uma reta numérica quando os incrementos eram múltiplos de 0,1 – nem mesmo em incrementos de fração (Sowder, Weame, Martin e Strutchens, 2004). A divisão do numerador pelo denominador pode ser um meio de converter frações a decimais, mas isso não contribui em nada para a compreensão da equivalência resultante. Note que esse método não foi e não será sugerido neste capítulo.

Notas sobre avaliação

Uma avaliação simples, mas poderosa da compreensão decimal faz os alunos representarem dois números decimais relacionados, como 0,6 e 0,06, usando cada uma de três ou quatro representações diferentes: uma reta numérica (não fornecida, mas desenhada pelo aluno), um quadriculado de 10×10, dinheiro e materiais de base dez (Martinie e Bay-Williams, 2003). Para obter mais informações, peça que os alunos apresentem justificativas para as suas representações. Se eles têm significativamente mais dificuldade com um modelo que outros, isso pode significar que eles aprenderam como usar certos modelos, mas não necessariamente desenvolveram uma verdadeira compreensão dos decimais. O posicionamento de decimais em uma reta numérica em branco é talvez o mais interessante – e o que mais nos informa. (Veja Figura 18.10)

Aproximar para uma "boa" fração

No mundo real, os números decimais raramente são aqueles com equivalentes exatos para boas frações. Que fração você diria se aproxima do decimal 0,52? No sexto exame do NAEP, apenas 51% dos alunos de 8ª série selecionaram $\frac{1}{2}$. As outras escolhas foram $\frac{1}{50}$ (29%), $\frac{1}{5}$ (11 %), $\frac{1}{4}$ (6%) e $\frac{1}{3}$ (4%) (Kouba et al., 1997). Novamente, a explicação mais plausível para esse resultado é uma confiança excessiva em regras. Os estudantes precisam explorar o tamanho de números decimais e começar a desenvolver um senso de familiaridade com eles.

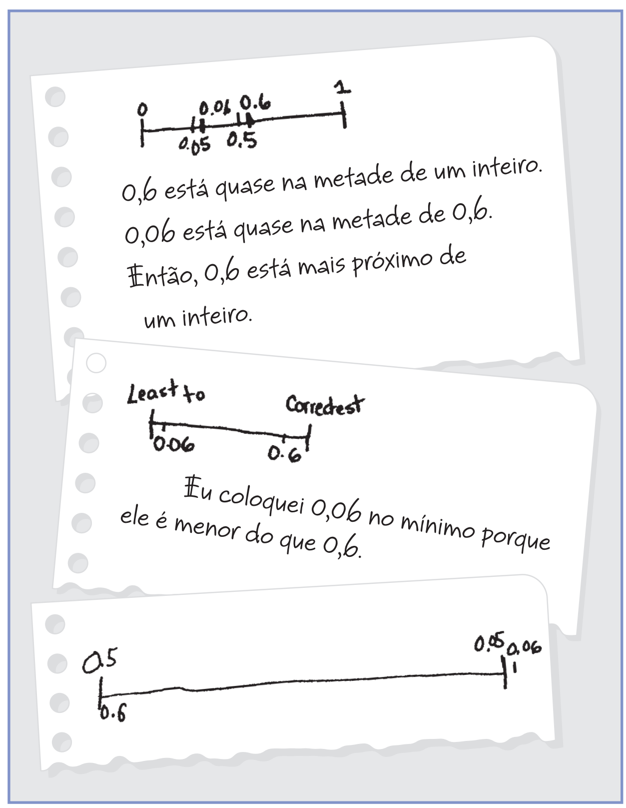


FIGURA 18.10 Três estudantes diferentes na 6ª série tentam desenhar uma reta numérica e mostrar os números 0,6 e 0,06.

Fonte: Reimpressa com permissão de Martinie, S. L. & Bay-Williams, J. (2003). *Investigating students' conceptual understanding of decimal fraction using multiple representations. Mathematics Teaching in the Middle School*, 8, 244-247, na p. 246. Direitos autorais © 2003 pelo National Council of Teachers of Mathematics. Todos os direitos reservados.

Como com as frações, o primeiro referencial numérico que deve ser desenvolvido são 0, $\frac{1}{2}$ e 1. Por exemplo, 7,3962 é mais próximo de 7 ou de 8? Por quê? (Você aceitaria essa resposta: "Mais próximo de 7 porque 3 é menor que 5"?) Isso é mais próximo de 7 ou $7\frac{1}{2}$? Geralmente os referenciais 0, $\frac{1}{2}$ ou 1 são bons o suficiente para dar sentido a uma situação. Se uma aproximação mais íntima for exigida, os alunos devem ser encorajados a considerar as outras frações amigáveis (terços, quartos, quintos e oitavos). Nesse exemplo, 7,3962 está mais próximo de 7,4, que é $7\frac{2}{5}$. Um bom senso numérico com decimais implicaria na habilidade de pensar rapidamente em uma fração significativa que seja um substituto próximo para quase qualquer número.

Para desenvolver esse tipo de familiaridade com decimais, os alunos não precisam de novos conceitos ou habilidades. Eles precisam da oportunidade de aplicar e discutir os conceitos relacionados às frações, valor posicional e decimais mais difíceis em atividades como a seguinte.

Atividade 18.7

Próximo de uma fração amigável

Faça uma lista com cerca de cinco decimais que estejam próximos, mas não exatamente equiparados a uma fração equivalente boa ou amigável. Por exemplo, use 24,8025, 6,59, 0,9003, 124,356 e 7,7.

A tarefa dos alunos é escolher um número decimal que esteja próximo de cada um desses decimais e que também tenha uma fração equivalente amigável que eles conheçam. Por exemplo, 6,59 é perto de 6,6 que é $6\frac{3}{5}$. Eles devem escrever uma explicação para suas escolhas. Diferentes estudantes podem selecionar frações equivalentes diferentes fornecendo uma boa discussão sobre qual é mais próxima.

Atividade 18.8

Melhor associação

No quadro, liste um arranjo disperso de cinco frações familiares e pelo menos cinco decimais que estejam próximos das frações, mas não exatas. Os alunos devem associar cada fração com o decimal que melhor se combinar (aproximar) com ele. A Figura 18.11 é um exemplo. A dificuldade é determinar o quão próximo as várias frações estão uma da outra.

Nas Atividades 18.7 e 18.8, os alunos terão uma variedade de razões para suas respostas. Compartilhar o seu raciocínio com a turma fornece uma oportunidade valiosa para todos aprenderem. Não enfoque as respostas, mas sim as razões.

As conexões entre modelos e os dois sistemas simbólicos para números racionais – frações e decimais – fornecem um bom esquema para avaliação. Forneça aos alunos um número representado em qualquer um desses três modos e faça-os fornecer as outras duas junto com uma explicação. Aqui estão alguns exemplos:

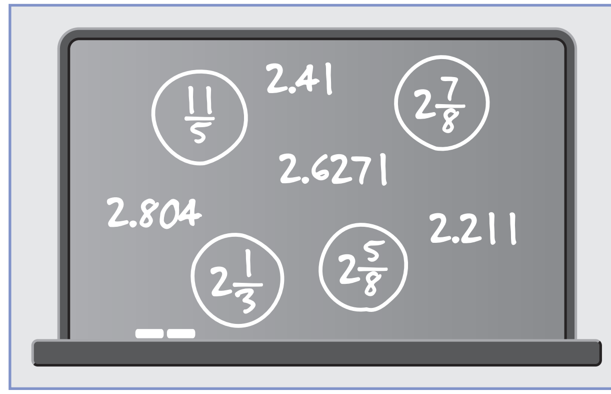
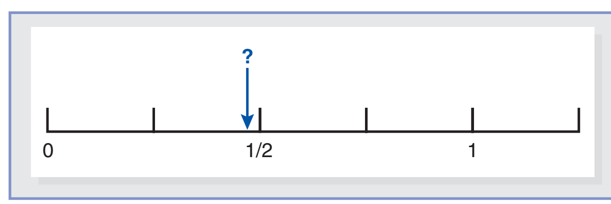


FIGURA 18.11 Combine os números decimais com a expressão fracionária mais próxima.

- Escreva a fração $\frac{5}{8}$ como um decimal. Use um desenho ou um modelo concreto (vara de metro ou quadriculado 10 x 10) e explique por que seu equivalente decimal está correto.
- Que fração também é representada pelo decimal 2,6? Use texto, figuras e números para explicar sua resposta.
- Use ambos, uma fração e um decimal, para dizer que ponto poderia ser o indicado nessa reta numérica. Explique seu raciocínio.



No último exemplo, é especialmente interessante observar que representações os alunos selecionam primeiro – fração ou decimal. Além disso, eles conseguem traduzir esse número para a outra representação ou fazem uma segunda estimativa independente? ■

Ordenando números decimais

Colocar uma lista de números decimais em ordem do menor ao maior é uma habilidade intimamente relacionada ao que acabamos de discutir. Considere a seguinte lista: 0,36, 0,058, 0,375 e 0,4. O erro mais comum é selecionar o número com mais algarismos como o maior, uma aplicação incorreta de ideias com números inteiros. Alguns alunos mais tarde levantam a ideia de que muitos algarismos à direita representam números muito pequenos. Eles então incorretamente identificam números com mais algarismos como menores. Ambos os erros refletem uma falta de compreensão conceitual do como os números decimais são construídos. As seguintes atividades podem ajudar a promover uma discussão sobre o tamanho relativo dos números decimais.

Atividade 18.9

Alinhando decimais

Prepare uma lista de quatro ou cinco números decimais que os alunos poderiam ter dificuldade em organizar e ordenar. Eles devem todos estar entre os mesmos dois números inteiros sucessivos. Faça os alunos primeiro predizerem a ordem dos números, do menor ao maior. Exija que eles usem um modelo de sua escolha para defender seu ordenamento. Ao lutarem para representar os números com um modelo (talvez uma reta numérica com 100 subdivisões ou um quadriculado de 10.000), os alunos necessariamente confrontarão a ideia de quais algarismos contribuem mais para o tamanho de um decimal.

Fora de sala de aula, quase nunca temos de pensar sobre a ordem de decimais “rotos” – decimais com números diferentes de algarismos após o ponto decimal. O propósito real de exercícios como o “Alinhando decimais” não é desenvolver uma habilidade – mas em vez disso criar uma melhor compreensão da numeração decimal. Tarefas como essa irão, porém, continuar a estar em testes padronizados porque são boas avaliações da compreensão decimal.

Atividade 18.10

Bons números próximos

Escreva um decimal de quatro algarismos no quadro, 3,0917 por exemplo. Comece com os números inteiros: “Está mais próximo de 3 ou de 4?” Então vá para os décimos: “Está mais próximo de 3,0 ou de 3,1?” Repita com centésimos e milionésimos. Em cada resposta, desafie os alunos a defender suas escolhas com o uso de um modelo ou outra explicação conceitual. Uma grande reta numérica sem números, mostrada na Figura 18.12, é útil.

Notas tecnológicas

O programa de exercícios Math Munchers Deluxe (Riverdeep) fornece exercícios úteis de equivalência fração-decimal em um formato que os alunos parecem gostar. Um arranjo de 25 frações, decimais, modelos de região de fração, porcentagens e relações é apresentada. O estudante deve achar todas as instâncias que são equivalentes a um determinado número decimal. O jogo também pode ser feito com números menores ou maiores em vez de equivalentes. Os 17 níveis de dificuldade fornecem um amplo desafio. Esse é um bom exemplo de exercícios valiosos. Porém, deve vir após as ideias conceituais estarem bem-desenvolvidas. O programa não oferece *feedback* ou auxílio conceitual. ■

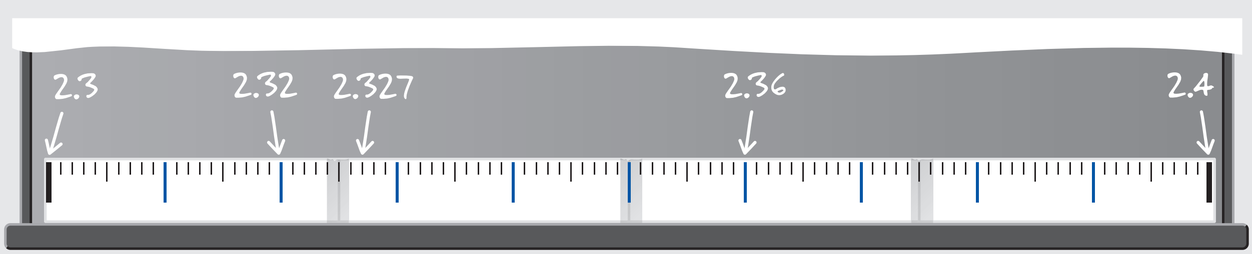
Outras equivalências frações-decimais

Recorde que o denominador é um divisor e o numerador é um multiplicador. Por exemplo, $\frac{3}{4}$, então, significa o mesmo que $3 \times (1 \div 4)$ ou $3 \div 4$. Então como você expressaria $\frac{3}{4}$ em uma calculadora com quatro funções simples? Simplesmente digite $3 \div 4$. A tela mostrará 0,75.

Com muita frequência, os alunos pensam que dividir o numerador pelo denominador é simplesmente um algoritmo para converter frações em decimais e não têm uma compreensão de por que isso pode funcionar. Use essa oportunidade para ajudar os estudantes a desenvolver a ideia de que em geral $\frac{a}{b} = a \div b$. (Leia os Capítulos 16 e 24)

Descobrir equivalentes decimais com uma calculadora pode produzir alguns padrões e observações interessantes. Por exemplo, aqui estão algumas perguntas a explorar:

- Que frações possuem equivalentes decimais que terminam (finitos)? A resposta está baseada no numerador, no denominador ou em ambos?
- Para uma determinada fração, como você pode dizer o comprimento máximo da parte repetida do decimal? Tente dividir por 7, por 11 e por 13, para obter uma resposta.
- Explore todos o nonos – 1/9, 2/9, 3/9,..., 8/9. Lembre-se de que $\frac{1}{3}$ é $\frac{3}{9}$ e que $\frac{2}{3}$ é $\frac{6}{9}$. Use apenas o padrão que você descobrir para predizer o que deve ser $\frac{9}{9}$. Mas, $\frac{9}{9} = 1$, não é?
- Como pode você encontrar uma fração que produza este decimal periódico: 3,454545...?



Corte quatro tiras de papel cartolina, medindo 20×70 centímetros. Cole uma extremidade à outra para formar uma longa tira. Coloque sobre o apoio para giz no quadro. Escreva os números com giz no quadro acima da tira. As extremidades podem ser qualquer intervalo de 1, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$.

FIGURA 18.12 Uma reta numérica decimal.

A tarefa final nesta lista pode ser generalizada para qualquer decimal periódico, ilustrando que todo decimal periódico é um número racional. Não é de todo útil que os alunos se tornem habilidosos nisso.

Padrões NCTM

Muito do que foi discutido nesta seção é recomendado pelos *Padrões*. "Os estudantes [de 3ª a 5ª série] devem usar modelos e outras estratégias para representar e estudar números decimais. Por exemplo, devem contar por décimos (um décimo, dois décimos, três décimos,...) verbalmente ou usar uma calculadora para associar e relacionar números inteiros com números decimais (...). Eles também devem investigar a relação entre frações e decimais, enfocando a equivalência" (p. 150).

Introduzindo porcentagens

Os livros didáticos tradicionalmente tratam porcentagens como um tópico independente e isolado de frações e decimais ou os abordam em um capítulo sobre razões. A conexão de porcentagens aos conceitos de frações e decimais é tão forte que também faz sentido discutir porcentagens quando os estudantes começam a ter uma boa noção das relações frações-decimais.

Um terceiro sistema operatório

Os resultados dos testes do NAEP e de numerosos outros estudos mostram constantemente que os estudantes têm dificuldade com problemas envolvendo porcentagens (Wearne e Kouba, 2000). Por exemplo, no sétimo NAEP apenas 35% dos estudantes na 8ª série podiam determinar uma quantidade seguindo uma dada porcentagem de aumento. Quase metade selecionou a resposta obtida adicionando o valor da própria porcentagem à quantidade original. Ou seja, para um aumento de 7%, eles selecionaram a resposta que era 7 a mais que a quantidade original. Uma boa razão para esse contínuo resultado obscuro é um fracasso no desenvolvimento significativo de conceitos porcentuais. Neste livro exploramos porcentagens duas vezes. Aqui, as conectaremos a frações e decimais. No próximo capítulo revisitaremos a porcentagem enquanto razão como parte do estudo do raciocínio proporcional. Pode-se argumentar que a conexão com as frações seja mais importante para a compreensão diária.

Outro nome para centésimos

O termo *por cento* é simplesmente outro nome para os *centésimos*. Se os estudantes podem expressar frações ordinárias e decimais simples como centésimos, o termo *por cento* pode ser substituído pelo termo *centésimo*. Considere a fração $\frac{3}{4}$. Como uma fração expressa em centésimos, ela é $\frac{75}{100}$. Quando $\frac{3}{4}$ é escrito em forma decimal é 0,75. Ambos, 0,75 e $\frac{75}{100}$ são lidos exatamente do mesmo modo, "setenta e cinco centésimos". Quando usado como operadores, $\frac{3}{4}$ de algo é o mesmo que 0,75 ou 75% daquela mesma coisa. Desse modo, por cento é meramente uma nova notação e terminologia, não se trata de um novo conceito.

Os modelos fornecem o vínculo principal entre frações, decimais e porcentagens, como mostrado na Figura 18.13. Modelos de fração de base dez são apropriados para frações, decimais e porcentagens, pois todos representam a mesma ideia.

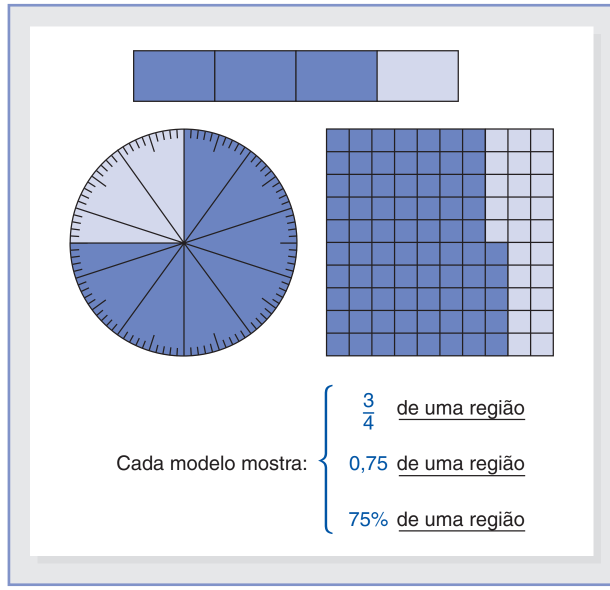


FIGURA 18.13 Os modelos conectam três *notações* diferentes.

Outra abordagem útil para a terminologia de por cento é discutir o papel da vírgula decimal. Lembre que a vírgula decimal identifica as unidades. Quando a unidade é 1, um número como 0,659 significa um pouco mais de 6 décimos da unidade. O termo *um* é compreendido (6 décimos de 1 unidade ou de um inteiro). Mas 0,659 também é 6,59 décimos e 65,9 centésimos e 659 milionésimos. O nome da unidade usada deve ser explicitamente identificado, caso contrário a unidade mudaria com cada posição do decimal. Como por cento é outro nome para os centésimos, quando o decimal identificar a posição do centésimo como unidade, a palavra por cento pode ser especificada como um sinônimo para centésimos. Deste modo 0,659 (de algum inteiro ou 1) é 65,9 centésimos ou 65,9 por cento daquele mesmo todo. Como ilustrado na Figura 18.14, a noção de posicionar a vírgula decimal para identificar a posição de por cento é conceitualmente mais significativa do que a regra aparentemente arbitrária: "Para mudar um decimal para um por cento, mova o decimal duas casas (posições) à direita". Uma ideia melhor é comparar os cen-

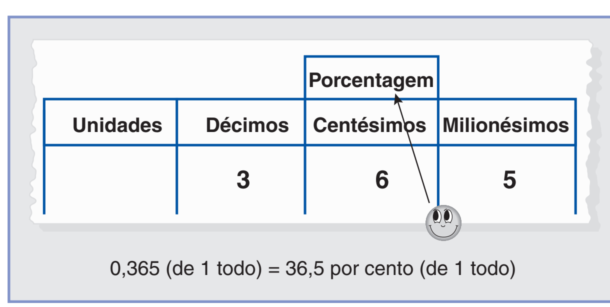


FIGURA 18.14 Os centésimos também são conhecidos como porcentagens.

tésimos com por cento tanto oralmente quanto com a notação específica.

Usando por cento com frações familiares

Os estudantes devem usar modelos de base dez para porcentagens quase do mesmo modo como para decimais. O disco com 100 marcas em torno da extremidade é agora um modelo para porcentagens como também um modelo de fração para centésimos. O mesmo é verdade para um quadriculado 10 x 10. Cada placa minúscula interna é 1% da placa. Cada fila ou tira de 10 placas pequenas não é apenas um décimo, mas também 10% da placa.

De modo semelhante, as frações familiares (metades, terços, quartos, quintos e oitavos) devem ser familiarizadas em termos de porcentagens como também decimais. Três quintos, por exemplo, são 60% como também 0,6. Um terço de uma quantidade é geralmente expresso como $33\frac{1}{3}$ % em vez de 33,3333... %. Do mesmo modo, $\frac{1}{8}$ de uma quantidade é $12\frac{1}{2}$ % ou 12,5% da quantidade. Essas ideias devem ser exploradas com modelos de base dez e não como regras sobre mudança da vírgula decimal.

Problemas realistas de porcentagem

Problemas dos três por cento

Os professores das séries finais do EF, falam sobre os “problemas dos três por cento”. A oração “____ é ____ por cento de _____” tem três espaços vazios para números; por exemplo, “20 é 25% de 80”. Os problemas clássicos dos três por cento se originaram dessa expressão estéril; dois dos números são dados e os estudantes devem completar o terceiro. Os estudantes aprendem muito rapidamente que você ou multiplica ou divide os dois números dados e que, às vezes, você tem que mover uma vírgula decimal. Mas, eles normalmente não possuem modo para determinar quando fazer o quê, que número dividir ou em que sentido mover a vírgula decimal. Como resultado, o desempenho em problemas de porcentagem é muito pobre. Além disso, as expressões, comumente encontradas usando terminologia de porcentagem, como os cartazes de vendas, impostos, dados de censos, informações políticas e as tendências econômicas, quase nunca estão no formato “____ é ____ por cento de _____”. Então quando se pede que os alunos resolvam um problema realista de porcentagem, eles em geral se sentem perdidos.

O Capítulo 16 explorou três tipos de exercícios com frações, em que um elemento: a parte, o inteiro ou a fração era desconhecido. Os alunos usaram modelos e relações de fração simples naqueles exercícios. Aqueles três tipos de exercícios são justamente o mesmo tipo de problema que os problemas dos três por cento. Então, em termos desenvolvimentistas faz sentido ajudar os estudantes a estabelecer as conexões entre os exercícios feitos com frações e os feitos com porcentagens. Como? Use os mesmos tipos de modelos e a mesma terminologia de partes, conjuntos e frações. A única coisa que é diferente é que o termo por cento será usado em vez de fração. Na Figura 18.15, três exercícios do Capítulo 16 foram modificados para a correspondente terminologia de porcentagem. Uma boa ideia para trabalhar inicialmente com porcentagens seria revisar (ou explorar pela primeira vez) todos os três tipos de exercícios em termos de porcentagens. Os mesmos três tipos de modelos podem ser usados (veja Figuras 16.9, 16.10 e 16.11).

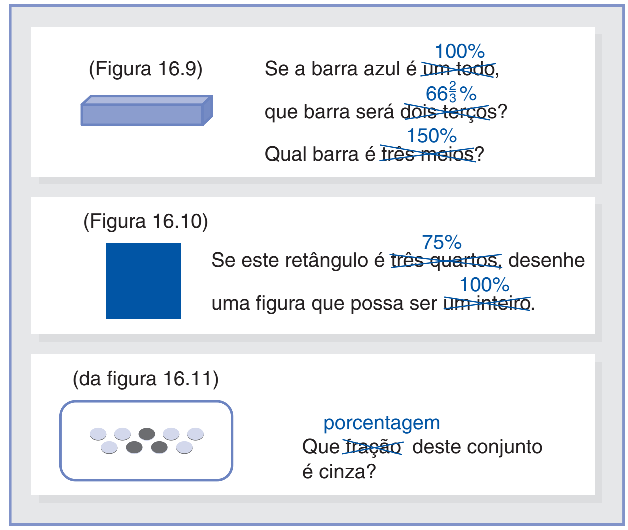


FIGURA 18.15 Os exercícios de “parte-todo-fração” podem ser traduzidos para exercícios de porcentagem.

Problemas realistas de porcentagem e bons números

Embora os alunos devam ter alguma experiência com as situações não contextualizadas na Figura 18.15, é importante que eles explorem essas relações em contextos reais. Encontre ou componha problemas de porcentagem e apresente-os da mesma forma que eles aparecem em jornais, na televisão e em outros contextos reais. Além de problemas e formatos realistas, siga estas “diretrizes” em sua unidade sobre porcentagens:

- Limite as porcentagens às frações familiares (metades, terços, quartos, quintos e oitavos) ou porcentagens fáceis ($\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$) e use números compatíveis com essas frações. O foco desses exercícios está nas relações envolvidas e não em habilidades computacionais complexas.
- Não sugira qualquer regra ou procedimento para tipos diferentes de problemas. Não categorize ou rotule os tipos de problema.
- Use os termos parte, inteiro e por cento (ou fração). Fração e por cento são intercambiáveis. Auxilie os alunos a perceber esses exercícios de porcentagem como semelhantes aos que eles fizeram com frações simples.
- Solicite o uso de modelos ou desenhos para explicar as soluções. É melhor estabelecer três problemas exigindo um desenho e uma explicação do que dar 15 problemas exigindo apenas os cálculos e respostas. Lembre que o propósito é a exploração de relações e não a habilidade computacional.
- Encoraje o cálculo mental.

Os seguintes exemplos de problemas atendem a esses critérios para frações e números fáceis. Tente trabalhar cada problema, identificando cada número como uma parte, um todo ou uma fração. Desenhe modelos de comprimento ou de área para explicar ou trabalhar em seu processo de pensamento. Exemplos desse raciocínio informal são ilustrados com problemas adicionais na Figura 18.16.

1. O PTA* reportou que 75% do total de famílias estava representado na reunião ontem à noite. Se os filhos de 320 famílias frequentam a escola, quantas foram representadas na reunião?
2. O time de futebol da escola ganhou 80% dos 25 jogos que jogou este ano. Quantos jogos ele perdeu?
3. Na turma da Professora Carter, 20 estudantes, ou $66\frac{2}{3}$ %, estavam no corredor de honra. Quantos estudantes estavam em sua sala?
4. George comprou seu novo computador com um desconto de $12\frac{1}{2}$ %. Ele pagou R$700,00. Quantos reais ele economizou comprando com esse desconto?
5. Se Joyce já leu 60 das 180 páginas de seu livro da biblioteca, que porcentagem do livro ela leu até agora?
6. A loja de informática comprou apetrechos à 80 centavos cada e os vendeu a R$ 1,00 cada. Com que porcentagem a loja remarcou o preço de cada peça?

Faça uma pausa e reflita

Examine os exemplos na Figura 18.16. Note como cada problema é resolvido com frações simples e cálculo mental. Então experimente cada um dos seis problemas listados acima. Cada um pode ser resolvido fácil e mentalmente usando frações equivalentes amigáveis.

Notas sobre avaliação

Problemas realistas de porcentagem ainda são o melhor caminho para avaliar a compreensão do estudante sobre porcentagem. Indique um ou dois problemas e peça que os alunos expliquem por que pensam que sua resposta faz sentido. Você poderia tomar um problema realista de porcentagem e substituir frações por porcentagens (por exemplo, use $\frac{1}{8}$ em vez de 12,5%) e verificar como os alunos lidam com esses problemas com frações comparadas a números decimais.

Se seu foco estiver nas razões e justificativas em vez de no número de problemas corretos, você poderá coletar todas as informações de que precisa [para avaliar os estudantes]. ■

Estimativa em problemas de porcentagem

É claro que nem todos os problemas reais de porcentagem apresentam bons números [para cálculos]. Geralmente, na vida real uma aproximação ou estimativa em situações de porcentagem é tudo que é exigido ou suficiente para ajudar a pensar e avaliar a situação. E mesmo que uma calculadora seja usada para obter uma resposta exata, uma estimativa baseada em uma compreensão da relação pode confirmar que uma operação correta foi obtida ou que a vírgula decimal está corretamente posicionada.

* N. de T.: PTA – Parent Teacher Association, associação norte-americana que promove o diálogo professor (escola) – pais (casa). Mais informações no *site* http://www.pta.org/Index.asp)

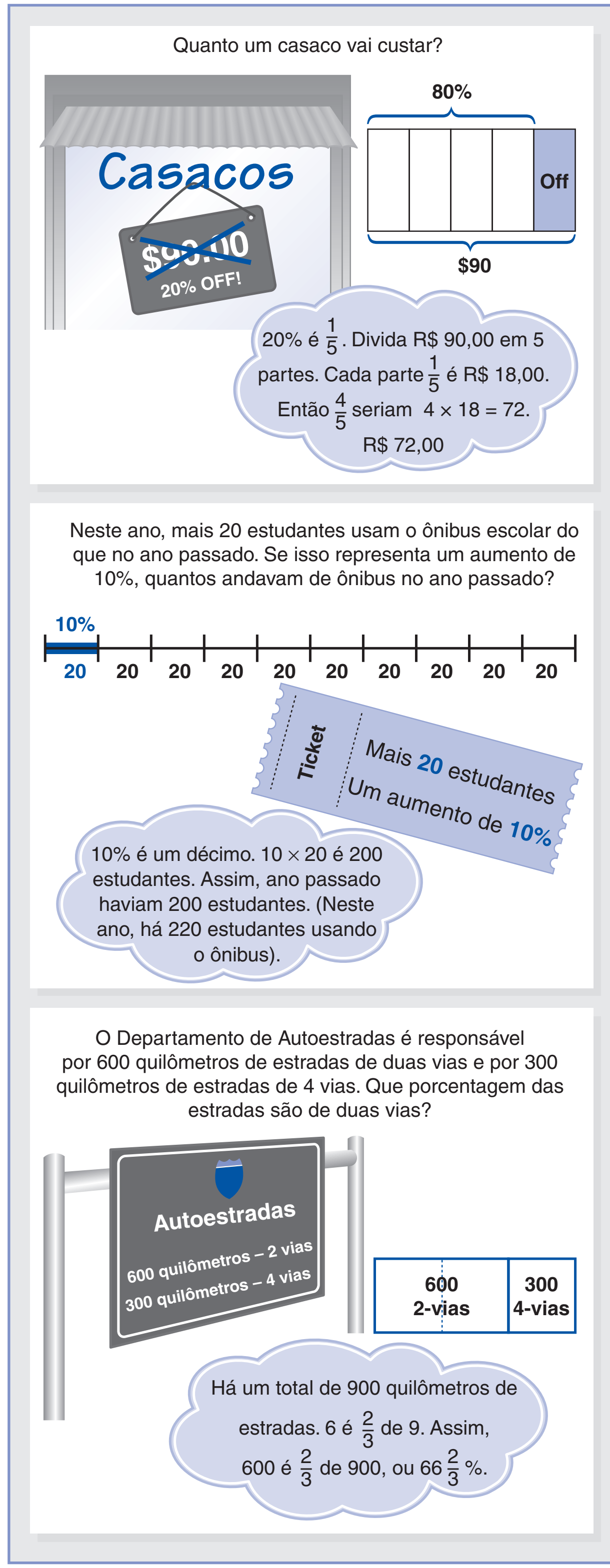


FIGURA 18.16 Problemas reais de porcentagem com bons números. Desenhos simples auxiliam a explicar o raciocínio.

Para ajudar os alunos a estimar em situações de porcentagem, duas ideias já discutidas podem ser aplicadas. Primeiro, quando a porcentagem não é "agradável", substitua por uma porcentagem próxima que seja fácil de trabalhar. Segundo, selecione números que sejam compatíveis com a porcentagem envolvida, para promover e tornar o cálculo mental fácil de fazer. Em essência, converta o problema de porcentagem com valores não muito bons de trabalhar em um que seja bom. Aqui estão alguns exemplos.

1. O estádio de 83.000 cadeiras estava com 73% de sua lotação. Quantas pessoas estavam no jogo?
2. O tesoureiro reportou que 68,3% da dívida já foi coletada com um total de R$385,00. Quanto dinheiro o clube ainda pode coletar se toda dívida for paga?
3. Max McStrike acertou 217 tacadas em 842 batidas. Qual a sua média de acertos?

Faça uma pausa e reflita

Use frações amigáveis e números compatíveis para resolver cada um desses últimos três problemas. Faça isso antes de continuar a leitura.

Possíveis estimativas

1. (Use $\frac{3}{4}$ e 80.000) → cerca de 60.000.
2. (Use $\frac{2}{3}$ e R$ 380,00; coletará mais $\frac{1}{3}$) → mais ou menos R$ 190,00.
3. ($4 \times 217 > 842$; $\frac{1}{4}$ é 25% ou 0,250) → um pouco mais de 0,250.

A próxima atividade também é útil para ajudar os estudantes a estimar em situações de porcentagem.

Atividade **18.11**

Estimar com boas frações

Forneça aos alunos problemas realisticamente expressos de porcentagem. Para as porcentagens nos problemas, use valores que estejam próximos, mas não os mesmos como as porcentagens ou frações amigáveis. Escolha os outros números nos problemas de forma que eles sejam compatíveis com a fração final amigável. A tarefa dos alunos é fazer estimativas das respostas usando cálculos fáceis ou matemática mental. Como sempre, eles devem escrever seus procedimentos e justificativas. Não espere que todo estudante estime da mesma maneira.

Aqui estão três problemas de porcentagem com dois conjuntos de números. O primeiro conjunto envolve bons números que permitem que o problema seja mentalmente resolvido usando frações equivalentes. O segundo conjunto de números exige que os números sejam substituídos com aproximações que permitam uma estimativa como na última atividade.

1. A escola possui {480, 547} estudantes. Ontem {$12\frac{1}{2}$ %, 13%} dos estudantes faltaram. Quantos foram à escola?
2. O Sr. Calver vendeu seu cortador de grama por {R$ 45,00; R$ 89,00}. Isto foi {60%, 62%} do preço que ele pagou pelo cortador novo. Quanto custou o cortador quando novo?
3. Quando a caixa caiu da estante {90, 63} dos {720, 500} produtos quebrou. Que porcentagem de produtos foi perdida na quebra?

O primeiro problema pede uma parte (foram dados inteiro e fração), a segunda pede um todo (dadas parte e fração) e o terceiro pede uma fração (dados parte e inteiro). Note novamente que essas são exatamente as mesmas questões das três partes e inteiros encontradas no Capítulo 16.

Às vezes, também é conveniente usar equivalências simples de base dez: 1% e 10% e múltiplos desses (inclusive metades). Por exemplo, geralmente usamos 10% e mais metade de tanto para calcular os 15% de gorjeta da conta de um restaurante. Para encontrar 0,5% podemos pensar na metade de 1%. Alguns adultos (e também estudantes) se tornam tão acostumados às estratégias relacionadas a essas frações de base dez que nunca pensam em usar outras frações equivalentes que poderiam produzir resultados mais precisos. É improvável que um foco nessas porcentagens de base dez ajude os alunos a conceber porcentagens como frações.

Cálculo com decimais

Certamente, os alunos devem desenvolver alguma fluência computacional com números decimais. No passado, a computação decimal era dominada pelos seguintes regras: alinhar as vírgulas decimais (adição e subtração), contar as casas decimais (multiplicação) e trocar a vírgula decimal no divisor e dividendo de forma que o divisor seja um número inteiro (divisão). Os livros didáticos tradicionais continuam a enfatizar essas regras. A posição adotada neste livro e em alguns dos currículos baseados nos *Padrões* é que regras específicas para o cálculo decimal não são realmente necessárias, especialmente se o cálculo for fundamentado em uma compreensão sólida do valor posicional e em uma conexão entre decimais e frações.

Padrões NCTM

De 3ª a 5ª série, os *Padrões* diz que os estudantes devem "desenvolver e usar estratégias para estimar cálculos envolvendo frações e decimais em situações relevantes às experiências dos estudantes" (p. 148). De 6ª a 8ª série, os estudantes devem "selecionar métodos e ferramentas apropriadas para calcular com frações e decimais entre o cálculo mental, a estimativa, calculadoras ou computadores e papel e lápis, dependendo da situação" (p. 214).

O papel da estimativa

Ao contrário do currículo tradicional, os alunos devem se tornar peritos em estimar cálculos decimais, bem antes de aprenderem a calcular com lápis e papel. Para muitos cálculos decimais, estimativas grosseiras podem ser feitas facilmente por arredondamento dos números para bons números inteiros ou frações simples de base dez. Uma meta mínima para seus alunos desenvolverem é realizar uma estimativa que contenha o número correto de algarismos à esquerda do decimal – a parte numérica inteira. Selecione problemas em que as estimativas não sejam terrivelmente difíceis.

Faça uma pausa e reflita

Antes de continuar a leitura, tente fazer estimativas fáceis de números inteiros nos seguintes cálculos. Não gaste tempo com ajustes finos em suas estimativas.

1. 4,907 + 123,01 + 56,1234
2. 459,8 – 12,345
3. 24,67 × 1,84
4. 514,67 ÷ 3,59

Suas estimativas poderiam ser semelhantes às seguintes:

1. Entre 175 e 200.
2. Mais de 400, ou cerca de 425 a 450.
3. Mais de 25, mais próximo de 50 (1,84 é maior que 1 e perto de 2).
4. Mais de 125, menos que 200 (500 ÷ 4 = 125 e 600 ÷ 3 = 200).

Nesses exemplos, uma compreensão da numeração decimal e algumas habilidades de estimativa simples para números inteiros podem produzir estimativas grosseiras. Ao estimar, o pensamento foca no significado dos números e das operações e não em contar casas decimais. Ao contrário, os alunos que são ensinados a focar nas regras de papel e lápis para o cálculo decimal não consideram os valores reais dos números, assim como não os estimam.

Assim, um bom local para começar o cálculo decimal é a estimativa. Essa não apenas é uma habilidade altamente prática, mas também ajuda os alunos a considerar as respostas em condições aproximadas e pode promover uma verificação do cálculo com calculadoras.

Um bom momento para começar o cálculo com decimais é assim que uma base conceitual em numeração decimal for desenvolvida. Aprender as regras para cálculo decimal fará pouco ou nada para ajudar os alunos a compreender a numeração decimal e interferirá com um desenvolvimento mais robusto do senso numérico. Uma ênfase em estimativa é muito importante, até para os alunos de 7ª e 8ª série que foram expostos e usam regras para o cálculo decimal, especialmente para a multiplicação e a divisão. Muitos estudantes que são totalmente confiantes em regras para decimais cometem erros sem estarem cientes disso.

Adição e subtração

Considere este problema:

Max e Moe cronometraram sua própria corrida de quarto de milha com um cronômetro. Max diz que correu o quarto em 74,5 segundos. Moe foi mais preciso. Ele relatou que sua corrida foi de 81,34 segundos. Quantos segundos Max correu mais rápido que Moe?

Os alunos que compreendem que a numeração decimal deve, em primeiro lugar, dizer aproximadamente que a diferença é próxima de 7 segundos. Com uma estimativa inicial, os estudantes devem então ser desafiados a compreender a diferença exata. A estimativa os ajudará a evitar o erro típico de alinhar o 5 abaixo do 4. Uma variedade de estratégias dos alunos é possível. Por exemplo, os estudantes podem notar que 74,5 e 7 é 81,5 e então compreender quanto é essa diferença. Outros podem contar a partir 74,5 adicionando 0,5 e então mais 6 segundos para chegar a 81 segundos e então adicionar os restantes 0,34 segundos. Essas e outras estratégias eventualmente confrontarão a diferença entre o decimal de uma casa (0,5) e o decimal de duas casas (0,34). Os alunos podem solucionar esse assunto retornando à compreensão de valor posicional. Problemas em histórias semelhantes para adição e subtração, alguns envolvendo números diferentes de casas decimais, ajudarão a desenvolver a compreensão dos alunos dessas duas operações. Sempre solicite uma estimativa antes da computação.

Depois que os estudantes tiverem várias oportunidades para resolver histórias com problemas de adição e de subtração, a seguinte atividade é bastante adequada.

Atividade 18.12

Adições e diferenças exatas

Dê aos alunos uma adição envolvendo números com diferentes casas decimais. Por exemplo: 73,46 + 6,2 + 0,582. A primeira tarefa é fazer uma estimativa e explicar o modo com que a estimativa foi feita. A segunda tarefa é calcular a resposta exata e explicar como isso foi feito (sem calculadora). Na terceira e última tarefa, os alunos inventam um método para adicionar e subtrair os números decimais que eles possam usar com quaisquer dois números.

Quando os alunos completarem essas três tarefas, faça-os compartilharem suas estratégias para computação e testarem-nas em um novo cálculo que você forneça.

A mesma tarefa pode ser repetida para subtração.

A prática inicial de estimativa concentrará a atenção dos estudantes nos significados dos números. É razoável esperar que eles desenvolvam um algoritmo que seja essencialmente o mesmo que alinhar as vírgulas decimais.

Notas sobre avaliação

Se os alunos apresentam dificuldades com a Atividade 18.12, é uma indicação de que eles têm uma compreensão fraca de conceitos decimais e do papel da vírgula decimal. Isso acontece até com estudantes que conseguem uma soma correta usando uma regra que aprenderam em uma série anterior, mas têm dificuldade com suas explicações. Em vez de enfocar em como adicionar ou subtrair decimais, retorne ou troque seu enfoque para conceitos decimais como discutidos anteriormente neste capítulo. ■

Multiplicação

A estimativa deve desempenhar um papel significativo no desenvolvimento de um algoritmo para a multiplicação. Como um ponto inicial, considere este problema:

O fazendeiro enche cada jarra com 3,7 litros de sidra. Se você comprar 4 jarras, quantos litros de sidra dará?

Comece com uma estimativa. É mais do que 12 litros. Quanto a mais pode ser? Pode ser 16 litros? Uma vez que uma estimativa do resultado for decidida, deixe os alunos usarem seus próprios métodos para determinar uma resposta exata. Muitos usarão adição repetida: 3,7 + 3,7 + 3,7 + 3,7. Outros podem começar multiplicando 3×4 e então adicionam 0,7 quatro vezes. Eventualmente, concordarão no resultado exato de 14,8 litros. Explore outros problemas envolvendo multiplicadores de números inteiros. Os multiplicadores como 3,5 ou 8,25 que envolvem boas partes fracionárias – aqui, um meio e um quarto – também são razoáveis.

Em seguida, peça aos alunos que comparem um produto decimal com um envolvendo os mesmos algarismos, mas nenhum decimal. Por exemplo, como $23{,}4 \times 6{,}5$ e 234×65 são semelhantes? De modo interessante, ambos os produtos têm exatamente os mesmos algarismos: 15210 (O zero pode estar ausente no produto decimal). Usando uma calculadora, faça os alunos explorarem outros produtos que sejam semelhantes com exceção dos decimais envolvidos. Os algarismos na resposta são sempre semelhantes. Depois de ver como os algarismos permanecem os mesmos nesses produtos relacionados, faça a próxima atividade.

Atividade 18.13

Onde fica a vírgula decimal? Multiplicação

Peça que os alunos calculem o seguinte produto: 24×63. Usando apenas o resultado desse cálculo e estimativa, faça-os darem a resposta exata para cada um dos seguintes produtos:

$0{,}24 \times 6{,}3$ $\quad 24 \times 0{,}63$ $\quad 2{,}4 \times 63$ $\quad 0{,}24 \times 0{,}63$

Para cada cálculo, eles devem escrever uma justificativa para suas respostas. Eles podem verificar seus resultados com uma calculadora. Quaisquer erros devem ser reconhecidos e a justificativa que gerou o erro ajustada.

Faça uma pausa e reflita

O produto de 24×63 é 1512. Use essa informação para responder a cada um dos produtos na atividade anterior. Não conte as casas decimais. Lembre de seus equivalentes fracionários.

O método de colocar a vírgula decimal em um produto por via de estimativa é mais difícil quando o produto fica menor. Por exemplo, sabendo que 54×83 é 4482 não torna fácil posicionar a vírgula decimal no produto $0{,}0054 \times 0{,}00083$. Até o produto $0{,}054 \times 0{,}83$ é difícil. A pergunta prática é essa: Você consegue imaginar alguma situação fora da escola em que alguém possa exigir uma resposta exata para um produto desse tipo, mas que não tenha acesso a uma calculadora? Quando a precisão é importante, a tecnologia faz sentido e está sempre disponível. Sim, há uma fundamentação conceitual para contar as casas decimais. Ainda que aprendida, ela foca a atenção na menor parte do produto e não fornece absolutamente nenhuma prática com estimativa. É um método que não usa senso numérico e que não precisa ser usado ou ensinado atualmente.

Notas sobre avaliação

Questões do seguinte tipo mantêm o foco no senso numérico e fornecem informações úteis sobre a compreensão de seus alunos.

1. Considere esses dois cálculos: $3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{4}$ e $2{,}276 \times 3{,}18$. Sem fazer os cálculos, qual você pensa ser maior? Forneça uma razão para sua resposta que possa ser compreendida por outra pessoa nessa classe.
2. Quanto $0{,}76 \times 5$ é maior que $0{,}75 \times 5$? Como pode você dizer isso sem fazer o cálculo (Kulm, 1994)?

As discussões e explicações dos estudantes ao trabalhar nessas ou em perguntas semelhantes podem fornecer *insights* sobre seu senso numérico de decimais e frações e as conexões entre essas duas representações. ■

Divisão

A divisão pode ser abordada de maneira exatamente paralela à multiplicação. De fato, a melhor abordagem para uma estimativa de divisão geralmente vem de pensar sobre a multiplicação em vez da divisão. Considere o seguinte problema:

A distância até Brasília é de 282,5 quilômetros. Ela levou exatamente $4\frac{1}{2}$ h ou 4,5 h para dirigir até lá. Qual foi a sua média de quilômetros por hora?

Para fazer uma estimativa desse quociente, pense em quantas vezes 4 ou 5 está próximo de 280. Você poderia pensar em 60 $\times$ 4,5 = 240 + 30 = 270,50 o que daria, talvez, cerca de 61 ou 62 quilômetros por hora.

Aqui está um segundo exemplo sem contexto. Faça uma estimativa de $45{,}7 \div 1{,}83$. Pense apenas em quantas vezes $1\frac{8}{10}$ é próximo de 45.

Faça uma pausa e reflita

A resposta será maior ou menor que 45? Por quê? Será maior ou menor que 20? Agora pense em como 1,8 está próximo de 2. Quantas vezes 2 está próximo de 46? Use isso para gerar uma estimativa.

Como 1,83 está próximo de 2, a estimativa é próxima de 22. E como 1,83 é menor que 2 a resposta deve ser maior que 22, digamos 25 ou 26 (A resposta exata é 24,972677).

Certo, então a estimativa pode produzir um resultado razoável, mas você ainda pode exigir um algoritmo por escrito para produzir os algarismos do modo que foi feito para a multiplicação. A Figura 18.17 mostra a divisão por um número inteiro e como isso pode ser realizado para tantas casas decimais quanto você desejar (O método de troca explícito descrito no Capítulo 13 é mostrado à direita). Não é necessário mover a vírgula decimal em cima no quociente. Deixe isso para a estimativa.

Atividade 18.14

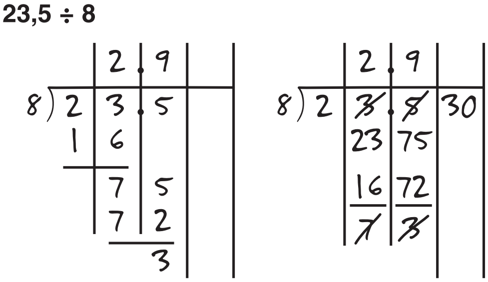
Onde fica a vírgula decimal?
Divisão

Forneça um quociente como 146 ÷ 7 = 20857 correto com cinco algarismos, mas sem a vírgula decimal. A tarefa é usar apenas essa informação e estimativa para dar uma resposta bastante precisa para cada um dos seguintes problemas:

146 ÷ 0,7   1,46 ÷ 7   14,6 ÷ 0,7   1460 ÷ 70

Em cada cálculo, os alunos devem escrever uma justificativa para suas respostas e então verificar seus resultados com uma calculadora. Qualquer erro deve ser reconhecido e a justificativa que gerou o erro ajustada.

23,5 ÷ 8



Troque 2 dezenas por 20 unidades, formando 23 unidades.
Coloque 2 unidades em cada grupo ou 16 ao total.
Isso deixa 7 unidades.

Troque 7 unidades por 70 décimos, formando 75 décimos.
Coloque 9 décimos em cada grupo, ou 72 ao total.

Troque 3 décimos por 30 centésimos.

Continue trocando por partes menores enquanto você desejar.

FIGURA 18.17 Extensão do algoritmo de divisão.

Faça uma pausa e reflita

Dê a resposta para cada um dos produtos na atividade anterior.

Um algoritmo razoável para a divisão é paralelo ao da multiplicação: ignore as vírgulas decimais e faça o cálculo como se todos os números fossem números inteiros. Quando terminar, coloque o decimal por estimativa. Isso é razoável para divisores com menos de dois algarismos significativos. Se os alunos têm um método para dividir por 45, eles podem dividir por 0,45 e 4,5 e até 0,045.

É interessante observar o quão diferente os programas lidam com cálculo além dos números inteiros. O programa curricular *Investigations in number, data and space*, da EI à 5ª série, não menciona cálculo com decimais, mas trabalha muito para conectar a numeração decimal à fracionária e às porcentagens. Os programas tradicionais desenvolvem habilidades de adição e de subtração na 5ª série, todas as quatro operações na 6ª série e as revisa novamente na 7ª. O programa curricular *Connected mathematics* fornece cinco ou seis dias de trabalho no desenvolvimento da adição, subtração e multiplicação com decimais na 6ª série, mas nenhuma divisão. Nenhum trabalho adicional com estas habilidades é encontrado na 7ª e 8ª série. Adiante, apresentamos uma atividade de multiplicação interessante do *Connected mathematics*.

Conexões literárias

Poucas histórias interessantes inspiram a exploração de decimais e porcentagens para crianças a partir da 5ª série. Uma exceção notável é *The phanthom Tollbooth*, uma história que não deve faltar, independente de seu significado matemático.

Em jornais diários e nas revistas semanais, você encontrará situações decimais e de porcentagem com infinitas conexões ao mundo real. Uma questão com porcentagens em histórias de notícias é a omissão frequente da quantidade básica ou do inteiro em que a porcentagem é determinada. "As vendas de março foram relatadas como estando 3,6% acima". Isso significa um aumento em relação a fevereiro ou a março do ano anterior? O aumento e redução por porcentagens são interessantes para projetos ao longo de vários anos. Se o índice de preços do consumidor sobe 3% por ano, quanto custará um cesto de mantimentos de R$ 50,00 quando seus alunos estiverem com 21 anos?

The phanthom Tollbooth (O fantasma Tollbooth)
Juster, 1961

As referências às ideias matemáticas abundam ao longo desse livro. Milo penetra em um mundo de lugares fantásticos e criaturas imaginárias após dirigir seu carro de brinquedo por um modelo de um posto de pedágio. Vários capítulos envolvem aventuras em Digitópolis, onde tudo é orientado por números. Em Digitópolis, Milo encontra um menino que é apenas metade de um menino, aparecendo no desenho como a metade esquerda de um menino cortado de alto a baixo. Quando ele se vira, o menino é realmente

Matemática Conectada

Séries Finais do EF

6ª Série: partes e pedaços II

Pesquisa 6: calculando com decimais

Contexto

"Calculando com decimais" é o único lugar em todo o programa *Connected mathematics* em que o cálculo decimal é explicitamente tratado. A pesquisa é planejada aproximadamente para cinco dias. Antes disso, os estudantes trabalharam em cálculo com frações. As primeiras duas lições nas pesquisas desenvolvem o algoritmo da adição e da subtração. A lição anterior à atividade descrita aqui explora padrões em produtos com fatores de 0,1, 0,01, 0,001 e 0,0001.

Descrição da tarefa

Em vez de começar com os fatores, essa atividade começa com o produto e faz os alunos explorarem os fatores. Em uma discussão com toda turma, os estudantes encontram pares de números com um produto de 1560. Isso é baseado em um trabalho anterior com fatoração principal. Dada uma lista de quatro pares com um produto de 1560, os alunos devem achar um par com um produto de 156,0 e um par com um produto de 1,560. Os estudantes usam calculadoras para trabalhar nessas tarefas e descobrir que os fatores envolvem os exatos mesmos algarismos que o produto com números inteiros. Por exemplo, $2{,}4 \times 0{,}65$, $0{,}024 \times 65$, $0{,}39 \times 4$ e assim por diante, todos têm um produto de 1,560. Após essa introdução, os estudantes recebem a tarefa mostrada aqui.

PROBLEMA 6.4

A. **1.** Ache dois números com um produto de 1344.
2. Ache dois números com um produto de 134,4.
3. Ache dois números com um produto de 1,344.
4. Ache dois números com um produto de 0,1344.
5. Explique como você conseguiu suas respostas e por que você pensa que elas estão corretas.

B. **1.** Ache dois números com um produto entre 2.000 e 3.000.
2. Mudando as vírgulas decimais, mude o valor de cada um dos números que você encontrou na parte 1 de modo que seu produto esteja entre 200 e 300.
3. Mudando as vírgulas decimais, mude o valor de cada um dos números que você encontrou na parte 1 de modo que seu produto esteja entre 20 e 30.
4. Mudando as vírgulas decimais, mude o valor de cada um dos números que você encontrou na parte 1 de modo que seu produto esteja entre 2 e 3.
5. Explique como você conseguiu suas respostas e por que você pensa que elas estão corretas.

De *Connected Mathematics: Bits and Pieces II: Using Rational Numbers*, © 2002 pela Universidade Estadual de Michigan, Glenda Lappan, James T. Fey, William M. Fitzgerald, Susan N. Friel & Elizabeth Difanis Phillips. Publicada pela Pearson Education, Inc., publicada como Pearson Prentice Hall. Usado com permissão.

As notas de ensino sugerem que a parte B da tarefa é mais difícil porque os estudantes não têm um número específico com que começar. Cada estudante em um grupo é encorajado a apresentar fatores diferentes de modo que em um grupo existirá uma variedade de exemplos. Uma vez que existam números que satisfaçam a parte B1, a tarefa é como ajustar esses números para conseguir produtos em diferentes alcances. Observe que não existe discussão direta nesta tarefa de como multiplicar números decimais.

A última lição da unidade é fundamentada em um problema contextualizado sobre cercar um perímetro retangular para um cachorro. Os estudantes devem determinar a quantidade de cerca, o número de postes e o número de pregos necessários. Os preços das unidades são dados, e um imposto de 7 por cento sobre as vendas também deve ser calculado. O problema envolve adição e multiplicação de números decimais em contexto. É permitido o uso de calculadoras.

0,58 pois ele é um membro de uma família média: uma mãe, um pai e 2,58 crianças. O menino é 0,58. Uma vantagem, ele explica, é que ele é o único que pode dirigir os $\frac{3}{10}$ de um carro, com a família média possuindo 1,3 carros. Essa seção da história envolve uma grande discussão de médias que terminam em números decimais.

Uma extensão óbvia da história é explorar médias de coisas que sejam interessantes para os alunos (número médio de irmãos, palmo de braço médio, etc.) e ver a origem dessas partes decimais estranhas. No caso de medidas de comprimento, por exemplo, um comprimento médio pode ser um comprimento real ainda que ninguém tenha essa medida. Mas um número médio de algo como carros ou irmãs pode ser muito humorístico como discutido na história. Onde outras frações e decimais são usados desse modo?

Em língua portuguesa:

Aritmética da Emília Monteiro Lobato, 1935

É um livro infanto-juvenil escrito por Monteiro Lobato. Na história, Lobato consegue transformar uma matéria tão árida como a Aritmética em uma linda brincadeira no pomar, onde o quadro-negro em que faziam contas era o couro do Quindim. No livro, as crianças aprendem sobre números decimais, frações, como transformar frações em números decimais, somar, subtrair, multiplicar números decimais, frações e números mistos e comuns. Aprendem também sobre o MMC, algarismos romanos, quantidades, sistemas monetários antigos e de outros países, de onde vieram os números, os números complexos, as raízes quadradas, entre outras coisas. É um livro indicado para crianças entre 3ª e a 5ª série. ■

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.