ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Jordana Leandro Seixas

Teoremas de rede I

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste texto, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Especificar os teoremas da superposição a uma rede resistiva CC para redução de circuito.
- Identificar meios de redução de resistores em série-paralelo.
- Demonstrar os teoremas de Thevenin e Norton para redução do circuito.

Introdução

Um circuito elétrico, ou rede elétrica, é um conjunto de elementos elétricos interconectados de forma típica. Circuitos mais simples, com componentes de dois terminais, são denominados de *bipolo*, e seus terminais estão acessíveis para conexão a outros elementos. Os elementos mais comuns nesses circuitos são os resistores, indutores, capacitores, geradores, etc. Destes, o mais simples e mais utilizado é o resistor. Esses elementos também podem ser combinados por meio da interconexão de seus terminais, de modo a formar um conjunto com número variado de terminais de acesso. Transistores e amplificadores são exemplos de elementos de circuitos mais complexos, com mais de dois terminais.

Neste capítulo, você vai estudar sobre o teorema da superposição a uma rede resistiva CC para redução de circuito. Você também vai verificar como é possível reduzir um circuito com resistores em série-paralelo, facilitando a solução do problema. Por fim, você vai aprender como obter circuitos equivalentes de Thevenin e de Norton a partir de circuitos originais, sejam eles circuitos simples ou complexos.

Teoremas da superposição em rede resistiva CC

Nesta seção, estudaremos sobre o teorema (ou princípio) da superposição, e serão abordados circuitos lineares com mais de uma entrada. Os circuitos lineares obedecem ao princípio da superposição: ou seja, quando um sistema é alimentado por mais de uma fonte independente de tensão ou corrente, podemos obter a resposta nesses circuitos com apenas uma das fontes ligada (ou ativa) de cada vez. Assim, podemos obter o resultado pela soma algébrica dos resultados de cada uma das fontes, individualmente, agindo separadamente. Abordaremos neste tópico as redes resistivas CC; contudo, o teorema da superposição também é abordado em qualquer outro sistema linear com duas ou mais fontes, pois as equações do circuito são equações lineares (equações do primeiro grau). No caso de circuitos resistivos, a solução pode ser encontrada pelo uso da regra de Cramer, na qual cada uma das parcelas encontradas se deve a uma das fontes independentes estar ativa.

As equações de circuitos complexos com variadas fontes independentes de tensão ou corrente podem ser mais simples de serem resolvidas se aplicarmos o teorema da superposição. Dessa forma, o projetista pode ter vários projetos mais simples, em vez de um único projeto de grande complexidade, seja para encontrar a solução de um problema maior, seja para reduzi-lo a um circuito equivalente mais simples de ser resolvido individualmente. Porém, esse teorema nem sempre simplifica a análise de circuitos; pode acontecer de se obter um número maior de equações do que utilizando algum outro método conhecido. Contudo, a superposição é utilizada quando as fontes de tensão ou corrente independentes são essencialmente diferentes.

Neste tópico, as fontes utilizadas nos circuitos estão limitadas às fontes de tensão e corrente que geram tensões ou correntes constantes, isto é, tensões e correntes que não variam ao longo do tempo. As fontes constantes são conhecidas como fontes CC. Historicamente, CC era definida como corrente contínua. Agora, o termo CC é aceito, universalmente, na ciência e na engenharia, com os significados de corrente constante e tensão constante.

Vamos compreender melhor o teorema da superposição por meio do exemplo a seguir.

Exemplo

Encontre a corrente i que circula pelo resistor de 4 Ω ilustrado na Figura 1, utilizando o teorema da superposição.

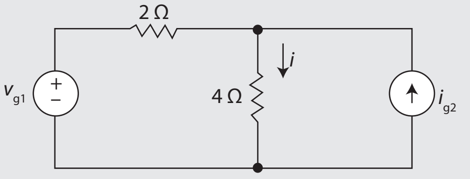

Figura 1. Circuito linear com duas fontes.

Fonte: Johnson, Hilburn e Johnson. (1994, p. 94).

Solução:

Podemos obter a corrente i por meio da composição de duas outras correntes, cada uma devida a uma das fontes estar ligada individualmente.

Seja a corrente i_1 a componente da corrente i devido à fonte de tensão v_{g1} estar ativa, isto é, com a fonte de corrente i_{g2} desligada ($i_{g2} = 0$); então, utilizando a lei de Kirchhoff para tensão (LKT) no circuito da Figura 2a, obtemos:

$v_{g1} - (2+4)i_1 = 0$ e, assim, $i_1 = \frac{v_{g1}}{6}$.

Da mesma forma, seja a corrente i_2 a componente da corrente i devido à fonte de corrente i_{g2}, isto é, com a fonte de tensão v_{g1} desligada ($v_{g1} = 0$), então, utilizando agora a lei de Kirchhoff para corrente no circuito da Figura 2b, temos:

$i_2 = i_{g2} \times \frac{2}{(2+4)}$, então, $i_2 = \frac{i_{g2}}{3}$.

Assim, o valor da corrente total i será igual à soma algébrica das correntes i_1 e i_2:

$i = i_1 + i_2$

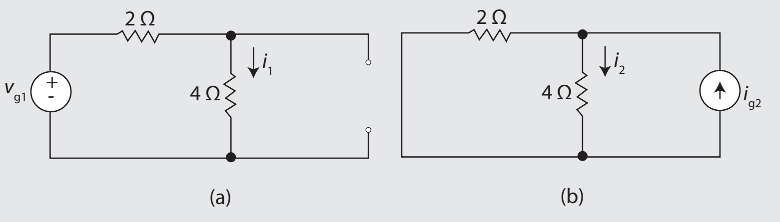

Figura 2. Circuito da Figura 1 com: (a) a fonte de corrente desligada; (b) a fonte de tensão desligada.

Fonte: Johnson, Hilburn e Johnson. (1994, p. 96).

Saiba mais

Como encontrar a potência em circuitos aplicando o teorema da superposição?

A potência não é uma combinação linear de tensões ou correntes. Por exemplo, se desejar encontrar a potência entregue ao resistor R de valor igual a 4 Ω, sabendo-se o valor da tensão, a potência será igual a $P = \frac{V^2}{R}$, que é uma expressão quadrática, e não uma expressão linear. Dessa forma, a superposição não pode ser aplicada diretamente para a obtenção da potência, isto é, não podemos encontrar a potência total pela soma de todas as parcelas da potência encontradas para cada fonte independente funcionando isoladamente.

Uma das formas de encontrar a potência, no caso de se aplicar o teorema da superposição, é, inicialmente, encontrar a soma das parcelas de tensão ou corrente, cada uma devida somente a uma fonte de tensão ou corrente independente. Assim, a potência será $P = \frac{V^2}{R}$ ou $P = Ri^2$, respectivamente.

Fonte: Johnson, Hilburn e Johnson. (1994).

Redução de resistores em série-paralelo

Usaremos as ferramentas analíticas lei de Ohm e leis de Kirchhoff para tensão e para corrente para resolver circuitos mais simples e circuitos mais complexos. A maior complexidade é encontrada quando vários elementos estão interligados de forma mais complicada. Neste tópico, abordaremos a redução de circuitos complexos para circuitos equivalentes mais simples. Uma das razões para buscar circuitos equivalentes mais simples é, primeiro, conhecer completamente as leis implícitas aos métodos mais sofisticados e, segundo, obter circuitos que têm aplicações importantes na engenharia.

Há circuitos elétricos com diferentes topologias, a saber: série, paralelo e série-paralelo. Nos circuitos em série, os elementos estão em cascata ou conectados sequencialmente, de forma que a corrente que passa por eles é a mesma, como ilustra a Figura 3a. Se dois ou mais elementos estão conectados nos mesmos dois nós e, consequentemente, apresentam a mesma tensão, esse circuito é denominado de circuito em paralelo (Figura 3b). Um circuito série-paralelo é um circuito que contém ambas as topologias dos circuitos em série e em paralelo, exibido na Figura 3c.

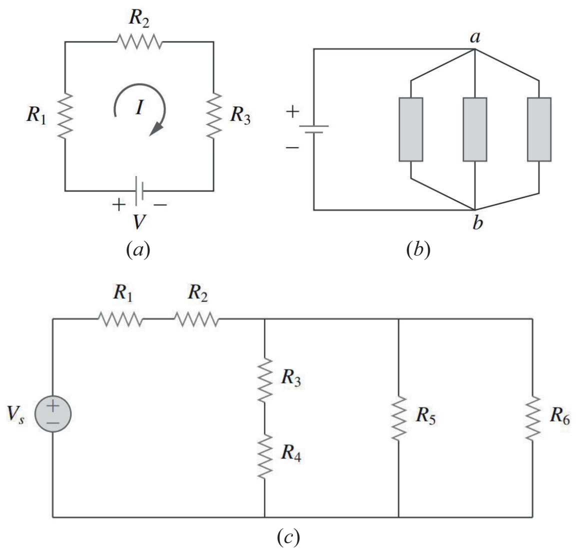

Figura 3. Diferentes topologias de circuitos: (a) circuito em série; (b) circuito em paralelo; (c) circuito série-paralelo.

Fonte: Sadiku, Alexander e Musa (2014, p. 62, 83 e 109).

Para analisar circuitos série-paralelo, procuramos observar, em cada parte do circuito, os resistores que estão em série e calcular a sua resistência equivalente, bem como encontrar a resistência equivalente dos resistores que estão em paralelo. Com essas resistências equivalentes encontradas, parcialmente, podemos substituí-las, se necessário, nas porções em série ou em paralelo do circuito, até que o circuito original seja reduzido a um circuito em série ou em paralelo mais simples. Para a redução de um circuito série-paralelo acontecer, portanto, deve-se seguir basicamente os seguintes procedimentos:

- combinar resistores em série;
- combinar resistores em paralelo;
- aplicar a lei de Kirchhoff para tensão (LKT), se necessário;
- aplicar a lei de Kirchhoff para corrente (LKC), se necessário;
- aplicar a lei de Ohm, geralmente;
- aplicar a divisão de tensão, se preciso;
- aplicar a divisão de corrente, se preciso.

Segue um exemplo para melhor compreensão do assunto abordado.

Exemplo

Determine a resistência equivalente total, R_{eqT}, do circuito da Figura 4.

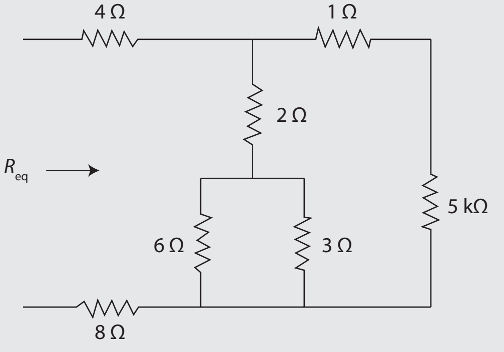

Figura 4. Circuito original.

Fonte: Sadiku, Alexander e Musa (2014, p. 110).

Solução:

Para obtermos a resistência equivalente, inicialmente combinamos os resistores em série e em paralelo. Observe que os resistores de 6 Ω e 3 Ω estão em paralelo, pois estão conectados nos mesmos pontos. Logo, a resistência equivalente será:

$$R_{eq1} = \frac{6\ x\ 3}{6+3} = 2\ \Omega$$

Os resistores de 1 Ω e 5 Ω estão em série, pois a corrente que circula através deles é a mesma, então:

$$R_{eq2} = 1 + 5 = 6\ \Omega$$

O circuito equivalente da Figura 5a apresenta o resultado até o momento, após o cálculo das resistências equivalentes 1 e 2. Veja que, na Figura 5a, os dois resistores de 2 Ω estão em série; assim, a resistência equivalente deles é:

$$R_{eq3} = 2 + 2 = 4\ \Omega$$

Agora, o resistor R_{eq3} = 4 Ω está em paralelo com o resistor de 6 Ω, logo, a resistência equivalente desses resistores em paralelo será:

$$R_{eq4} = \frac{4\ x\ 6}{4+6} = 2{,}4\ \Omega$$

O circuito da Figura 5a foi substituído pelo circuito da Figura 5b. No circuito da Figura 5b, os três resistores estão em série. Assim, a resistência equivalente total, R_{eqT}, do circuito original será:

$$R_{eqT} = 4 + 2{,}4 + 8 = \mathbf{14{,}4}\ \Omega$$

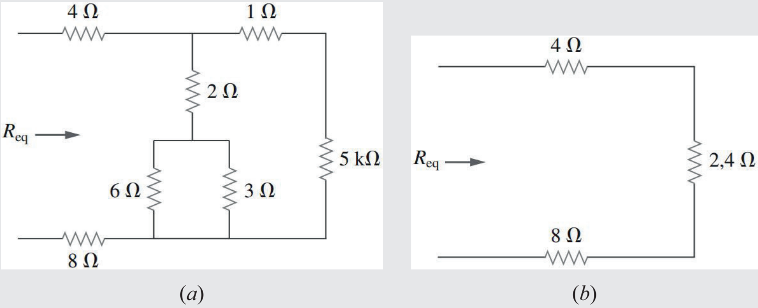

Figura 5. Circuitos equivalentes da Figura 4.

Fonte: Sadiku, Alexander e Musa. (2014, p. 111).

Teoremas de Thevenin e Norton

Os circuitos equivalentes de Thevenin e Norton são técnicas utilizadas para simplificar um circuito inteiro, vistos nos terminais de referência, por um circuito equivalente, composto por uma única fonte e um resistor. Assim, podemos calcular a tensão ou a corrente em um único elemento de um circuito complexo, substituindo o restante do circuito por um resistor equivalente e uma fonte, e analisar o circuito resultante de forma muito simples.

Suponha que desejamos encontrar a corrente, a tensão e a potência entregues a um único resistor de carga, R_L, pelo restante do circuito, que consiste, normalmente, em várias fontes e resistores (Figura 6a). Ou que, por exemplo, precisamos encontrar a resposta para diferentes resistores de carga de valores diferentes. Pelo teorema de Thevenin, podemos substituir todo o circuito, exceto a resistência de carga, por uma fonte de tensão independente em série com um resistor (Figura 6b), sabendo que a resposta do resistor de carga fica inalterada. De forma similar, podemos obter o circuito equivalente pelo teorema de Norton, composto por uma fonte de corrente independente em paralelo com um resistor (Figura 6c).

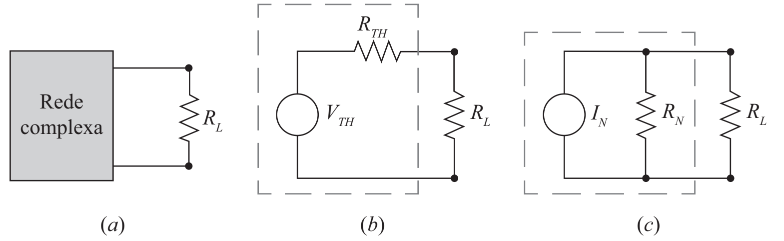

Figura 6. (a) Rede complexa incluindo um resistor de carga R_L; (b) rede equivalente de Thevenin conectada ao resistor de carga R_L; (c) rede equivalente de Norton conectada ao resistor de carga R_L.

Fonte: Hayt Júnior, Kemmerly Durbin (2014, p. 135).

Saiba mais

Transformação de fontes

Pela técnica de transformações de fontes, podemos obter o circuito equivalente de Thevenin a partir do circuito equivalente de Norton e vice-versa. A Figura 7a apresenta o circuito equivalente de Norton e a Figura 7b apresenta o circuito equivalente de Thevenin.

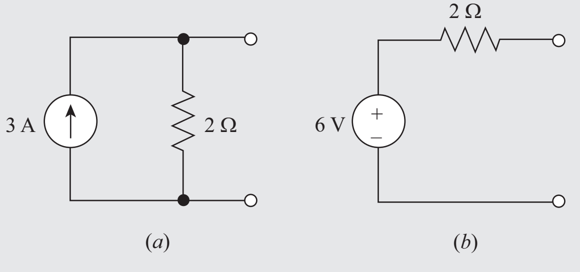

Figura 7. Circuitos equivalentes: (a) de Norton (fonte de corrente real); (b) de Thevenin (fonte de tensão real).

Fonte: Hayt Júnior; Kemmerly; Durbin (2014, p. 130).

No circuito equivalente de Norton, temos uma fonte de corrente $I = 3$ A e um resistor em paralelo $R = 2\ \Omega$. No circuito equivalente de Thevenin, temos uma fonte de tensão $V = 6$ V e um resistor em série $R = 2\ \Omega$. A tabela a seguir resume sucintamente como adquirir o circuito equivalente de Thevenin a partir do equivalente de Norton e vice-versa.

Obter o circuito equivalente de:	A partir de:	Cálculo dos parâmetros do circuito equivalente:
Thevenin	Norton	$V_{th} = I_N \times R_{th} = 3 \times 2 = 6$ V $R_{th} = R_N = 2\ \Omega$
Norton	Thevenin	$I_N = V_{th}/R_{th} = 6/2 = 3$ A $R_N = R_{th} = 2\ \Omega$

Sabendo-se que:
V_{th} = tensão de Thevenin
R_{th} = resistência de Thevenin
R_N = resistência de Norton
I_N = corrente de Norton

Teorema de Thevenin

O exemplo a seguir mostra como obter o equivalente de Thevenin para o circuito mostrado na Figura 8a. Inicialmente, encontramos a resistência de Thevenin, R_{th}, desligando todas as fontes independentes; ou seja, a fonte de tensão vira um curto-circuito e a fonte de corrente vira um circuito aberto. Em seguida, podemos encontrar a tensão de Thevenin (v_{th}), denominada também de tensão de circuito aberto (v_{ca}).

Exemplo

Encontre o circuito equivalente de Thevenin para o circuito Rede *A*, apresentado na Figura 8a.

Solução:

Após desligar a fonte de tensão (Figura 8a), observamos a rede remanescente. Na Figura 8c, temos um resistor de 7 Ω conectado em série com o paralelo entre os resistores de 6 Ω e 3 Ω. Assim, encontramos a resistência equivalente de Thevenin desta forma:

$$R_{th} = 7 + 6\,//\,3 = 7 + \frac{6 \times 3}{(6+3)} = 9\ \Omega$$

Observe na Figura 8b que a tensão de Thevenin é a mesma tensão sobre o resistor de 6 Ω. Então, aplicando o divisor de tensão, obtemos:

$$V_{th} = V_{ca} = 12 \times \frac{6}{(6+3)} = 8\ V$$

Assim, o circuito equivalente de Thevenin (Rede *A*), ilustrado na Figura 8d, exibe $V_{th} = 8\ V$ e $R_{th} = 9\ \Omega$.

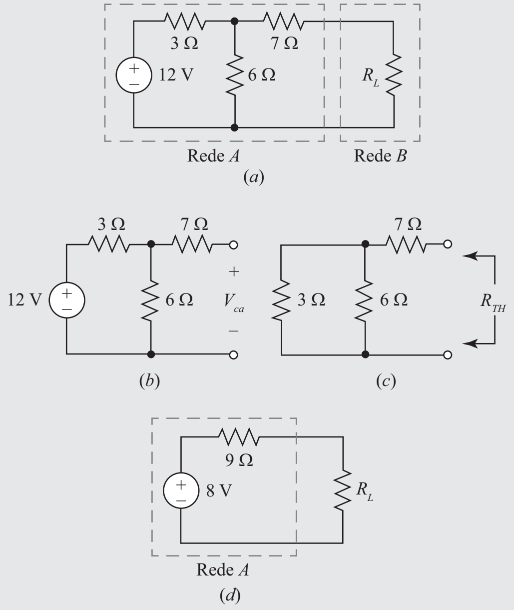

Figura 8. (a) Circuito original; (b) circuito sem a carga R_L; (c) circuito para calcular a resistência de Thevenin, R_{th}; (d) circuito equivalente de Thevenin (Rede *A*).

Fonte: Hayt Júnior, Kemmerly e Durbin (2014, p. 136 e 138).

Teorema de Norton

Podemos encontrar o equivalente de Norton para o circuito mostrado na Figura 9a calculando, inicialmente, a corrente de Norton (i_N), também conhecida por corrente de curto-circuito (i_{sc}); ou seja, aplica-se um curto-circuito nos terminais de referência *a*-*b*. Em seguida, podemos encontrar a resistência de Norton (R_N), que é equivalente à resistência de Thevenin. Outro caminho é encontrar a tensão de Thevenin, como discutido anteriormente, e, após aplicar a lei de Ohm, encontrar a corrente de Norton. Assim, $i_N = \frac{V_{th}}{R_N}$ ou $R_N = \frac{V_{th}}{i_N}$.

Veja o exemplo a seguir para compreender melhor o assunto.

Exemplo

Encontre o circuito equivalente de Norton para o circuito da Figura 9a, com terminais de referência *a-b*.

Solução:

Vamos encontrar a tensão de Thevenin (v_{th}), aplicando a lei de Kirchhoff para as correntes (LKC) no nó superior, ilustrado na Figura 9a. Observamos que $V_{th} = V_1 = V_{ab}$; assim, teremos:

$$\frac{v_1 - 25}{5} + \frac{v_1}{20} - 3 = 0.$$

Dessa forma, $V_{th} = V_1 = V_{ab} = 32\ V$.

Agora, vamos encontrar a corrente de Norton, ou corrente de curto-circuito, aplicando LKC ao nó superior (Figura 9b). Assim,

$$\frac{v_2 - 25}{5} + \frac{v_2}{20} - 3 + \frac{v_2}{4} = 0.$$

Resolvendo o sistema acima, teremos $v_2 = 16$ V. Dessa forma, a corrente de Norton será:

$$i_N = \frac{V_2}{4} = \frac{16}{4} = 4\ A.$$

Logo, a resistência de Norton será $R_N = \frac{V_{th}}{i_N} = \frac{32}{4} = 8\ \Omega$.

A Figura 9c apresenta o circuito equivalente de Norton para o circuito original da Figura 9a.

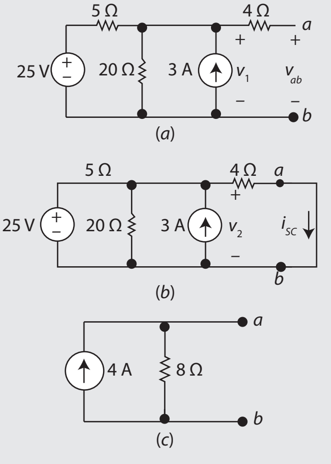

Figura 9. (a) Circuito original; (b) curto-circuito nos terminais de referência *a-b*; circuito equivalente de Norton.

Fonte: Nilsson e Riedel (2009, p. 84–85).

Referências

HAYT JR., W. H.; KEMMERLY, J. E.; DURBIN, S. M. *Análise de circuitos em engenharia*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

JOHNSON, D. E.; HILBURN, J. L.; JOHNSON, J. R. *Fundamentos de análise de circuitos elétricos*. 4. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1994.

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. *Circuitos elétricos*. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2009.

SADIKU, M. N. D.; ALEXANDER, C. K.; MUSA, S. *Análise de circuitos elétricos com aplicações*. Porto Alegre: Bookman, 2014.

Leituras recomendadas

BOYLESTAD, R. L. *Introdução a análise de circuitos*. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

NAHVI, M.; ADMINISTER, J. A. *Circuitos elétricos*. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. (Coleção Schaum).

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.

Conteúdo:

SOLUÇÕES EDUCACIONAIS INTEGRADAS