FUNDAMENTOS DE MATEMÁTICA

Rafael Stefani

sagah
SOLUÇÕES EDUCACIONAIS INTEGRADAS

Múltiplos e divisores: MDC e MMC

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste texto, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Identificar as características dos números primos.
- Apontar os múltiplos e divisores de um número.
- Conceituar e calcular o mínimo múltiplo comum e o máximo divisor comum.

Introdução

Neste capítulo, você aprenderá a relação numérica que classifica números inteiros como números primos e estabelecerá suas características e implicações.

Aprenderá também sobre múltiplos e divisores de números, bem como como essas relações podem ser úteis na resolução de vários problemas.

Números primos

Inicialmente, relembraremos um pouco sobre conjuntos numéricos, especificamente o conjunto Z dos números inteiros, no qual estão todos os números, inteiros, negativos e positivos.

$$\mathbb{Z} = \{... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$$

Entre os elementos dos números inteiros, assim como acontece em outros conjuntos numéricos, podemos facilmente separar os números pares dos números ímpares. O conjunto dos números pares e o conjunto dos números ímpares são subconjuntos dos números inteiros.

Por definição, um número par é aquele múltiplo de 2, inclusive o número 0 (zero), ou todo número par é divisível por 2. Contudo, todo número ímpar não é múltiplo de 2. Assim, o subconjunto de Z formado pelos números pares é:

$$\{\ldots -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6 \ldots\}$$

Analogamente, o subconjunto de Z composto por números ímpares é:

$$\{\ldots -5, -3, -1, 1, 3, 5 \ldots\}$$

Outra "classificação" dentro do conjunto dos números inteiros, Z, refere-se aos números primos. Um número n inteiro, diferente de 1, é primo se seus divisores forem, exclusivamente, ±1 e $\pm n$ (LIPSCHUTZ; LIPSON, 2014).

Por exemplo, o número 2 é um número primo, pois somente na divisão por ±1 e ± 2 temos uma divisão exata. Da mesma forma acontece com os números –2, 3, –3, 5, –5, 7, –7, 11, –11, 13, –13.

Entretanto, diversos outros números no conjunto também são números primos, como os exemplos descritos a seguir.

Da sequência dos seguintes números, determine qual, ou quais, é ou são número(s) primo(s):

27, 32, 41, 73, 89, 109

- 27 é um número divisível por ±1, ±3, ±9, ±27, portanto não é um número primo;
- 32 é divisível por ±1, ±2, ±4, ±8, ±16 e ±32, portanto não é um número primo;
- 41 é divisível por ±1 e ±41, portanto é um número primo;
- 73 é divisível por ±1 e ±73, portanto é um número primo;
- 89 é divisível por ±1 e ±89, portanto é um número primo;
- 109 é divisível por ±1 e ±109, portanto é um número primo.

Ainda, pode-se determinar diversos outros números em Z que são números primos.

Fique atento

Existem números primos de diversas ordens. Não há como criar uma "regra" na qual somente números com as casas de unidades, dezenas e centenas podem ser primos. 1.003 e 10.019, por exemplo, também são números primos.

Múltiplos e divisores de um número

Entender as relações numéricas é extremamente importante na Matemática, podendo facilitar seu entendimento e a resolução de problemas mais complexos. A partir de agora, você estudará um pouco a respeito dos múltiplos e divisores de um número.

Múltiplo de um número é aquele que resulta da multiplicação por um número inteiro. Por exemplo, na multiplicação 2×5 que resulta em 10, podemos afirmar que 10 é múltiplo de 2 e é múltiplo de 5.

Para encontrar um múltiplo entre dois ou mais números inteiros, basta multiplicá-los, conforme os exemplos a seguir.

Encontre um múltiplo comum de 15 e 23.

$$15 \times 23 = 345$$

Logo, 345 é múltiplo de 15 e, ao mesmo tempo, múltiplo de 23.

Determine um múltiplo comum de 2, 7, 18 e 31:

$$2 \times 7 \times 18 \times 31 = 7.812$$

Assim, 7.812 é múltiplo de 2, 7, 18 e 31 ao mesmo tempo.

Para o número 7, se fizermos:

$$
\begin{gathered}
7 \times 0 = 0 \\
7 \times 1 = 7 \\
7 \times 2 = 14 \\
7 \times 3 = 21 \\
7 \times 4 = 28 \\
7 \times 5 = 35 \\
7 \times 6 = 42 \\
7 \times 7 = 49 \\
7 \times 8 = 56 \\
7 \times 9 = 63 \\
7 \times 10 = 70 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

Afirmamos que 0, 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, 70 ⋯ são múltiplos de 7.

Divisores de um número são aqueles que, ao dividirem números inteiros, deixam resto igual a 0 (zero) na operação. Por exemplo, 3 é um divisor de 12; uma vez que a divisão

$$12 \div 3 = 4$$

é exata, ou seja, o resto é 0 (zero).

De maneira análoga, podemos garantir que 7 é divisor de 21, 28, 42, 49, 56, 63…, uma vez que todos esses número são múltiplos de 7 e sua divisão por 7 sempre resultará em resto igual a 0 (zero).

Uma vez que 7 é um divisor de 42, podemos dizer que 42 é divisível por 7. E que 12 é divisível por 3 e por 4.

É importante observar que os números primos terão somente dois divisores: o número 1 e eles mesmos.

Você já sabe que 3 e 4 são divisores de 12. Existem outros divisores para 12? Sim, 12 é divisível por

1, 2, 6 e 12.

Fique atento

Números primos sempre terão dois divisores: são divisíveis por 1 e por eles mesmos.

MMC e MDC

O cálculo de múltiplos e divisores de um ou mais números tem, simultaneamente, muitas aplicações práticas. Ao falarmos de múltiplos e divisores, verificamos como podemos determiná-los para um número. Porém, na Matemática, existem métodos para determinar múltiplos e divisores comuns entre dois ou mais números de modo paralelo.

Esses métodos determinam o mínimo múltiplo comum (MMC) entre dois ou mais números e o máximo divisor comum (MDC) entre dois ou mais números.

Tanto para o cálculo do MMC quanto do MDC podemos utilizar o método de fatoração numérica, que consiste em realizar sucessivas divisões do número, ou dos números, por seus divisores. Na fatoração, os números devem ser divididos, sucessivamente, pelos mesmos números naturais primos, quando possível, colocando-se o quociente da divisão abaixo do dividendo. Isso deve ser repetido até que o quociente de todos os números seja igual a 1.

Por exemplo, caso seja necessário fatorar o número 12, procederemos da seguinte maneira, trabalhando com seus divisores:

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

Ao fatorar o número 12, você pode observar que é divisível por 2; como o 2 se repetiu por duas vezes, é divisível por 4; na primeira divisão por 2, o resultado foi 6, também divisor de 12; e, por fim, foi dividido por 3, também divisor de 12.

Quando você executar essa fatoração com dois ou mais números, conseguirá determinar o MMC entre eles. Por exemplo, em uma soma de frações, cujos denominadores são distintos, é necessário colocá-las sob um denominador comum para que a realização da soma. Assim, tomando todos os denominadores, é possível obter o MMC para realizar a operação fatorando-os:

Resolva:

$$\frac{8}{10} + \frac{5}{32} + \frac{2}{45}$$

Devemos, então, proceder à fatoração dos denominadores:

$$\begin{array}{r|l} 10,\ 32,\ 45 & 2 \\ 5,\ 16,\ 45 & 2 \\ 5,\ 8,\ 45 & 2 \\ 5,\ 4,\ 45 & 2 \\ 5,\ 2,\ 45 & 2 \\ 5,\ 1,\ 45 & 3 \\ 5,\ 1,\ 15 & 3 \\ 5,\ 1,\ 5 & 5 \\ 1,\ 1,\ 1 & \end{array}$$

Assim, ao multiplicar todos os elementos da sua direita, você obterá o MMC entre os números fatorados:

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 1.440$$

Portanto, a soma de frações será resolvida como:

$$\frac{8}{10} + \frac{5}{32} + \frac{2}{45} = \frac{1.152 + 225 + 64}{1.440} = \frac{1.441}{1.440}$$

Determinando o resultado da operação:

$$\frac{7}{27} + \frac{5}{3} + \frac{4}{9}$$

Procedendo à fatoração:

$$\begin{array}{r|l} 27,\ 3,\ 9 & 3 \\ 9,\ 1,\ 3 & 3 \\ 3,\ 1,\ 1 & 3 \\ 1,\ 1,\ 1 & \end{array}$$

Logo, o MMC entre 27,3 e 9 é igual a $3 \times 3 \times 3 = 27$.

O MDC também pode ser obtido por meio do processo de fatoração. Como exemplo, repetiremos a fatoração entre 27,3 e 9. Após finalizada a fatoração, a multiplicação dos números que dividiram simultaneamente os três números será o MDC.

$$\begin{array}{r|l} 27,\ 3,\ 9 & 3 \\ 9,\ 1,\ 3 & 3 \\ 3,\ 1,\ 1 & 3 \\ 1,\ 1,\ 1 & \end{array}$$

Observe que somente a primeira divisão por 3 conseguiu, simultaneamente, dividir os três números. Portanto, 3 é o MDC entre 27,3 e 9.

Determinando o MDC entre 72 e 84:

72, 84	2
36, 42	2
18, 21	2
9, 21	3
3, 7	3
1, 7	7
1, 1	

Observe que somente o número 2 dividiu os dois números, simultaneamente, por duas vezes e o número 3 dividiu os dois números, simultaneamente, por uma vez. Assim, 2 x 2 x 3 = 12 é o MDC entre 72 e 84.

Exemplo

O MDC e o MMC podem ser úteis em aplicações práticas, como nos exemplos a seguir.

- Suponha que dois carros estejam em fase de teste para venda, ambos com a mesma capacidade no tanque de combustíveis. O carro A conseguiu realizar 12 voltas com a mesma quantidade de combustível que o carro B utilizou para dar 8 voltas. Quantos litros de combustível, no mínimo, estavam no tanque de ambos antes do início dos testes?

Este problema pode ser resolvido pelo MMC entre 12 e 8, que, se fatorados, resultarão da solução de 24 litros em cada tanque.

- Para uma festa junina, foram comprados papéis coloridos, com folhas medindo 48 cm × 60 cm. Para cortar bandeirinhas de mesmo tamanho, quadradas, de modo que a totalidade da folha seja aproveitada, qual deverá ser a sua medida lateral?

Este problema pode ser resolvido utilizando o MDC entre 48 e 60; assim:

48, 60	2
24, 30	2
12, 15	2
6, 15	2
3, 15	3
1, 5	5
1, 1	

Nas linhas destacadas, os divisores eram comuns entre os dois números, portanto 2 × 2 × 3 = 12; as bandeirinhas deverão ser cortadas com a medida de 12 cm × 12 cm.

Referência

LIPSCHUTZ, S.; LIPSON, M. *Matemática discreta*. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. (Coleção Schaum).

Leituras recomendadas

ADAMI, A. M.; DORNELLES FILHO, A. A.; LORANDI, M. M. *Pré-cálculo*. Porto Alegre: Bookman, 2015. AYRES JR., F.; MENDELSON, E. *Cálculo*. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. (Coleção Schaum).

ROGAWSKI, J.; ADAMS, C. *Cálculo*. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2018. v. 1.

SAFIER, F. *Pré-cálculo*. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. (Coleção Schaum).

Conteúdo:

SOLUÇÕES EDUCACIONAIS INTEGRADAS