ÁLGEBRA LINEAR

André Ricardo Rocha da Silva

SOLUÇÕES EDUCACIONAIS INTEGRADAS

Sistemas lineares

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste texto, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Definir sistemas de equações lineares.
- Identificar os sistemas de equações lineares homogêneo e não homogêneo.
- Resolver sistemas de equações lineares pelos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan.

Introdução

Os sistemas de equações lineares são conjuntos de equações lineares que envolvem várias incógnitas simultaneamente. Como os métodos de solução para equações lineares são mais simples do que para outros tipos de equações, os sistemas de equações lineares são muito usados para organizar e processar informações. Por isso, estão presentes em diversas áreas do conhecimento.

Neste capítulo, você aprenderá a definir um sistema de equações lineares, identificando sistemas homogêneos e não homogêneos. A partir daí, você será capaz de resolver sistemas de equações lineares por meio dos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan.

Sistemas de equações lineares

Talvez a primeira questão que lhe venha à mente ao iniciar o seu estudo sobre o conteúdo deste capítulo é: o que é uma equação linear? Então respondemos: uma equação linear pode ser uma equação da reta no plano (que tem duas dimensões — bidimensional), que pode ser escrita como:

$$y = ax + b$$

em que a e b são duas constantes. Por exemplo, $y = 2x + 3$. Assim, sabendo o valor da variável x , é possível determinar o valor de y e, com essas duas informações, localizar um ponto qualquer no plano. Nesse exemplo, se $x = 1$, então $y = 5$.

Se uma reta no plano é descrita por uma equação linear, duas retas nesse mesmo plano serão descritas por duas equações lineares. Pronto! Agora você tem um sistema de duas equações lineares. O sistema seguinte exemplifica isso.

$$\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = 3x + 1 \end{cases}$$

O esboço do gráfico dessas duas retas aparece na Figura 1a. Observe que essas duas retas contêm um ponto P em comum, demarcando o local no plano onde elas se encontram. Encontrar os valores das variáveis x e y desse ponto P significa resolver esse sistema de duas equações lineares. Essa tarefa é simples nesse exemplo. Igualando as duas equações de reta, $3x + 1 = 2x + 5$, você encontra o valor de 4 para a variável x. Logo, substituindo esse valor de x em qualquer uma das duas equações de reta, você obtém o valor de y: 13.

Será que sempre é possível resolver um sistema de equações lineares? A resposta é dada na Figura 1b. Veja que se trata de duas retas paralelas, ou seja, um sistema de duas equações lineares. E, por isso, elas não se encontram para nenhum valor de x (ou y). Logo, não há solução para esse sistema.

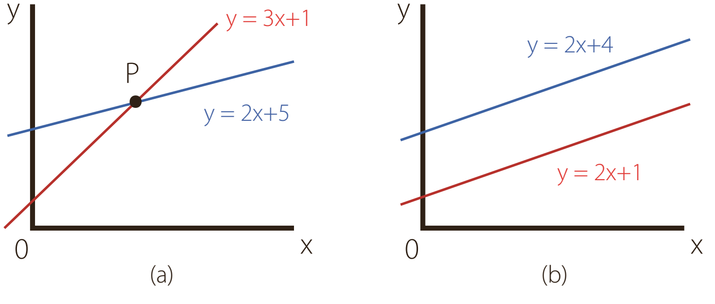

Figura 1. Os gráficos representam (a) a intersecção de duas retas em um ponto P e (b) duas retas paralelas que não se cruzam.

De modo geral, uma reta no plano pode ser escrita como:

$$ax + by = c$$

em que a, b e c são constantes. Já a equação geral de um plano no espaço tridimensional (comprimento × largura × altura) pode ser escrita como:

$$ax + by + cz = d$$

em que a, b, c e d são constantes.

Com efeito, uma **equação linear** de n variáveis $x_1, x_2, ..., x_n$ é uma equação do tipo:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = b$$

em que os coeficientes $a_1, a_2, ..., a_n$ e b são todos constantes.

Para uma reta no plano, $n = 2$ e $x_1 = x$, $x_2 = y$ são as variáveis, e a equação linear fica $a_1x_1 + a_2x_2 = b$. Por outro lado, equações do tipo:

$$2xy + 3z = 1 \qquad x^2 - y^2 = 1 \qquad 3\sqrt{y} + x - z = 2 \qquad \cos z - y = 2 \qquad 2\frac{x}{y} - 5z = 7$$

não são lineares, pois, nas equações lineares, as variáveis aparecem apenas na potência 1 (lembre-se de que $x^1 = x$, $y^1 = 1$ e $z^1 = 1$) e multiplicadas apenas por coeficientes constantes. As variáveis não estão multiplicadas entre si nas equações lineares. Dessa maneira, o conjunto de mais de uma equação linear constitui um **sistema de equações lineares**.

Um exemplo de sistema de equações lineares do tipo 2 × 2 (são duas equações para duas variáveis) é:

$$\begin{cases} -x + y = 6 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

A solução desse sistema pode ser obtida da seguinte maneira. Resolvendo a primeira equação para y, você obtém $y = 6 + x$. Substituindo esse resultado na segunda equação, você terá uma equação apenas para a variável x: $3x + 2(6 + x) = 7$, logo $x = -1$. Então, $y = 6 - 1 = 5$.

Agora, um exemplo de sistema de equações lineares do tipo 3 × 3 (são três equações para três variáveis) é:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

A solução desse sistema demanda um pouco mais de trabalho. Resolvendo a primeira equação para y, você obtém $y = -x$. Assim, você pode reescrever a segunda equação para z como uma função apenas da variável x: $z = x - 2(-x) - 3 = 3x - 3$. Substituindo esses dois resultados para y e z, como funções de x, na terceira equação, você encontra o valor da variável x que satisfaz esse sistema: $2x - (-x) + 3(3x - 3) = 3$, logo, $x = 1$. Com efeito, $y = -1$ e $z = 3(1) - 3 = 0$ (Veja Ref. [1] para outros exemplos).

É possível que dois sistemas lineares contenham o mesmo conjunto de soluções, e, por isso, eles são denominados de sistemas lineares **equivalentes**. Como exemplo, dois sistemas de equações lineares equivalentes são:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Pois $x = 3$ e $y = 2$ é a mesma solução para ambos. Contudo, perceba que é mais simples resolver o segundo sistema, que já fornece diretamente o valor de uma das variáveis, do que resolver o primeiro.

Fique atento

Há três tipos de soluções para um sistema de equações lineares: uma única solução para as incógnitas; nenhuma solução para as incógnitas; ou infinitas soluções para as incógnitas. Um sistema de equações lineares é denominado de **possível** (ou **consistente**) quando ele tem pelo menos uma solução. Um sistema sem nenhuma solução é denominado de **impossível** (ou **inconsistente**).

Sistemas homogêneo e não homogêneo

Os sistemas de equações lineares podem ser de dois tipos: não homogêneo e homogêneo. Um sistema de equações lineares **não homogêneo** do tipo 3 × 3 é dado por:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

onde os coeficientes a_{ij}, $i, j = 1,2,3$, e b_n, $n = 1,2,3$ são constantes.

Um olhar mais atento para esse sistema de equações lineares indica que ele apresenta naturalmente uma estrutura matricial, ou seja, você pode reescrevê-lo como um produto entre matrizes. De fato, ele pode ser visto como uma matriz coluna do tipo 3 × 1, que resulta do produto entre uma matriz dos coeficientes, do tipo 3 × 3, pela matriz coluna das variáveis, do tipo 3 × 1. Veja:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

onde:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

é a matriz dos coeficientes que aparecem multiplicando as variáveis.

Exemplo

Para o sistema de equações lineares do tipo 2 × 2:

$$\begin{cases} x + y = 6 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1x + 1y = 6 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

a matriz do tipo 2 × 2 dos coeficientes é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

enquanto a matriz coluna do tipo 2 × 1 das constantes é:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Exemplo

Para o sistema de equações lineares do tipo 3 × 3:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1x + 1y + 0z = 0 \\ 1x - 2y - 1z = 3 \\ 2x - 1y + 3z = 3 \end{cases}$$

a matriz do tipo 3 × 3 dos coeficientes é:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

enquanto a matriz coluna do tipo 3 × 1 das constantes é:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Quando a matriz coluna das constantes b_n é incorporada à dos coeficientes, por meio de uma coluna extra, perfilada ao lado da última coluna da matriz dos coeficientes,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{bmatrix}$$

cria-se a denominada **matriz aumentada** ou **matriz completa**. Você verá mais adiante, neste capítulo, que essa estrutura será muito útil para encontrar as soluções de um sistema de equações lineares. A matriz aumentada associada com o sistema de equações lineares apresentado nesse exemplo é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Fique atento

Para a construção da matriz aumentada, as variáveis devem estar escritas na mesma ordem em cada equação, e as constantes que não multiplicam variáveis devem estar sempre à direita.

Agora, quando a matriz coluna das constates b_n for nula,

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

o sistema de equações lineares resultante é denominado de **homogêneo**:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ou seja:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0 \end{cases}$$

E como a matriz dos coeficientes não é nula em geral, então uma possível solução é aquela em que:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Ou seja, $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, que também é conhecida como solução **trivial**, pois todas as variáveis são nulas. Por exemplo, um sistema linear homogêneo do tipo 2 × 2 pode ser:

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

cuja representação matricial é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Aqui, $x = y = 0$ é solução do sistema. Observe atentamente que essas duas equações lineares representam retas que passam pela origem; que é exatamente o ponto onde elas se cruzam.

Além da solução trivial, um sistema linear homogêneo pode admitir infinitas soluções. Esse é o caso quando o número de variáveis é maior que o de equações. Por exemplo, o sistema linear homogêneo:

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 0 \\ -x + y + 3z = 0 \end{cases}$$

cuja representação matricial é da forma:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

contém duas equações e três variáveis: x, y e z. Resolvendo a primeira equação para z, você obtém: $z = 3x + 2y$. Substituindo esse resultado na segunda equação: $-x + y + 3(3x + 2y) = 0$, que resulta em $x = -\frac{7y}{8}$. Portanto, uma vez escolhido um valor para a variável y, você encontra os valores correspondentes das variáveis x e z. Exatamente por haver infinitas possibilidades de escolha de valor para y, que o sistema contém infinitas soluções. Por exemplo, se $y = 0$, então $x = z = 0$; mas se $y = 1$, então $x = -\frac{7}{8}$ e $z = -\frac{5}{8}$.

Resolução de sistemas de equações lineares

Em situações envolvendo sistemas com apenas duas equações lineares de duas variáveis, a solução pode ser obtida de forma direta. A partir de uma das equações, escreve-se uma relação que define uma variável em função da outra e, então, substitui-se essa relação na segunda equação, o que permite determinar uma das variáveis e, depois, a outra. Esse método foi empregado na resolução dos sistemas apresentados acima. No entanto, já para um sistema do tipo 3 × 3 e sistemas de equações lineares maiores, esse método é mais trabalhoso e, por conseguinte, suscetível a erros de cálculo nas diversas passagens.

Com efeito, torna-se necessária a utilização de um método que forneça um procedimento operacional bem-definido, a fim de que a obtenção da solução para qualquer tipo de sistema seja padronizada. A chave para isso você já viu no final da primeira seção deste capítulo: dado um sistema, é interessante encontrar um sistema equivalente que forneça a mesma solução para o sistema original, mas que seja mais fácil de ser resolvido.

Você verá, a seguir, dois métodos importantes para a resolução de sistemas de equações lineares.

Método de eliminação de Gauss

O método de eliminação de Gauss consiste em substituir um dado sistema de equações lineares por outro **equivalente**, que seja mais simples de ser solucionado e que tenha a mesma solução do sistema original. Isso pode ser feito por meio de três tipos de operações matemáticas que visam a eliminar variáveis.

Para que você entenda quais são essas operações que mantêm inalterada a solução do sistema original, considere novamente o sistema do tipo 2 × 2:

$$\begin{cases} -x + y = 6 \\ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

cuja solução é $x = -1$ e $y = 5$. As três **operações elementares sobre linhas** são as seguintes:

1. Multiplicar uma equação por uma constante

Se você multiplicar a primeira equação desse sistema por , então, o novo sistema será:

$$\begin{cases} -2x + 2y = 12 \\ \ \ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

Resolvendo a primeira equação para y, você obtém $2y = 12 + 2x$, ou seja, $y = 6 + x$. Substituindo esse resultado na segunda equação: $3x + 2(6 + x) = 7$, logo $x = -1$. Então, $y = 6 - 1 = 5$. A solução original não foi alterada por essa operação elementar.

2. Trocar de posição duas equações entre si

Isso significa passar a primeira equação para o lugar da segunda, e vice-versa. O novo sistema fica:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 7 \\ -x + y = 6 \end{cases}$$

Daí, resolvendo a segunda equação para y: $y = 6 + x$. Substituindo esse resultado na primeira equação: $3x + 2(6 + x) = 7$, logo, $x = -1$ e $y = 6 - 1 = 5$. A solução original não foi alterada por essa operação elementar.

3. Somar um múltiplo de uma equação a uma outra equação

Essa operação é menos óbvia. Primeiramente, construa um novo sistema, multiplicando a primeira equação por 3 (operação i):

$$\begin{cases} -3x + 3y = 18 \\ \ \ 3x + 2y = 7 \end{cases}$$

Agora, construa outro sistema no qual a segunda equação será igual à soma das duas equações do sistema acima; ou seja, soma-se a primeira linha com a segunda do sistema:

$$\begin{cases} -3x + 3y = 18 \\ \ \ 0x + 5y = 25 \end{cases}$$

A segunda linha já fornece diretamente o valor da variável y: $y = 5$. Substituindo esse resultado na primeira equação: $-3x + 3(5) = 18$, então $x = -1$. Portanto, novamente a solução original não foi alterada por essa operação elementar.

Note que a aplicação das três operações fornece sistemas equivalentes, pois conduz a soluções iguais. Contudo, é a operação (iii) que representa a essência do método de eliminação de Gauss, pois, a partir dela, é possível obter um sistema equivalente em que uma das equações tenha apenas uma variável.

Como você já deve ter percebido, as três operações acima agem apenas nos coeficientes a_{ij} e constantes b_n. Por isso, é mais conveniente escrever a matriz aumentada do sistema para aplicar o método da eliminação de Gauss. Uma vez que a matriz dos coeficientes é $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, e a matriz da constantes é $\begin{bmatrix} 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ para o exemplo discutido acima, então, a matriz aumentada fica sendo:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Agora, você executa as mesmas operações elementares sobre as linhas dessa matriz aumentada.

Primeiro passo: multiplique a primeira linha por 3.

$$3 \cdot (-1 \quad 1 \quad 6) = (-3 \quad 3 \quad 18)$$

A primeira linha da nova matriz aumentada fica:

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 18 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Segundo passo: some essa nova primeira linha com a segunda.

$$(-3 \quad 3 \quad 18) + (3 \quad 2 \quad 7) = (0 \quad 5 \quad 25)$$

A segunda linha da nova matriz aumentada fica:

$$\begin{bmatrix} -3 & 3 & 18 \\ 0 & 5 & 25 \end{bmatrix}$$

Observe que apareceu um zero no primeiro elemento da segunda linha (destacado na cor verde). Se você restabelecer o formato de sistema novamente:

$$\begin{cases} -3x + 3y = 18 \\ 0x + 5y = 25 \end{cases}$$

Note que, pela segunda linha, $5y = 25$, então $y = 5$. Substituindo esse resultado na primeira equação: $-3x + 3(5) = 18$, logo, $x = -1$, como você já esperava.

Nessa configuração, a matriz aumentada está em sua **forma escalonada por linhas,** ou simplesmente **forma escalonada**, pois a estrutura da matriz assemelha-se à de uma escada.

Portanto, o método de eliminação de Gauss consiste em escalonar a matriz aumentada, que essencialmente significa escalonar o sistema de equações lineares, de modo a obter um novo sistema equivalente cuja resolução é mais simples e possui a mesma solução do sistema original.

Método de eliminação de Gauss-Jordan

Embora, nesse ponto, você já possa resolver o sistema como anteriormente — a partir do restabelecimento da forma usual do sistema —, a representação escalonada lhe permite avançar um pouco mais em direção à solução direta do sistema, sem a necessidade de substituição do valor de uma variável em outra equação para determinar mais uma variável, e assim por diante. A ideia básica é continuar a fazer operações elementares sobre linhas.

Terceiro passo: divida a primeira equação por 3, e a segunda por 5.

$$\frac{1}{3}(-3 \quad 3 \quad 18) = (-1 \quad 1 \quad 6)$$

$$\frac{1}{5}(0 \quad 5 \quad 25) = (0 \quad 1 \quad 5)$$

A primeira e segunda linhas da nova matriz aumentada ficam:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Quarto passo: multiplique a primeira equação por –1, e depois some a segunda a ela.

$$-1 \cdot (-1 \quad 1 \quad 6) + (0 \quad 1 \quad 5) = (1 \quad 0 \quad -1)$$

A primeira linha da nova matriz aumentada fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Nessa nova configuração, a matriz aumentada está na **forma escalonada reduzida por linhas**.

Quinto e último passo: restabeleça a forma usual do sistema.

$$\begin{cases} 1x + 0y = -1 \\ 0x + 1y = 5 \end{cases}$$

Você já tem a solução diretamente: $x = -1$ e $y = 5$. Esse arranjo final do sistema (ou da matriz aumentada), em que os valores das variáveis são obtidos diretamente sem cálculos adicionais, é conhecido como **método de eliminação de Gauss-Jordan**.

Exemplo

Para consolidar o seu conhecimento sobre o método de eliminação de Gauss e o método da eliminação de Gauss-Jordan, considere o seguinte exemplo envolvendo um sistema de equações lineares do tipo 3 × 3:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y - z = 3 \\ 2x - y + 3z = 3 \end{cases}$$

Pelo método de eliminação de Gauss, você escreve a matriz aumentada desse sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Primeiro passo: multiplique a primeira linha por –1 e some o resultado com a segunda linha.

$$-1 \cdot (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0) + (1 \quad -2 \quad -1 \quad 3) = (0 \quad -3 \quad -1 \quad 3)$$

A segunda linha da nova matriz aumentada fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Segundo passo: multiplique a primeira linha por –2 e some o resultado com a terceira linha.

$$-2 \cdot (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0) + (2 \quad -1 \quad 3 \quad 3) = (0 \quad -3 \quad 3 \quad 3)$$

A terceira linha da nova matriz aumentada fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Terceiro passo: multiplique a segunda linha por –1 e some o resultado com a terceira linha.

$$-1 \cdot (0 \quad -3 \quad -1 \quad 3) + (0 \quad -3 \quad 3 \quad 3) = (0 \quad 0 \quad 4 \quad 0)$$

A terceira linha da nova matriz aumentada fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Restabelecendo o formato de sistema, você obtém:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ -3y - z = 3 \\ 4z = 0 \end{cases}$$

Logo, $z = 0$. Pela segunda equação, você determina a variável y: $-3y - 0 = 3$, então $y = -1$. Substituindo o valor de y na primeira equação, chega-se ao valor da variável x: $x = 1$.

Agora, resolvendo pelo método de eliminação de Gauss-Jordan, você escreve novamente a matriz aumentada do sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Observe que os três primeiros passos são iguais aos que você fez no método de eliminação de Gauss.

Primeiro passo: multiplique a primeira linha por –1 e some o resultado com a segunda linha.

$$-1 \cdot (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0) + (1 \quad -2 \quad -1 \quad 3) = (0 \quad -3 \quad -1 \quad 3)$$

A segunda linha da nova matriz aumentada fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Segundo passo: multiplique a primeira linha por –2 e some o resultado com a terceira linha.

$$-2 \cdot (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0) + (2 \quad -1 \quad 3 \quad 3) = (0 \quad -3 \quad 3 \quad 3)$$

A terceira linha da nova matriz aumentada fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

Terceiro passo: multiplique a segunda linha por –1 e some o resultado com a terceira linha.

$$-1 \cdot (0 \quad -3 \quad -1 \quad 3) + (0 \quad -3 \quad 3 \quad 3) = (0 \quad 0 \quad 4 \quad 0)$$

A terceira linha da nova matriz aumentada fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Quarto passo: divida a última linha por 4.

$$\frac{1}{4}(0 \quad 0 \quad 4 \quad 0) = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 0)$$

A terceira linha da nova matriz aumentada fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Quinto passo: some a terceira linha com a segunda linha.

$$(0 \quad 0 \quad 1 \quad 0) + (0 \quad -3 \quad -1 \quad 3) = (0 \quad -3 \quad 0 \quad 3)$$

A segunda linha da nova matriz aumentada fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sexto passo: multiplique a segunda linha por $-\frac{1}{3}$.

$$-\frac{1}{3} \cdot (0 \quad -3 \quad 0 \quad 3) = (0 \quad 1 \quad 0 \quad -1)$$

A segunda linha da nova matriz aumentada fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Sétimo passo: multiplique a segunda linha por –1 e some com a primeira linha.

$$-1 \cdot (0 \quad 1 \quad 0 \quad -1) + (1 \quad 1 \quad 0 \quad 0) = (1 \quad 0 \quad 0 \quad 1)$$

A primeira linha da nova matriz aumentada fica:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Oitavo e último passo: restabeleça a forma usual do sistema:

$$\begin{cases} 1x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + 1y + 0z = -1 \\ 0x + 0y + 1z = 0 \end{cases}$$

Logo, $x = 1$, $y = -1$ e $z = 0$ é a solução do sistema de equações lineares.

Você já deve ter percebido que utilizar a representação da matriz aumentada do sistema torna a aplicação dos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan mais eficiente, pois as operações elementares com as linhas envolvem apenas os coeficientes (que são números) sem a presença das variáveis.

Referências

ANTON, H.; BUSBY, R. C. *Álgebra linear contemporânea*. Porto Alegre: Bookman, 2006. 612 p.

ANTON, H.; RORRES, C. *Álgebra linear com aplicações*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2012. 786 p.

Leitura recomendada

CRISPINO, M. L. *320 questões resolvidas de álgebra linear*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2012. 352 p.

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.

Conteúdo:

SOLUÇÕES EDUCACIONAIS INTEGRADAS