# FÍSICA III

# Circuitos RC

*Felipe de Oliveira Baldner*

**OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM**

> Reconhecer o efeito de um capacitor nos circuitos RC.
> Determinar a constante de tempo nos circuitos RC.
> Estabelecer o comportamento da corrente elétrica em circuitos RC.

## Introdução

Os capacitores são elementos de circuito que têm a capacidade de armazenar energia na forma de campo elétrico. O conceito de capacitância foi descoberto experimentalmente por Michael Faraday em meados do século XIX. Ele observou o acúmulo de cargas em um condutor quando este era colocado nas proximidades de outro condutor já carregado e sem contato elétrico entre eles, mas com ambos ligados em potenciais elétricos diferentes. Faraday observou que essas cargas eram induzidas independentemente do material que separava os condutores, chamado de material dielétrico.

Ao longo dos anos, diferentes tipos de capacitores foram projetados e fabricados, sendo utilizados em circuitos tanto de corrente contínua quanto de corrente alternada. Os circuitos de corrente contínua, chamados de RC, são compostos de resistores e capacitores, e sua aplicação típica é na filtragem e na estabilização de linhas de tensão, bem como na geração de formas de onda.

Neste capítulo, você vai estudar os efeitos que os capacitores exercem ao serem inseridos em circuitos elétricos de corrente contínua juntamente com resistores. Além disso, vai ver como é o processo de armazenamento de carga de um capacitor e como o período transiente é afetado pelos componentes de um circuito. Por fim, vai conhecer como resolver matematicamente um circuito RC a partir de suas equações diferenciais.

# Circuitos elétricos com capacitores

Um capacitor é um dispositivo capaz de armazenar energia na forma de campo elétrico. Sua forma mais simples é dada por duas placas paralelas separadas por um meio dielétrico (Figura 1a). Quando as placas são ligadas a um potencial elétrico diferente, cargas de mesma intensidade, mas de sinais diferentes, acumulam-se (Figura 1b) (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

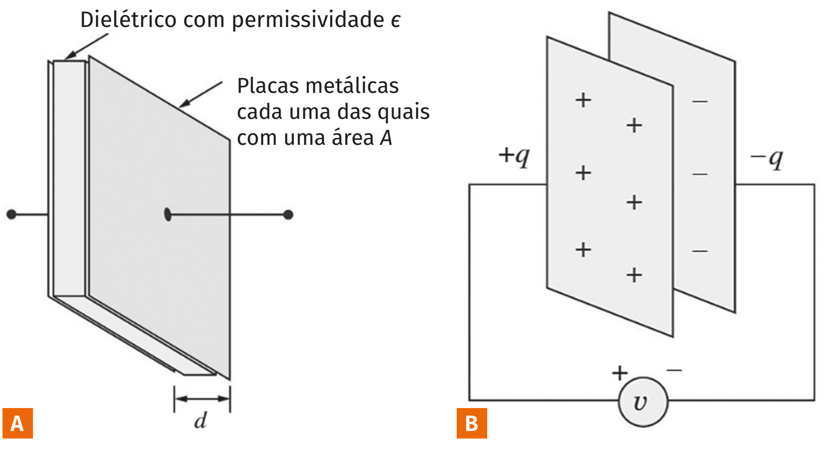


**Figura 1.** Capacitor de placas paralelas: (a) com suas dimensões e materiais; (b) ligado a uma fonte de tensão.
**Fonte:** Alexander e Sadiku (2013, p. 190).

A capacitância ($C$; em farad, F) é a propriedade de um capacitor que determina a quantidade de carga ($q$; em coulomb, C) por unidade de potencial elétrico ($v$; em volt, V) capaz de armazenar em cada placa, sendo dada pela Equação 1. Resolvendo tal equação e utilizando a lei de Gauss e a integral de linha do potencial elétrico para a geometria do capacitor, é possível determinar sua capacitância de acordo com o material e suas dimensões. No caso do capacitor de placas paralelas da Figura 1a, sua capacitância é dada pela Equação 2, onde $d$ é a distância entre as placas (em metro, m), $A$ é a área das placas (em metro quadrado, $m^2$) e $\varepsilon$ é a permissividade do dielétrico (em farad por metro, F/m) (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

$$C = \frac{q}{v} \tag{1}$$

$$C = \frac{\varepsilon A}{d} \tag{2}$$

No entanto, na análise de circuitos elétricos, utilizando o modelo de parâmetros concentrados, as propriedades internas do capacitor são simplificadas, de modo que o componente utilizado é ideal, então deve-se considerar apenas a relação entre tensão e corrente com a capacitância. A Figura 2 ilustra o símbolo do capacitor utilizado no desenho de circuitos elétricos, com uma corrente elétrica *i* circulando por ele sobre uma diferença de potencial *v* (NILSSON; RIEDEL, 2009).

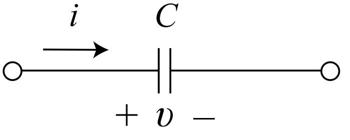


**Figura 2.** Símbolo do capacitor utilizado no desenho de circuitos elétricos.
**Fonte:** Adaptada de Alexander e Sadiku (2013,1).

A corrente elétrica é dada pela taxa de variação da carga elétrica no tempo. Derivando a Equação 1, encontramos a equação da corrente elétrica que circula em um capacitor, como mostra a Equação 3. Colocando a Equação 3 em função da tensão e realizando a operação inversa, é possível encontrar a Equação 4. Nesse caso, nota-se uma constante de integração referente à tensão no capacitor no instante inicial da análise (HAYT JR.; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{3}$$

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(t)dt + v(t_0) \tag{4}$$

A potência $p$ liberada por um capacitor é dada pelo produto tensão × corrente, como mostra a Equação 5. Sua energia $w$ armazenada é dada pela integral da potência, resultando na expressão da Equação 6.

$$p(t) = Cv(t)\frac{dv(t)}{dt} \tag{5}$$

$$w(t) = \frac{1}{2}Cv(t)^2 \tag{6}$$

Em circuitos que disponham de vários capacitores ligados, estes podem ser simplificados em um único capacitor equivalente. Capacitores em série, como aqueles ilustrados na Figura 3a, têm sua equivalência dada pela Equação 7. Capacitores associados em paralelo, ligados como mostra a Figura 3b, são dados como na Equação 8.

$$C_{eq} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_1} + \cdots + \frac{1}{C_N}\right)^{-1} = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{C_i}\right)^{-1} \tag{7}$$

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \cdots + C_N = \sum_{i=1}^{N} C_i \tag{8}$$

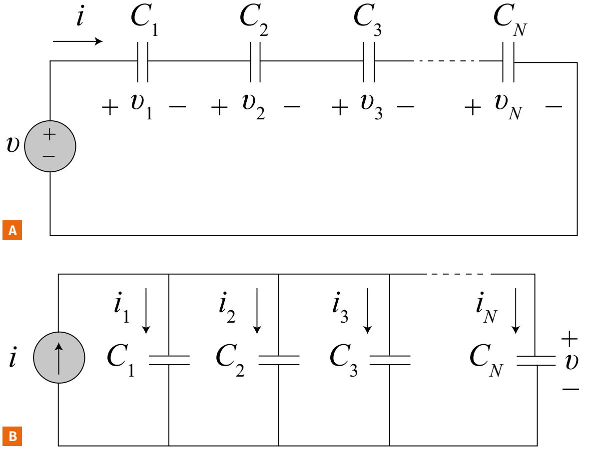


**Figura 3.** Capacitores ligados (a) em série e (b) em paralelo.
**Fonte:** Adaptada de Alexander e Sadiku (2013).

O capacitor, como elemento de circuito, introduz termos diferenciais e integrais à análise, mostrando que as grandezas de tensão e corrente variam ao longo do tempo. Assim, devemos inseri-lo junto a resistores para analisar qual é o efeito que eles vão causar aos circuitos de corrente contínua.

## Comportamento transitório em circuitos RC

A propriedade de armazenamento de energia do capacitor na forma de campo elétrico resulta, como visto, no termo referente à tensão inicial da Equação 4, em uma alteração no comportamento da tensão de um circuito de corrente contínua.

Observando a Equação 3, é possível notar que a corrente é função da derivada da tensão, e ambas são funções do tempo. Entretanto, ao submeter o capacitor a uma fonte de tensão em regime de corrente contínua, sua tensão será constante, fazendo com que a derivada seja nula, e o mesmo vale para a corrente. Isso implica no fato de que, ao ser submetido a uma tensão em regime de corrente contínua constante, o capacitor comporta-se como um circuito aberto (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Ainda analisando a Equação 3, caso houvesse uma grande variação de tensão sobre um capacitor em um instante muito pequeno de tempo, haveria a aparição de uma corrente elétrica infinita, algo fisicamente impossível de acontecer. Assim, as propriedades do capacitor fazem com que ele não mude sua tensão abruptamente (HAYT JR.; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Utilizando essas propriedades e as relações diferenciais-integrais de tensão e corrente, deve-se analisar como o capacitor se comporta em circuitos com resistores (circuitos RC), como mostra a Figura 4.

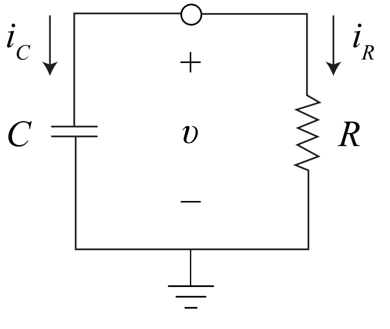


**Figura 4.** Um circuito RC sem fonte.
**Fonte:** Adaptada de Alexander e Sadiku (2013).

Considerando que o capacitor *C* apresenta energia armazenada no instante em que o circuito da Figura 4 é ligado, ela vai se manifestar como uma tensão $v(0)$ diferente de zero. Para determinar qual será a resposta de tensão após o circuito ser ligado, deve-se fazer a análise pela lei de Kirchoff das correntes (LKC). Substituindo as expressões de corrente para o resistor e para o capacitor, encontramos a Equação 9. Como há apenas um termo de derivada de primeira ordem, a Equação 9 é uma equação diferencial de primeira ordem. Por isso, um circuito RC também é chamado de circuito de primeira ordem (NILSSON; RIEDEL, 2009).

Resolvendo essa equação diferencial e fazendo a devida aplicação da condição inicial, temos a expressão da tensão $v(t)$ da Equação 10. Nessa equação, $V_0$ representa a tensão inicial no capacitor. Como não há fonte de tensão ou corrente no circuito, a Equação 10 representa a resposta natural da Equação 9.

$$C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v}{R} = 0 \therefore \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v}{RC} = 0 \tag{9}$$

$$v(t) = V_0 e^{-t/RC} \tag{10}$$

Observando a função exponencial da Equação 10, o capacitor comporta-se como se estivesse descarregando sua energia previamente armazenada no outro componente do circuito, um resistor, que vai dissipá-la ao longo do tempo até que o capacitor esgote sua reserva de energia. A tensão no capacitor começa na tensão inicial $V_0$ e descarrega até zero, e esse intervalo de tempo chama-se transiente. No argumento da função exponencial, deve-se notar que o produto *RC* divide o tempo *t*. Esse denominador é responsável pela inclinação dessa exponencial e chama-se constante de tempo do circuito ($\tau$; em segundo, s), cuja expressão matemática é representada pela Equação 11. Quanto menor essa constante de tempo, mais rápido o capacitor descarregará, como mostra a curva da tensão normalizada pelo tempo na Figura 5 (HAYT JR.; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

$$\tau = RC \tag{11}$$

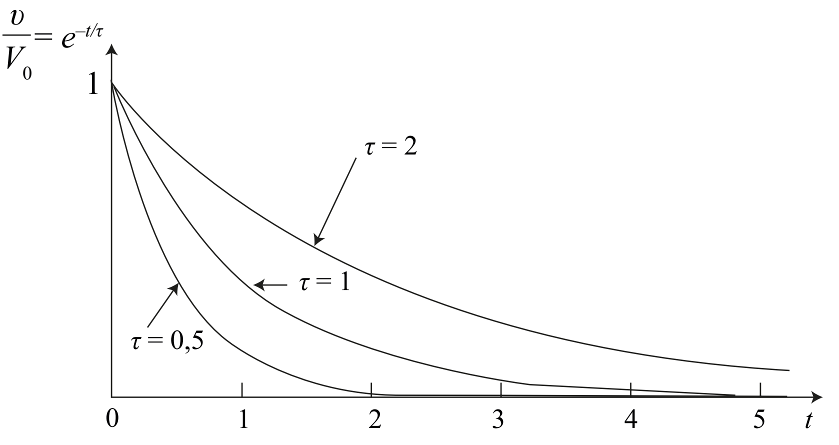


**Figura 5.** Curva de descarga da tensão de um capacitor para várias constantes de tempo.
**Fonte:** Adaptada de Alexander e Sadiku (2013).

Analisando o transitório do circuito RC em função da constante de tempo, é possível perceber que, a cada unidade dela, a tensão está a um percentual da inicial. Os valores do Quadro 1 mostram a razão da tensão instantânea pela tensão inicial para instantes de tempo iguais a múltiplos da constante de tempo do circuito.

**Quadro 1.** Variação percentual da tensão instantânea em relação à tensão inicial de um circuito RC em descarga

| $t$ | $v(t)/V_0$ | |
|---|---|---|
| $\tau$ | 0,36788 | 36,788% |
| $2\tau$ | 0,13534 | 13,534% |
| $3\tau$ | 0,04979 | 4,979% |
| $4\tau$ | 0,01832 | 1,832% |
| $5\tau$ | 0,00674 | 0,674% |

**Fonte:** Adaptado de Alexander e Sadiku (2013).

A partir das informações do Quadro 1, ao se passar uma constante de tempo, a tensão no capacitor será 36,788% da inicial, até que, ao chegar no instante 5τ, o capacitor ficará praticamente descarregado, com apenas 0,674% de sua tensão inicial. Assim, é possível inferir que o regime transitório de um circuito RC dura cinco constantes de tempo (5τ) até alcançar o regime estacionário, em que não há mais energia no circuito (NILSSON; RIEDEL, 2009).

## Exemplo

Um capacitor de 10 nF, inicialmente carregado com uma tensão de 20 V, é ligado a um resistor de valor desconhecido. Sabendo que no instante de 0,1 ms foi medida uma tensão de 2,7068 V nos terminais do capacitor, qual é o valor do resistor?

Uma das maneiras de se medir o valor de componentes em circuitos RC é utilizando medições relativas à constante de tempo. Assim, a partir da determinação da razão entre a tensão instantânea e a tensão inicial, é possível determinar quantos múltiplos da constante de tempo esse tempo de medição se refere. A razão de tensões pode ser calculada da seguinte forma:

$$\frac{v(t)}{V_0} = \frac{2{,}7068\ \mathrm{V}}{20\ \mathrm{V}} = 0{,}13534$$

Analisando o Quadro 1, é possível determinar que essa razão refere-se a duas constantes de tempo. Ou seja, se no instante 0,1 ms a tensão é 13,534% da inicial, isso implica que esse instante representa duas constantes de tempo. Logo, o valor da constante de tempo será:

$$2\tau = 0{,}1\ \mathrm{ms} \therefore \tau = 50\ \mu\mathrm{s}$$

Utilizando a Equação 11 em função do valor *R* do resistor, temos:

$$\tau = RC \therefore R = \frac{\tau}{C} = \frac{50\ \mu\mathrm{s}}{10\ \mathrm{nF}} \therefore R = 5\ \mathrm{k\Omega}$$

Os circuitos compostos por resistores e capacitores, devido à sua propriedade de armazenamento de energia, apresentam um intervalo de tempo chamado de transitório, em que a tensão e a corrente variam no circuito. A duração do transitório depende da constante de tempo do circuito, definida unicamente pelas propriedades dos componentes que compõem o circuito RC. Agora que você sabe como ocorre a descarga do capacitor, deve conhecer o processo de carga que vai fazer com que ele apresente uma tensão inicial ao ser desligado de qualquer tipo de fonte.

## Tensões e correntes em circuitos RC

Os circuitos RC sem fontes de tensão ou corrente são capazes de descarregar a energia previamente armazenada neles. No entanto, deve-se pensar em como esse capacitor adquiriu tal energia em um primeiro momento. Antes desse capacitor ter sido submetido a apenas um resistor (que dissipará toda a sua energia armazenada), houve outra ligação desse capacitor com uma fonte, que forneceu essa energia a ele.

A Figura 6a mostra um circuito equivalente de Thevenin ligado a uma chave e um capacitor. Supondo que o capacitor apresenta uma tensão inicial $V_0$, a chave, ao ser fechada no instante $t = 0$, vai forçar a tensão $V_S$ da fonte sobre o capacitor (DORF; SVOBODA, 2012).

Assim, no instante em que a chave se fechar, vai haver a tentativa de mudar a tensão do capacitor, daquela previamente armazenada para uma nova. Essa mudança abrupta de tensão é chamada de degrau de tensão e pode ser representada pela função singular degrau unitário, *u*(*t*). Essa função, como ilustra a Equação 12, tem valor unitário para todo instante após o inicial. A Figura 6b mostra uma fonte de tensão que utiliza a função *u*(*t*), sendo equivalente ao circuito da Figura 6a. Assim, uma fonte em degrau tem sua tensão $V_S(t)$ dada pela Equação 13, que, após ser ligada (a chave ser fechada), terá tensão $V_S$, mas antes disso terá tensão zero (DORF; SVOBODA, 2012).

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{12}$$

$$v_S(t) = V_S u(t) = \begin{cases} V_S, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \tag{13}$$

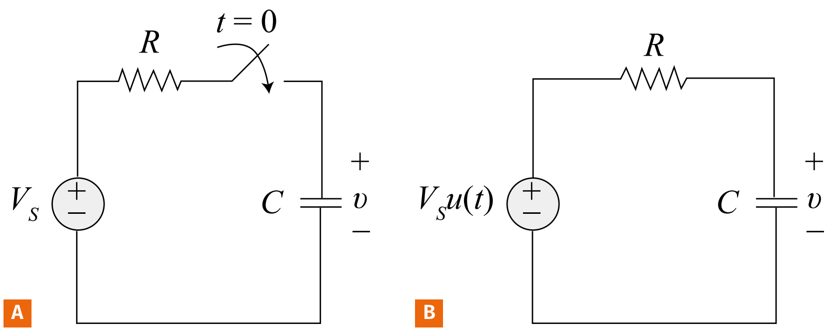


**Figura 6.** Circuito de Thevenin ligado a um capacitor: (a) representação com chave série; (b) representação com a função singular degrau unitário.
**Fonte:** Adaptada de Alexander e Sadiku (2013).

Preste atenção aos símbolos utilizados. Tipicamente, letras maiúsculas representam valores constantes e letras minúsculas representam aqueles que variam no tempo. No exemplo da Equação 13, $v_S(t)$ representa a tensão da fonte que varia com o tempo, enquanto $V_S$ é o valor que essa fonte apresenta após ligada.

## *Saiba mais*

O estudo das funções singulares é muito mais amplo do que o mostrado na Equação 12. Para saber mais, leia o capítulo 7 do livro *Fundamentos de circuitos elétricos*, de Charles Alexander e Matthew Sadiku (2013), e o capítulo 8 do livro *Análise de circuitos em engenharia*, de William Hayt Jr., Jack Kemmerly e Steven Durbin (2014).

Como deduzido anteriormente, o capacitor não permite variações abruptas de tensão. Portanto, a tensão nele no instante imediatamente anterior ao fechamento da chave ($v(0^-)$) não mudará no instante imediatamente posterior ao fechamento da chave ($v(0^+)$). Essa tensão, no entanto, será alterada com o passar do tempo. Para se descobrir a resposta de tensão do capacitor ao ser submetido ao forçamento da fonte $v_S(t)$, chamada de resposta ao degrau, deve-se proceder com a análise pela LKC, como mostra a Equação 14. Ao resolver essa equação diferencial, deve-se utilizar a condição de contorno descrita na Equação 15, referente à tensão inicial sobre o capacitor. A resposta de tensão do capacitor então é dada pela Equação 16. Supondo que $V_S > V_0$, a resposta completa de tensão do capacitor é mostrada pelo gráfico da Figura 7a (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

$$C\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t) - v_S(t)}{R} = 0 \therefore \frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{RC} = \frac{V_S}{RC} \quad (14)$$

$$v(0^+) = V_0 \quad (15)$$

$$v(t) = \begin{cases} V_0, & t < 0 \\ V_S + (V_0 - V_S)e^{-t/RC}, & t \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

Caso o capacitor não apresente energia inicialmente, sua resposta ao degrau é a mostrada pela curva de tensão da Figura 7b. Então, a Equação 16 pode ser simplificada, resultando na Equação 17.

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ V_S(1 - e^{-t/RC}), & t \geq 0 \end{cases} \quad (17)$$

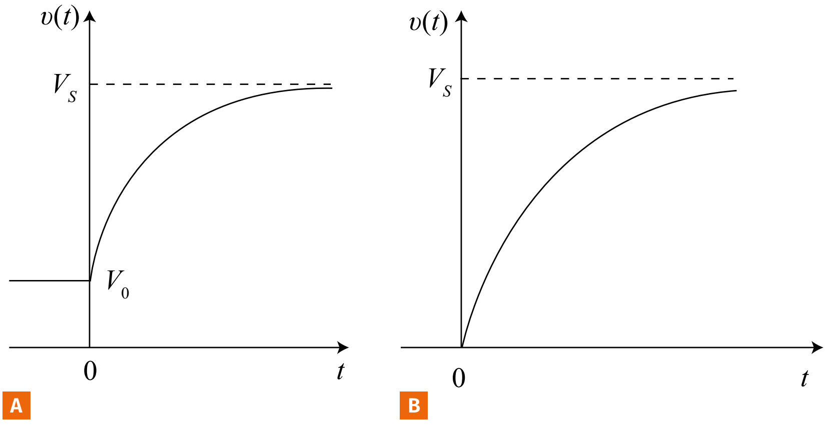


**Figura 7.** Resposta ao degrau de tensão de um capacitor em um circuito RC quando este, inicialmente, (a) apresenta tensão e (b) está completamente descarregado.
**Fonte:** Adaptada de Alexander e Sadiku (2013).

Enquanto a tensão sobre um capacitor não puder apresentar mudanças abruptas, não haverá restrição física ou matemática para a corrente. Como já visto, quando o capacitor está submetido a uma tensão constante, sua corrente é nula, indicando que ele se comporta como um circuito aberto. A súbita presença de uma fonte de tensão no circuito fará com que o capacitor se carregue e, para isso, ocorrerá uma circulação de corrente. Essa corrente pode ser obtida aplicando o termo referente a $t \geq 0$ da Equação 16 à Equação 3, o que resulta na Equação 18. Caso o capacitor esteja inicialmente descarregado, a corrente será dada pela expressão da Equação 19 (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

$$i(t) = \frac{(V_S - V_0)}{R} e^{-t/RC} \tag{18}$$

$$i(t) = \frac{V_S}{R} e^{-t/RC} \tag{19}$$

Observando a Equação 19, para um capacitor inicialmente descarregado, no instante $t = 0^+$, ou seja, naquele instante imediatamente após o forçamento da fonte, a corrente terá intensidade $V_S/R$. Isso significa que a corrente é dada unicamente pela presença do resistor no circuito. Assim, a tensão sobre o capacitor é nula. Portanto, um capacitor descarregado, no instante imediatamente após a ligação de uma fonte, comporta-se como um curto-circuito. De forma análoga, caso o capacitor tenha uma tensão inicial, ele se comportará, no instante $t = 0^+$, como uma fonte de tensão de intensidade $V_0$. Sua resposta de corrente, estando inicialmente descarregado, é representada pela curva da Figura 8, decrescendo exponencialmente do valor máximo até zero, quando o capacitor se encontra completamente carregado (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

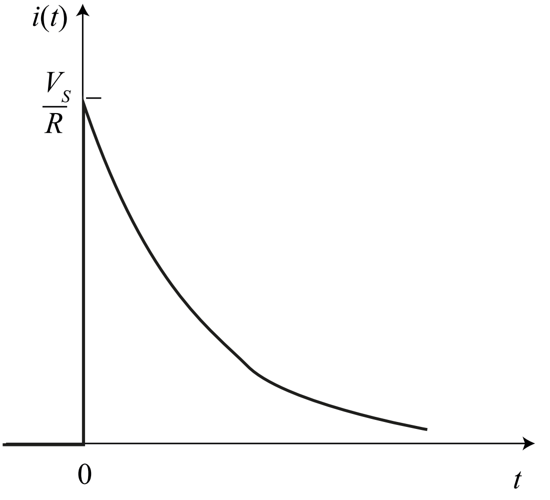


**Figura 8.** Resposta de corrente de um capacitor descarregado quando submetido a um degrau de tensão em um circuito RC.
**Fonte:** Adaptada de Alexander e Sadiku (2013).

## Exemplo

Um circuito RC é composto por um resistor de 10 kΩ e um capacitor de 5 mF. Supondo que o capacitor estava inicialmente descarregado e vai ser submetido a uma fonte de tensão de 12 V, determine as expressões das respostas do capacitor à fonte em (a) tensão e (b) corrente. Se essa fonte for substituída por uma de 24 V, determine as novas respostas de (c) tensão e (d) corrente. Suponha que o intervalo de tempo entre a troca de fontes foi grande o suficiente para que o capacitor tenha se carregado completamente.

Para (a), vamos aplicar os valores dos parâmetros do circuito à Equação 17:

$$v(t) = V_S(1 - e^{-t/RC}) = (12\ \mathrm{V})(1 - e^{-t/(10\ \mathrm{k\Omega})\ (5\ \mathrm{mF})})$$

$$v(t) = 12(1 - e^{-0{,}02t})\ \mathrm{V}$$

Para (b), vamos aplicar os valores dos parâmetros do circuito à Equação 19:

$$i(t) = \frac{V_S}{R}e^{-t/RC} = \frac{12\ \mathrm{V}}{10\ \mathrm{k\Omega}}e^{-t/(10\ \mathrm{k\Omega})\ (5\ \mathrm{mF})} =$$

$$i(t) = 1{,}2e^{-0{,}02t}\ \mathrm{mA}$$

Para (c), pense que, no momento em que a fonte foi trocada, o capacitor apresentava energia armazenada. Nesse caso, a tensão inicial é de 12 V, podendo ser encontrada ao fazer $t \to \infty$ na resposta do item (a). Aplicando os valores à Equação 16, temos:

$$v(t) = V_S + (V_0 - V_S)e^{-t/RC} = 24\ \text{V} + (12\ \text{V} - 24\ \text{V})e^{-t/(10\ \text{k}\Omega)\ (5\ \text{mF})}$$

$$v(t) = 12(2 - e^{-t/(10\ \text{k}\Omega)\ (5\ \text{mF})})\ \text{V}$$

Para (d), também utilizamos a Equação 18:

$$i(t) = \frac{(V_S - V_0)}{R}e^{-t/RC} = \frac{(24\ \text{V} - 12\ \text{V})}{10\ \text{k}\Omega}e^{-t/(10\ \text{k}\Omega)\ (5\ \text{mF})}$$

$$i(t) = 1{,}2e^{-0{,}02t}\ \text{mA}$$

---

O capacitor, como elemento de armazenamento de energia, ao ser incluído em um circuito de corrente contínua, faz com que tanto a tensão quanto a corrente desse circuito apresente variações no tempo, com um regime transitório referente à sua carga e um regime permanente após estar totalmente carregado. Esses circuitos RC, que têm aplicações que vão desde a eletrônica digital até a eletricidade de potência, devem ser estudados para que possam ser adequadamente implementados.

## Referências

ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. *Fundamentos de circuitos elétricos*. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

DORF, R. C.; SVOBODA, J. A. *Introdução aos circuitos elétricos*. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012.

HAYT JR., W. H.; KEMMERLY, J. E.; DURBIN, S. M. *Análise de circuitos em engenharia*. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. *Circuitos elétricos*. 8. ed. São Paulo: Prentice Hall, 2009.

## Leituras recomendadas

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. *Fundamentos de física*: eletricidade e magnetismo. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013. v. 4.

KNIGHT, R. D. *Física*: uma abordagem estratégica. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2009. v. 3.

O'MALLEY, J. *Análise de circuitos*. 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

SADIKU, M. N. O.; MUSA, S. M.; ALEXANDER, C. K. *Análise de circuitos elétricos com aplicações*. Porto Alegre: AMGH, 2014.

Conteúdo:

sagah