



CPET

Centro de Profissionalização e Educação Técnica

E-BOOK

ELETRICIDADE II



APRESENTAÇÃO

Em geral, ao estudar circuitos com apenas uma única fonte de tensão, é comum pela simplicidade utilizar para a análise apenas a técnica das leis de Kirchhoff. Porém, conforme a complexidade da análise vai aumentando, com o incremento de mais de uma fonte de tensão, outros métodos de análise podem ser empregados, dentre eles o método de análise nodal e o método de análise de malhas. Embora se possa usar qualquer um desses métodos, alguns circuitos são analisados com mais facilidade quando se usa determinada abordagem.

Nesta Unidade de Aprendizagem, você vai estudar o método de análise nodal e o método das malhas, determinando suas características e os pontos principais, bem como comparando os dois métodos.

Bons estudos.

Ao final desta Unidade de Aprendizagem, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Determinar as características do método de análise nodal.
- Definir os principais pontos do método de análise de malhas.
- Comparar os métodos de análise nodal e malhas.



DESAFIO

Os métodos utilizados para análise de circuitos complexos abrangerão a análise nodal e a análise de malhas. Embora se possa utilizar qualquer um desses métodos, cada tipo de análise assume propriedades diferenciadas quanto à análise, o que pode facilitar a análise de alguns circuitos em detrimento de outros, por isso se faz necessário conhecer tanto um método como o outro, a fim de que diante de um determinado circuito, você possa tomar a decisão de realizar ou a análise nodal ou a análise de malhas.

Em uma industria de médio porte, em que é fundamental a escolha da análise a ser realizada, o primeiro passo a ser dado seria utilizar um dos métodos (nodal ou malhas), assumindo que os

circuitos que serão analisados são lineares bilaterais. A compreensão desse princípio de linearidade bilateral é fundamental para a compreensão de qual método deverá ser utilizado.

Você, como responsável pela parte elétrica de uma indústria de médio porte, foi questionado sobre o que significa essa premissa de um circuito ter características lineares bilaterais e por que para a aplicação em uma indústria de médio porte esse conhecimento é fundamental na tomada rápida de decisão, pela utilização do método de análise nodal ou pelo método da análise de malhas?



INFOGRÁFICO

As leis de Kirchhoff são utilizadas para calcular a corrente em cada ramo de um circuito. Ainda que essa forma seja simples, é inconveniente usar em um cenário com várias fontes de tensão, tendo em vista que isso geraria a necessidade de resolução de diversas equações lineares simultâneas, desencadeando um número excessivo de equações e aumentando a complexidade de circuitos relativamente simples.

Assim, os métodos de análise nodal e malhas têm se mostrado eficientes em opção à utilização das leis de Kirchhoff quando é necessário realizar a análise de circuitos com mais de uma fonte de tensão.

Você vai acompanhar no Infográfico o tipo de circuito que abarca a análise utilizando o método nodal ou malhas, bem como o formato linear bilateral.

Confira.

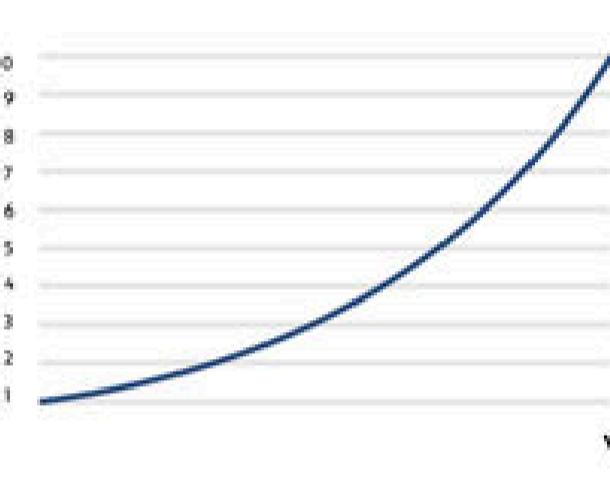
MÉTODO DE ANÁLISE NODAL E MALHAS

A análise de um circuito linear bilateral é feito por meio da análise de malhas e da análise nodal.

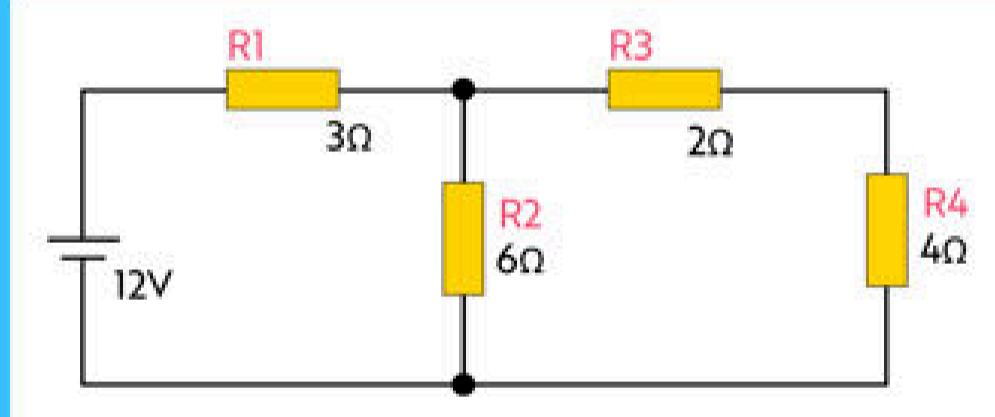
Linear para V e I



Não linear para V e I

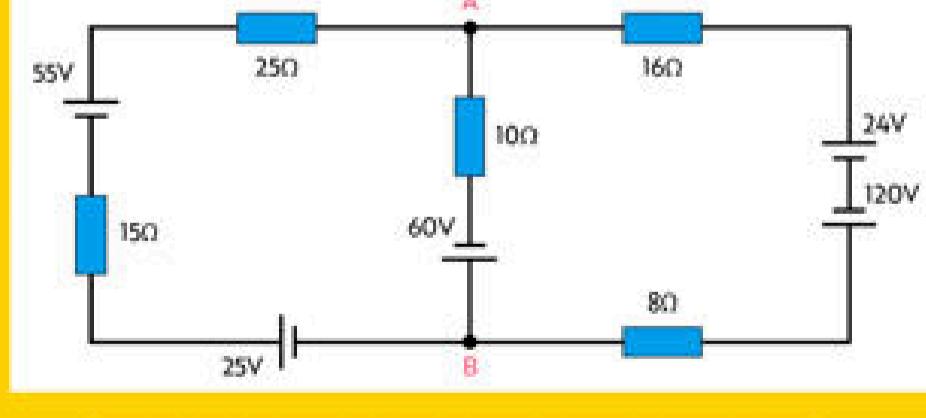


Para calcular equações em circuitos com um única fonte de tensão, utilizam-se as leis de Kirchhoff.



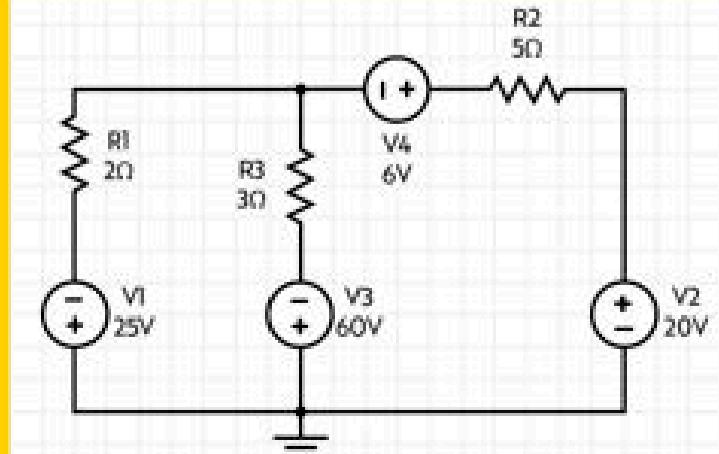
Para calcular equações em circuitos com mais de uma fonte, utiliza-se:

análise por malhas;



ou

análise nodal.





CONTEÚDO DO LIVRO

As leis de Kirchhoff são utilizadas para realizar o cálculo de circuitos com uma única fonte de tensão, porém, a análise de circuitos com mais de uma fonte de tensão é feita por meio da análise de malhas e da análise nodal, que é uma abordagem melhor, além de ser uma das mais utilizadas na análise de circuitos lineares bilaterais.

Na obra *Análise de circuitos elétricos*, leia o capítulo Métodos de análise: nodal e malhas, base teórica desta Unidade de Aprendizagem, no qual você vai conhecer as características da análise nodal e de malhas, bem como compará-las quanto ao seu modo de utilização em circuitos elétricos.

Boa leitura.

ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Pedro Henrique
Chagas Freitas

Método de análise: nodal e malhas

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste texto, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Determinar as características do método de análise nodal.
- Definir os principais pontos do método de análise de malhas.
- Comparar os métodos de análise nodal e de malhas.

Introdução

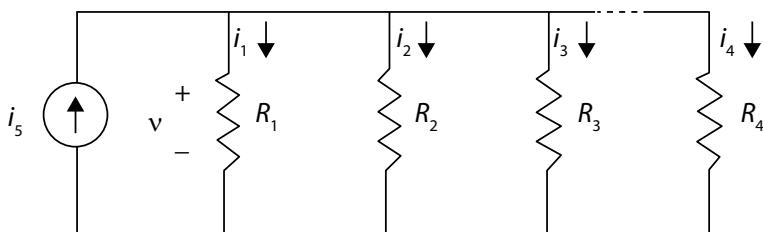
Para o estudo de circuitos mais complexos, que contam com mais de uma fonte de tensão, utiliza-se os métodos de análise nodal e de malhas em detrimento do método da análise das correntes. Temos como principal ponto da análise dos nós a verificação das tensões nas junções dos circuitos (nós) a partir da corrente que percorre o circuito, e, da análise de malhas, a verificação das correntes conforme o sentido adotado nas malhas, a partir das tensões dos resistores. Ambos os métodos são derivações que implementam as leis de Kirchhoff.

Neste capítulo, você vai estudar o método de análise dos nós, ou método de análise nodal, e o método de análise de malhas, determinando suas características e pontos principais e comparando os dois métodos.

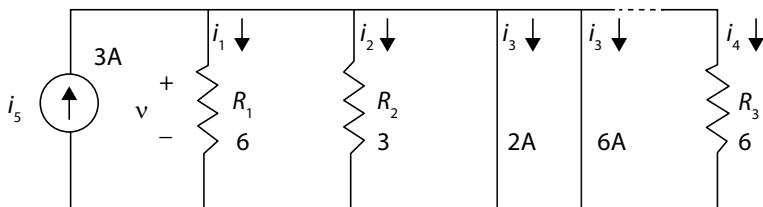
Características do método de análise de malhas

A maioria dos circuitos é analisada por meio da fonte de tensão, que fornece energia para o sistema. No entanto, a análise de determinados circuitos é mais fácil quanto trabalhamos com a corrente em vez da tensão. Diferentemente da fonte de tensão, a fonte de corrente mantém a corrente em seu ramo do circuito, independentemente da maneira como os componentes estão ligados externamente à fonte.

Sabemos que a magnitude e a direção da corrente em uma fonte de tensão variam de acordo com o tamanho das resistências do circuito e com a maneira como outras fontes de tensão estão conectadas ao circuito. Já nas fontes de corrente, a tensão depende do modo como os outros componentes estão ligados. Assim, no caso de fontes de corrente colocadas em paralelo, o circuito pode ser simplificado se combinarmos as fontes em uma única fonte de corrente. Determinam-se a magnitude e a direção dessa fonte resultante pela soma das correntes em uma direção e pela subtração das correntes na direção oposta.



Por exemplo, vamos simplificar o circuito apresentado a seguir.



Como todas as fontes de corrente estão em paralelo, elas podem ser substituídas por uma única corrente. A fonte de corrente equivalente terá a mesma direção de I_2 e de I_3 , uma vez que a magnitude da corrente é maior na direção para baixo do que para cima. A fonte da corrente equivalente tem uma magnitude de: $I = 2A + 6A - 3A = 5A$.

Usamos as leis de Kirchhoff para realizar a análise de circuitos com uma única fonte de tensão, calculando a corrente em cada ramo de um circuito. No entanto, aqui estamos lidando com circuitos com mais de uma fonte de tensão. Ainda que o uso das leis de Kirchhoff seja simples, é inconveniente utilizá-las

em um cenário com várias fontes de tensão, uma vez que seria necessário resolver um número excessivo de equações, o que aumentaria a complexidade de circuitos relativamente simples, conforme esclarece Robbins e Miller (2010). Com base nisso, surgiu a análise de malhas, que é uma abordagem mais prática e uma das mais utilizadas na análise de circuitos lineares bilaterais.

A análise de malhas, apesar de ser uma técnica parecida com a análise de correntes nos ramos, apresenta um número de equações lineares menor. A principal diferença entre a análise de malhas e a análise de correntes nos ramos é que apenas precisamos aplicar a lei de Kirchhoff das tensões ao redor das malhas, sem haver a necessidade de aplicar a lei de Kirchhoff das correntes.

Vejamos o passo-a-passo para resolver um circuito utilizando a análise de malhas:

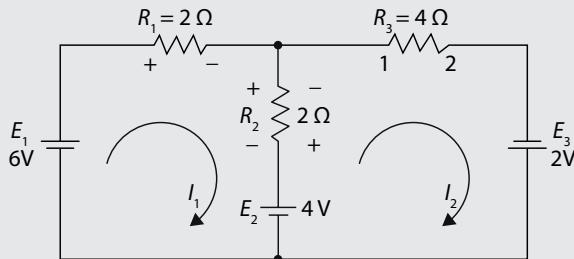
1. Arbitrariamente, estabeleça uma corrente no sentido horário para cada malha interna no circuito. Embora a corrente assinalada possa apontar para qualquer direção, utiliza-se o sentido horário para simplificar o trabalho posterior.
2. Usando as correntes determinadas para a malha, indique as polaridades da tensão em todos os resistores do circuito. Para um resistor comum a duas malhas, as polaridades da queda de tensão ocasionada pela corrente em cada malha devem ser identificadas no lado adequado do componente.
3. Aplique a lei de Kirchhoff das tensões e escreva as equações das malhas para cada malha na rede. Não se esqueça de que os resistores comuns às duas malhas ocasionarão duas quedas de tensão, uma para cada malha.
4. Resolva as equações lineares simultâneas.
5. As correntes nos ramos são determinadas pela combinação algébrica das correntes na malha que são comuns aos ramos.

Confira o exemplo a seguir.



Exemplo

Exemplo 1: Ache a corrente em cada ramo para o circuito a seguir.



Solução:

- Passo 1: as correntes na malha são assinaladas por I ; temos então I_1 e I_2 .
 - Passo 2: assinalam-se as polaridades da tensão de acordo com as correntes na malha. Observe que a resistência R_2 possui duas polaridades de tensão diferentes, por causa da diferença das correntes na malha.
 - Passo 3: as equações das malhas são escritas aplicando-se a lei de Kirchhoff das tensões em cada uma das malhas. São essas, então, as equações:
- Malha 1:

$$6V - (2\Omega)I_1 - (2\Omega)I_1 + (2\Omega)I_2 - 4V = 0$$

Malha 2:

$$4V - (2\Omega)I_2 + (2\Omega)I_1 - (4\Omega)I_2 + 2V = 0$$

Observe que a tensão em R_2 causada pelas correntes I_1 e I_2 é indicada como dois termos separados, um deles representando a queda de tensão na direção de I_1 e, o outro, uma elevação de tensão na mesma direção. A magnitude e a polaridade da tensão em R_2 são determinadas pela ordem de grandeza e pelas direções reais das correntes nas malhas. As equações das malhas podem ser simplificadas da seguinte maneira:

Malha 1:

$$(4\Omega)I_1 - (2\Omega)I_2 = 2V$$

Malha 2:

$$-(2\Omega)I_1 + (6\Omega)I_2 = 6V$$

Usando-se determinantes, resolvemos facilmente as equações das malhas:

$$I_1 = \frac{\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 6 & 6 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}} = 12 + 12/24 - 4 = 24/20 = 1,20 \text{ A}$$

$$I_2 = \frac{\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}} = 24 + 4/24 - 4 = 28/20 = 1,40 \text{ A}$$

A partir desses resultados, vemos que as correntes nos resistores $R_1 + R_3$ são respectivamente I_1 e I_2 . Determina-se a corrente no ramo para R_2 combinando-se as correntes na malha nesse resistor:

$$IR_2 = 1,40 \text{ A} - 1,20 \text{ A} = 0,20 \text{ A}$$

Os resultados obtidos pela análise de malha são exatamente os mesmos obtidos caso utilizássemos a análise das correntes nos ramos. No entanto, conforme lecionam Robbins e Miller (2010), enquanto a análise das correntes nos ramos exigiria três equações, a análise de malha requer a resolução de apenas duas equações lineares simultâneas. A análise de malha também exige apenas a aplicação da lei de Kirchhoff das tensões, o que mostra claramente por que ela é preferível à análise das correntes nos ramos.

Características do método de análise nodal

Como vimos, pode-se aplicar a lei de Kirchhoff das tensões para encontrar as correntes nas malhas em uma rede, conforme leciona Boylestad (2012). Já no caso da análise nodal, outra forma de abordagem para circuitos com mais de uma fonte de tensão, aplicaremos a lei de Kirchhoff das correntes para determinar a diferença de potencial (tensão) em qualquer nó, em relação a algum ponto de referência arbitrário em um circuito. Como os potenciais de todos os nós são conhecidos, é fácil determinar outras grandezas, como a corrente e a potência no interior de um circuito.

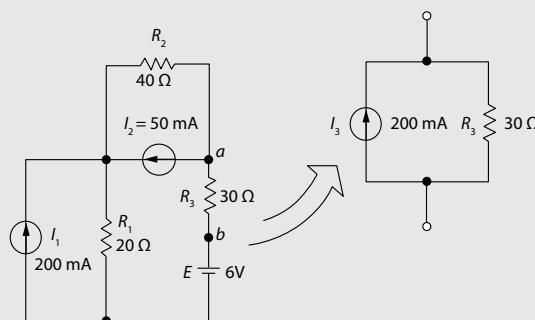
São esses os passos que seguiremos para resolver um circuito pela análise nodal:

1. Arbitrariamente, determine um nó de referência no circuito e indique-o como o aterramento. Geralmente, o nó de referência está localizado na parte de baixo do circuito, embora possa estar situado em qualquer lugar.
2. Converta cada fonte de tensão na rede para uma fonte de corrente equivalente. Ainda que não seja absolutamente necessário, esse passo facilitará a compreensão de futuros cálculos.
3. De forma arbitrária, assinale as tensões (V_1, V_2, \dots, V_n) para os nós restantes no circuito. (Lembre-se de que você já determinou um nó de referência, logo, essas tensões serão determinadas em relação à referência escolhida.)
4. Arbitrariamente, determine uma direção da corrente para cada ramo no qual não haja fonte de corrente. Usando as direções assinaladas da corrente, indique as polaridades correspondentes das quedas de tensão em todos os resistores.
5. Com exceção do nó de referência (aterramento), aplique a lei de Kirchhoff das correntes em cada um dos nós. Se um circuito tiver um total de $n + 1$ nós (incluindo o de referência), haverá n equações lineares simultâneas.
6. Reescreva cada uma das correntes determinadas de forma arbitrária quanto à diferença de potencial em uma resistência conhecida.
7. Resolva as equações lineares simultâneas para as tensões (V_1, V_2, \dots, V_n).

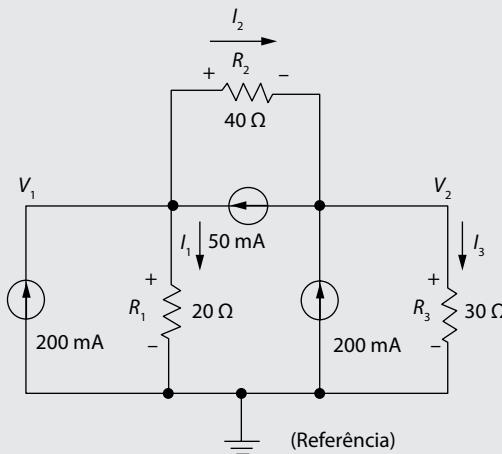


Exemplo

Exemplo 2: Dado o circuito abaixo, utilize a análise nodal para calcular a tensão V_{ab} :



Fonte: Adaptada de Boylestad (2012, p. 242).

**Solução:**

- Passo 1: selecione um nó de referência conveniente.
- Passo 2: converta as fontes de tensão em fontes de corrente equivalentes.
- Passos 3 e 4: de maneira arbitrária, determine as tensões nos nós e as correntes nos ramos. Indique as polaridades da tensão em todos os resistores, de acordo com as pressupostas direções das correntes.
- Passo 5: agora, aplique a lei de Kirchhoff das correntes nos nós identificados como V_1 e V_2 :
Nó V_1 :

$$\begin{aligned}\sum I_{\text{entrada}} &= \sum I_{\text{saída}} \\ 200 \text{ mA} + 50 \text{ mA} &= I_1 + I_2\end{aligned}$$

Nó V_2 :

$$\begin{aligned}\sum I_{\text{entrada}} &= \sum I_{\text{saída}} \\ 200 \text{ mA} + I_2 &= 50 \text{ mA} + I_3\end{aligned}$$

- Passo 6: as correntes são reescritas em relação às tensões nos resistores da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}I_1 &= V_1/20 \Omega \\ I_2 &= V_1 - V_2/40 \Omega \\ I_3 &= V_2/30 \Omega\end{aligned}$$

As equações nodais tornam-se, então:

$$\begin{aligned} 200 \text{ mA} + 50 \text{ mA} &= V_1/20 \Omega + V_1 - V_2/40 \Omega \\ 200 \text{ mA} + V_1 - V_2/40 \Omega &= 50 \text{ mA} + V_2/30 \Omega \end{aligned}$$

Substituindo as expressões da tensão nas equações nodais originais, temos as seguintes equações lineares simultâneas:

$$\begin{aligned} (1/20 \Omega + 1/40 \Omega)V_1 - (1/40 \Omega)V_2 &= 0,25 \text{ A} \\ -(1/40 \Omega)V_1 + (1/30 \Omega + 1/40 \Omega)V_2 &= 0,15 \text{ A} \end{aligned}$$

Se voltarmos ao circuito inicial, veremos que a tensão V_2 é igual à tensão V_a ; ou seja:

$$V_a = 4,67 \text{ V} = 6,0 \text{ V} + V_{ab}$$

Logo, a tensão V_{ab} pode ser facilmente encontrada:

$$V_{ab} = 4,67 - 6,0 \text{ V} = -1,33 \text{ V}$$

Comparando os métodos de análise nodal e de malhas

Podemos dizer que o método das malhas é, na realidade, uma extensão do método da análise das correntes nos ramos. Ao definir uma disposição específica de correntes para o circuito, a informação fornecida pela aplicação da lei de Kirchhoff das correntes já está incluída quando aplicamos a lei das tensões. Ou seja, o método das malhas emprega uma manobra que elimina a necessidade de se aplicar a lei de Kirchhoff das correntes.

No caso das malhas, temos a associação de uma corrente no sentido horário a cada malha. Podemos escolher, na verdade, qualquer sentido para cada uma das correntes, sem alterar o resultado; porém, normalmente se adota o sentido horário. Indicamos, então, as polaridades de cada resistor dentro das malhas, de acordo com o sentido da corrente. Depois, basta aplicar a lei de Kirchhoff das tensões em todas as malhas no sentido horário. Resolvemos, então, as equações lineares resultantes para obter as correntes das malhas, conforme lecionam Robbins e Miller (2010).

Já no método dos nós, temos as tensões nodais de um circuito, ou seja, a tensão dos vários nós (pontos de junção) do circuito. O método se desenvolve por meio da lei de Kirchhoff das correntes, de maneira bem semelhante à lei de Kirchhoff das tensões, utilizada na análise de malhas. Seguimos, então, os procedimentos de determinar o número de nós no circuito (junções). Escolhemos um nó de referência e rotulamos cada nó restante com um valor de tensão — V_1 , V_2 e assim por diante. Depois, aplicamos a lei de Kirchhoff das correntes a todos os nós. Tratamos, então, cada nó como uma entidade isolada e analisamos com a lei de Kirchhoff das correntes no próprio nó, conforme explica Boylestad (2012). Resolvemos as equações resultantes da aplicação da lei de Kirchhoff para obter a tensão no nó.

Assim, temos como principal ponto da análise dos nós a verificação das tensões nas junções dos circuitos (nós) a partir da corrente que percorre o circuito. Por outro lado, na análise de malhas, temos como principal ponto a verificação das correntes conforme o sentido adotado nas malhas, a partir das tensões, que são a fonte para o circuito. Segundo Boylestad (2012), a análise nodal e a análise de malhas são derivações que implementam as leis de Kirchhoff.

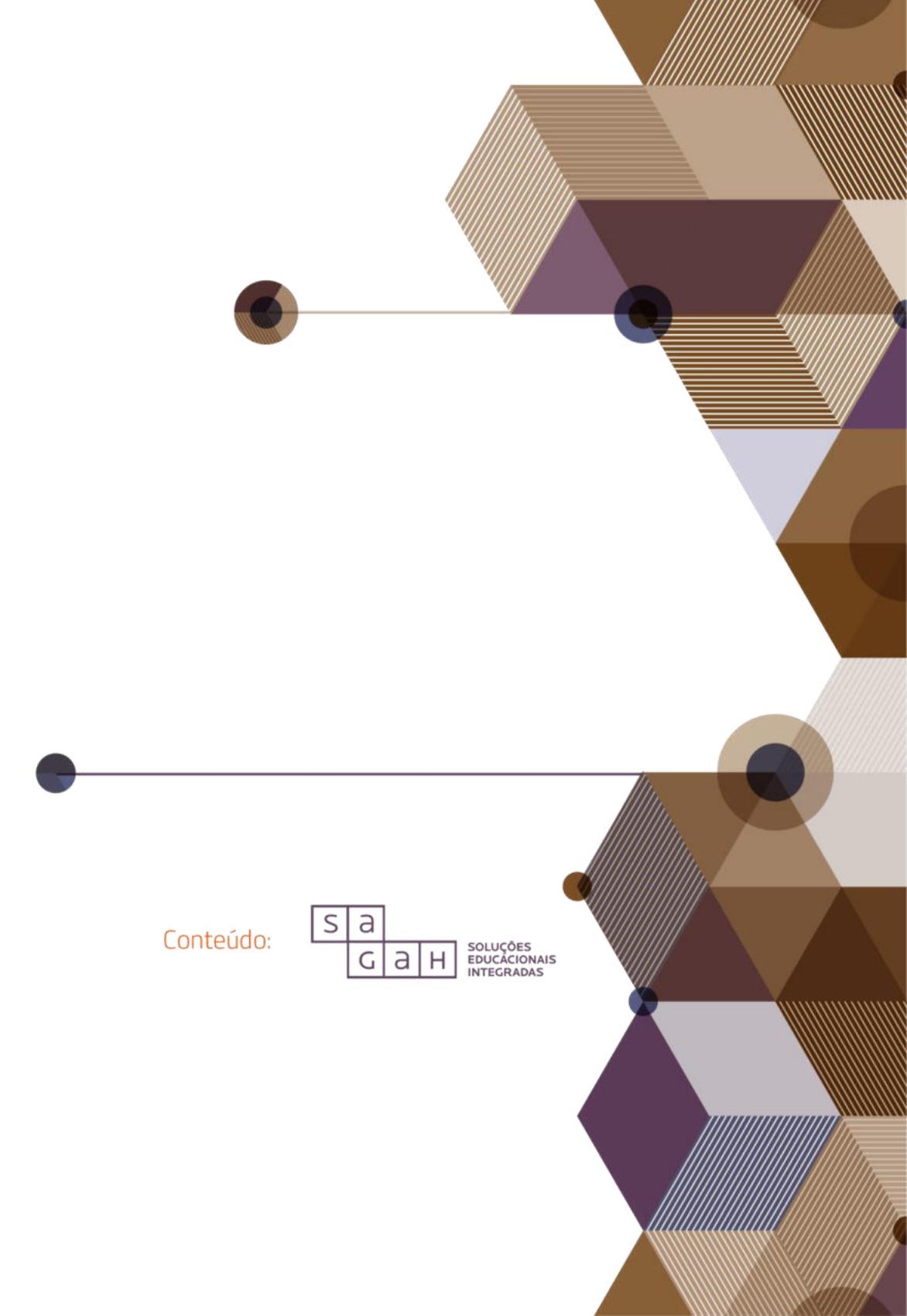


Referências

BOYLESTAD, R. L. *Introdução a análise de circuitos*. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

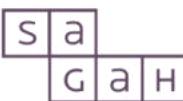
ROBBINS, A. H.; MILLER, W. C. *Análise de circuitos: teoria e prática*. 4. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2010. v. 1.

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.



A large, abstract graphic on the right side of the page features a pattern of overlapping hexagons in various shades of brown, tan, purple, and blue. Small, solid-colored circles (brown, blue, and dark blue) are positioned at the intersections of the hexagon edges, some with lines extending towards the left side of the frame.

Conteúdo:



SOLUÇÕES
EDUCACIONAIS
INTEGRADAS



DICA DO PROFESSOR

O método das malhas é uma extensão do método da análise das correntes nos ramos e emprega uma manobra que elimina a necessidade de se aplicar a lei de Kirchhoff para correntes. Já no método dos nós, existem as tensões nodais de um circuito, ou seja, a tensão dos vários nós (pontos de junção) do circuito. O método se desenvolve por meio da lei de Kirchhoff para correntes de maneira bem semelhante à lei de Kirchhoff para tensões que são utilizadas no caso da análise de malhas.

Nesta Dica do Professor, você vai ver a utilização dos métodos de análise nodal e de malhas para verificação de tensões e correntes em circuitos.

Assista.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

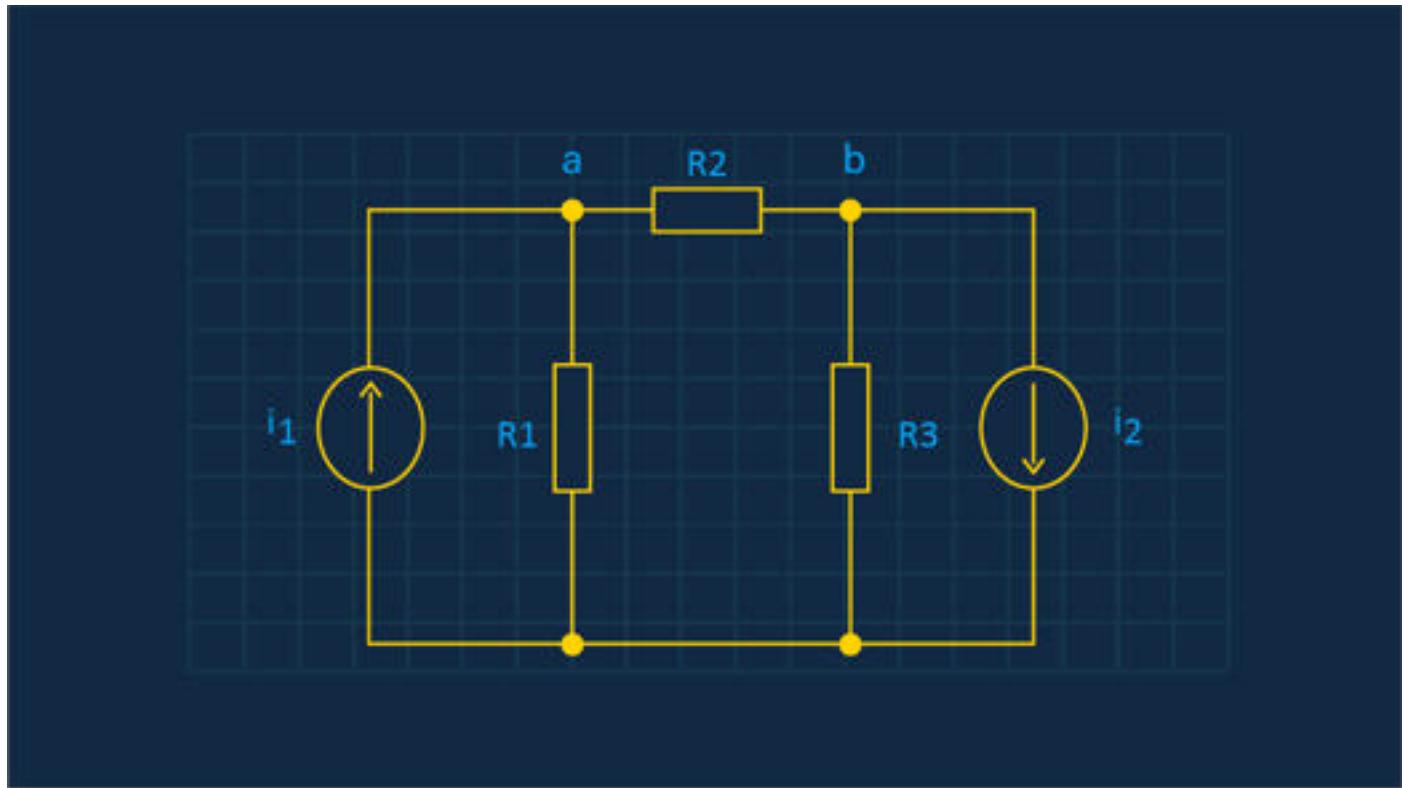


EXERCÍCIOS

- 1) O uso de técnicas de análise de circuitos é uma atividade frequente na vida de um Engenheiro. A escolha de uma técnica, para determinado problema, poderá facilitar a análise do circuito em questão.

Considere o circuito a seguir. Para este circuito, são dados: $i_1 = 1A$, $i_2 = 2A$, $R_1 = 2\Omega$, $R_2 = 4\Omega$ e $R_3 = 6\Omega$.

Determine, utilizando análise nodal, o valor aproximado da corrente que circula sobre o resistor R_2 .



A) $i_{R_2} = 18A$

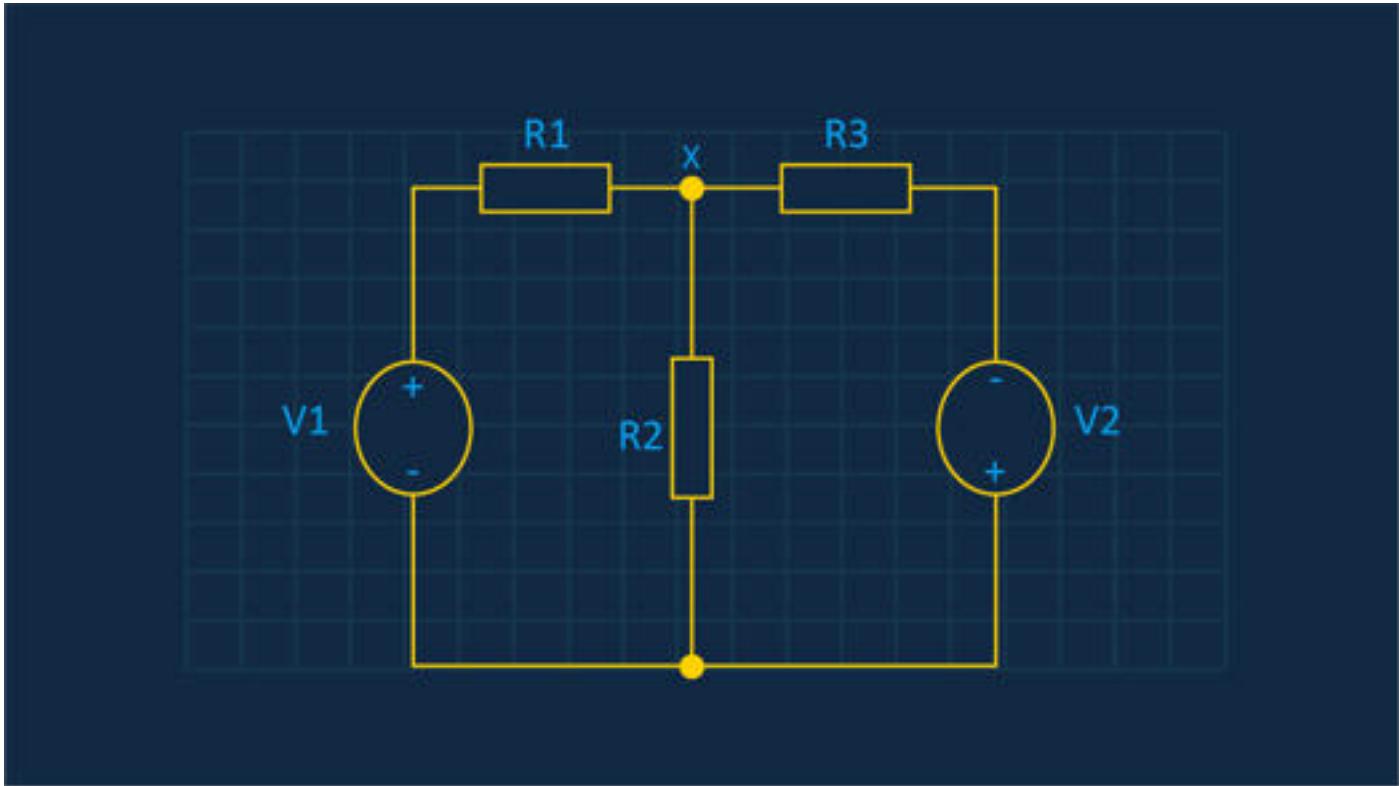
B) $i_{R_2} = 6A$

C) $i_{R_2} = 1,17A$

D) $i_{R_2} = 2,5A$

E) $i_{R_2} = 11,66A$

- 2) Para o circuito a seguir, utilize o método de análise de malhas para determinar o valor da tensão sobre o resistor R_2 . Para este circuito, são dados: $v_1 = 24V$, $v_2 = 5V$, $R_1 = 4\Omega$, $R_2 = 2\Omega$ e $R_3 = 3\Omega$.



A) 4V

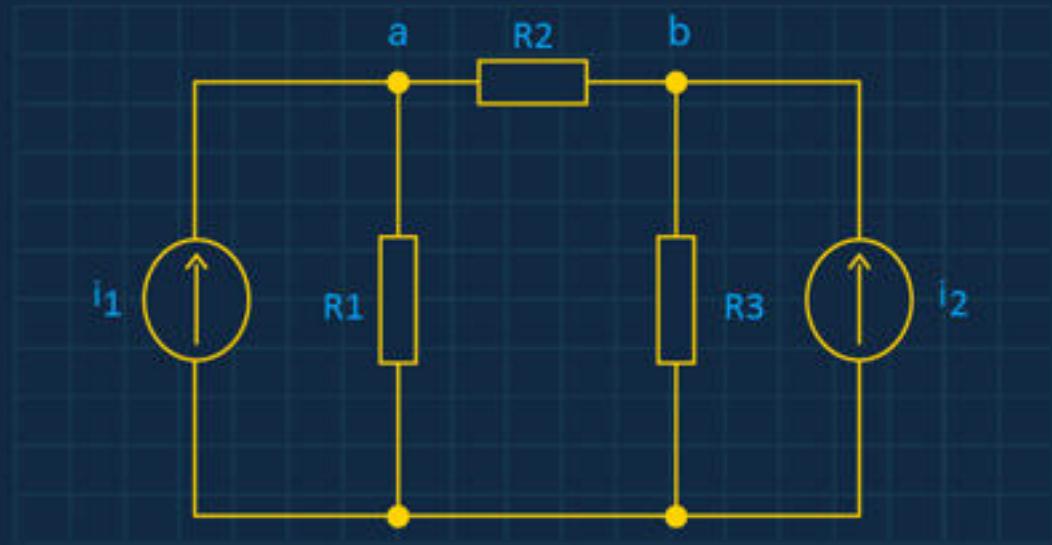
B) 9V

C) 16V

D) 14V

E) 18V

3) Determine, para o circuito a seguir, a diferença de tensão $v_a - v_b$. Para este circuito, são dados: $i_1=1\text{A}$, $i_2 = 12\text{A}$, $R_1 = 6\Omega$, $R_2 = 4 \Omega$ e $R_3 = 2\Omega$.



A) $v_a - v_b = 24V$

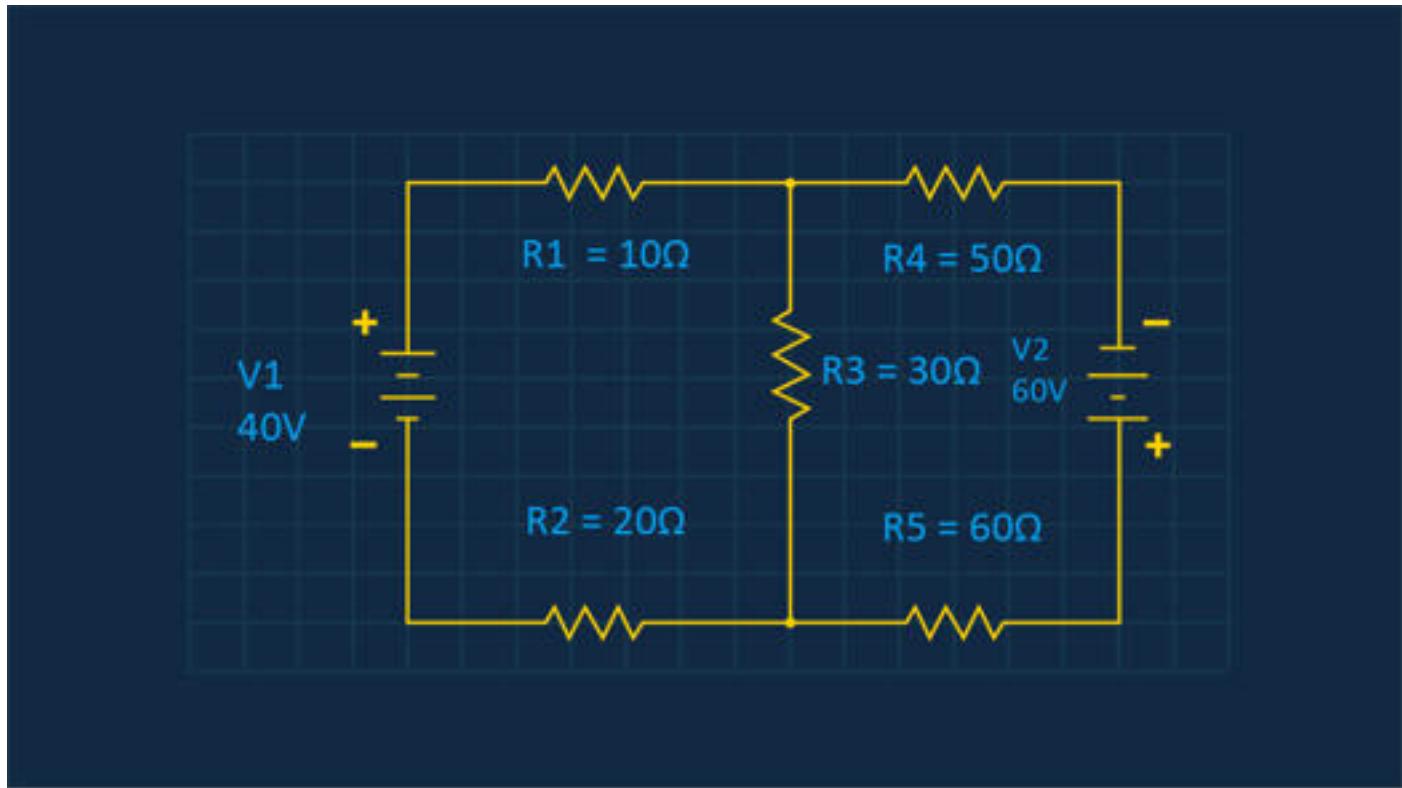
B) $v_a - v_b = 15V$

C) $v_a - v_b = 21V$

D) $v_a - v_b = 6V$

E) $v_a - v_b = - 6V$

4) Apresente o somatório (equação) das correntes, utilizando a análise de malhas, para a malha 1 de tensão $v1 = 40V$:



A) $+ 40 + R3(I_1 - I_2) + I_1 \cdot R_2 = 0$

$$+ 30I_1 - 30I_2 + 20I_1 = -40$$

$$50I_1A - 30I_2A = -40V$$

B) $-40 + R3(I_1 - I_2) + I_1 \cdot R_2 = 0$

$$30I_1 - 30I_2 + 20I_1 = 40$$

$$50I_1A - 30I_2A = 40V$$

C) $I_1 \cdot R_1 + R3(I_1 - I_2) + I_1 \cdot R_2 = 0$

$$10I_1 + 30I_1 - 30I_2 + 20I_1 = 0$$

$$60I_1A - 30I_2A = 0$$

D) $-40 + I_1.R_1 + R_3(I_1 - I_2) + I_1.R_2 = 0$

$$10I_1 + 30I_1 - 30I_2 + 20I_1 = 40$$

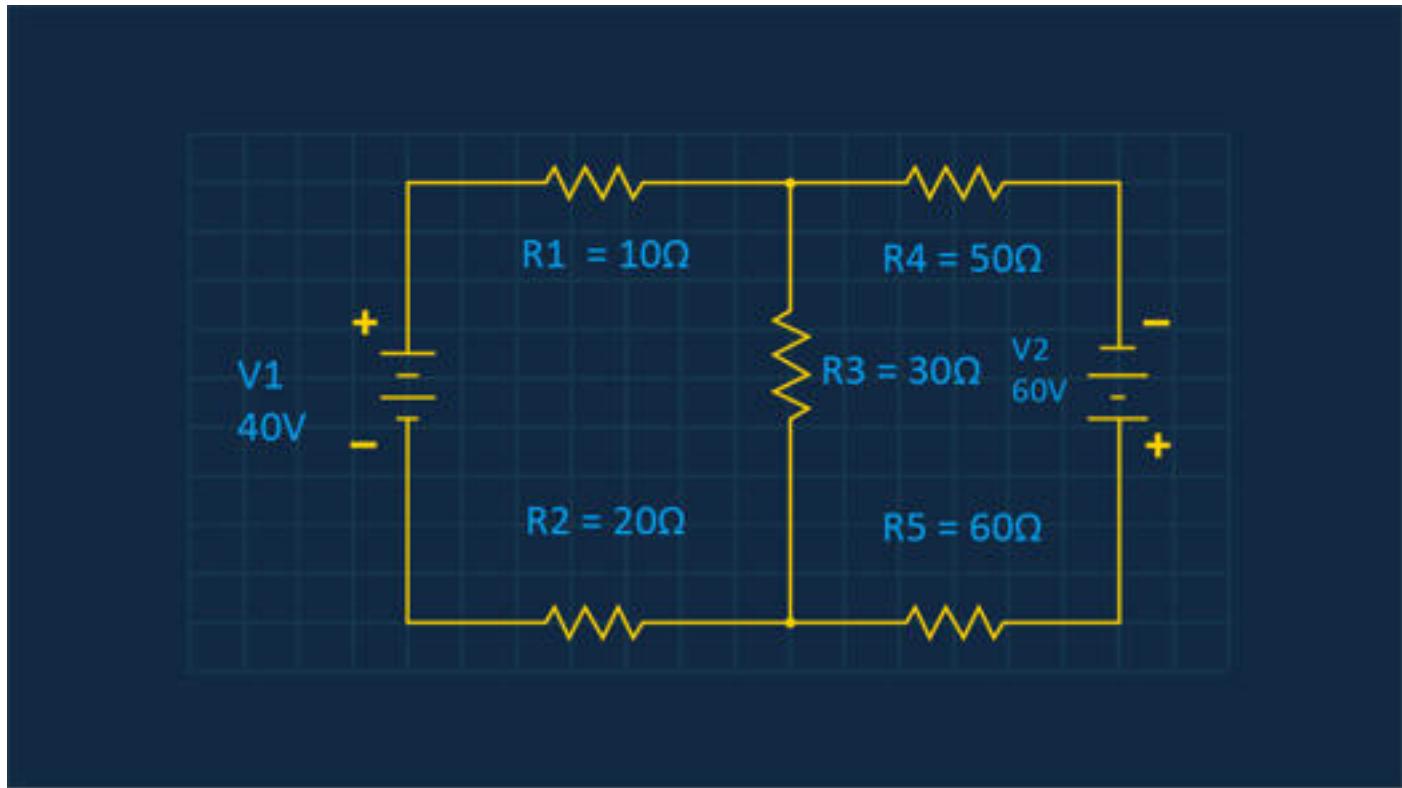
$$60I_1A - 30I_2A = 40V$$

E) $+40 + I_1.R_1 + R_3(I_1 - I_2) + I_1.R_2 = 0$

$$10I_1 + 30I_1 - 30I_2 + 20I_1 = -40$$

$$60I_1A - 30I_2A = -40V$$

5) Apresente o somatório (equação) das correntes, utilizando a análise de malhas, para a malha 2 de tensão $v_2 = 60V$:



A) $+ 60 + R5 \cdot I2 + R3 (I1 - I2) + R4 \cdot I2 = 0$

$$+ 60 + 60I2 + 30I2 - 30I1 + 50I2 = 0$$

$$- 30I1A + 140I2A = - 60V$$

B) $- 60 + R5 \cdot I2 + R3 (I1 - I2) + R4 \cdot I2 = 0$

$$- 60 + 60I2 + 30I2 - 30I1 + 50I2 = 0$$

$$- 30I1A + 140I2A = 60V$$

C) $- 60 + R3 (I1 - I2) + R4 \cdot I2 = 0$

$$-60 + 30I_2 - 30I_1 + 50I_2 = 0$$

$$-30I_1A + 70I_2A = 60V$$

D) $+ R_5.I_2 + R_3(I_1 - I_2) + R_4I_2 = 0$

$$+60I_2 + 30I_2 - 30I_1 + 50I_2 = 0$$

$$-30I_1A + 140I_2A = 0$$

E) $-60 - R_5.I_2 + R_3(I_1 - I_2) + R_4I_2 = 0$

$$-60 - 60I_2 + 30I_2 - 30I_1 + 50I_2 = 0$$

$$-30I_1A + 20I_2A = 60V$$



NA PRÁTICA

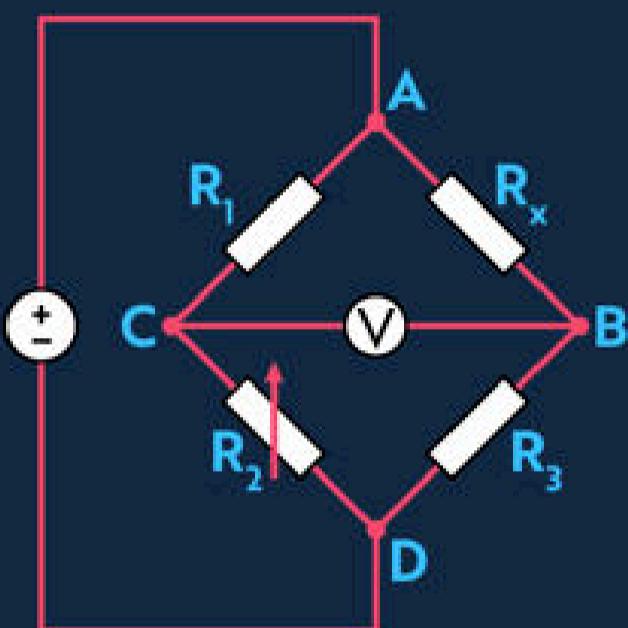
As redes ponte, criadas por Charles Wheatstone, no século XIX, para medir a resistência equilibrando as correntes de baixa intensidade, são utilizadas em aparelhos de medição eletrônica para medir com precisão a resistência em circuitos DC e em circuitos AC.

Os circuitos usam a rede ponte ou simplesmente ponte para medir a resistência com maior precisão. A ponte digital utiliza as técnicas de análise de malha e nós para analisar com maior celeridade as operações dos circuitos.

Veja neste Na Prática a utilização de circuitos que usam a rede ponte.

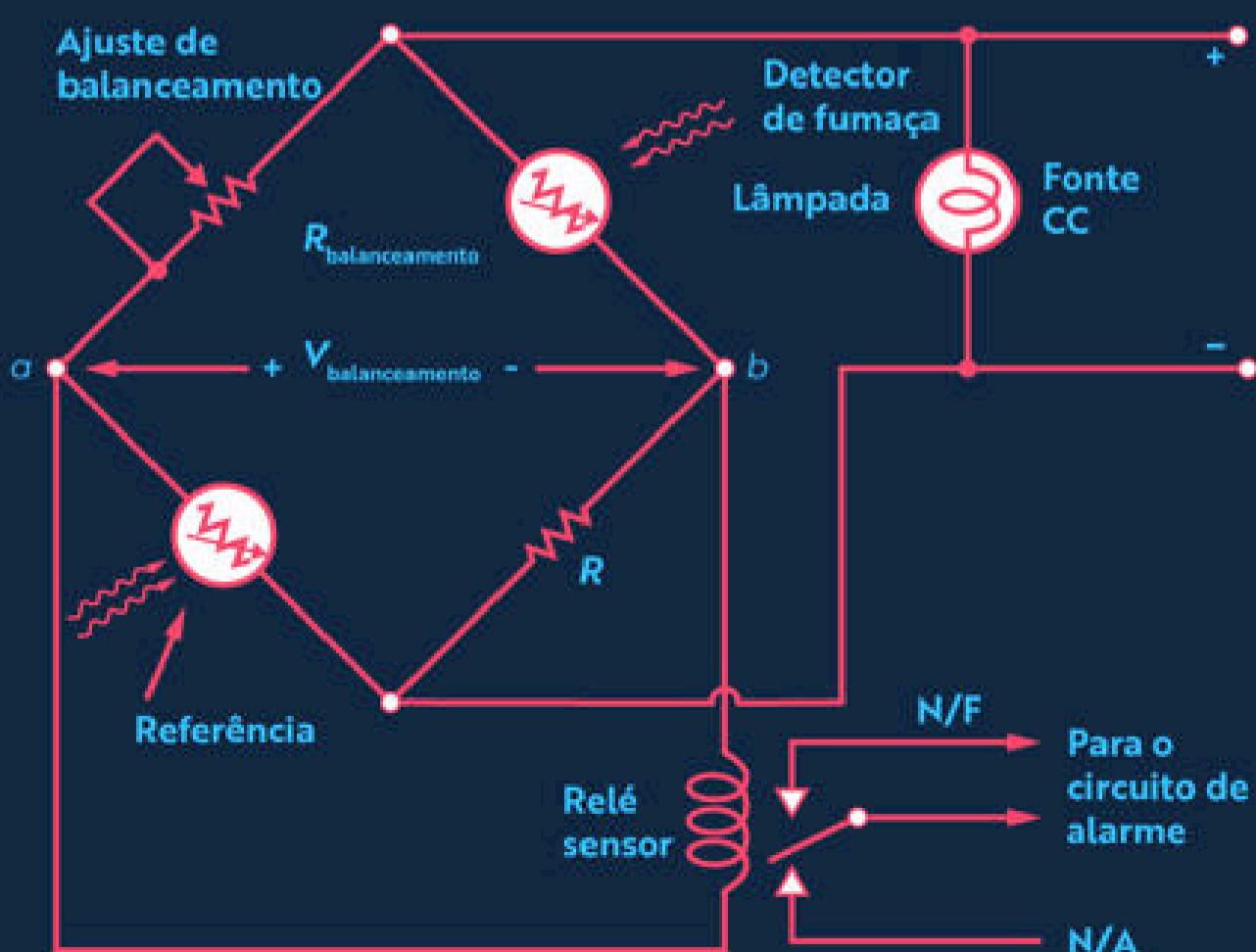
REDE PONTE

Embora o circuito-alvo da rede ponte possa aparecer em formas distintas, existe equivalência entre os resultados por meio da análise nodal e de malhas, o que colabora para a verificação de variações em circuitos, defeitos e equilíbrio entre tensões, resistências e corrente em um circuito. Também pode ser utilizada para se medir duas resistências que variam de maneira espelhada, enquanto uma aumenta seu valor, a outra diminui o seu valor de forma proporcional.



Pode-se verificar a implementação da rede ponte, ou ponte de Wheatstone, por meio dos detectores de fumaça, que são, na verdade, a implementação de um circuito popular com rede ponte. Por meio de um dispositivo fotoelétrico configurado em um circuito de DC, é possível detectar variações. Nesse caso, detectar fumaça, o que faz soar um alarme.

Veja a representação desse tipo de circuito com rede ponte:





SAIBA MAIS

Para ampliar o seu conhecimento a respeito desse assunto, veja abaixo as sugestões do professor:

Tensões de nó – supernó

Veja, neste vídeo, uma explicação sobre tensões no supernó, extensão da análise dos nós para verificação de junções nos circuitos, além de um caso prático com diversas junções.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Correntes de malha – supermalha

Veja uma a análise de malhas com supermalha, em um caso específico de análise de malhas para percorrido de corrente pelas diversas malhas de um circuito, abordando as malhas reais e não reais.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Leis de Kirchhoff

Neste vídeo, as leis de Kirchhoff, o método das malhas e o método dos nós são abordados de forma teórica, priorizando a derivação das leis de Kirchhoff para as malhas e para os nós.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Análise de circuitos CC – análise nodal

Veja como é feita a análise de circuitos com método dos nós, para verificação de tensões no circuito em virtude da divisão das correntes que percorrem os circuitos.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Associação de Resistores Estrela e Triângulo.



APRESENTAÇÃO

Por muitas vezes, nos deparamos com circuitos que não podem ser classificados como série ou paralelo. Nesses casos, a análise deve ser feita de forma diferente, simplificando para circuitos de três terminais, em formatos que se assemelham a triângulos, também chamados de delta ou estrela (Y).

Nesta Unidade de Aprendizagem, você estudará sobre associações de resistores em estruturas dos tipos estrela e triângulo, com foco na simplificação e também na conversão entre os tipos.

Bons estudos.

Bons estudos.

Ao final desta Unidade de Aprendizagem, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Interpretar os tipos de associação de resistores em estrela e triângulo.
- Aplicar os conceitos de circuitos equivalentes dos resistores.
- Utilizar os métodos de conversão das associações estrela e triângulo.



DESAFIO

Você trabalha como engenheiro de desenvolvimento em uma empresa que cria projetos de placas de circuito eletrônico. Sua função é a de desenhar as placas de circuito impresso, definindo o *layout* e a melhor disposição dos componentes.

Ao receber o esquema elétrico do circuito do projetista de *hardware*, em sua opinião, quais os fatores que precisam ser definidos para os componentes? O que você faria para definir o tamanho da placa, o tamanho dos componentes e a temperatura que o conjunto deve suportar?

Explique com suas palavras.



INFOGRÁFICO

No Infográfico, você vai ver a interconexão dos componentes com o intuito de facilitar a compreensão da conversão estrela e triângulo.

Confira.

CONVERSÕES TRIÂNGULO E ESTRELA

Este é um exemplo-base tanto para conversão $\Delta \rightarrow Y$ quanto $Y \rightarrow \Delta$.



CONVERSÃO $\Delta \rightarrow Y$

No circuito Y , cada um dos resistores é o produto dos resistores em dois ramos adjacentes em Δ , dividido pela soma dos resistores em Δ .



CONVERSÃO $Y \rightarrow \Delta$

Cada resistor de um circuito Δ é o somatório de todos os três possíveis produtos dos resistores em Y , considerando dois a dois, dividido pelo oposto em Y .



Resumidamente, para todas as conversões

Transformação $\Delta - Y$

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c}$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c}$$

Transformação $Y - \Delta$

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1}$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2}$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3}$$



CONTEÚDO DO LIVRO

A identificação dos circuitos é a chave para facilitar os cálculos de simplificação e este capítulo traz diversos exemplos para que você fique habituado. Identificar os circuitos, aplicar os conceitos de circuitos equivalentes e também realizar a conversão entre os tipos são os pontos mais importantes dessa Unidade de Aprendizagem.

Leia o capítulo Associação de resistores estrela e triângulo, da obra *Circuitos Elétricos I*, que serve como base teórica desta Unidade de Aprendizagem.

Boa leitura.

CIRCUITOS ELÉTRICOS I

Eduardo Nunes dos Reis

Associação de resistores estrela e triângulo

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste capítulo, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Interpretar os tipos de associação de resistores em estrela e em triângulo.
- Aplicar os conceitos de circuitos equivalentes dos resistores.
- Utilizar os métodos de conversão das associações em estrela e em triângulo.

Introdução

Por muitas vezes, nos deparamos com circuitos que não podem ser classificados como em série ou paralelos. Nesses casos, a análise deve ser feita de forma diferente, simplificando-se para circuitos de três terminais, em formatos que se assemelham a triângulos, também chamados de delta, ou estrelas (Y), quando as pontas não são unidas.

Neste capítulo, você vai aprender sobre associações de resistores em estruturas do tipo estrela e do tipo triângulo, com foco na simplificação e também na conversão entre os tipos.

Tipos de associação de resistores em estrela e em triângulo

Quando analisamos circuitos, tentamos ao máximo reduzi-los a versões equivalentes com seus componentes em série ou paralelos, tanto para calcular as tensões em cada nó quanto para avaliar a corrente de cada componente. Ainda assim, existem situações em que essa redução não é possível, em que os circuitos são reduzidos a versões equivalentes com três terminais. A Figura 1 mostra o equivalente em estrela para duas formas de representação: Figura 1a em formato Y e Figura 1b em formato T.

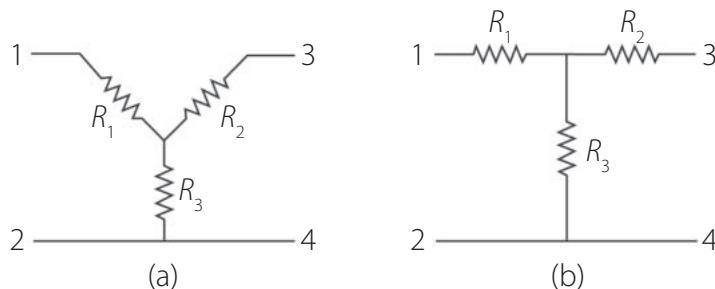


Figura 1. Exemplo de circuitos em estrela equivalentes (a) em formato Y e (b) em representação T.

Fonte: Sadiku, Musa e Alexander (2014, p. 164).

Na Figura 2 são apresentados equivalentes de circuitos em triângulo: a Figura 2a nos mostra o equivalente em delta e a Figura 2b mostra o equivalente em circuito chamado π (pi).

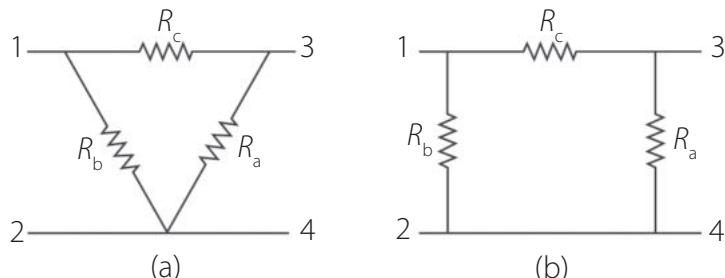


Figura 2. Exemplo de circuitos em formato triângulo equivalentes (a) em formato delta e (b) em representação π .

Fonte: Sadiku, Musa e Alexander (2014, p. 165).

Esse é um tipo de estrutura que pode ser vista em diversos tipos de circuitos e vai facilitar bastante os cálculos e simplificações.



Fique atento

A análise de circuitos é importante para que os componentes possam ser precisamente dimensionados. Dessa forma, fatores como tamanho, capacidade e tensão de operação são determinados para que utilizemos os componentes de forma otimizada.

Conceitos de circuitos equivalentes dos resistores

Observe novamente os circuitos π e T na Figura 3.

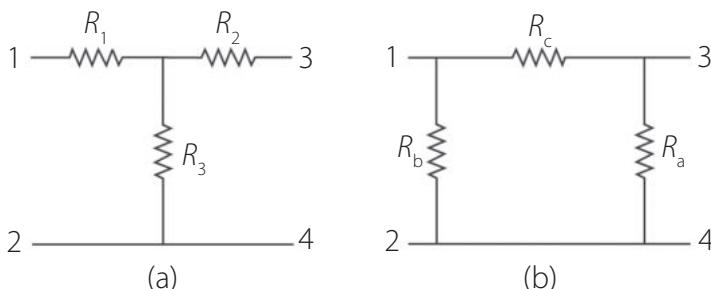


Figura 3. Exemplo de circuitos equivalentes (a) em T e (b) em π .

Fonte: Sadiku, Musa e Alexander (2014, p. 165).

Comece a calcular suas resistências:

$$R_{12}(Y) = R_1 + R_3 \quad (1)$$

$$R_{12}(\Delta) = R_b \parallel (R_a + R_c) \quad (2)$$

E então iguale as duas resistências, ou seja, $R_{12}(Y) = R_{12}(\Delta)$:

$$R_{12} = R_1 + R_3 = \frac{R_b(R_a + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \quad (3)$$

Continuando,

$$R_{13} = R_1 + R_2 = \frac{R_c(R_a + R_b)}{R_a + R_b + R_c} \quad (4)$$

$$R_{34} = R_2 + R_3 = \frac{R_a(R_b + R_c)}{R_a + R_b + R_c} \quad (5)$$

Subtraia a Equação 5 da Equação 3:

$$R_1 - R_2 = \frac{R_c(R_b + R_a)}{R_a + R_b + R_c} \quad (6)$$

Com a soma das Equações 4 e 6, isole R_1 :

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (7)$$

Subtraindo a equação 6 da 4, isole R_2 :

$$R_3 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c} \quad (8)$$

E, para isolar

$$R_3 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \quad (9)$$

Dessa forma, você tem a equivalência dos circuitos com base na estrutura em estrela, ou seja, você consegue representar os dois circuitos agora com o mesmo formato.

Para a representação inversa, ou seja, com base na estrutura em triângulo, observe, com base nas equações 7, 8 e 9, e verifique:

$$\begin{aligned} & R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1 \\ &= \frac{R_a R_b R_c (R_a + R_b + R_c)}{(R_a + R_b + R_c)^2} \quad (10) \\ &= \frac{R_a R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} \end{aligned}$$

Você pode dividir essa equação por cada uma das Equações 7, 8 e 9 anteriores. Assim você obtém:

$$R_a = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_1} \quad (11)$$

$$R_b = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_2} \quad (12)$$

$$R_c = \frac{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}{R_3} \quad (13)$$

Veja que, através de análise do circuito e dos sistemas de equações, foi possível isolar cada uma das resistências dos circuitos.



Saiba mais

Os circuitos estrela-triângulo são muito utilizados na análise de motores trifásicos e transformadores.

Métodos de conversão das associações estrela e triângulo

Agora que você já viu como isolar as resistências em cada ramo, vamos realizar as conversões entre os tipos.

A Figura 4 mostra um esquema para facilitar a interpretação de como é feita a conversão.

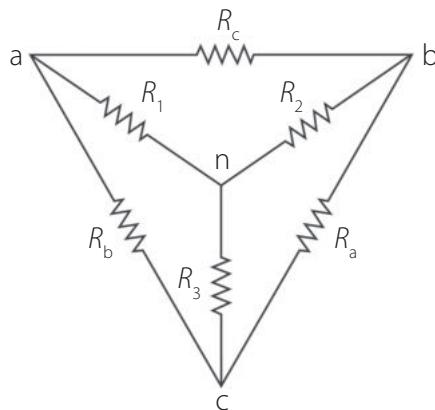


Figura 4. Esquema de visualização de conversão.

Fonte: Sadiku, Musa e Alexander (2013, p. 165).

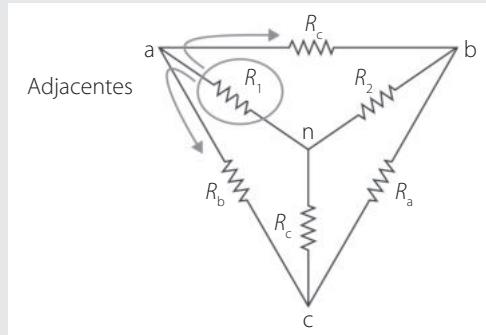
Você pode lembrar das seguintes regras, em vez de decorar as fórmulas acima.

- Conversão de triângulo para estrela ($\Delta \rightarrow Y$): no circuito Y, cada um dos resistores é o produto dos resistores em dois ramos adjacentes em Δ , dividido pela soma dos resistores em Δ .



Exemplo

Resistores envolvidos na definição de R_{i_1} , onde os resistores R_b e R_c são adjacentes.

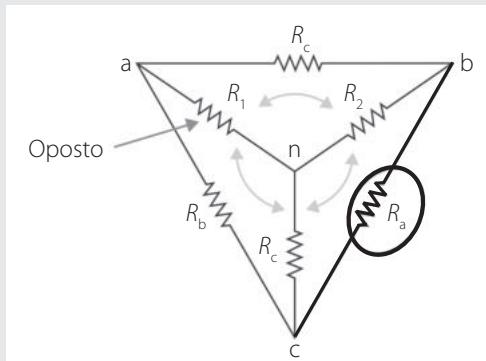


- Conversão de estrela para triângulo ($Y \rightarrow \Delta$): cada resistor de um circuito Δ é o somatório de todos os três possíveis produtos dos resistores em Y , considerando dois a dois, dividido pelo oposto em Y .



Exemplo

Resistores envolvidos na definição de R_{i_1} , onde os resistores R_b e R_c são adjacentes.



Existem também casos em que os circuitos Y e Δ são balanceados. Para esses casos

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_Y \quad R_a = R_b = R_c = R_\Delta \quad (14)$$

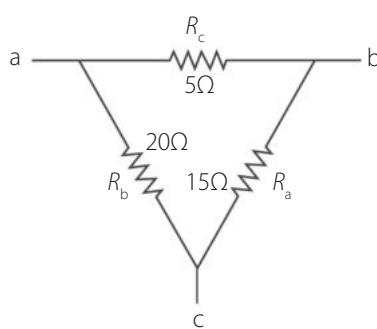
Sendo assim, você pode verificar que as equações de conversão ficam:

$$R_Y = \frac{R_\Delta}{3} \quad \text{OU} \quad R_\Delta = 3R_Y \quad (15)$$



Exemplo

Calcular o equivalente estrela para o circuito abaixo (exemplo elaborado pelo autor):



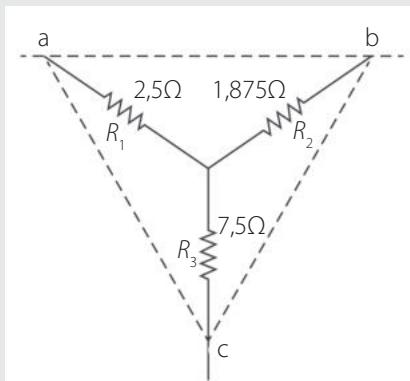
Aplicando diretamente as equações:

$$R_1 = \frac{R_b R_c}{R_a + R_b + R_c} = \frac{20 \times 5}{15 + 20 + 5} = \frac{100}{40} = 2,5\Omega$$

$$R_2 = \frac{R_c R_a}{R_a + R_b + R_c} = \frac{5 \times 15}{15 + 20 + 5} = \frac{75}{40} = 1,875\Omega$$

$$R_3 = \frac{R_a R_b}{R_a + R_b + R_c} = \frac{15 \times 20}{15 + 20 + 5} = \frac{300}{40} = 7,5\Omega$$

Onde vemos o equivalente como



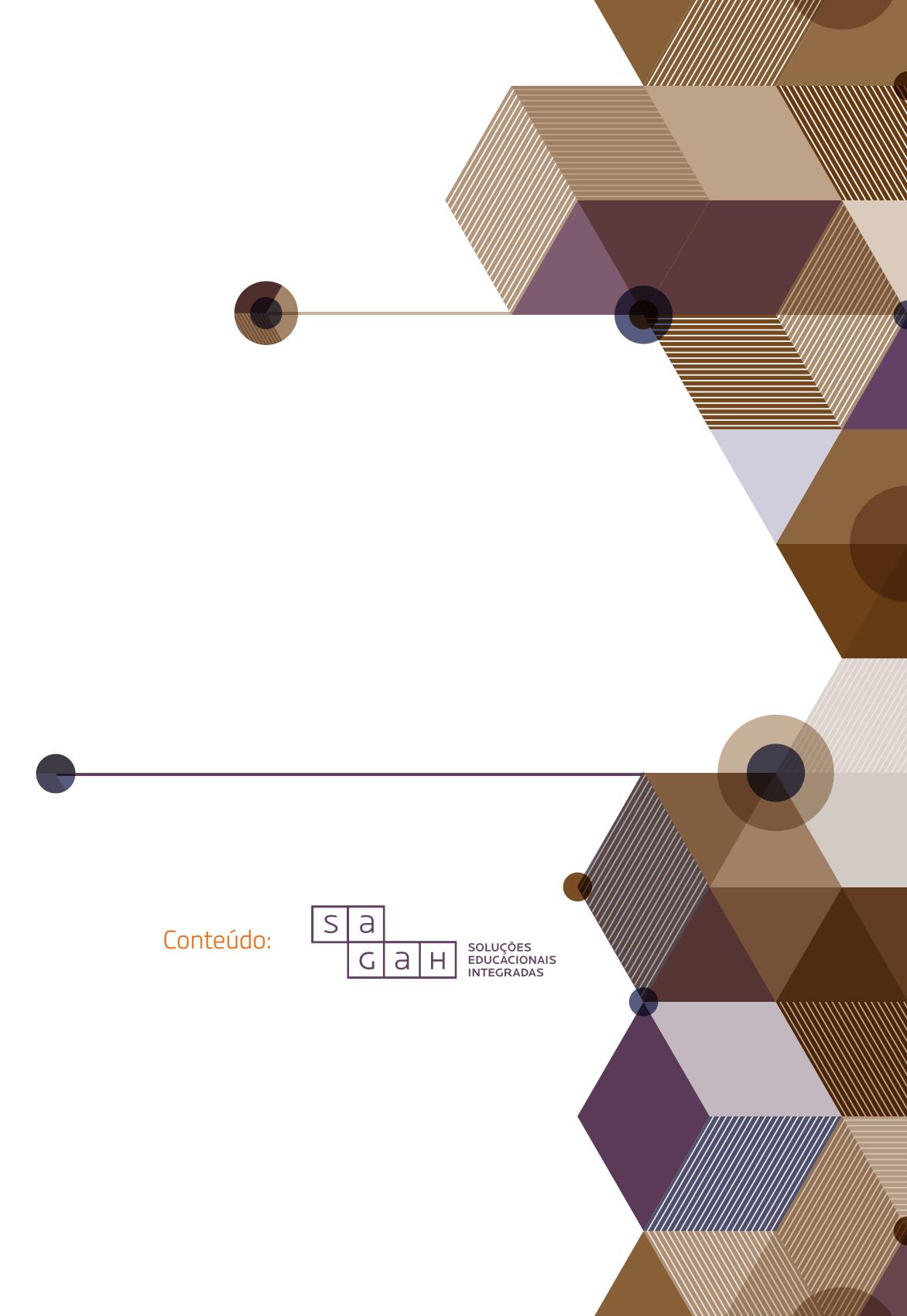
Referência

SADIKU, M. N.; MUSA, S.; ALEXANDER, C. K. *Análise de circuitos elétricos com aplicações*. Porto Alegre: AMGH, 2014. 616p.

Leitura recomendada

HAYT JUNIOR, W. H.; KEMMERLY, J. E.; DURBIN, S. M. *Análise de Circuitos em Engenharia*. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.



Conteúdo:



SOLUÇÕES
EDUCACIONAIS
INTEGRADAS



DICA DO PROFESSOR

No vídeo da Dica do Professor, você vai acompanhar um passo a passo de como realizar a conversão, a partir do exemplo. Vai resolver, inclusive, algumas dúvidas sobre como começar, sobre as diferentes nomenclaturas e também sobre como identificar as partes principais do circuito.

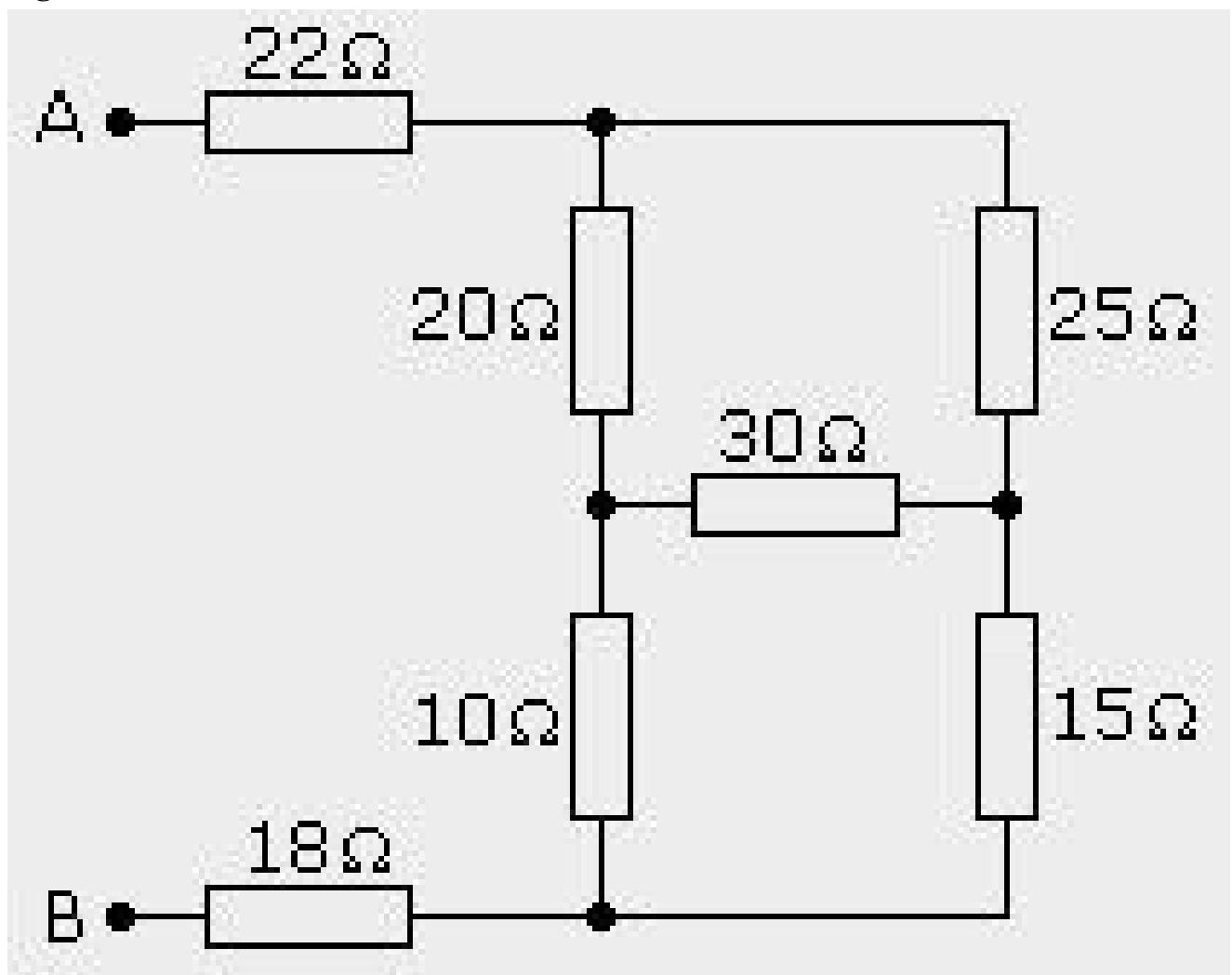
Assista.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!



EXERCÍCIOS

- 1) Determine a resistência equivalente R_{AB} entre os pontos A e B na associação a seguir.



A) 87,11Ohms

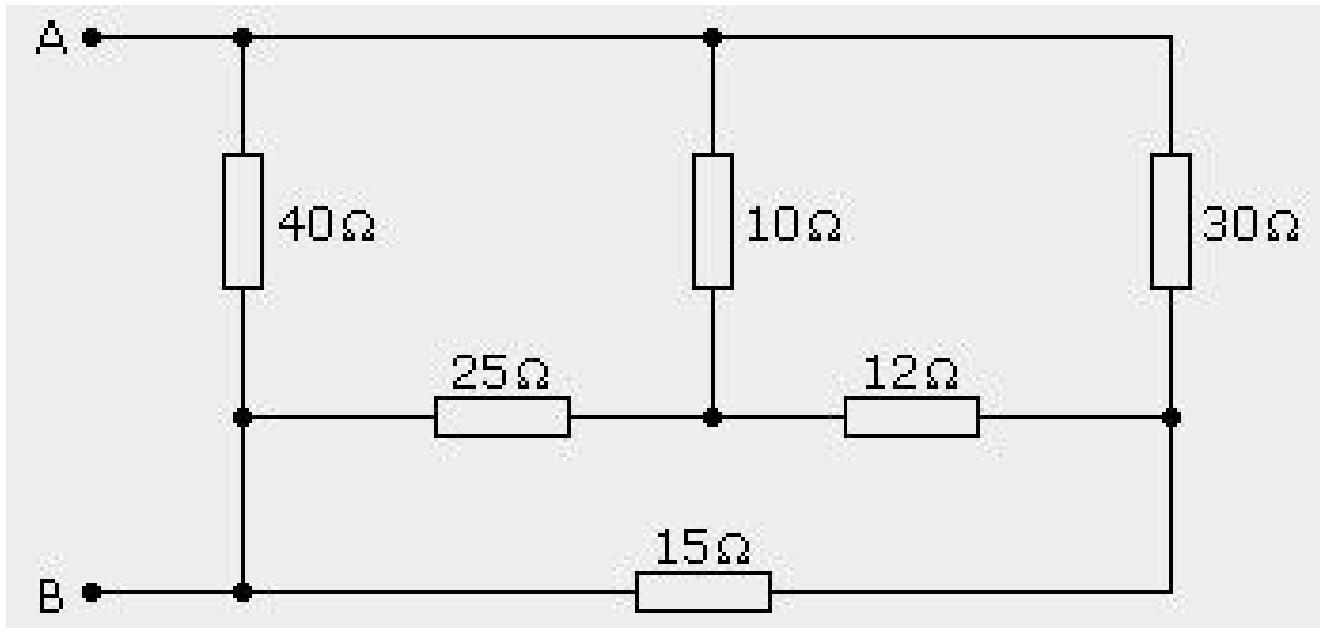
B) 54,108Ohms

C) 57,131 Ohms

D) 57,043Ohms

E) 121Ohms

- 2) Determine a resistência equivalente R_{AB} entre os pontos A e B na associação a seguir.



A) $16,99\Omega$.

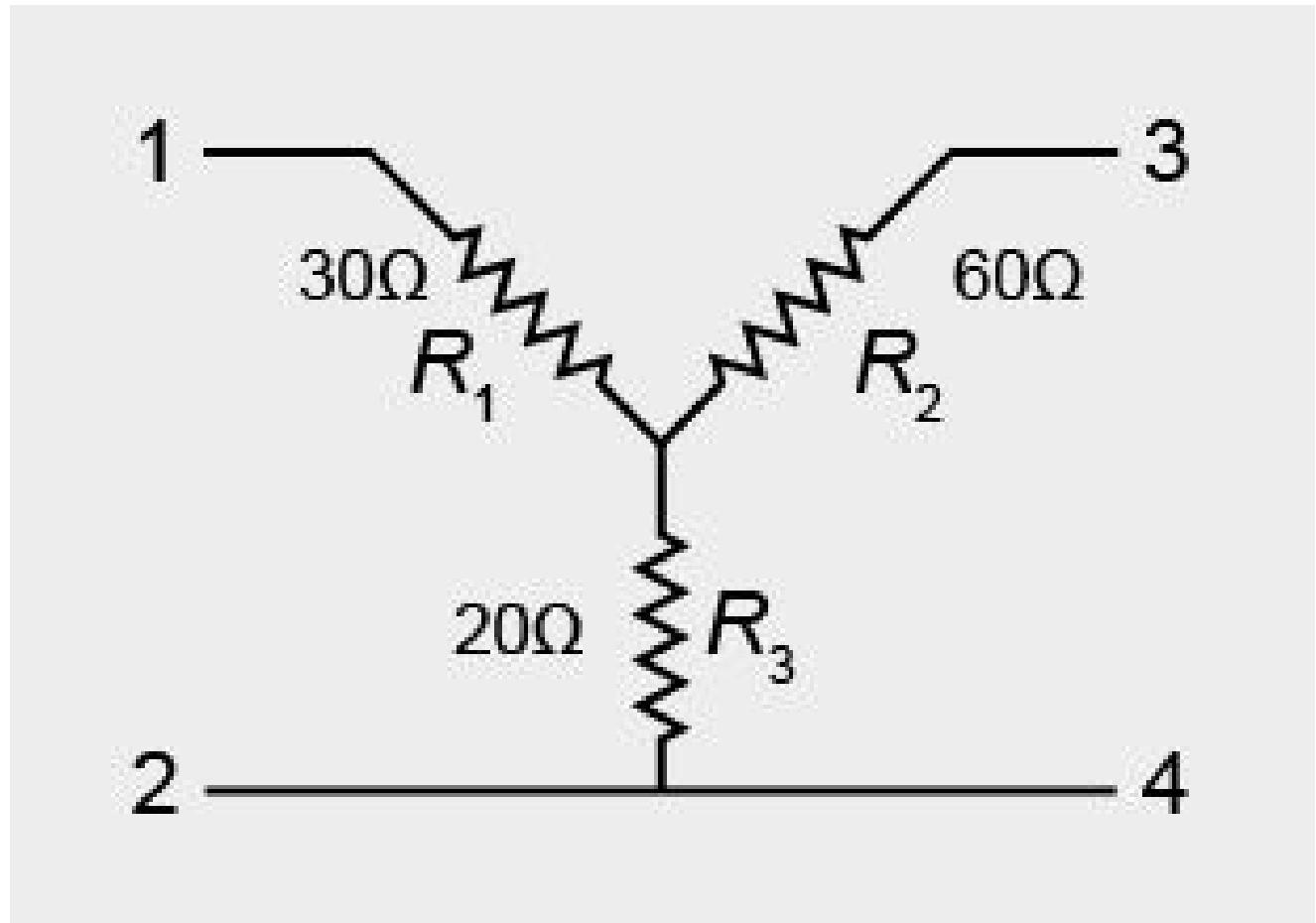
B) $12,38\Omega$.

C) $6,22\Omega$.

D) $61,44\Omega$.

E) $11,23\Omega$.

3) Calcule o equivalente delta para o circuito a seguir.



A) $R_a = 10\Omega$, $R_b = 40\Omega$, $R_c = 35\Omega$.

B) $R_a = 3,35\Omega$, $R_b = 7,73\Omega$, $R_c = 8,23\Omega$.

C) $R_a = 25\Omega$, $R_b = 70\Omega$, $R_c = 115\Omega$.

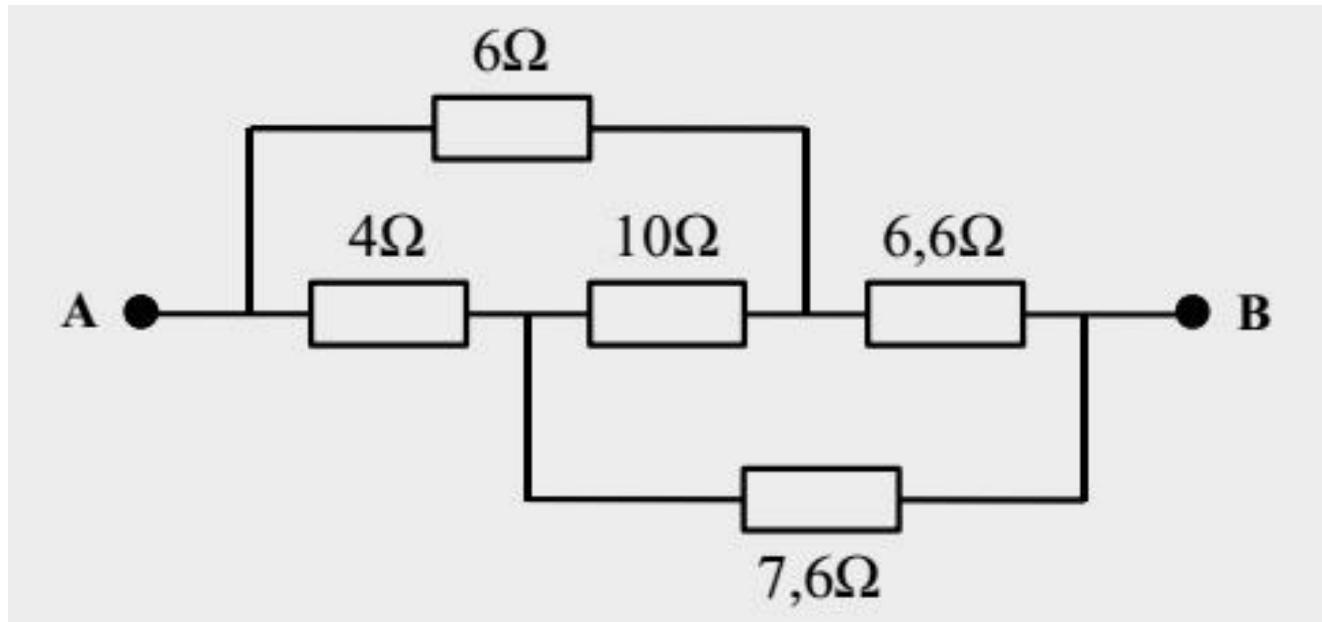
D) $R_a = 120\Omega$, $R_b = 60\Omega$, $R_c = 180\Omega$.

E) R_a

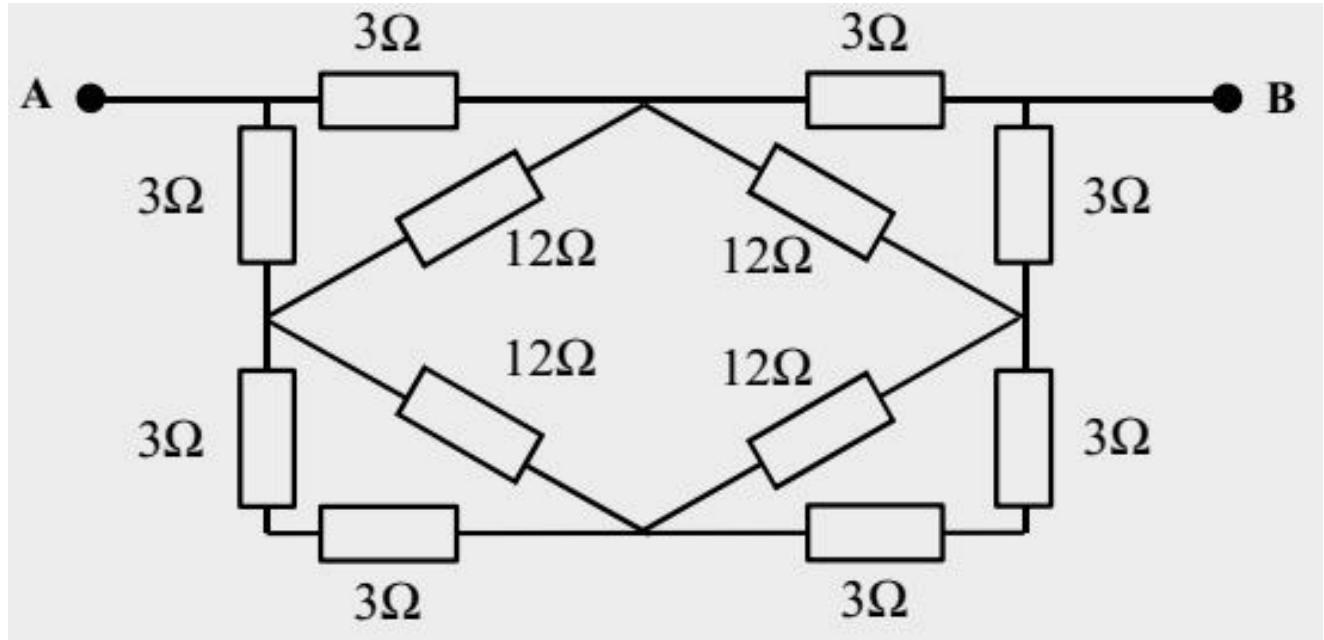
=

100Ω , $R_b = 333\Omega$, $R_c = 220\Omega$.

- 4) Determine a resistência equivalente R_{AB} entre os pontos A e B na associação a seguir.



- A) 6Ω .
- B) 12Ω .
- C) $8,333\Omega$.
- D) 2Ω .
- E) $15,632\Omega$.
- 5) Determine a resistência equivalente R_{AB} entre os pontos A e B na associação a seguir.



A) $1,5\Omega$.

B) 3Ω .

C) 4Ω .

D) 6Ω .

E) 8Ω .



NA PRÁTICA



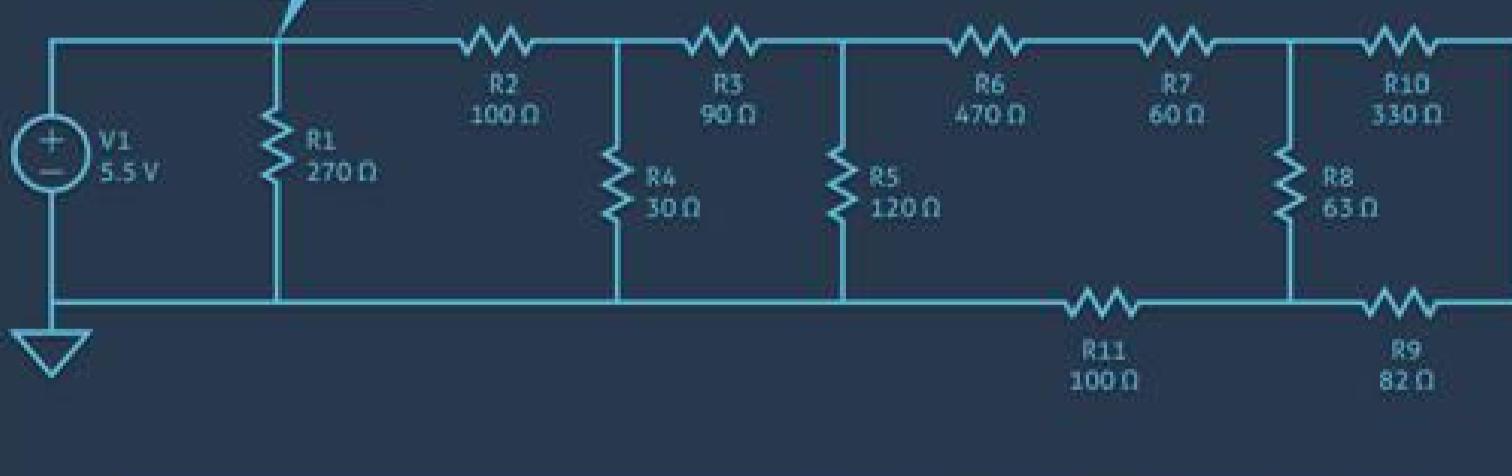
João foi contratado por uma empresa especializada em automação residencial. Sua primeira tarefa foi instalar os sensores de luminosidade, utilizados em um novo sistema de controle de iluminação mais eficiente. No entanto, era a primeira aplicação desse sensor pela empresa.

Após encontrar os locais otimizados para os sensores, foi solicitado a João que verificasse a viabilidade de alimentar os sensores com as mesmas fontes utilizadas nos sensores de gás e fumaça, reduzindo, assim, a diversidade de itens.



João sabia que essas fontes tinham saída de 5,5V e a corrente elétrica máxima que elas forneciam era de 300mA. Para saber se era possível utilizá-las nos novos sensores, João analisou o circuito destes.

Ao final do levantamento de valores, o circuito que João obteve foi o seguinte:



Com as informações do circuito, João precisou apenas calcular o circuito equivalente. Sabendo o valor do resistor equivalente e a tensão de alimentação, pôde calcular a corrente de consumo do sensor e aprovar a utilização da fonte padrão.





SAIBA MAIS

Para ampliar o seu conhecimento a respeito desse assunto, veja abaixo as sugestões do professor:

O vídeo Como partida estrela triangulo reduz a corrente de partida? apresenta as características de um motor quando ligado na topologia estrela e na topologia triângulo, as variações na corrente de consumo e o torque obtido. Assista no link a seguir.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Sadiku, Matthew; Musa, Sarhan; Alexander, Charles. Análise de Circuitos Elétricos com Aplicações. 1ed. AMGH; 2014.

Thomas, Roland E.; Rosa, Albert J.; Toussaint, Gregory J. Análise e Projeto de Circuitos Elétricos Lineares. 6ed. Bookman; 2011.

Introdução ao PSPICE

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Teoremas de rede I



APRESENTAÇÃO

Nesta unidade, estudaremos Teoremas de Rede I - teorema da superposição e aplicações.

Bons estudos.

Ao final desta Unidade de Aprendizagem, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

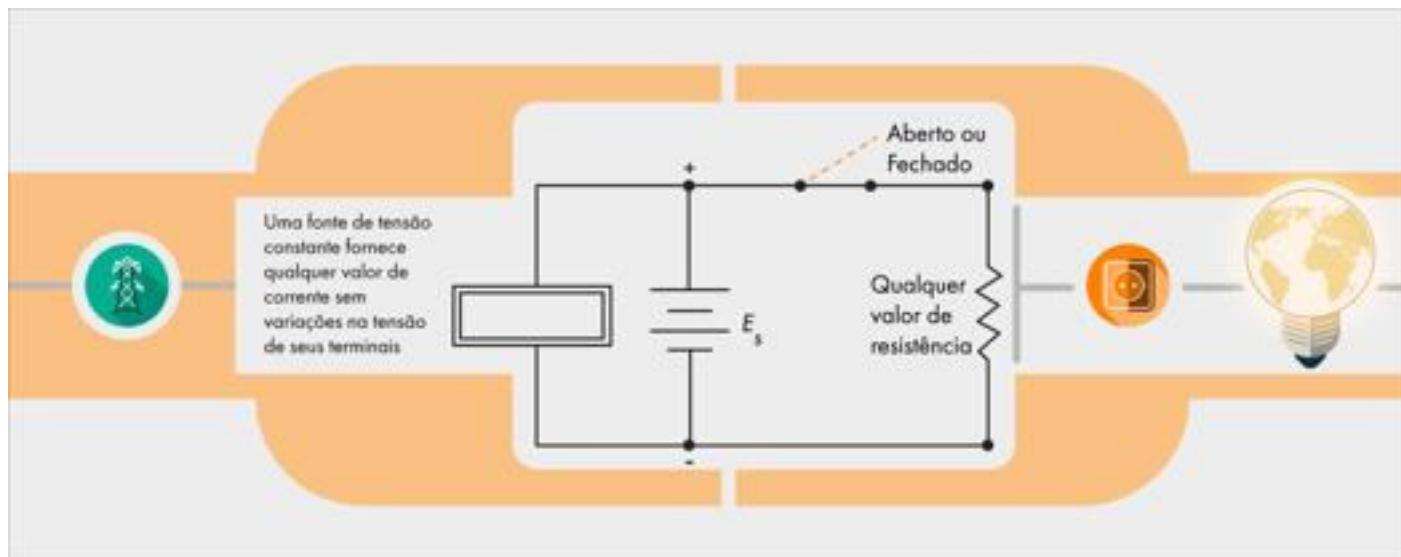
- Especificar os Teoremas da Superposição a uma rede resistiva CC para redução de circuito.
- Identificar meios de redução de resistores em série-paralelo.
- Demonstrar os teoremas de Thevenin e Norton para redução do circuito.



INFOGRÁFICO

Veja na ilustração o esquema do que veremos nesta unidade referente ao teorema de rede - teorema da superposição:

Uma fonte de tensão constante tem resistência interna nula e fornece qualquer valor de corrente sem variação em sua tensão nominal, veja o esquema do infográfico.





CONTEÚDO DO LIVRO

Teoremas de rede servem para simplificar circuitos mais complexos com fontes de tensão, corrente e redes resistivas. O capítulo Teoremas de Rede I, da obra *Análise de circuitos elétricos*, que serve de base teórica para a unidade de aprendizagem.

Boa leitura!

ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

A photograph showing three students in a classroom setting. A young man with dark skin and curly hair is leaning over a table, looking intently at a tablet device. To his right, a young woman with long brown hair is also focused on the screen. In the background, another student is visible, though slightly out of focus. The table is covered with various items, including papers, a calculator, and what appears to be a small electronic component or model. The lighting is warm and focused on the students and their work.

Jordana Leandro
Seixas

Teoremas de rede I

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste texto, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Especificar os teoremas da superposição a uma rede resistiva CC para redução de circuito.
- Identificar meios de redução de resistores em série-paralelo.
- Demonstrar os teoremas de Thevenin e Norton para redução do circuito.

Introdução

Um circuito elétrico, ou rede elétrica, é um conjunto de elementos elétricos interconectados de forma típica. Circuitos mais simples, com componentes de dois terminais, são denominados de *bipolo*, e seus terminais estão acessíveis para conexão a outros elementos. Os elementos mais comuns nesses circuitos são os resistores, indutores, capacitores, geradores, etc. Destes, o mais simples e mais utilizado é o resistor. Esses elementos também podem ser combinados por meio da interconexão de seus terminais, de modo a formar um conjunto com número variado de terminais de acesso. Transistores e amplificadores são exemplos de elementos de circuitos mais complexos, com mais de dois terminais.

Neste capítulo, você vai estudar sobre o teorema da superposição a uma rede resistiva CC para redução de circuito. Você também vai verificar como é possível reduzir um circuito com resistores em série-paralelo, facilitando a solução do problema. Por fim, você vai aprender como obter circuitos equivalentes de Thevenin e de Norton a partir de circuitos originais, sejam eles circuitos simples ou complexos.

Teoremas da superposição em rede resistiva CC

Nesta seção, estudaremos sobre o teorema (ou princípio) da superposição, e serão abordados circuitos lineares com mais de uma entrada. Os circuitos

lineares obedecem ao princípio da superposição: ou seja, quando um sistema é alimentado por mais de uma fonte independente de tensão ou corrente, podemos obter a resposta nesses circuitos com apenas uma das fontes ligada (ou ativa) de cada vez. Assim, podemos obter o resultado pela soma algébrica dos resultados de cada uma das fontes, individualmente, agindo separadamente. Abordaremos neste tópico as redes resistivas CC; contudo, o teorema da superposição também é abordado em qualquer outro sistema linear com duas ou mais fontes, pois as equações do circuito são equações lineares (equações do primeiro grau). No caso de circuitos resistivos, a solução pode ser encontrada pelo uso da regra de Cramer, na qual cada uma das parcelas encontradas se deve a uma das fontes independentes estar ativa.

As equações de circuitos complexos com variadas fontes independentes de tensão ou corrente podem ser mais simples de serem resolvidas se aplicarmos o teorema da superposição. Dessa forma, o projetista pode ter vários projetos mais simples, em vez de um único projeto de grande complexidade, seja para encontrar a solução de um problema maior, seja para reduzi-lo a um circuito equivalente mais simples de ser resolvido individualmente. Porém, esse teorema nem sempre simplifica a análise de circuitos; pode acontecer de se obter um número maior de equações do que utilizando algum outro método conhecido. Contudo, a superposição é utilizada quando as fontes de tensão ou corrente independentes são essencialmente diferentes.

Neste tópico, as fontes utilizadas nos circuitos estão limitadas às fontes de tensão e corrente que geram tensões ou correntes constantes, isto é, tensões e correntes que não variam ao longo do tempo. As fontes constantes são conhecidas como fontes CC. Historicamente, CC era definida como corrente contínua. Agora, o termo CC é aceito, universalmente, na ciência e na engenharia, com os significados de corrente constante e tensão constante.

Vamos compreender melhor o teorema da superposição por meio do exemplo a seguir.



Exemplo

Encontre a corrente i que circula pelo resistor de 4Ω ilustrado na Figura 1, utilizando o teorema da superposição.

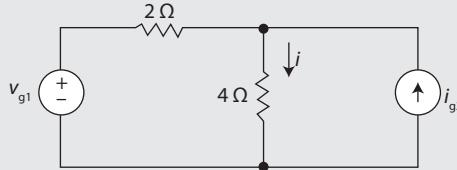


Figura 1. Circuito linear com duas fontes.

Fonte: Johnson, Hilburn e Johnson. (1994, p. 94).

Solução:

Podemos obter a corrente i por meio da composição de duas outras correntes, cada uma devida a uma das fontes estar ligada individualmente.

Seja a corrente i_1 a componente da corrente i devido à fonte de tensão V_{g1} estar ativa, isto é, com a fonte de corrente i_{g2} desligada ($i_{g2} = 0$); então, utilizando a lei de Kirchhoff para tensão (LKT) no circuito da Figura 2a, obtemos:

$$V_{g1} - (2 + 4)i_1 = 0 \text{ e, assim, } i_1 = \frac{V_{g1}}{6}.$$

Da mesma forma, seja a corrente i_2 a componente da corrente i devido à fonte de corrente i_{g2} , isto é, com a fonte de tensão V_{g1} desligada ($V_{g1} = 0$), então, utilizando agora a lei de Kirchhoff para corrente no circuito da Figura 2b, temos:

$$i_2 = i_{g2} \times \frac{2}{(2+4)}, \text{ ent\~ao, } i_2 = \frac{i_{g2}}{3}.$$

Assim, o valor da corrente total i será igual à soma algébrica das correntes i_1 e i_2 :

$$i = i_1 + i_2$$

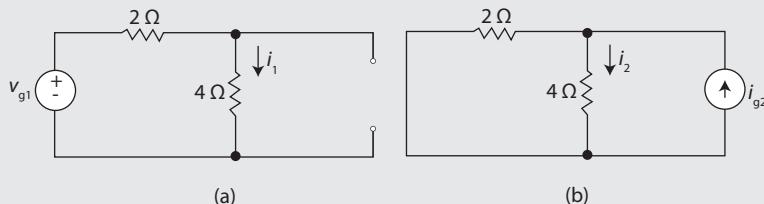


Figura 2. Circuito da Figura 1 com: (a) a fonte de corrente desligada; (b) a fonte de tensão desligada.

Fonte: Johnson, Hilburn e Johnson. (1994, p. 96).



Saiba mais

Como encontrar a potência em circuitos aplicando o teorema da superposição?

A potência não é uma combinação linear de tensões ou correntes. Por exemplo, se desejar encontrar a potência entregue ao resistor R de valor igual a 4Ω , sabendo-se o valor da tensão, a potência será igual a $P = \frac{V^2}{R}$, que é uma expressão quadrática, e não uma expressão linear. Dessa forma, a superposição não pode ser aplicada diretamente para a obtenção da potência, isto é, não podemos encontrar a potência total pela soma de todas as parcelas da potência encontradas para cada fonte independente funcionando isoladamente.

Uma das formas de encontrar a potência, no caso de se aplicar o teorema da superposição, é, inicialmente, encontrar a soma das parcelas de tensão ou corrente, cada uma devida somente a uma fonte de tensão ou corrente independente. Assim, a potência será $P = \frac{V^2}{R}$ ou $P = Ri^2$, respectivamente.

Fonte: Johnson, Hilburn e Johnson. (1994).

Redução de resistores em série-paralelo

Usaremos as ferramentas analíticas lei de Ohm e leis de Kirchhoff para tensão e para corrente para resolver circuitos mais simples e circuitos mais complexos. A maior complexidade é encontrada quando vários elementos estão interligados de forma mais complicada. Neste tópico, abordaremos a redução de circuitos complexos para circuitos equivalentes mais simples. Uma das razões para buscar circuitos equivalentes mais simples é, primeiro, conhecer completamente as leis implícitas aos métodos mais sofisticados e, segundo, obter circuitos que têm aplicações importantes na engenharia.

Há circuitos elétricos com diferentes topologias, a saber: série, paralelo e série-paralelo. Nos circuitos em série, os elementos estão em cascata ou conectados sequencialmente, de forma que a corrente que passa por eles é a mesma, como ilustra a Figura 3a. Se dois ou mais elementos estão conectados nos mesmos dois nós e, consequentemente, apresentam a mesma tensão, esse circuito é denominado de circuito em paralelo (Figura 3b). Um circuito série-paralelo é um circuito que contém ambas as topologias dos circuitos em série e em paralelo, exibido na Figura 3c.

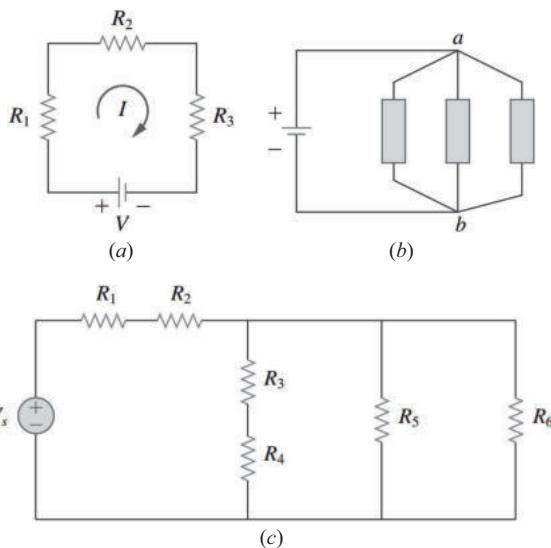


Figura 3. Diferentes topologias de circuitos: (a) circuito em série; (b) circuito em paralelo; (c) circuito série-paralelo.

Fonte: Sadiku, Alexander e Musa (2014, p. 62, 83 e 109).

Para analisar circuitos série-paralelo, procuramos observar, em cada parte do circuito, os resistores que estão em série e calcular a sua resistência equivalente, bem como encontrar a resistência equivalente dos resistores que estão em paralelo. Com essas resistências equivalentes encontradas, parcialmente, podemos substituí-las, se necessário, nas porções em série ou em paralelo do circuito, até que o circuito original seja reduzido a um circuito em série ou em paralelo mais simples. Para a redução de um circuito série-paralelo acontecer, portanto, deve-se seguir basicamente os seguintes procedimentos:

- combinar resistores em série;
- combinar resistores em paralelo;
- aplicar a lei de Kirchhoff para tensão (LKT), se necessário;
- aplicar a lei de Kirchhoff para corrente (LKC), se necessário;
- aplicar a lei de Ohm, geralmente;
- aplicar a divisão de tensão, se preciso;
- aplicar a divisão de corrente, se preciso.

Segue um exemplo para melhor compreensão do assunto abordado.



Exemplo

Determine a resistência equivalente total, R_{eqT} , do circuito da Figura 4.

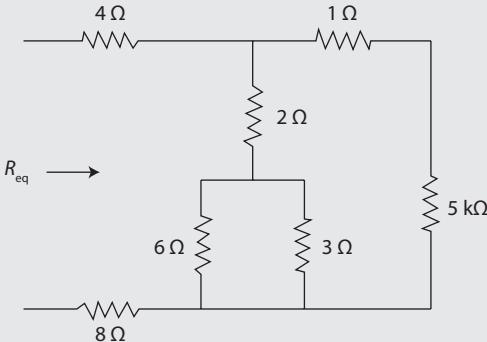


Figura 4. Circuito original.

Fonte: Sadiku, Alexander e Musa (2014, p. 110).

Solução:

Para obtermos a resistência equivalente, inicialmente combinamos os resistores em série e em paralelo. Observe que os resistores de 6 Ω e 3 Ω estão em paralelo, pois estão conectados nos mesmos pontos. Logo, a resistência equivalente será:

$$R_{eq1} = \frac{6 \times 3}{6 + 3} = 2 \Omega$$

Os resistores de 1 Ω e 5 Ω estão em série, pois a corrente que circula através deles é a mesma, então:

$$R_{eq2} = 1 + 5 = 6 \Omega$$

O circuito equivalente da Figura 5a apresenta o resultado até o momento, após o cálculo das resistências equivalentes 1 e 2. Veja que, na Figura 5a, os dois resistores de 2 Ω estão em série; assim, a resistência equivalente deles é:

$$R_{eq3} = 2 + 2 = 4 \Omega$$

Agora, o resistor $R_{eq3} = 4 \Omega$ está em paralelo com o resistor de 6 Ω, logo, a resistência equivalente desses resistores em paralelo será:

$$R_{eq4} = \frac{4 \times 6}{4 + 6} = 2,4 \Omega$$

O circuito da Figura 5a foi substituído pelo circuito da Figura 5b. No circuito da Figura 5b, os três resistores estão em série. Assim, a resistência equivalente total, R_{eqT} , do circuito original será:

$$R_{eqT} = 4 + 2,4 + 8 = 14,4 \Omega$$

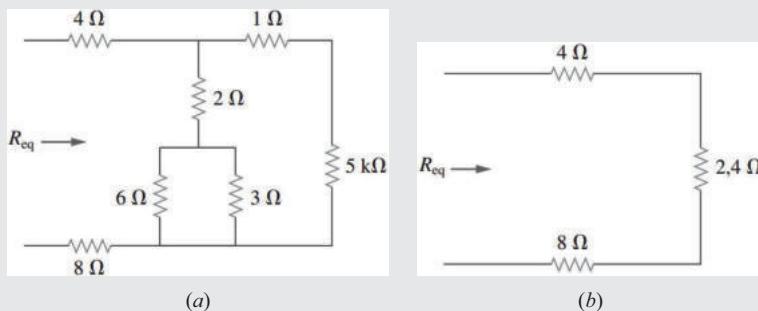


Figura 5. Circuitos equivalentes da Figura 4.

Fonte: Sadiku, Alexander e Musa. (2014, p. 111).

Teoremas de Thevenin e Norton

Os circuitos equivalentes de Thevenin e Norton são técnicas utilizadas para simplificar um circuito inteiro, vistos nos terminais de referência, por um circuito equivalente, composto por uma única fonte e um resistor. Assim, podemos calcular a tensão ou a corrente em um único elemento de um circuito complexo, substituindo o restante do circuito por um resistor equivalente e uma fonte, e analisar o circuito resultante de forma muito simples.

Suponha que desejamos encontrar a corrente, a tensão e a potência entregues a um único resistor de carga, R_L , pelo restante do circuito, que consiste, normalmente, em várias fontes e resistores (Figura 6a). Ou que, por exemplo, precisamos encontrar a resposta para diferentes resistores de carga de valores diferentes. Pelo teorema de Thevenin, podemos substituir todo o circuito, exceto a resistência de carga, por uma fonte de tensão independente em série com um resistor (Figura 6b), sabendo que a resposta do resistor de carga fica inalterada. De forma similar, podemos obter o circuito equivalente pelo teorema de Norton, composto por uma fonte de corrente independente em paralelo com um resistor (Figura 6c).

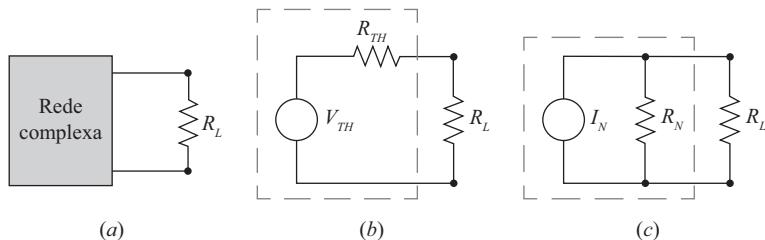


Figura 6. (a) Rede complexa incluindo um resistor de carga R_L ; (b) rede equivalente de Thevenin conectada ao resistor de carga R_L ; (c) rede equivalente de Norton conectada ao resistor de carga R_L .

Fonte: Hayt Júnior, Kemmerly Durbin (2014, p. 135).



Saiba mais

Transformação de fontes

Pela técnica de transformações de fontes, podemos obter o circuito equivalente de Thevenin a partir do circuito equivalente de Norton e vice-versa. A Figura 7a apresenta o circuito equivalente de Norton e a Figura 7b apresenta o circuito equivalente de Thevenin.

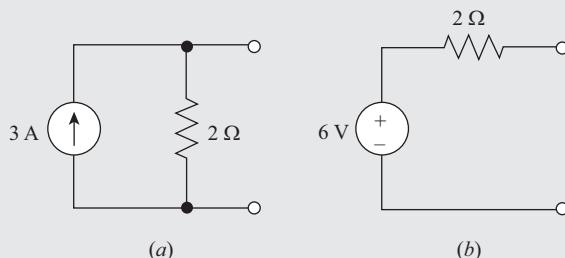


Figura 7. Circuitos equivalentes: (a) de Norton (fonte de corrente real); (b) de Thevenin (fonte de tensão real).

Fonte: Hayt Júnior; Kemmerly; Durbin (2014, p. 130).

No circuito equivalente de Norton, temos uma fonte de corrente $I = 3\text{ A}$ e um resistor em paralelo $R = 2\Omega$. No circuito equivalente de Thevenin, temos uma fonte de tensão $V = 6\text{ V}$ e um resistor em série $R = 2\Omega$. A tabela a seguir resume sucintamente como adquirir o circuito equivalente de Thevenin a partir do equivalente de Norton e vice-versa.

Obter o circuito equivalente de:	A partir de:	Cálculo dos parâmetros do circuito equivalente:
Thevenin	Norton	$V_{th} = I_N \times R_{th} = 3 \times 2 = 6 \text{ V}$ $R_{th} = R_N = 2 \Omega$
Norton	Thevenin	$I_N = V_{th}/R_{th} = 6/2 = 3 \text{ A}$ $R_N = R_{th} = 2 \Omega$

Sabendo-se que:

V_{th} = tensão de Thevenin

R_{th} = resistência de Thevenin

R_N = resistência de Norton

I_N = corrente de Norton

Teorema de Thevenin

O exemplo a seguir mostra como obter o equivalente de Thevenin para o circuito mostrado na Figura 8a. Inicialmente, encontramos a resistência de Thevenin, R_{th} , desligando todas as fontes independentes; ou seja, a fonte de tensão vira um curto-círcuito e a fonte de corrente vira um circuito aberto. Em seguida, podemos encontrar a tensão de Thevenin (v_{th}), denominada também de tensão de circuito aberto (v_{ca}).



Exemplo

Encontre o circuito equivalente de Thevenin para o circuito Rede A, apresentado na Figura 8a.

Solução:

Após desligar a fonte de tensão (Figura 8a), observamos a rede remanescente. Na Figura 8c, temos um resistor de 7Ω conectado em série com o paralelo entre os resistores de 6Ω e 3Ω . Assim, encontramos a resistência equivalente de Thevenin desta forma:

$$R_{th} = 7 + 6 // 3 = 7 + \frac{6 \times 3}{(6 + 3)} = 9 \Omega$$

Observe na Figura 8b que a tensão de Thevenin é a mesma tensão sobre o resistor de $6\ \Omega$. Então, aplicando o divisor de tensão, obtemos:

$$V_{th} = V_{ca} = 12 \times \frac{6}{(6+3)} = 8\text{ V}$$

Assim, o circuito equivalente de Thevenin (Rede A), ilustrado na Figura 8d, exibe $V_{th} = 8\text{ V}$ e $R_{th} = 9\Omega$.

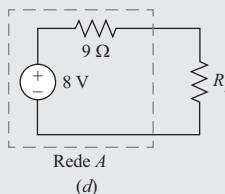
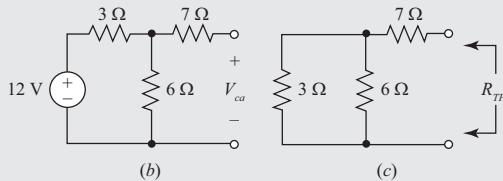
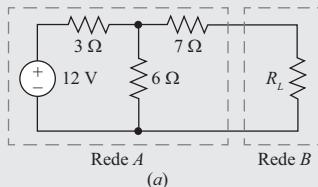


Figura 8. (a) Circuito original; (b) circuito sem a carga R_L ; (c) circuito para calcular a resistência de Thevenin, R_{th} ; (d) circuito equivalente de Thevenin (Rede A).

Fonte: Hayt Júnior, Kemmerly e Durbin (2014, p. 136 e 138).

Teorema de Norton

Podemos encontrar o equivalente de Norton para o circuito mostrado na Figura 9a calculando, inicialmente, a corrente de Norton (i_N), também conhecida por corrente de curto-círcuito (i_{sc}); ou seja, aplica-se um curto-círcuito nos terminais de referência $a-b$. Em seguida, podemos encontrar a resistência de Norton (R_N), que é equivalente à resistência de Thevenin. Outro caminho é encontrar a tensão de Thevenin, como discutido anteriormente, e, após aplicar a lei de Ohm, encontrar a corrente de Norton. Assim, $i_N = \frac{V_{th}}{R_N}$ ou $R_N = \frac{V_{th}}{i_N}$.

Veja o exemplo a seguir para compreender melhor o assunto.



Exemplo

Encontre o circuito equivalente de Norton para o circuito da Figura 9a, com terminais de referência $a-b$.

Solução:

Vamos encontrar a tensão de Thevenin (V_{th}), aplicando a lei de Kirchhoff para as correntes (LKC) no nó superior, ilustrado na Figura 9a. Observamos que $V_{th} = V_1 = V_{ab}$; assim, teremos:

$$\frac{v_1 - 25}{5} + \frac{v_1}{20} - 3 = 0.$$

Dessa forma, $V_{th} = V_1 = V_{ab} = 32 V$.

Agora, vamos encontrar a corrente de Norton, ou corrente de curto-círcuito, aplicando LKC ao nó superior (Figura 9b). Assim,

$$\frac{v_2 - 25}{5} + \frac{v_2}{20} - 3 + \frac{v_2}{4} = 0.$$

Resolvendo o sistema acima, teremos $v_2 = 16 V$. Dessa forma, a corrente de Norton será:

$$i_N = \frac{V_2}{4} = \frac{16}{4} = 4 A$$

Logo, a resistência de Norton será $R_N = \frac{V_{th}}{i_N} = \frac{32}{4} = 8 \Omega$.

A Figura 9c apresenta o circuito equivalente de Norton para o circuito original da Figura 9a.

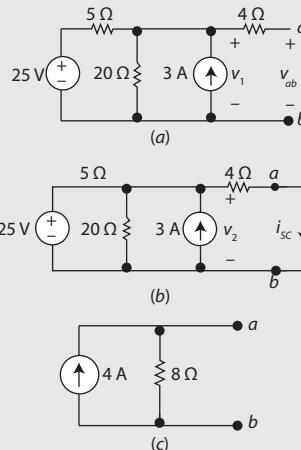


Figura 9. (a) Circuito original; (b) curto-círcuito nos terminais de referência $a-b$; circuito equivalente de Norton.

Fonte: Nilsson e Riedel (2009, p. 84–85).



Referências

HAYT JR., W. H.; KEMMERLY, J. E.; DURBIN, S. M. *Análise de circuitos em engenharia*. 8. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

JOHNSON, D. E.; HILBURN, J. L.; JOHNSON, J. R. *Fundamentos de análise de circuitos elétricos*. 4. ed. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1994.

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. *Circuitos elétricos*. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2009.

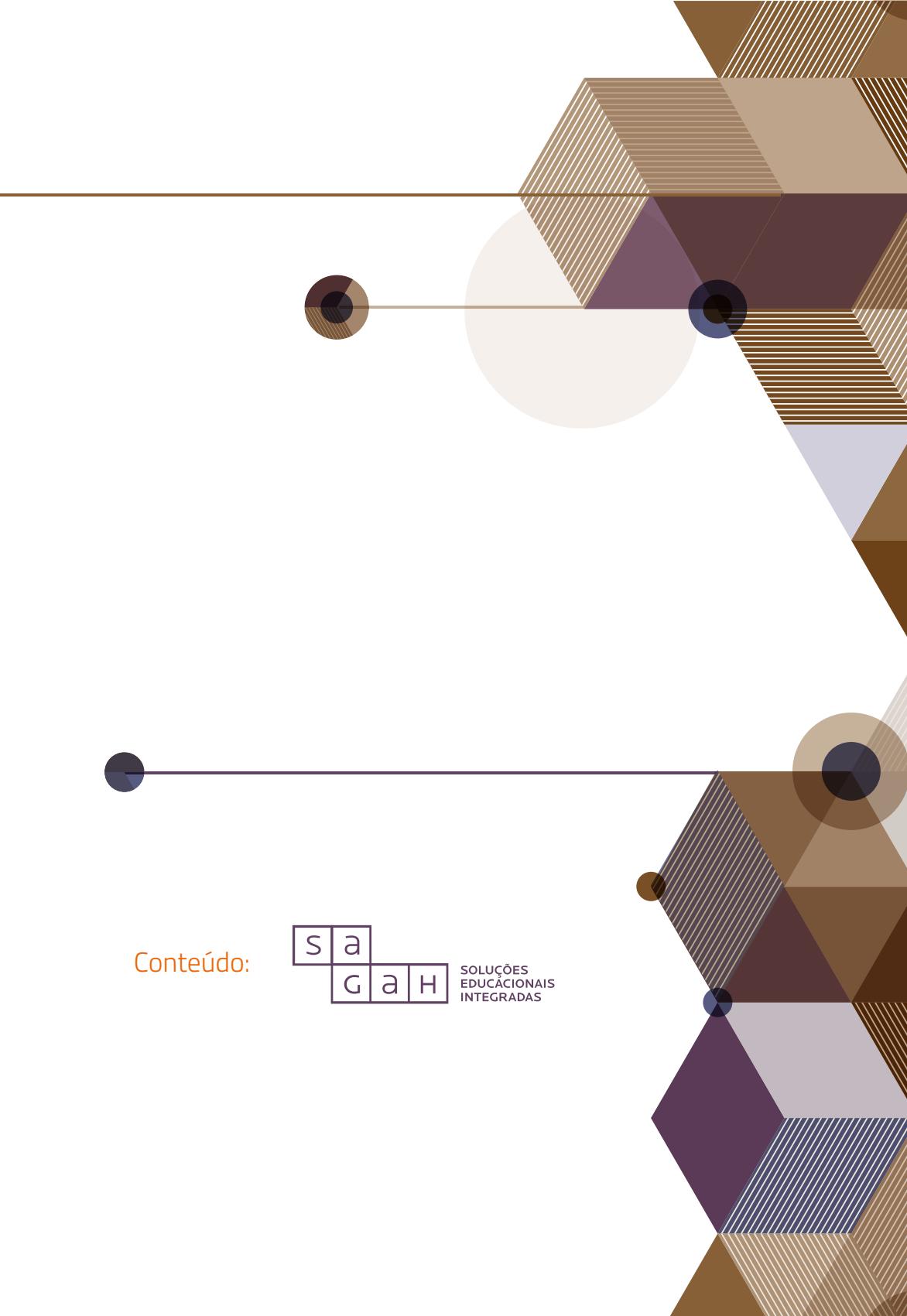
SADIKU, M. N. D.; ALEXANDER, C. K.; MUSA, S. *Análise de circuitos elétricos com aplicações*. Porto Alegre: Bookman, 2014.

Leituras recomendadas

BOYLESTAD, R. L. *Introdução a análise de circuitos*. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.

NAHVI, M.; ADMINISTER, J. A. *Circuitos elétricos*. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. (Coleção Schaum).

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.



Conteúdo:



SOLUÇÕES
EDUCACIONAIS
INTEGRADAS



DICA DO PROFESSOR

Existem vários teoremas que nos permitem calcular os parâmetros de um circuito (tensão, corrente, resistência, etc), em redes mais complexas de circuitos em corrente contínua CC. A rede é uma combinação de componentes interligados, tais como resistências, de forma a produzir um resultado final particular.

No entanto, as redes normalmente precisam de outras ferramentas além daquelas normalmente na análise de circuitos série ou paralelo. Aprenderemos como redes complexas CC de resistores, fontes de tensão e corrente, podem ser reduzidas para uma forma mais simples, utilizando o Teorema da Superposição.

Vamos acompanhar mais detalhes no vídeo.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!



EXERCÍCIOS

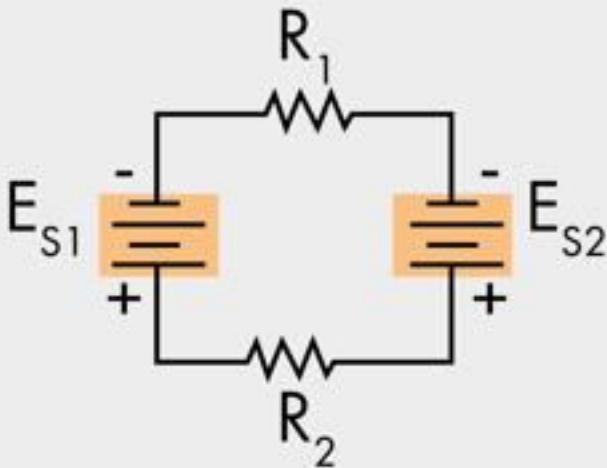
- 1) A resistência interna de pilhas e baterias provoca queda de tensão em cargas. Aumenta com a vida útil das baterias. Uma bateria de tensão V_s de 12 V, com uma resistência interna R_s de 0,5 Ω, em uma carga R_L de 10 Ω, terá uma queda de tensão V_{RL} , que pode ser calculada pela fórmula: $V_{RL}=V_s \cdot (R_L / (R_L+R_s))$. Calcule V_{RL} :
- A) 12 Volts.
B) 11,9 Volts.
C) 11,6 Volts.
D) 11,5 Volts.

E) 11,42 Volts.

2) Qual a vantagem do Teorema da Superposição?

- A) O teorema da superposição é útil na resolução de redes resistivas que têm mais de uma fonte de tensão ou corrente.
- B) Qualquer rede de fontes de tensão e resistores pode ser substituída por uma fonte de tensão equivalente única (E_{th}) em série com uma resistência equivalente única (R_{th}) e o resistor de carga (R_L).
- C) Representa uma fonte de corrente I_N em paralelo com uma rede resistiva com uma resistência equivalente (R_N) em paralelo com a resistência de carga R_L .
- D) Teorema da superposição não pode ser utilizado em redes com resistores e fontes de tensão.
- E) Nenhuma resposta acima.

3) Para o circuito da figura abaixo calcule, pelo teorema da superposição, a tensão sobre o resistor R_1 , sendo: $E_{s1}=6V$, $E_{s2}=12V$, $R_1=4\Omega$ e $R_2=2\Omega$.



A) 2 Volts.

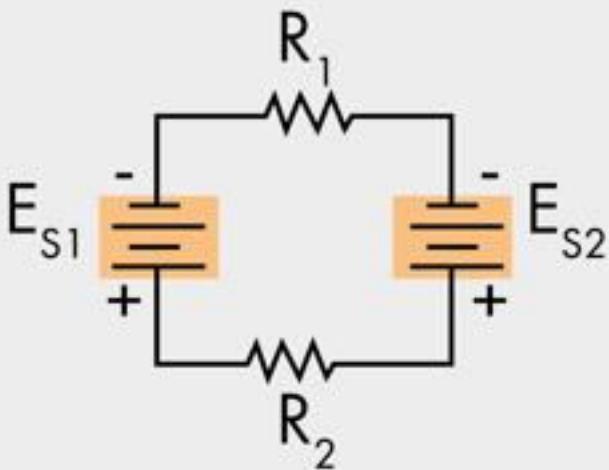
B) 4 Volts.

C) 6 Volts.

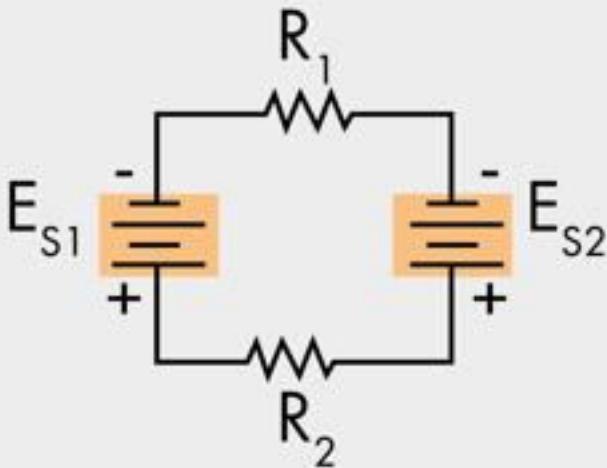
D) 8 Volts.

E) 10 Volts.

4) Para o circuito da figura abaixo, calcule pelo teorema da superposição, a tensão sobre o resistor R_2 , sendo: $E_{S1}=6V$, $E_{S2}=12V$, $R_1=4\Omega$ e $R_2=2\Omega$.



- A) 2 Volts.
 - B) 4 Volts.
 - C) 6 Volts.
 - D) 8 Volts.
 - E) 10 Volts.
- 5) Para o Teorema da Superposição, para o circuito abaixo, é correto afirmar que:**



- A) Ache a corrente que passa por R_1 devido a fonte E_{S1} , fazendo um curto em E_{S2} , ache $I1'$.
- B) Ache a corrente que passa por R_1 devido a fonte E_{S2} , fazendo um curto em E_{S1} , ache $I1''$.
- C) A corrente $I1$ é a diminuição das duas correntes, com o sentido da maior. A corrente através de R_2 é a mesma (série). A tensão sobre R_1 e R_2 pode ser calculado com a Lei de Ohm, obtendo $E1$ e $E2$.
- D) Todas alternativas acima estão corretas.
- E) Nenhuma alternativa acima está correta.



NA PRÁTICA

A rede é uma combinação de componentes interligados, tais como resistências, fontes de tensão e/ou corrente, de forma a produzir um resultado final particular. Existem vários teoremas que

nos permitem calcular os parâmetros de um circuito (tensão, corrente, resistência, etc), em redes mais complexas de circuitos em corrente contínua CC.



SAIBA MAIS

Para ampliar o seu conhecimento a respeito desse assunto, veja abaixo as sugestões do professor:

Análise de Circuitos I - Teorema da Superposição - Vídeo Aula 04

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Superposição - Análise de Circuitos

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Análise Circuito Superposição

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Circuitos Elétricos - Aula 5 - Técnicas de simplificação

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Elementos armazenadores de energia: capacitores e indutores



APRESENTAÇÃO

Os elementos armazenadores de energia dos circuitos elétricos são aqueles cujos comportamentos são diretamente relacionados aos campos magnético e elétrico: indutores, ao campo magnético, e capacitores, ao campo elétrico.

A energia elétrica pode ser armazenada no campo magnético dos indutores e no elétrico dos capacitores e ser utilizada em outro momento para qualquer fim. Eles possuem relações entre tensão e corrente próprias e diferentes das dadas pelos resistores. Eles também podem ser associados em série e em paralelo, obtendo-se indutores e capacitores equivalentes. Indutores e capacitores são elementos de circuitos com grande importância em muitas aplicações, por isso o estudo de ambos é essencial.

Nesta Unidade de Aprendizagem, você vai estudar as características dos indutores e dos capacitores e sua relação com os campos magnético e elétrico, reconhecendo as relações entre tensão e corrente presentes nesses elementos, e vai analisar a possibilidade de associações em série e paralelo para ambos, como ocorre com os resistores.

Bons estudos.

Ao final desta Unidade de Aprendizagem, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Determinar as características dos capacitores.
- Definir as características dos indutores.
- Analisar a associação de capacitores e a associação de indutores em série e em paralelo.



DESAFIO

Uma unidade de *flash* de uma máquina fotográfica tem seu funcionamento diretamente relacionado ao comportamento de um capacitor.

A energia luminosa que é emitida no *flash* está inicialmente armazenada em um capacitor no circuito. Assim, é possível realizar cálculos para obter valores de componentes do circuito conhecendo-se algumas grandezas elétricas e alguns parâmetros.

Você deve calcular a energia armazenada no capacitor do circuito da unidade de *flash* de uma máquina e os valores do capacitor e da combinação que o compõe.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Realize todos os cálculos conforme indicados.

Primeiramente, efetue os cálculos da energia dissipada no resistor indicado e, em seguida, calcule o valor do capacitor e dos capacitores que o compõem por associação.



INFOGRÁFICO

Os elementos armazenadores de energia dos circuitos elétricos, os indutores e os capacitores, são essenciais em quase todas as aplicações da engenharia elétrica. O comportamento de um indutor está relacionado ao campo magnético gerado por uma corrente elétrica que o percorre, e o do capacitor, ao campo elétrico gerado por cargas elétricas separadas por um dielétrico.

Como uma forma de energia pode ser armazenada em campos de qualquer natureza (como, por exemplo, o campo gravitacional da Terra armazena a energia potencial), a energia elétrica pode ser armazenada no campo magnético dos indutores e no elétrico dos capacitores.

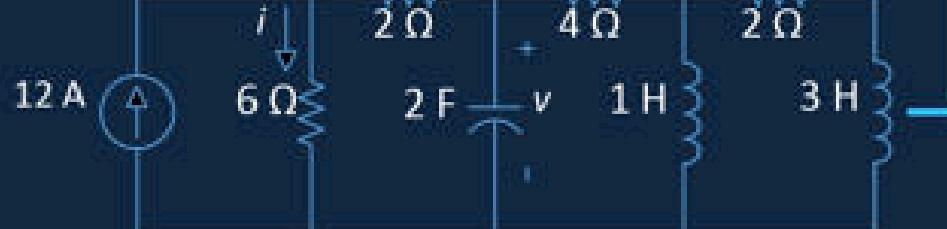
Para saber mais, veja no Infográfico a seguir um exemplo do comportamento de capacitores e indutores em um circuito excitado por uma fonte CC. Veja também um resumo das características desses elementos, de suas combinações e das relações entre tensão e corrente que eles impõem.



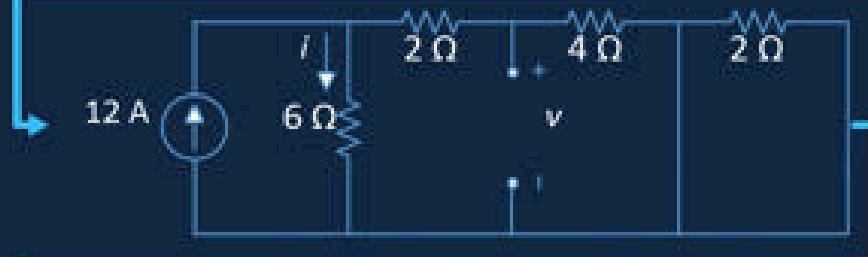
ELEMENTOS ARMAZENADORES DE ENERGIA EM CIRCUITOS



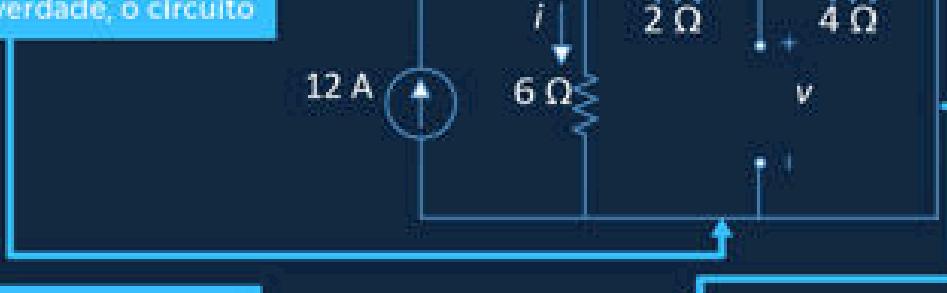
Em um circuito excitado por uma fonte CC em regime permanente, um capacitor é equivalente a um circuito aberto, e um indutor, a um curto-círculo. Assim, para um circuito excitado por uma fonte de corrente CC como dado na figura abaixo,



os dois indutores são equivalentes a um curto-círcuito, e o capacitor, a um circuito aberto, como dado na figura abaixo.



Assim, você tem, na verdade, o circuito



Capacitores e indutores lineares podem ser associados em série e paralelo entre si, obtendo-se um capacitor e um indutor equivalente para a combinação.

A tensão sobre um capacitor e a corrente que percorre um indutor não podem variar instantaneamente.

E, portanto, tem-se, por exemplo,

$$v = 12 \cdot 6 \cdot (2+4)/6 + 2 + 4 \\ = 36 \text{ V e } i = 36/6 = 6 \text{ A.}$$

Quadro-resumo de informações úteis sobre capacitores e indutores

Relação	Resistor (R)	Capacitor (C)	Indutor (L)
Tensão-corrente	$v = R i$	$v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0)$	$v = L \frac{di}{dt}$
Corrente-tensão	$i = \frac{v}{R}$	$i = C \frac{dv}{dt}$	$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i(t_0)$
p ou w	$p = i^2 R = \frac{v^2}{R}$	$w(t) - w(t_0) = \frac{1}{2} C [v(t) - v(t_0)]^2$	$w(t) - w(t_0) = \frac{1}{2} L [i(t) - i(t_0)]^2$
Série	$R_{eq} = R_1 + R_2 + \dots + R_N$	$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}}$	$L_{eq} = L_1 + L_2 + \dots + L_N$
Paralelo	$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$	$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N$	$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \dots + \frac{1}{L_N}$
Em CC	Relações idênticas	Circuito aberto	Curto-círcuito
Variável do circuito que não pode mudar abruptamente	Não varia	Tensão	Corrente



CONTEÚDO DO LIVRO

Ambos os elementos, indutores e capacitores, não dissipam energia, como os resistores, e também não a geram, apenas a armazenam, podendo-se utilizá-la após a armazenagem para outros fins, sendo assim denominados elementos passivos. Os campos magnético e elétrico presentes nesses elementos são decorrentes das interações eletromagnéticas e de suas formas de construção.

As relações de tensão e corrente desses elementos são dadas por equações diferenciais e integrais, porém circuitos contendo indutores e capacitores podem ser analisados com as mesmas técnicas de análise de circuitos aplicadas aos circuitos que contêm apenas resistores. As duas leis de Kirchhoff, de tensões e correntes, são igualmente válidas. Assim, indutores e capacitores podem ser associados em série e em paralelo, como resistores, obtendo-se as respectivas indutâncias e capacitâncias equivalentes.

Leia, na obra *Análise de circuitos elétricos*, o capítulo Elementos armazenadores de energia: capacitores e indutores, base teórica desta Unidade de Aprendizagem. Você vai estudar os elementos armazenadores de energia dos circuitos elétricos: os indutores e os capacitores.

Boa leitura.

ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Lucas Araújo da Costa

Elementos armazenadores de energia

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste texto, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Determinar as características dos capacitores.
- Definir as características dos indutores.
- Analisar a associação de capacitores e de indutores em série e em paralelo.

Introdução

Neste capítulo, você vai estudar os elementos armazenadores de energia dos circuitos elétricos: os indutores e os capacitores são essenciais em quase todas as aplicações da engenharia elétrica. O comportamento de um indutor está relacionado ao campo magnético gerado por uma corrente elétrica que o percorre. Já o comportamento de um capacitor tem relação com o campo elétrico gerado por cargas elétricas separadas por um material dielétrico.

Como uma forma de energia pode ser armazenada em campos de qualquer natureza (por exemplo, o campo gravitacional da terra que armazena a energia potencial), a energia elétrica pode ser armazenada nos campos magnético, dos indutores, e elétrico, dos capacitores. Ambos os elementos não dissipam energia, como os resistores, e tampouco a geram; apenas a armazem, podendo-se utilizá-la posteriormente para outros fins. Por essa razão, indutores e capacitores são denominados elementos passivos. Os campos magnético e elétrico presentes nesses elementos são decorrentes das interações eletromagnéticas e de suas formas de construção.

As relações de tensão e corrente desses elementos são dadas por equações diferenciais e integrais. Circuitos contendo indutores e capacitores podem ser analisados com as mesmas técnicas de análise de circuitos aplicadas aos circuitos que contêm apenas resistores. As duas

Leis de Kirchhoff, de tensões e de correntes, são igualmente válidas. Assim, indutores e capacitores podem ser associados em série e em paralelo, como resistores, obtendo-se as respectivas indutâncias e capacitâncias equivalentes.

Neste capítulo, você vai estudar as características dos capacitores e indutores e vai analisar a sua associação em série e em paralelo.

Características dos capacitores

Um capacitor, em sua forma genérica, é formado por dois materiais condutores separados, entre os quais há um material dielétrico, isto é, um material isolante, que impede o movimento livre de portadores de carga. Uma construção simples de um capacitor é dada por duas placas condutoras paralelas (por exemplo, duas folhas de alumínio), tendo-se entre elas um dielétrico qualquer (por exemplo, o ar). São diversos os materiais dielétricos utilizados na construção dos capacitores. Os autores Alexander e Sadiku (2013) citam cerâmica, papel e mica como alguns dos mais utilizados nos capacitores comerciais. Um capacitor de placas paralelas de área A , separadas por uma distância d , é apresentado na Figura 1.

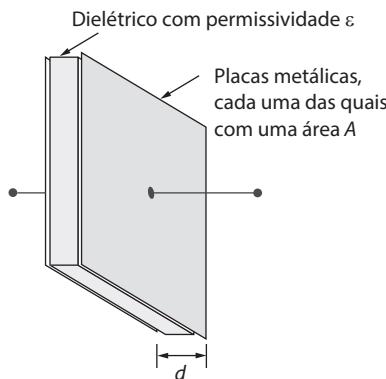


Figura 1. Capacitor comum.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 190).

Os terminais elétricos de um capacitor estão sobre seus condutores, e por eles é possível a aplicação de uma tensão elétrica, obtendo-se, entre eles, uma diferença de potencial. Com a aplicação da tensão, são acumuladas cargas elétricas de sinais opostos sobre os condutores do capacitor, que, mesmo separadas, interagem entre si, criando um campo elétrico no espaço ocupado pelo material dielétrico, como explicam Nilsson e Riedel (2008).

Uma característica importante nos dielétricos é a sua permissividade elétrica, representada por ϵ , que indica o quanto fácil é para um material se polarizar com um campo elétrico aplicado sobre ele, conforme explicam os autores Buck e Hayt (2013). A permissividade elétrica está, assim, relacionada ao quanto de carga elétrica um capacitor pode acumular sobre suas placas para um dado valor de campo elétrico, conforme conceituam Alexander e Sadiku (2013). A Figura 2 mostra um capacitor sobre o qual é aplicada uma tensão v . Você pode observar o acúmulo de cargas de sinais opostos sobre as placas condutoras. Isso pode ser interpretado como uma armazenagem de carga elétrica pelo capacitor.

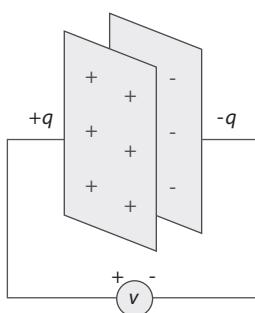


Figura 2. Capacitor com tensão aplicada em v .

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 190).

A relação entre a quantidade de carga elétrica acumulada sobre os condutores do capacitor e a tensão aplicada sobre ele é diretamente proporcional, conforme conceituam Niessel e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013). Essa relação é dada pela Equação (1).

$$q = Cv \quad (1)$$

A quantidade C da Equação (1) é denominada de **capacitância**, cuja unidade no SI (sistema internacional de unidades) é o Farad (representada por

F). A capacidade expressa o quanto de carga elétrica pode ser depositada em um capacitor pela tensão elétrica aplicada sobre ele. A capacidade, contudo, é dependente somente da construção do capacitor (ou seja, de suas dimensões físicas) e da permissividade elétrica do seu dielétrico, conforme explicam Alexander e Sadiku (2013). Assim, para um capacitor de placas paralelas de área A , separadas por uma distância d , com um dielétrico de permissividade elétrica ϵ , como o representado na Figura 1, a capacidade é dada pela Equação (2).

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \quad (2)$$



Exemplo

Um capacitor de 100 μF está ligado a uma bateria de 9 V. Calcule a carga armazenada no capacitor.

Solução: Com base na Equação 1, temos que:

$$\begin{aligned} q &= C \times v \\ q &= 100 \times 10^{-6} \times 9 \\ q &= 900 \mu\text{C} \end{aligned}$$

De um modo geral, para capacitores de qualquer forma de construção, não somente de placas paralelas, a capacidade é tanto maior quanto maior for o valor da área dos condutores (placas, por exemplo) e da permissividade elétrica do dielétrico, e é tanto menor quanto maior for o valor da distância entre os condutores. Os valores de capacidade dos capacitores disponíveis no mercado estão na ordem de μF e pF . Segundo Alexander e Sadiku (2013), a capacidade não necessariamente é um valor fixo em um capacitor: existem capacitores variáveis, para os quais o valor de capacidade pode ser ajustado.

Como o capacitor armazena carga elétrica, tendo um campo elétrico no espaço do dielétrico, o capacitor armazena energia elétrica, que pode ser utilizada posteriormente, como expõem Alexander e Sadiku (2013). A utilização da energia armazenada no capacitor descarrega-o, ou seja, as cargas elétricas depositadas sobre os condutores são deslocadas, deixando-o.

A relação entre a tensão aplicada sobre um capacitor cuja capacidade não varia com o tempo e a corrente que o percorre é dada pela Equação (3), teorizada por Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

$$i = \frac{dq}{dt} = C \frac{dv}{dt} \quad (3)$$

A Equação (3) mostra uma relação dada por uma equação diferencial: a corrente no capacitor é proporcional à taxa de variação no tempo da tensão aplicada sobre ele. Assim, obviamente, uma tensão que varia com o tempo aplicada sobre um capacitor gera uma corrente elétrica que passa por ele. Uma tensão constante em relação ao tempo gera uma corrente somente até o carregamento completo do capacitor. Após esse instante, não há mais corrente percorrendo-o, e o capacitor se torna equivalente a um **círculo aberto** entre seus terminais. Diz-se, então, que foi atingido o regime permanente, conforme explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

A corrente que percorre o dielétrico do capacitor, que é um material isolante, é dada pelas cargas que se movimentam dentro do dielétrico, sendo denominada de **corrente de deslocamento**. Em termos do campo elétrico, uma tensão que varia no tempo aplicada sobre um capacitor gera um campo elétrico que varia com o tempo entre os condutores do capacitor. O campo elétrico variável, por sua vez, é o responsável pela corrente de deslocamento no dielétrico. A corrente de deslocamento em um capacitor é, para todos os efeitos, a corrente de condução que se observará nos seus terminais, conforme explicam Nilsson e Riedel (2008).

A Equação (3) mostra, também, que a tensão aplicada sobre um capacitor não pode variar instantaneamente (uma descontinuidade no tempo entre valores da tensão), pois isso causaria uma corrente de valor infinito, o que não é possível fisicamente. Isso, porém, não é válido para a corrente que o percorre, que pode variar instantaneamente, conforme afirmam os autores Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

A relação dada na Equação (3) é linear se a capacidade for independente da tensão aplicada, como mostra a reta do gráfico $i \times \frac{dv}{dt}$ da Figura 3; o capacitor, nesse caso, é dito linear. Se a capacidade for dependente da tensão aplicada, a relação é não linear (a relação não pode ser representada por uma reta), e o capacitor é dito não linear, conforme afirmam Alexander e Sadiku (2013).

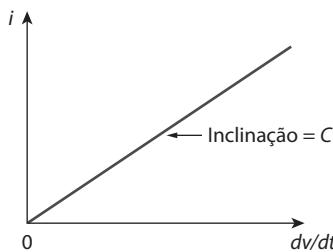


Figura 3. Relação tensão-corrente de um capacitor.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 192).

A Figura 4 mostra as representações utilizadas para os capacitores fixos (Figura 4a) e variáveis (Figura 4b) nos esquemas de circuitos, com a tensão v e a corrente i . É importante que você note que, segundo a convenção passiva de sinais, se o produto $v \cdot i$ for maior que zero (que é obtido com $v > 0$ e $i > 0$, ou $v < 0$ e $i < 0$), o capacitor está sendo carregado (está-se armazenando energia elétrica nele), e, se for menor que zero, está sendo descarregado (está-se utilizando a energia armazenada nele), conforme explicam Alexander e Sadiku (2013). Você deve sempre se recordar de que, em circuitos contendo capacitores, ambas as leis de Kirchhoff, a Lei das Tensões e a Lei das Correntes, são igualmente válidas, bem como em circuitos contendo somente resistores, como esclarecem Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

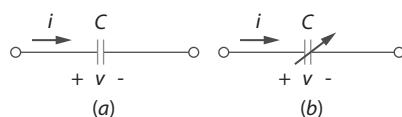


Figura 4. Símbolos para capacitores, sendo (a) capacitor fixo e (b) capacitor variável.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 191).

Você pode observar que, como a corrente que percorre o capacitor pode ser obtida pela derivada da tensão sobre ele, a tensão pode ser obtida pela integral da corrente, como afirmam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013):

$$idt = Cdv \rightarrow \int_{v(t_0)}^{v(t)} dx = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau \rightarrow v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + \frac{q(t_0)}{C}$$

Assim, se $t_0 = 0$, tem-se a Equação (4) para a tensão sobre um capacitor, onde $v(0)$ e $q(0)$ são, respectivamente, a tensão e a carga elétrica inicial no capacitor:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + v(0) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + \frac{q(0)}{C} \quad (4)$$



Exemplo

Por um capacitor de 0,5 F passa uma corrente $i_c = 6 \cdot \cos(4t)$. Sabendo que o instante inicial é $t_0 = 0$ e que o capacitor no instante $t = 0$ possui uma tensão de 3 V, determine a tensão aplicada neste capacitor.

Solução: Com base na Equação 4, temos que:

$$v_c = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(0)$$

$$v_c = \frac{1}{0,5} \int_0^t 6 \times \cos(4\tau) d\tau + 3$$

$$v_c = \frac{6}{0,5} \int_0^t \cos(4\tau) d\tau + 3$$

$$v_c = 12 \left(\frac{\sin(4\tau)}{4} \Big|_0^t \right) + 3$$

$$v_c = 12 \left(\frac{\sin(4t)}{4} - \frac{\sin(4 \cdot 0)}{4} \right) + 3$$

$$v_c = 12 \left(\frac{\sin(4t)}{4} \right) + 3$$

$$v_c = \frac{12}{4} (\sin(4t)) + 3$$

$$v_c = 3 \times \sin(4t) + 3 \text{ V}$$

A equação dada para a tensão sobre um capacitor mostra que esse elemento é dependente da corrente nos instantes anteriores a um determinado instante de análise. Ou seja, conforme Alexander e Sadiku (2013), o capacitor pode ser utilizado como uma memória da informação contida nessa grandeza. Como as relações para a tensão e a corrente em um capacitor já foram dadas, você pode obter a expressão para a potência elétrica do capacitor, p , na Equação (5), com base em Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

$$p = vi = Cv \frac{dv}{dt} = i \left[\frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau + \frac{q(0)}{C} \right] \quad (5)$$

Para obter a **energia elétrica armazenada no capacitor**, w , é realizada a integração de p no tempo, segundo a definição de energia baseada em Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013):

$$dw = p = Cv dv \rightarrow \int_{w(t_0)}^{w(t)} dx = C \int_{v(t_0)}^{v(t)} y dy \rightarrow w(t) - w(t_0) = \frac{1}{2} C [v(t) - v(t_0)]^2$$

Assim, sendo $v = 0$ e $w = 0$ em $t_0 = 0$ (ou seja, em um instante de tempo inicial), tem-se a Equação (6), na qual é omitida a dependência no tempo.

$$w = \frac{1}{2} Cv^2 = \frac{q^2}{2C} \quad (6)$$

Você pode observar que as Equações (5) e (6) são para instantes de tempo específicos. Sendo a tensão sobre o capacitor variável, a potência instantânea também o é, assim como a energia armazenada no seu campo elétrico.



Exemplo

Tomando como referência o capacitor de 0,5 F do exemplo anterior, em que foi aplicado uma tensão de $3 \cdot \text{sen}(4t) + 3$ V, determine a energia armazenada no capacitor no instante $t = 7,5$ s.

Solução: Com base na Equação (6), temos que:

$$w = \frac{1}{2} \times C \times v^2$$

$$w = \frac{1}{2} \times 0,5 \times (3 \times \text{sen}(4t) + 3)^2$$

Para $t = 7,5$ s:

$$w = \frac{1}{2} \times 0,5 \times (3 \times \text{sen}(4 \times 7,5) + 3)^2$$

$$w = \frac{1}{2} \times 0,5 \times (3 \times \text{sen}(30) + 3)^2$$

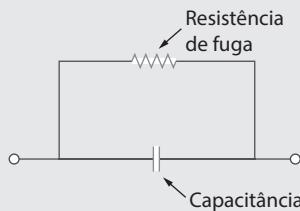
$$w = \frac{1}{2} \times 0,5 \times (3 \times 0,5 + 3)^2$$

$$w = 5,06 \text{ W}$$



Fique atento

Embora se considere, normalmente, nas análises de capacitores em circuitos, que esses elementos não dissipam energia, sendo, portanto, considerados ideais, capacitores reais o fazem. Tem-se neles, assim, uma corrente de fuga que percorre o dielétrico, mesmo quando o capacitor está carregado e a tensão sobre ele não varia. Um capacitor real pode ser representado pela figura ao lado, onde há uma resistência de fuga em paralelo com o capacitor. O valor dessa resistência, contudo, é geralmente muito elevado, sendo justificável que se despreze-a nas análises (ALEXANDER; SADIKU, 2013).



Características dos indutores

Um indutor, genericamente, é dado por qualquer condutor de corrente elétrica. Porém, o elemento normalmente designado como indutor é formado por um condutor enrolado de modo espiral, com um núcleo central, que pode ser de material sólido e magnético, como o ferro e outros metais, ou sólido e não magnético, como o plástico, ou até o próprio ar. É constituído, assim, de espiras de fio condutor, formando uma bobina, sendo, por isso, também conhecido como **bobina** ou **bobina de solenoide**, como definem Alexander e Sadiku (2013). Um indutor formado por uma bobina cilíndrica de comprimento l com N espiras e seção transversal A é apresentado na Figura 5.

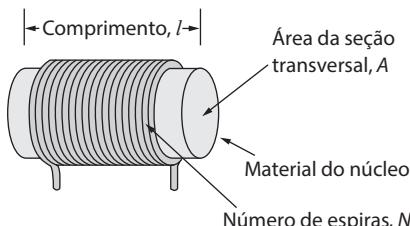


Figura 5. Forma típica de um indutor.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 199).

A **corrente elétrica** que percorre o indutor gera um campo magnético no entorno das espiras, que envolve o indutor; diz-se que o condutor está imerso em um campo magnético. O material do núcleo do indutor pode intensificar esse campo magnético, se for um material magnético, como explicam os autores Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013). Uma característica importante dos materiais utilizados para o núcleo é a sua permeabilidade magnética, representada por μ , que indica quão alta será a magnitude da intensidade de campo magnético em um material na presença de uma dada densidade de fluxo magnético sobre ele. Materiais magnéticos possuem baixo valor de μ (ou seja, eles são “permeáveis” ao fluxo magnético), enquanto materiais não magnéticos possuem altos valores de μ (ou seja, eles oferecem uma “resistência” maior ao fluxo magnético), conforme expõem Buck e Hayt (2013).

O campo magnético que envolve o indutor, quando percorrido por uma corrente, armazena energia elétrica; assim, o indutor é um elemento armazenador de energia, como o capacitor. A energia armazenada no indutor pode

ser utilizada posteriormente, deixando o indutor por meio de uma corrente elétrica, como explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

A relação entre a tensão sobre um indutor cuja indutância não varia com o tempo e a corrente que o percorre é dada pela equação diferencial expressa na Equação (7), com base em Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

$$v = L \frac{di}{dt} \quad (7)$$

A Equação (7) mostra que a tensão sobre o indutor é proporcional à taxa de variação no tempo da corrente que o percorre. Assim, uma corrente que varia com o tempo em um indutor gera uma tensão elétrica sobre seus terminais. Para uma corrente constante em relação ao tempo, há uma tensão diferente de zero sobre o indutor somente até o seu carregamento completo. Após esse instante, o indutor se torna equivalente a um curto-círcuito entre seus terminais — como para o capacitor, diz-se que foi atingido o regime permanente, como explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

A Equação (7) mostra, também, que a corrente que percorre um indutor não pode variar instantaneamente (uma descontinuidade no tempo entre valores finitos de corrente), pois isso exige uma tensão de valor infinito, o que não é possível fisicamente. Isso quer dizer, por exemplo, que se um interruptor pelo qual um indutor está sendo alimentado for aberto (o que interromperia o fluxo de corrente que passa por ele), haverá uma continuidade do fluxo de corrente por meio de um centelhamento no espaço da abertura do interruptor. A tensão sobre o indutor, porém, pode variar instantaneamente, sem problemas, segundo Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

A relação dada na Equação (7) é linear se a indutância for independente da corrente, como mostra a reta do gráfico $v \times \frac{di}{dt}$ da Figura 6; o indutor, nesse caso, é dito linear. Se a indutância for dependente da corrente, a relação é não linear (a relação não pode ser representada por uma reta), e o indutor é dito não linear, conforme explicam Alexander e Sadiku (2013).

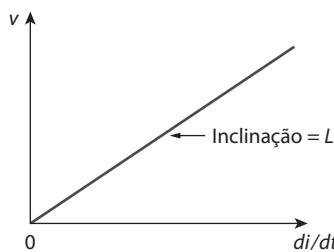


Figura 6. Relação tensão-corrente de um indutor.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 200).

A quantidade L da Equação (7) é denominada de indutância, cuja unidade no SI é o Henry (representada por H). A indutância expressa a oposição que o indutor faz à mudança da corrente elétrica que o percorre. A indutância de um indutor, semelhantemente à capacitância, no capacitor, é dependente somente da construção do indutor e da permeabilidade magnética do material do núcleo, conforme explicam Alexander e Sadiku (2013). Assim, para o indutor formado por uma bobina cilíndrica de comprimento l com N espiras e seção transversal A , como o representado na Figura 6, a indutância é dada pela Equação (8).

$$L = \frac{N^2 \mu A}{\ell} \quad (8)$$

De um modo geral, para indutores de qualquer forma de construção, a indutância é tanto maior quanto maior for o número de espiras da bobina, o valor da área de sua seção transversal e o valor da permeabilidade magnética do material do núcleo, e é tanto menor quanto maior for o valor do comprimento da bobina. Os valores de indutância dos indutores disponíveis no mercado estão na ordem de μH até algumas dezenas de H. A indutância, assim como a capacitância, não necessariamente é um valor fixo em um indutor: há indutores variáveis, nos quais se pode ajustar o valor de indutância, conforme afirmam Alexander e Sadiku (2013).

A Figura 7 mostra as representações utilizadas nos esquemas de circuitos para os indutores fixos de núcleo preenchido com ar (Figura 7a), fixos de núcleo de ferro (Figura 7b) e variáveis de núcleo de ferro (Figura 7c), com a tensão v e a corrente i . Segundo a convenção passiva de sinais, como para o capacitor, você pode notar que, se o produto $v \cdot i$ em um indutor for maior que zero (que é obtido com $v > 0$ e $i > 0$, ou $v < 0$ e $i < 0$), o indutor está sendo carregado (está-se armazenando energia elétrica nele), e se for menor que zero, está

sendo descarregado (está-se utilizando a energia armazenada nele), conforme explicam os autores Alexander e Sadiku (2013). Do mesmo modo que para os capacitores, em circuitos contendo indutores, ambas as Leis de Kirchhoff, a Lei das Tensões e a Lei das Correntes, são válidas, segundo Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

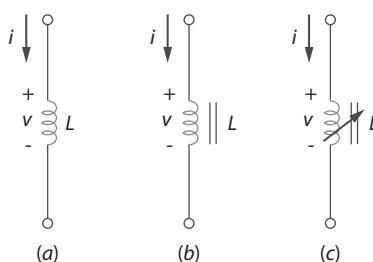


Figura 7. Símbolos para indutores: (a) núcleo preenchido com ar; (b) núcleo de ferro; (c) núcleo de ferro variável.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 200).



Fique atento

Embora também se considere nas análises de indutores em circuitos, como para capacitores, que esses elementos não dissipam energia, sendo considerados ideais, indutores reais o fazem, devido à resistência do condutor de que são formados. Como o indutor é percorrido por uma corrente, essa corrente dissipava energia na resistência do condutor. Essa resistência é denominada de **resistência de enrolamento**. Além da resistência de enrolamento, há uma capacidade entre as bobinas do indutor, denominada **capacitância de enrolamento**. Um indutor real pode ser representado pela figura ao lado, onde há a resistência e a capacidade de enrolamento em série e em paralelo com o indutor, respectivamente. Os valores, tanto da resistência quanto da capacidade de enrolamento, contudo, são geralmente muito baixos, sendo justificável que ambos não sejam considerados nas análises (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Você pode observar que, como a tensão sobre o indutor pode ser obtida pela derivada da corrente que o percorre, a corrente pode ser obtida pela integral da tensão, conforme Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013):

$$vdt = Ldi \quad \rightarrow \quad L \int_{i(t_0)}^{i(t)} dx = \int_{t_0}^t v(\tau)d\tau \quad \rightarrow \quad i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau)d\tau + i(t_0)$$

Assim, se $t_0 = 0$, tem-se a Equação (9) para a corrente que passa por um indutor, onde $i(0)$ é a corrente que o percorre inicialmente:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_0^t v(\tau)d\tau + i(0) \quad (9)$$

Você pode observar, na equação dada para a corrente em um indutor, que esse elemento é dependente da tensão nos instantes anteriores a um determinado instante de análise. Ou seja, o indutor, assim como o capacitor, pode ser utilizado como uma memória da informação contida em uma grandeza elétrica, como expõem Alexander e Sadiku (2013).



Exemplo

Sabe-se que o indutor é um elemento armazenador de energia no seu campo magnético. Suponha um indutor de 0,5 H sobre o qual é aplicada uma tensão de $12 \cdot \text{sen}(3t)$ V. Sabendo que no tempo inicial $t_0 = 0$ a corrente no indutor é de 0,01 A, determine a expressão que modela a corrente através deste elemento.

Solução: Com base na Equação (9), temos que:

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau)d\tau + i(0) \\ i(t) &= \frac{1}{0,5} \int_0^t 12 \cdot \text{sen}(3\tau)d\tau + 0,01 \\ i(t) &= \frac{12}{0,5} \int_0^t \text{sen}(3\tau)d\tau + 0,01 \\ i(t) &= 6 \cdot \left(\frac{-1}{3} \cos(3\tau) \Big|_0^t \right) + 0,01 \\ i(t) &= 6 \cdot \left(\frac{-1}{3} \cos(3t) + \frac{1}{3} \cos(3 \cdot 0) \right) + 0,01 \\ i(t) &= \frac{-6}{3} \cos(3t) + \frac{6}{3} + 0,01 \text{ A} \end{aligned}$$

Você pode obter a expressão para a **potência elétrica do indutor**, p , com as relações para a tensão e a corrente, como dadas na Equação (10), com base em Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013):

$$p = vi = Li \frac{di}{dt} = v \left[\frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i(t_0) \right] \quad (10)$$

Você pode obter, também, a energia elétrica armazenada no indutor, w , realizando a integração de p no tempo, ainda conforme os autores:

$$dw = p = Lidi \quad \rightarrow \quad \int_{w(t_0)}^{w(t)} dx = L \int_{i(t_0)}^{i(t)} y dy \quad \rightarrow \quad w(t) - w(t_0) = \frac{1}{2} L [i(t) - i(t_0)]^2$$

Assim, sendo $i = 0$ e $w = 0$ em $t_0 = 0$ (ou seja, em um instante de tempo inicial), tem-se a Equação (11), na qual, como na Equação (6), é omitida a dependência no tempo:

$$w = \frac{1}{2} Li^2 \quad (11)$$

Você pode observar que as Equações (10) e (11), como as Equações (5) e (6) do capacitor, são para instantes de tempo específicos. Sendo a corrente sobre o indutor variável, a potência instantânea também o é, assim como a energia armazenada no seu campo elétrico.



Fique atento

Se no instante correspondente a $t_0 = 0$ as grandezas elétricas não forem nulas, você pode referenciar as integrais das Equações (9) a (11) a um $t_0 = -\infty$, ou seja, a um instante de tempo muito distante do instante de observação considerado. Isso vale também para as equações do capacitor, as Equações (4) a (6). O valor inicial das grandezas é chamado normalmente de condição inicial. Se há energia armazenada em um capacitor ou indutor antes do instante de análise, então as condições iniciais nesses elementos não são nulas, como explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

As condições iniciais podem ser representadas no circuito como fontes, para um melhor entendimento: uma tensão inicial em um capacitor é representada como uma fonte de tensão CC em série com ele, e uma corrente inicial em um indutor é representada como uma fonte de corrente em paralelo com ele. Porém essa representação

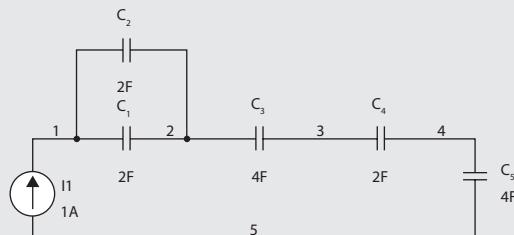
não é obrigatória, desde que as condições iniciais sejam observadas nos cálculos, como afirma Bretas ([2018]).

Você também deve notar a excitação da(s) fonte(s) do circuito em análise; se esta for em CC, não há variação de tensões e correntes no circuito em regime permanente, e, assim, capacitores e indutores não vão influenciar o circuito, como explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).



Exemplo

Dado o circuito a seguir, determine a capacidade equivalente vista pela fonte.



Solução:

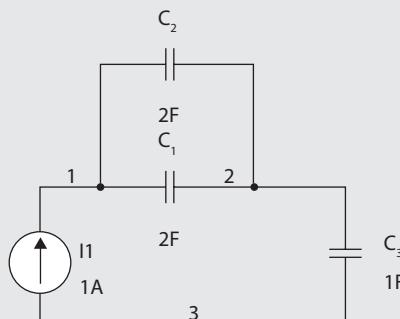
Primeiro vamos achar um capacitor equivalente aos capacitores em série (C_3 , C_4 e C_5). De acordo com a Equação (14), temos que:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = 1$$

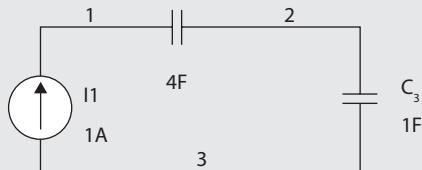
$$C_{eq} = 1$$



Agora precisamos resolver os dois capacitores em paralelo (C_1 e C_2). De acordo com a Equação (13) temos que:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 2 + 2 = 4$$

$$C_1$$



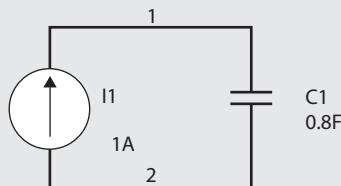
Para finalizar, temos a série de C_1 e C_3 :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{5}{4}$$

$$C_{eq} = \frac{4}{5} F$$



Associação de capacitores e associação de indutores em série e em paralelo

Capacitores e indutores, em circuitos elétricos, assim como resistores, podem ser associados em série e em paralelo, obtendo-se um capacitor e um indutor equivalentes, respectivamente, reduzindo-se o circuito. Segundo Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013), esse método pode facilitar muito a análise dos circuitos nos quais verifica-se o emprego dessas combinações. Porém, as associações somente são possíveis quando os elementos são lineares.

Associação de capacitores em série e em paralelo

Considerando-se N capacitores em paralelo, como mostra a Figura 8a, a capacidade do respectivo capacitor equivalente da associação, C_{eq} , como mostra a Figura 8b, pode ser obtida por meio da Lei de Kirchhoff das Correntes, somando-se as correntes que percorrem todos os capacitores e observando-se que sobre os terminais de todos eles está a tensão v , conforme lecionam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

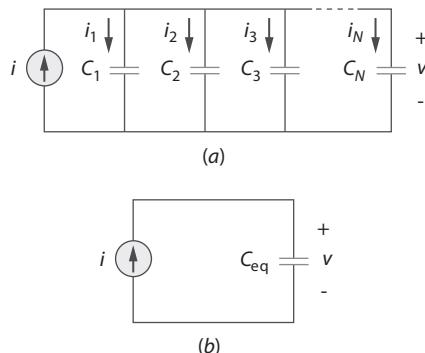


Figura 8. (a) Conexão em paralelo de N capacitores; (b) circuito equivalente para os capacitores em paralelo.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 196).

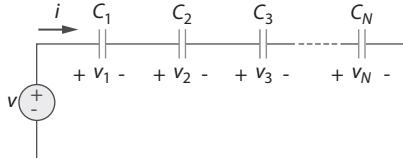
Assim, obtém-se a Equação (12), utilizando-se a relação $i = C \frac{dv}{dt}$ dada na Equação (3).

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N = C_1 \frac{dv}{dt} + C_2 \frac{dv}{dt} + C_3 \frac{dv}{dt} + \dots + C_N \frac{dv}{dt} \\ &= (C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N) \frac{dv}{dt} = \left(\sum_{k=1}^N C_k \right) \frac{dv}{dt} = C_{eq} \frac{dv}{dt} \end{aligned} \quad (12)$$

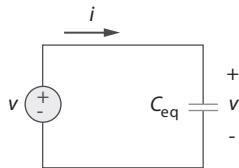
Portanto, para N capacitores em paralelo, C_{eq} é a soma das capacidades de todos os N capacitores, como é feito na associação em série de resistores, conforme explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_N = \sum_{k=1}^N C_k \quad (13)$$

Considerando-se N capacitores em série, como mostra a Figura 9a, a capacidade do respectivo capacitor equivalente da associação, C_{eq} , como dado na Figura 9b, pode ser obtida por meio da Lei de Kirchhoff das Tensões, somando-se as quedas de tensões ao longo da malha e observando-se que a corrente i percorre todos os capacitores, como explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).



(a)



(b)

Figura 9. (a) Conexão em série de N capacitores; (b) circuito equivalente para os capacitores em série.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 197).

Assim, obtém-se a Equação (14), conhecendo-se a relação $v = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0)$, utilizada na Equação (4).

$$\begin{aligned}
 v &= v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_N \\
 &= \frac{1}{C_1} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_2(t_0) + \frac{1}{C_3} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_3(t_0) + \dots \\
 &\quad + \frac{1}{C_N} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_N(t_0) \\
 &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N} \right) \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v_1(t_0) + v_2(t_0) + v_3(t_0) + \dots \\
 &\quad + v_N(t_0) = \frac{1}{C_{eq}} \int_{t_0}^t i(\tau) d\tau + v(t_0)
 \end{aligned} \tag{14}$$

Portanto, para N capacitores em série, tem-se $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N}$.

Assim, C_{eq} é dado na Equação (14), ou seja, é o inverso da soma dos inversos das capacidades individuais de todos os N capacitores, como feito na asso-

ciação em paralelo de resistores, conforme lecionam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots + \frac{1}{C_N}}$$

Já a tensão $v(t_0)$ é dada pela Equação (15), sendo a soma das tensões em todos os N capacitores em série.

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + v_3(t_0) + \dots + v_N(t_0) \quad (15)$$

Uma observação importante a se fazer é que capacitores em série apresentam a mesma quantidade de carga elétrica, $\frac{q_{eq}}{C_{eq}} = \frac{q_{eq}}{C_1} + \frac{q_{eq}}{C_2} + \frac{q_{eq}}{C_3} + \dots + \frac{q_{eq}}{C_N}$

$v_1(t) + v_2(t) + v_3(t) + \dots + v_N(t) = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} + \dots + \frac{q_N}{C_N}$, o que mostra

que $q_1 = q_2 = q_3 = \dots = q_N = q_{eq}$.

Associação de indutores em série e em paralelo

Considerando-se N indutores em série, como mostra a Figura 10a, a indutância do respectivo indutor equivalente da associação, L_{eq} , como mostra a Figura 10b, pode ser obtida por meio da Lei de Kirchhoff das Tensões, somando-se as quedas de tensões ao longo da malha e observando-se que a corrente i percorre todos os indutores, conforme lecionam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

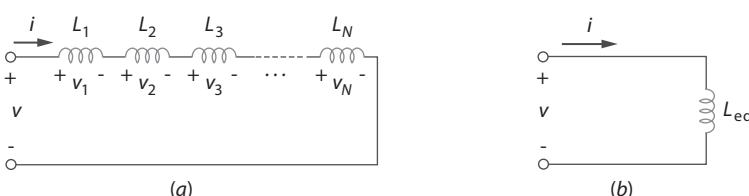


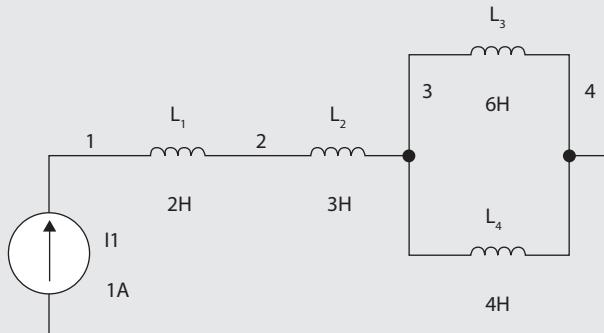
Figura 10. (a) Conexão em série de N indutores; (b) circuito equivalente para os indutores em série.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 203).



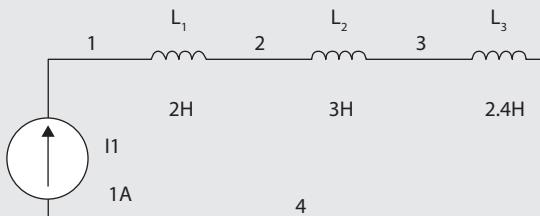
Exemplo

Determinar o indutor equivalente para o circuito a seguir.



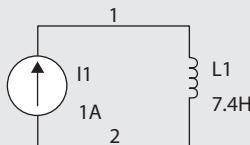
Solução: Vamos começar com o paralelo entre L_3 e L_4 . De acordo com a Equação (18), temos que:

$$\begin{aligned}\frac{1}{L_{eq}} &= \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4} \\ \frac{1}{L_{eq}} &= \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \\ L_{eq} &= 2,4 \text{ H}\end{aligned}$$



Agora basta realizar a série de L_1 , L_2 e L_3 conforme a Equação (16):

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 = 2 + 3 + 2,4 = 7,4 \text{ H}$$



Assim, obtém-se a Equação (16), conhecendo-se a relação $v = L \frac{di}{dt}$ dada na Equação (7).

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + L_3 \frac{di}{dt} + \cdots + L_N \frac{di}{dt} = \\ (L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_N) \frac{di}{dt} = \left(\sum_{k=1}^N L_k \right) \frac{di}{dt} = L_{eq} \frac{di}{dt} \quad (16)$$

Você pode notar, portanto, que, para N indutores em série, L_{eq} é dado na Equação (17), ou seja, é a soma das indutâncias de todos os N indutores, como feito na associação em série de resistores, conforme explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_N = \sum_{k=1}^N L_k \quad (17)$$

Considerando-se N indutores em paralelo, como mostra a Figura 11a, a indutância do respectivo indutor equivalente da associação, L_{eq} , como mostra a Figura 11b, pode ser obtida por meio da Lei de Kirchhoff das Correntes, somando-se as correntes que percorrem todos os indutores e observando-se que, sobre os terminais de todos eles, está a tensão v , como explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

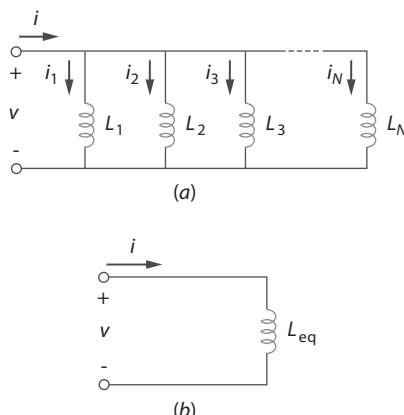


Figura 11. (a) Ligação em paralelo de N indutores; (b) circuito equivalente para os indutores em paralelo.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 203).

Assim, obtém-se a Equação (18), conhecendo-se a relação $i = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i(t_0)$, utilizada para se obter a Equação (9).

$$\begin{aligned}
 i &= i_1 + i_2 + i_3 + \dots + i_N \\
 &= \frac{1}{L_1} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i_1(t_0) + \frac{1}{L_2} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i_2(t_0) + \frac{1}{L_3} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau \\
 &\quad + i_3(t_0) + \dots + \frac{1}{L_N} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i_N(t_0) \\
 &= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N} \right) \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i_1(t_0) + i_2(t_0) \\
 &\quad + i_3(t_0) + \dots + i_N(t_0) = \frac{1}{L_{eq}} \int_{t_0}^t v(\tau) d\tau + i(t_0)
 \end{aligned} \tag{18}$$

Você pode notar, portanto, que, para N indutores em paralelo, tem-se $\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N}$ e, assim, L_{eq} é dado na Equação (19), ou seja, é o inverso da soma dos inversos das indutâncias individuais de todos os N indutores, como feito na associação em paralelo de resistores, conforme explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

$$L_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N}} \tag{19}$$

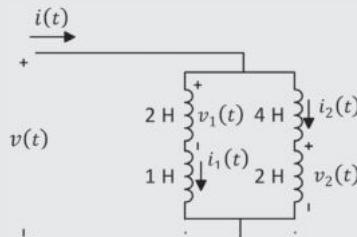
A corrente $i(t_0)$ é dada pela Equação (20), sendo a soma das correntes que percorrem todos os N indutores em paralelo

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0) + \dots + i_N(t_0) \tag{20}$$



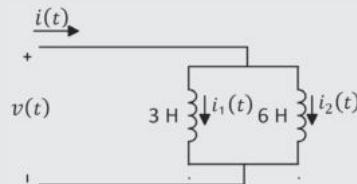
Exemplo

Determine as correntes $i(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$, as tensões $v_1(t)$ e $v_2(t)$ e a indutância equivalente total do circuito da figura abaixo, sabendo que $v(t) = -40e^{-10t}$ V e que as correntes iniciais são nulas, e sendo $t_0 = 0$ s.



Resolução:

A resolução solicitada pode ser simplificada se esse circuito for reduzido. Há duas associações em série de indutores e uma associação em paralelo das respectivas associações em série. Tem-se que as indutâncias dos indutores equivalentes dos indutores em série são dadas por $L_{eq1} = 2 + 1 = 3$ H e $L_{eq2} = 4 + 2 = 6$ H, sendo o circuito equivalente dado abaixo.



Assim, tem-se que

$$i_1(t) = \frac{1}{3} \cdot \int_{t_0}^t (-40)e^{-10\tau} d\tau = \frac{1}{3} \cdot (4 \cdot e^{-10t}) = \frac{4}{3}e^{-10t} \text{ A,}$$

$$i_1(t) = \frac{1}{6} \cdot \int_{t_0}^t (-40)e^{-10\tau} d\tau = \frac{1}{6} \cdot (4 \cdot e^{-10t}) = \frac{4}{6}e^{-10t} \text{ e}$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{12}{6}e^{-10t} = 2e^{-10t} \text{ A.}$$

Portanto, segundo o circuito original, tem-se que

$$v_1(t) = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{d(e^{-10t})}{dt} = -\frac{8}{3} \cdot 10e^{-10t} = -\frac{80}{3}e^{-10t} \text{ V e}$$

$$v_2(t) = 2 \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{d(e^{-10t})}{dt} = -\frac{8}{6} \cdot 10e^{-10t} = -\frac{80}{6}e^{-10t} \text{ V.}$$

Tem-se que a indutância do indutor equivalente de todos os indutores é dada por:

$$L_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{(2+1)} + \frac{1}{(4+2)}} = \frac{3 \cdot 6}{3+6} = 2 \text{ H}$$



Referências

ALEXANDER, C. K.; SADIQU, M. N. O. *Fundamentos de circuitos elétricos*. 5. ed. Porto Alegre: McGraw Hill, 2013.

BRETAS, A. S. *Aulas 3 e 4*. [2018]. Disponível em: <<http://www.ece.ufrgs.br/~abretas/eng04031/index.html>>. Acesso em: 14 jul. 2018.

BUCK, J. A.; HAYT, W. H. *Eletromagnetismo*. 8. ed. Porto Alegre: McGraw Hill, 2013.

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. *Circuitos elétricos*. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2008.

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.

Conteúdo:





DICA DO PROFESSOR

Nas análises de circuitos com capacitores ou indutores que possuem energia armazenada inicialmente, podem-se representar ambos os componentes pelo equivalente de uma associação com fontes CC. Isso pode facilitar a análise.

É interessante se notar, também, que capacitores ou indutores podem realizar no circuito uma divisão de tensão ou de corrente, bem como resistores.

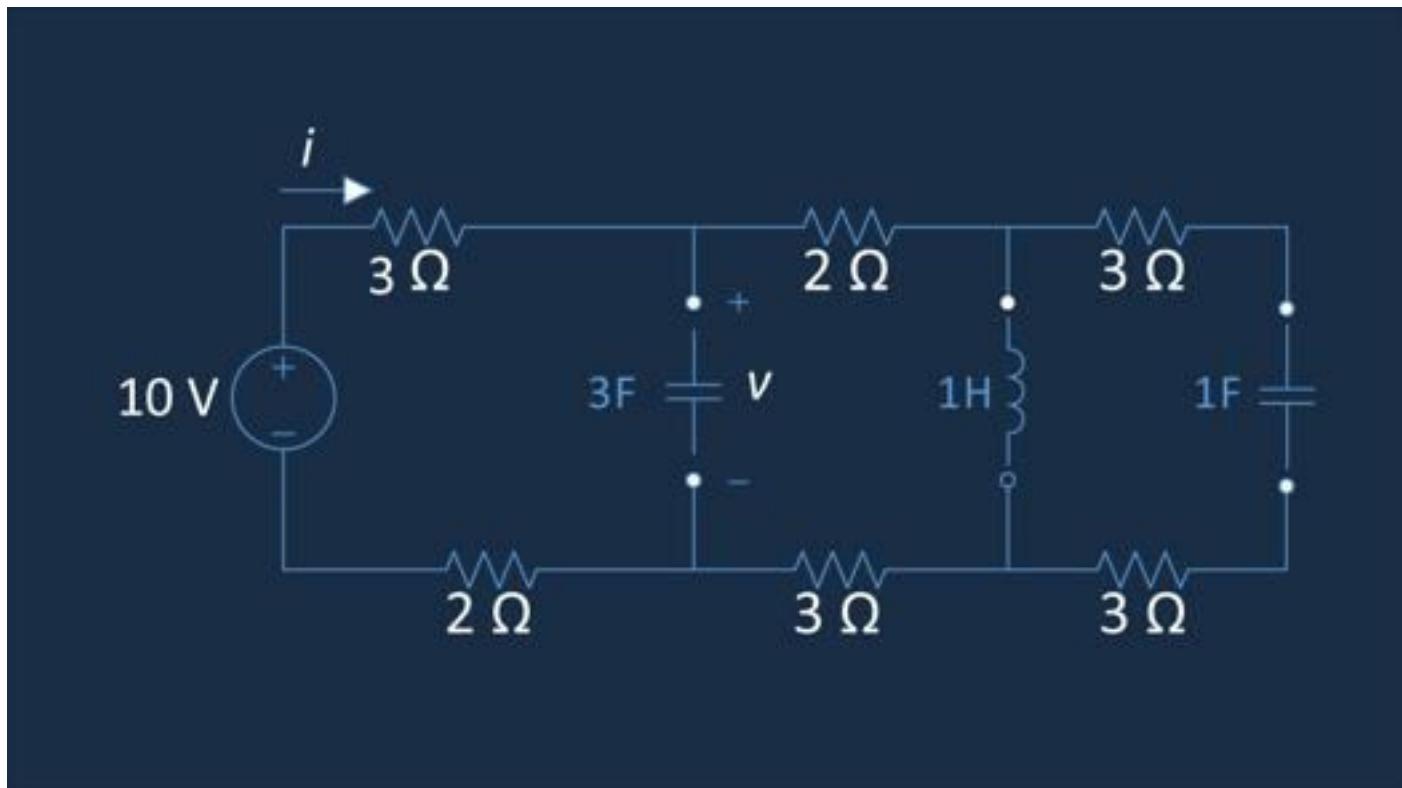
Para saber mais a respeito, assista ao vídeo a seguir, que apresenta dois tópicos relacionados aos elementos armazenadores de energia, visando à ampliação do conteúdo abordado.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!



EXERCÍCIOS

- 1) Quais são os valores da corrente i , da tensão v e das energias armazenadas no indutor (W_L) e no capacitor de 3F (W_C) do circuito da figura a seguir, dado que as condições iniciais em todos os indutores e capacitores são nulas?



A) $i = 1 \text{ A}$, $v = 5 \text{ V}$, $W_L = 0,5 \text{ J}$, $W_C = 37,5 \text{ J}$.

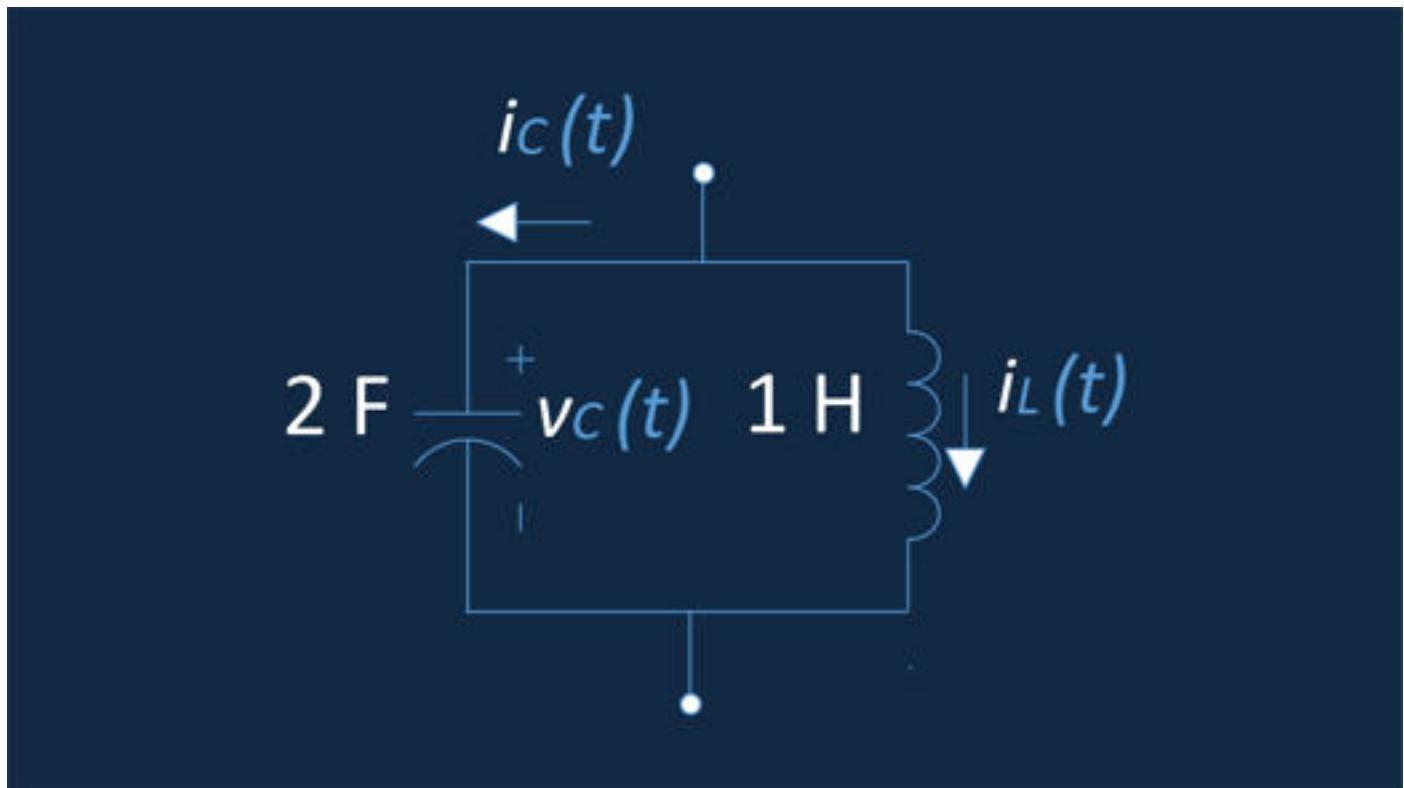
B) $i = 2 \text{ A}$, $v = 10 \text{ V}$, $W_L = 1,5 \text{ J}$, $W_C = 2,5 \text{ J}$.

C) $i = -1 \text{ A}$, $v = 5 \text{ V}$, $W_L = -0,5 \text{ J}$, $W_C = 2,5 \text{ J}$.

D) $i = 1 \text{ A}$, $v = -10 \text{ V}$, $W_L = 1,5 \text{ J}$, $W_C = 2,5 \text{ J}$.

E) $i = -1 \text{ A}$, $v = -5 \text{ V}$, $W_L = 0,5 \text{ J}$, $W_C = 37,5 \text{ J}$.

2) Quais são as expressões da corrente $i_L(t)$, da tensão $v_C(t)$ e da energia armazenada no indutor $w_L(t)$, no circuito da figura a seguir, dado que $i_C(t) = 2e^{-t} \cos 5t$ e a condição inicial do capacitor é dada por $v_C(0) = 2$, com $t_0 = 0$?



A) $v_C(t) =$
 $e(-t)/5 [5 \operatorname{sen}(5t) - \cos(5t)] \text{ V}$, $i_L(t) =$
 $e(-t) \operatorname{sen}(5t) \text{ A}$, $w_L(t) =$
 $e(-2t)[1 + \operatorname{sen}(10t)] \text{ J}$.

B) $vC(t) = 2 + 1/26 + e(-t)/26 [5 \sin(5t) - \cos(5t)] V, iL(t) = e(-t) \cos(5t) A, wL(t) = 1/4e(-2t)[1 + \cos(10t)] J.$

C)

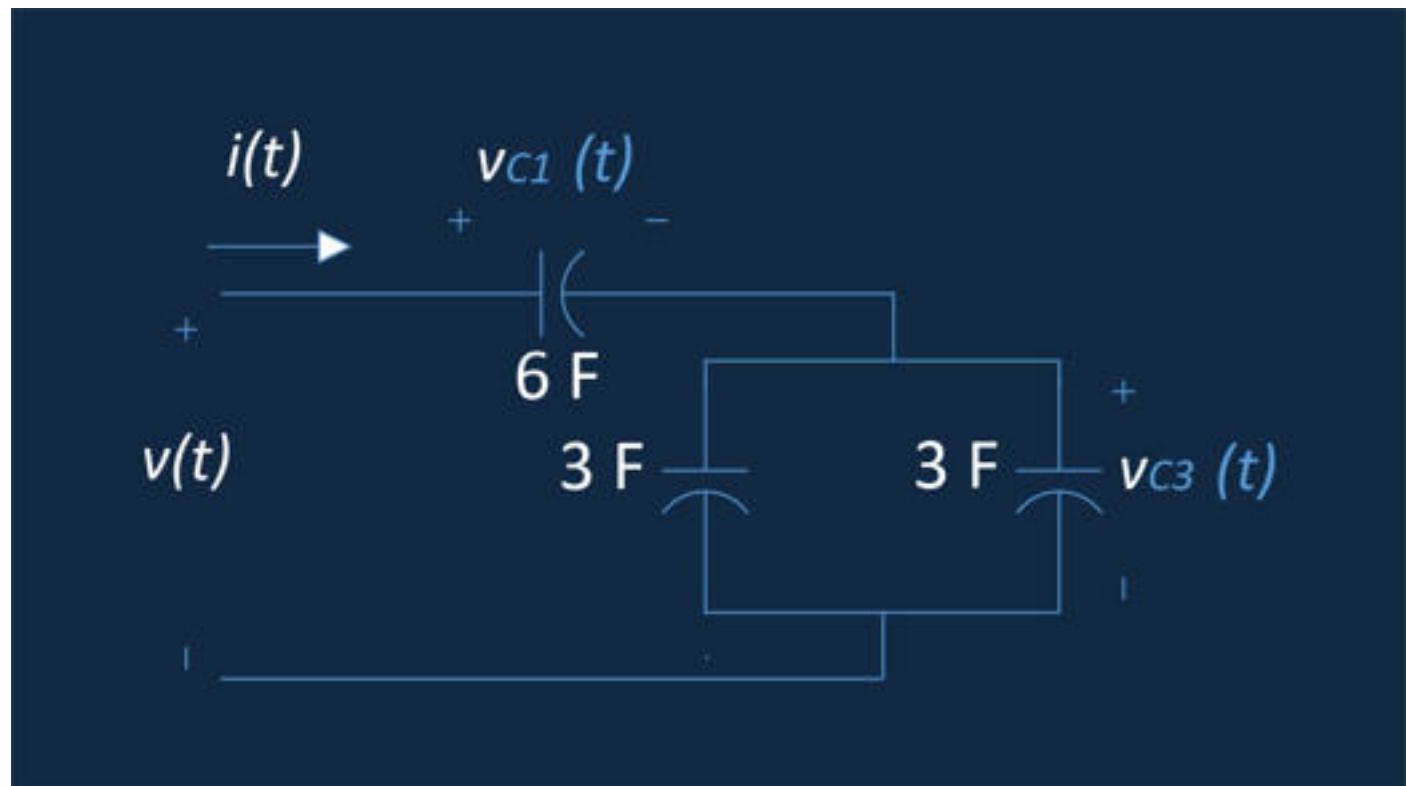
$v_C(t) = 6 + 1/26 + e^{(-t)}/26 [6 \sin(6t) + \cos(6t)] V, i_L(t) = -e^{(-t)} \cos(6t) A, w_L(t) = 1/4e(-2t)[1 + \cos(10t)] J.$

D)

$v_C(t) = 4 + 1/26 + e^{(-t)}/26 [4 \sin(4t) + \cos(4t)] V, i_L(t) = -e^{(-t)} \cos(4t) A, w_L(t) = 1/4e(-2t)[1 + \cos(10t)] J.$

E) $vC(t) = -e(-t)/5 [5 \sin(5t) - \cos(5t)] V, iL(t) = -e(-t) \sin(5t) A, wL(t) = 1/4e(-2t)[1 + \sin(10t)] J.$

3) Quais são as expressões da corrente $i(t)$ das tensões $v_{C1}(t)$ e $v_{C3}(t)$, no circuito da figura a seguir, dado que $v(t)=4e^{-2t} \sin 2t + e^{-t} \cos t$ e as condições iniciais dos capacitores são nulas, com $t_0=0$?



A)

$$i(t) = \frac{1}{60} (2e^{(-2t)} \sin 4t + e^{(-2t)} \cos 4t - 2e^{(-4t)} \cos 2t - 4e^{(-4t)} \sin 2t) - \frac{123}{60} A,$$
$$iL_2(t) = \frac{1}{60} (2e^{(-2t)} \sin 4t + e^{(-2t)} \cos 4t - 2e^{(-4t)} \cos 2t - 4e^{(-4t)} \sin 2t) - \frac{63}{60} A,$$
$$iL_3(t) = \frac{1}{60} (2e^{(-2t)} \sin 4t + e^{(-2t)} \cos 4t - 2e^{(-4t)} \cos 2t - 4e^{(-4t)} \sin 2t) - \frac{63}{60} A.$$

B)

$$i(t) = \frac{10}{3}t - \frac{601}{6}e^{(-5t)} \cos 5t + \frac{599}{6}e^{(-5t)} \sin 5t + \frac{11}{6} A,$$
$$iL(t) = \frac{10}{3}t + \frac{1}{6}e^{(-5t)} (\cos 5t + \sin 5t) + \frac{11}{6} A,$$
$$vC_1(t) = \frac{26}{3} + \frac{20}{3}e^{(-5t)} \cos 5t V,$$
$$vC_2(t) = \frac{34}{3} + \frac{10}{3}e^{(-5t)} \cos 5t V,$$
$$vL_2(t) = \frac{50}{3} + \frac{25}{3}e^{(-5t)} \cos 5t V.$$

C)

$$i(t) = 8e^{(-2t)} \cos 2t - 8e^{(-2t)} \sin 2t - e^{(-t)} \cos t - e^{(-t)} \sin t A,$$
$$vC_1(t) = \frac{1}{6} (4e^{(-2t)} \sin 2t + e^{(-t)} \cos t - 7) V,$$
$$vC_3(t) = \frac{5}{6} (4e^{(-2t)} \sin 2t + e^{(-t)} \cos t) + \frac{7}{6} V.$$

D)

$$i(t) = 8e^{(-2t)} \cos 2t + 8e^{(-2t)} \sin 2t + e^{(-t)} \cos t - e^{(-t)} \sin t A,$$

$$vC_1(t) = 1/6(4e^{(-2t)} \sin 2t - e^{(-t)} \cos t + 7)V,$$

$$vC_3(t) = 5/6(4e^{(-2t)} \sin 2t + e^{(-t)} \cos t) - 7/6V.$$

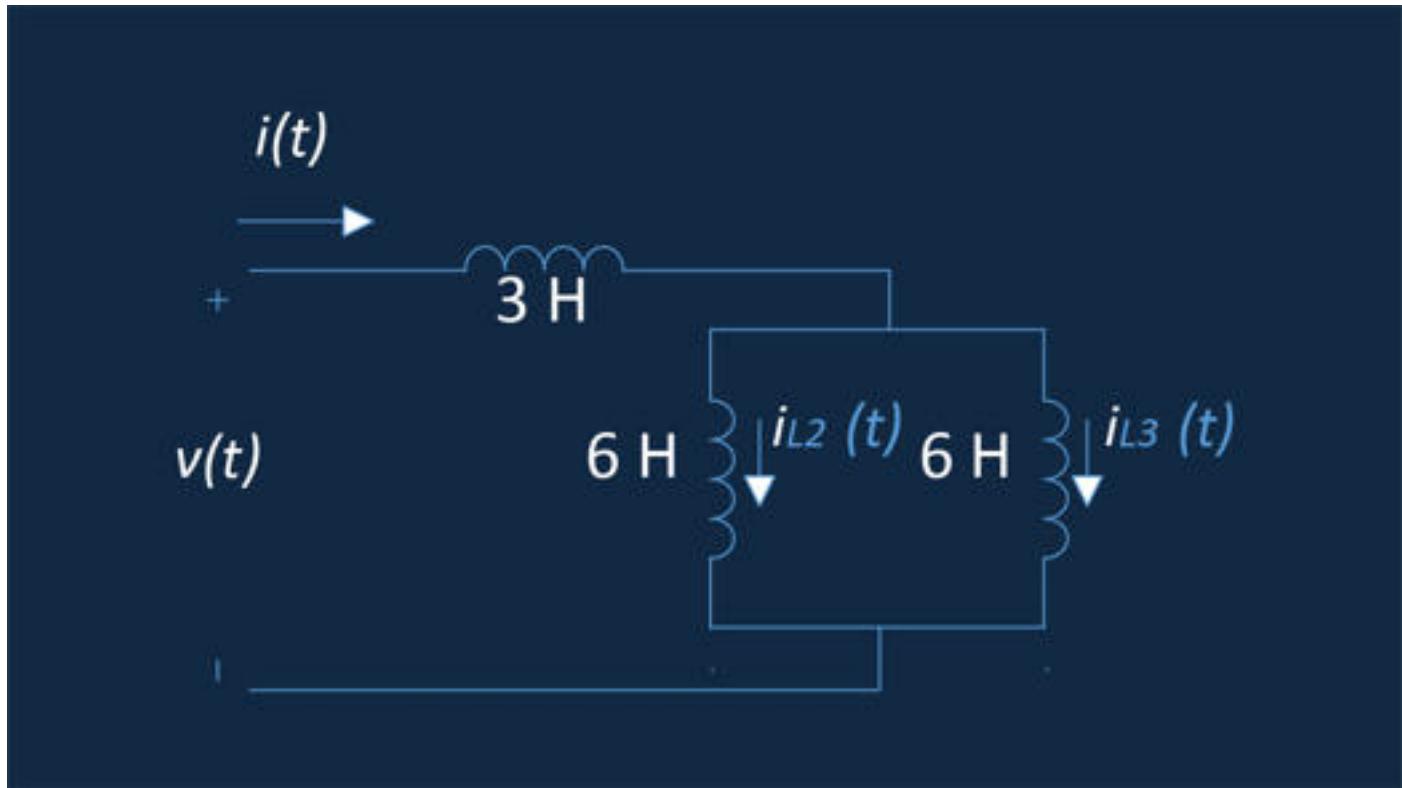
E)

$$i(t) = 4e^{(-2t)} \cos 2t - e^{(-t)} \sin t A,$$

$$vC_1(t) = 1/6(4e^{(-2t)} \sin 2t + e^{(-t)} \cos t) V,$$

$$vC_3(t) = 5/6(4e^{(-2t)} \sin 2t + e^{(-t)} \cos t) V.$$

- 4) Quais são as expressões das correntes $i(t)$, $i_{L2}(t)$ e $i_{L3}(t)$, no circuito da figura a seguir, dado que $v(t) = 2e^{-4t} \sin 2t + e^{-2t} \cos 4t$ e as condições iniciais dos indutores são $i(0) = 2 A$, $i_{L2}(0) = 1A$ e $i_{L3}(0) = 1 A$, com $t_0 = 0$?



A)

$$\begin{aligned}
 i(t) &= 10/3t - 601/6e^{(-5t)}\cos 5t + 599/6e^{(-5t)}\sin 5t + 11/6 \text{ A}, \\
 iL(t) &= 10/3t + 1/6e^{(-5t)}(\cos 5t + \sin 5t) + 11/6 \text{ A}, \\
 vC1(t) &= 26/3 + 20/3e^{(-5t)}\cos 5t \text{ V}, \\
 vC2(t) &= 34/3 + 10/3e^{(-5t)}\cos 5t \text{ V}, \\
 vL2(t) &= 50/3 + 25/3e^{(-5t)}\cos 5t \text{ V}.
 \end{aligned}$$

B)

$$\begin{aligned}
 i(t) &= 1/60(2e^{(-2t)}\sin 4t - e^{(-2t)}\cos 4t) \text{ A}, \\
 iL2(t) &= 1/60(2e^{(-2t)}\sin 4t - e^{(-2t)}) \text{ A}, \\
 iL3(t) &= 1/60(2e^{(-2t)}\sin 4t - e^{(-2t)}\cos 4t) \text{ A}.
 \end{aligned}$$

C)

$$\begin{aligned} i(t) &= 1/60 (2e^{(-2t)} \sin 4t - e^{(-2t)} \cos 4t) A, \\ iL_2(t) &= 1/60 (2e^{(-2t)} \sin 4t - e^{(-2t)}) A, \\ iL_3(t) &= 1/60 (2e^{(-2t)} \sin 4t - e^{(-2t)} \cos 4t) A. \end{aligned}$$

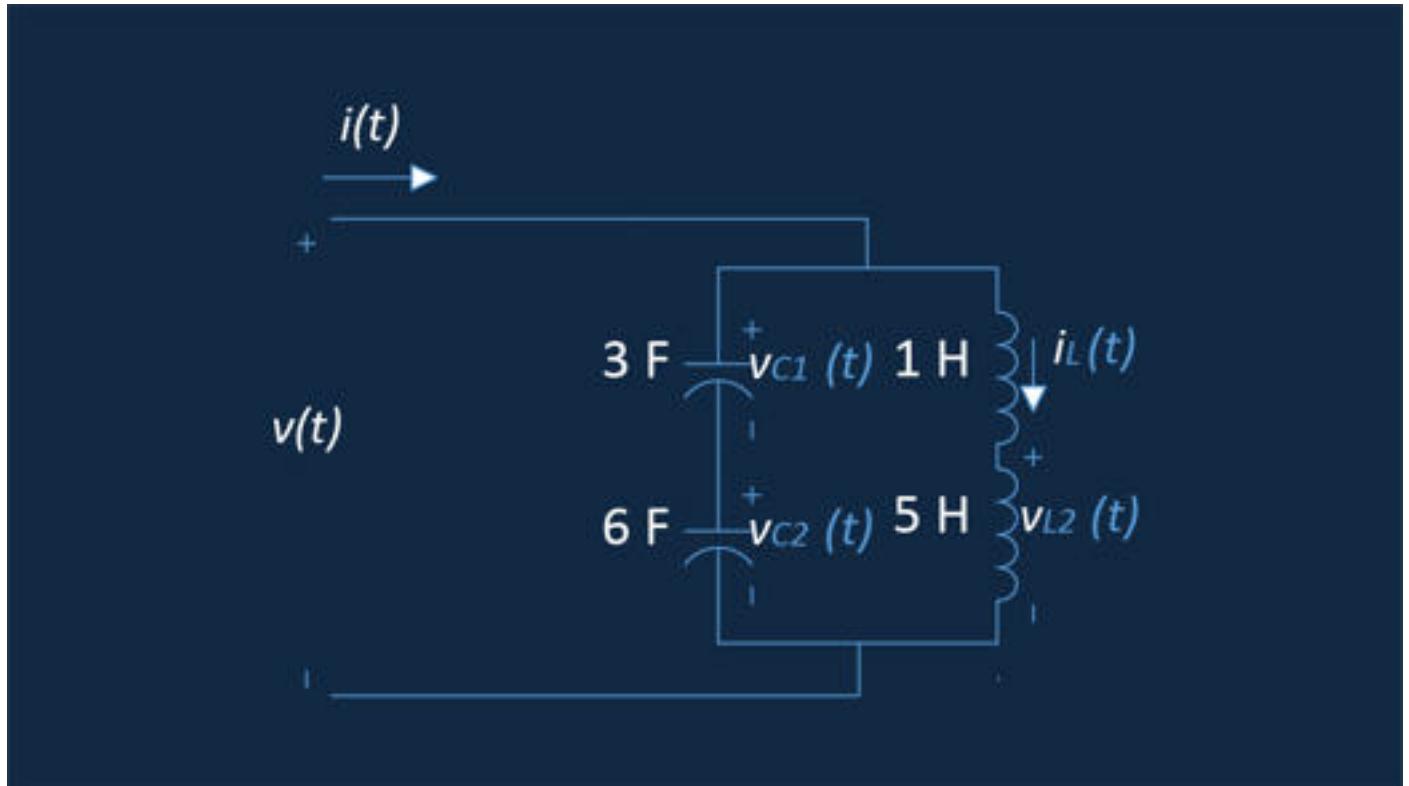
D)

$$\begin{aligned} i(t) &= \left\{ \frac{1}{60} [2e^{-2t} \sin(4t) - e^{-2t} \cos(4t) - 2e^{-4t} \cos(2t) - 4e^{-4t} \sin(2t)] + \frac{123}{60} \right\} A \\ i_{L_2}(t) &= \left\{ \frac{1}{60} (2e^{-2t} \sin(4t) - e^{-2t} \cos(4t) - 2e^{-4t} \cos(2t) - 4e^{-4t} \sin(2t)) \right. \\ &\quad \left. + 63/60 \right\} A \\ i_{L_3}(t) &= \left\{ \frac{1}{60} (2e^{-2t} \sin(4t) - e^{-2t} \cos(4t) - 2e^{-4t} \cos(2t) - 4e^{-4t} \sin(2t)) \right. \\ &\quad \left. + 63/60 \right\} A \end{aligned}$$

E)

$$\begin{aligned} i(t) &= 1/60 (2e^{(-2t)} \sin 4t - e^{(-2t)} \cos 4t - 2e^{(-4t)} \cos 2t - 4e^{(-4t)} \sin 2t) + 123/60 A, \\ iL_2(t) &= 1/60 (2e^{(-2t)} \sin 4t - e^{(-2t)} \cos 4t - 2e^{(-4t)} \cos 2t - 4e^{(-4t)} \sin 2t) + 63/60 A, \\ iL_3(t) &= 1/60 (2e^{(-2t)} \sin 4t - e^{(-2t)} \cos 4t - 2e^{(-4t)} \cos 2t - 4e^{(-4t)} \sin 2t) + 63/60 A. \end{aligned}$$

5) Quais são as expressões das correntes $i(t)$ e $i_L(t)$ e das tensões $v_{C1}(t)$, $v_{C2}(t)$ e $v_{L3}(t)$, no circuito da figura a seguir, dado que $v(t)=20-10e^{-5t} \cos 5t$ e as condições iniciais dos capacitores são $q_{C1}(0)=6 \text{ C}$ e $q_{C2}(0)=6 \text{ C}$ e as dos indutores são $i_{L1}(0)=i_{L2}(0)=2 \text{ A}$, com $t_0=0$?



A) $e(-5t) \cos 5t + e(-5t) \sin 5t A,$
 $i_L(t) = e(-5t)(\cos 5t - \sin 5t) A,$
 $v_{C1}(t) = -20e(-5t) \cos 5t V,$
 $v_{C2}(t) = -10e(-5t) \cos 5t V,$
 $v_{L2}(t) = -5e(-5t) \cos 5t V.$

B) $i(t) = e(-5t) \cos 5t + e(-5t) \sin 5t A,$
 $i_L(t) = e(-5t)(\cos 5t - \sin 5t) A,$
 $v_{C1}(t) = -20e(-5t) \cos 5t V,$
 $v_{C2}(t) = -10e(-5t) \cos 5t V,$
 $v_{L2}(t) = -5e(-5t) \cos 5t V.$

C) $i(t) = 10/3t + e(-5t) \cos 5t + e(-5t) \sin 5t + 11/6A,$

$$i_L(t) = 10/3t + e(-5t)(\cos 5t - \sin 5t) + 11/6A,$$

$$v_{C1}(t) = -20/3e(-5t) \cos 5t V,$$

$$v_{C2}(t) = -10/3e(-5t) \cos 5t V,$$

$$v_{L2}(t) = -25/3e(-5t) \cos 5t V$$

D) $i(t) = \left\{ \frac{10}{3}t + \frac{601}{6}e^{-5t} \cos(5t) + \frac{599}{6}e^{-5t} \sin(5t) + \frac{11}{6} \right\} A$

$$i_L(t) = \left\{ \frac{10}{3}t + \frac{601}{6}e^{-5t} \cos(5t) + \frac{599}{6}e^{-5t} \sin(5t) + \frac{11}{6} \right\} A$$

$$v_{C1}(t) = \left\{ \frac{26}{3} + \frac{20}{3}e^{-5t} \cos(5t) \right\} V$$

$$v_{C2}(t) = \left\{ \frac{34}{3} - \frac{50}{3}e^{-5t} \cos(5t) \right\} V$$

$$v_{L2}(t) = \left\{ \frac{50}{3} - \frac{25}{3}e^{-5t} \cos(5t) \right\} V$$

E) $i(t) = 10/3t + e(-5t) \cos 5t + e(-5t) \sin 5t + 11/6A,$

$$i_L(t) = 10/3t + e(-5t)(\cos 5t - \sin 5t) + 11/6A,$$

$$v_{C1}(t) = -20/3e(-5t) \cos 5t V,$$

$$v_{C2}(t) = -10/3e(-5t) \cos 5t V,$$

$$v_{L2}(t) = -25/3e(-5t) \cos 5t V.$$



NA PRÁTICA

Um interruptor de proximidade capacitivo é formado por um circuito cuja tensão de saída é dependente da razão dos seus capacitores.

Um botão de chamada de elevadores é um circuito capacitivo no qual, ao se acionar o botão, insere-se outro capacitor no circuito. Assim, esse circuito pode ser analisado com os conhecimentos sobre capacitores.

Confira a seguir um interruptor de proximidade capacitivo a partir do exemplo dos botões de um elevador.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!



SAIBA MAIS

Para ampliar o seu conhecimento a respeito desse assunto, veja abaixo as sugestões do professor:

Avaliação de sensor capacitivo para o monitoramento do teor de água do solo

Neste artigo, você verá um estudo da utilização de um sensor capacitivo desenvolvido para monitorar o teor de água no solo.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Desenvolvimento de indutor variável com fio com memória de forma

Neste trabalho acadêmico, você verá um estudo do desenvolvimento de um indutor variável com fio com memória de forma, um tipo de liga com uma característica termomecânica especial de mudança de forma.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Estudo da variação da capacidade de capacitores comerciais

Neste artigo, você verá um estudo da variação da capacidade de capacitores comerciais de acordo com os valores da tensão aplicada e do tempo de carga utilizado.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Sensor capacitivo interdigital para detecção de deposição de parafina em oleodutos

Neste artigo, você verá a aplicação de um sensor constituído de capacitor como forma de resolução de um problema comum em uma indústria petrolífera.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!



APRESENTAÇÃO

Nesta Unidade de Aprendizagem estudaremos os Circuitos RC. Estes circuitos são compostos de resistores e capacitores. Apresentam características transientes em função do comportamento dos capacitores tanto no carregamento como na descarga. Além disso, estes circuitos tem uma relação íntima como filtros analógicos e equipamentos utilizados na medicina, como o desfibrilador e marca-passos.

Bons estudos.

Ao final desta Unidade de Aprendizagem, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Reconhecer o efeito de um capacitor nos Circuitos RC.
- Determinar a constante de tempo nesse circuito.
- Estabelecer o comportamento da corrente elétrica neste tipo de circuito.

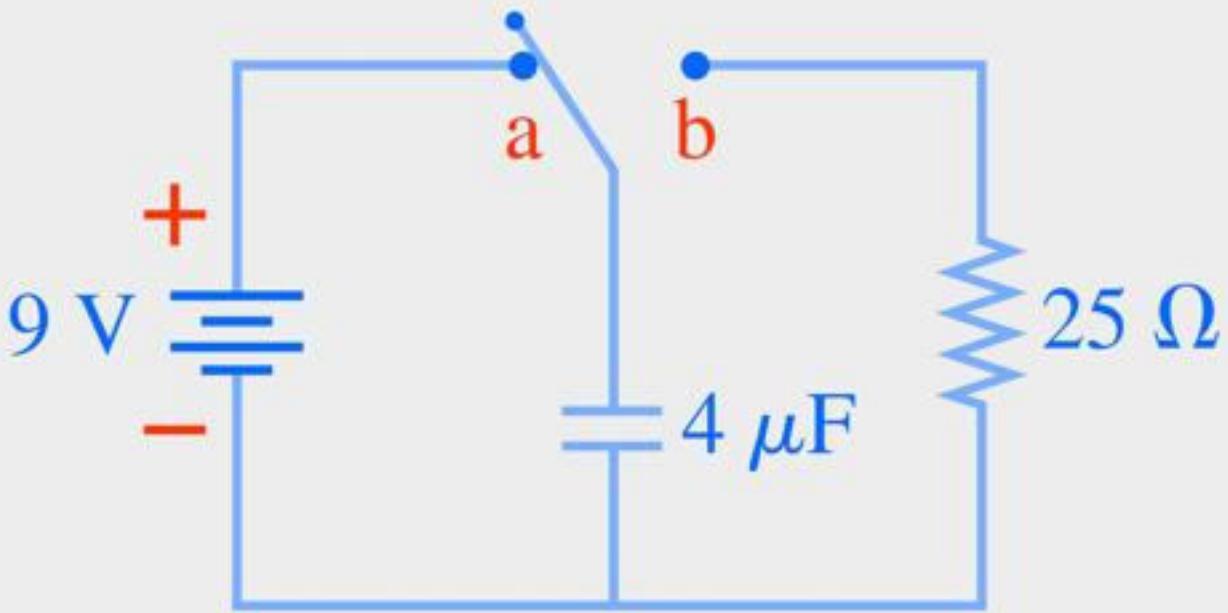


DESAFIO

O interruptor da figura está na posição mostrada por um longo tempo.

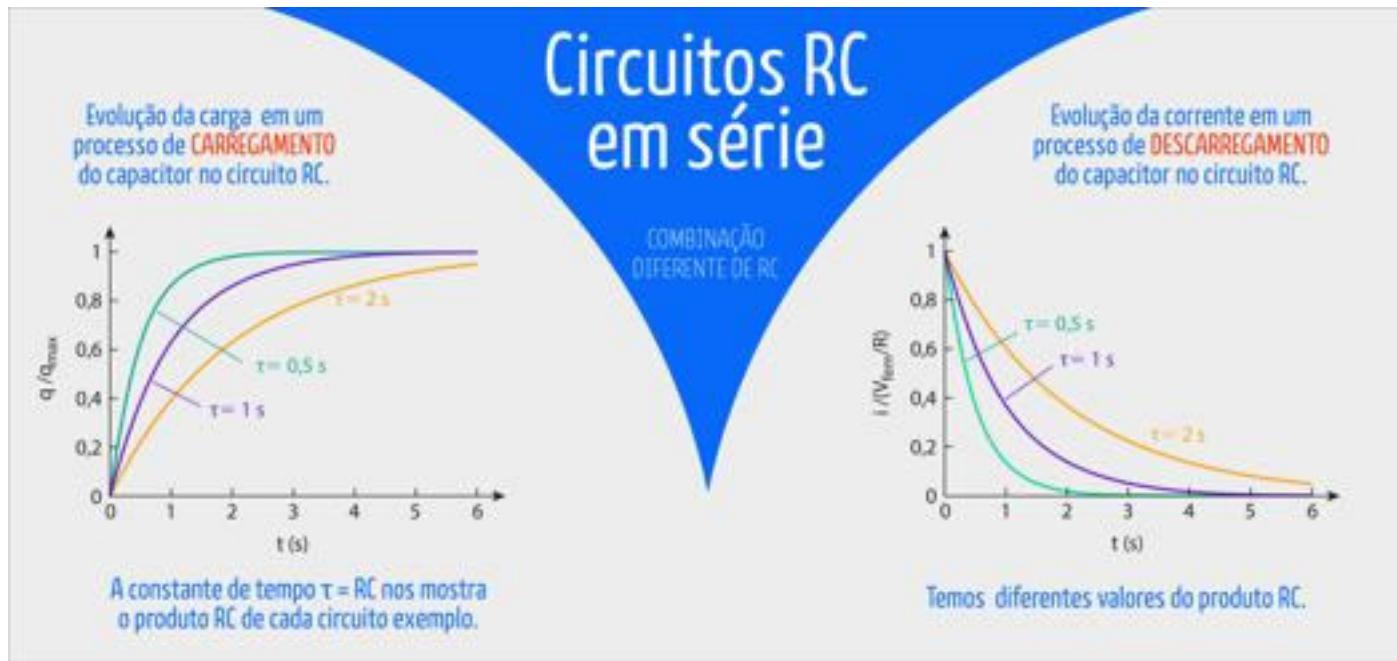
No instante $t=0s$ ele é trocado para a posição b . Qual é a carga sobre o capacitor e a corrente I através do resistor?

- a) imediatamente após o interruptor ser fechado?
- b) em $t=50\mu s$?
- c) em $t=200\mu s$?



INFOGRÁFICO

Os Circuitos RC introduzem um conceito novo: o tempo. Capacitores em um Circuito RC apresentam comportamentos característicos de carga e descarga. O infográfico mostra em detalhe esta nova realidade.



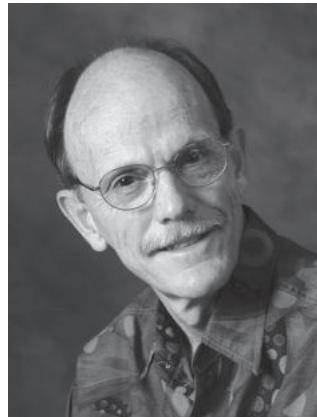
CONTEÚDO DO LIVRO

Os circuitos RC apresentam características interessantes para filtragem de frequências. No livro

"Física: Uma Abordagem Estratégica", de Randall D. Knight, são apresentados exemplos numéricos de grande utilidade para o seu aprendizado. Comece sua leitura na seção 32.9 "Circuitos RC".

Boa leitura.

Sobre o Autor



Randy Knight leciona Física básica há 25 anos na Ohio State University, EUA, e na Califórnia Polytechnic University, onde atualmente é professor de física. O professor Knight bacharelou-se em Física pela Washington University, em Saint Louis, e doutorou-se em Física pela University of California, Berkeley. Fez pós-doutorado no Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics, antes de trabalhar na Ohio State University. Foi aí que ele começou a pesquisar sobre o ensino da física, o que, muitos anos depois, o levou a escrever este livro.

Os interesses de pesquisa do professor Knight situam-se na área de laser e espectroscopia, com cerca de 25 artigos de pesquisa publicados. Ele também dirige o programa de estudos ambientais da Cal Poly, onde, além de física introdutória, leciona tópicos relacionados a energia, oceanografia e meio ambiente. Quando não está em sala de aula ou na frente de um computador, o professor Knight está fazendo longas caminhadas, remando em um caiaque, tocando piano ou usufruindo seu tempo com a esposa Sally e seus sete gatos.



K71f Knight, Randall D.

Física 3 [recurso eletrônico] : uma abordagem estratégica /
Randall Knight ; tradução Manuel Almeida Andrade Neto. – 2.
ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : Bookman, 2009.

Editado também como livro impresso em 2009.
ISBN 978-85-7780-553-2

1. Física. 2. Eletricidade. 3. Magnetismo. I. Título.

CDU 537

EXEMPLO 32.13 Um circuito aterrado

Suponha que o circuito da Figura 32.33 seja aterrado no nó entre os dois resistores em vez de na base. Encontre o potencial em cada canto do circuito.

VISUALIZAÇÃO A FIGURA 32.34 mostra o novo circuito. (É costumeiro desenhar o símbolo terra de modo que ele “aponte” sempre para baixo.)

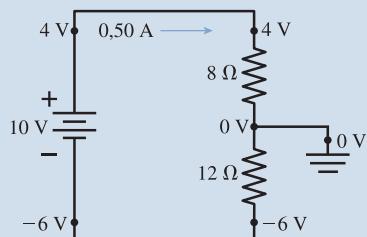


FIGURA 32.34 Circuito da Figura 32.33 aterrado no nó entre os resistores.

RESOLUÇÃO Trocar o ponto de aterramento não afetará o comportamento do circuito. A corrente será ainda 0,50 A, e as diferenças de potencial sobre os dois resistores, 4 V e 6 V. Tudo o que aconteceu foi que movemos o ponto de referência correspondente a $V = 0$ V. Devido à Terra corresponder a $V_{\text{Terra}} = 0$ V, o próprio nó encontra-se no potencial de 0 V. O potencial diminui em 4 V enquanto as cargas fluem através do resistor de 8 Ω . Uma vez que ele termina em 0 V, o potencial acima do resistor de 8 Ω deve ser de + 4 V. Analogamente, o potencial diminui em 6 V através do resistor de 12 Ω . Uma vez que ele inicia em 0 V, o potencial abaixo do resistor de 12 Ω deve ser de - 6 V. O terminal negativo da bateria encontra-se no mesmo potencial que o abaixo do resistor de 12 Ω , pois eles estão conectados por um fio. Logo, $V_{\text{neg}} = -6$ V. Finalmente, o potencial aumenta em 10 V quando que as cargas fluem através da bateria, portanto $V_{\text{pos}} = +4$ V, em concordância, como deveria ser, com o potencial acima do resistor de 8 Ω .

Talvez você queira saber a respeito de voltagens negativas. Uma voltagem negativa significa apenas que o potencial naquele ponto é menor do que o potencial em algum outro ponto que escolhemos como correspondente a $V = 0$ V. Somente *diferenças* de potencial são fisicamente significativas, e apenas diferenças de potencial entram na lei de Ohm: $I = \Delta V/R$. A diferença de potencial através do resistor de 12 Ω deste exemplo é de 6 V, diminuído do topo à base, independentemente de qual ponto escolhemos como correspondente a $V = 0$ V.

32.9 Circuitos RC

Até agora temos considerado somente os circuitos nos quais a corrente é estável e contínua. Existem muitos circuitos nos quais a dependência da corrente com o tempo é uma característica crucial. O carregamento e o descarregamento de um capacitor constituem um exemplo importante.

A FIGURA 32.35a mostra um capacitor carregado, um interruptor e um resistor. O capacitor possui uma carga Q_0 e está sob uma diferença de potencial $\Delta V_C = Q_0/C$. Não há corrente, assim a diferença de potencial sobre o resistor é zero. Então, em $t = 0$, o interruptor é fechado e o capacitor começa a descarregar através do resistor. Um circuito desse tipo, com resistores e capacitores, é chamado de **círculo RC**.

Quanto tempo leva o capacitor para descarregar? Como a corrente através do resistor varia em função do tempo? Para responder a essas questões, a FIGURA 32.35b mostra o circuito depois que o interruptor foi fechado. Agora, a diferença de potencial através do resistor é $\Delta V_R = -IR$, onde I é a corrente de descarga do capacitor.

A lei de Kirchhoff das malhas é válida para qualquer circuito, e não, apenas para circuitos com baterias. A lei das malhas, aplicada ao circuito da Figura 32.25b, percorrendo-se a malha em sentido horário, é

$$\Delta V_C + \Delta V_R = \frac{Q}{C} - IR = 0 \quad (32.28)$$

Nesta equação, Q e I são, respectivamente, os valores *instantâneos* da carga do capacitor e da corrente do resistor.

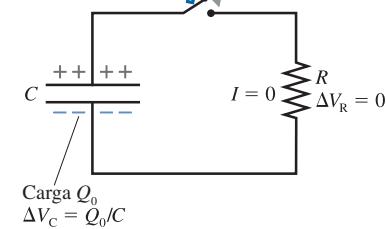
A corrente I é a taxa segundo a qual as cargas fluem através do resistor: $I = dq/dt$. Mas as cargas que fluem pelo resistor são aquelas que foram *removidas* do capacitor, ou seja, uma carga infinitesimal dq flui através do resistor quando a carga do capacitor diminui em dQ . Portanto, $dq = -dQ$, e a corrente no resistor está relacionada à carga instantânea do capacitor por

$$I = -\frac{dQ}{dt} \quad (32.29)$$



(a) Antes do interruptor ser fechado

O interruptor é fechado em $t = 0$.



(b) Após o interruptor ter sido fechado

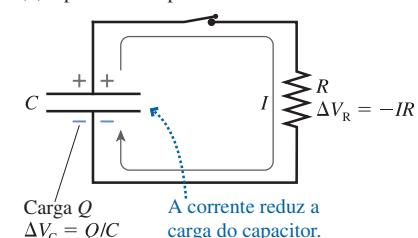


FIGURA 32.35 Um circuito RC.



O pisca-pisca traseiro de um capacete de ciclista liga e desliga intermitentemente. O sincronismo é controlado por um circuito RC .

Agora, I é positivo quando Q está diminuindo, como se espera. O raciocínio que levou à Equação 32.29 é bastante sutil, mas muito importante. Mais tarde, você o verá sendo usado em outros contextos.

Substituindo a Equação 32.29 na Equação 32.28 e, depois, dividindo o resultado por R , a lei das malhas para o circuito RC assume a forma

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} = 0 \quad (32.30)$$

A Equação 32.30 é uma equação diferencial de primeira ordem para a carga Q do capacitor, mas uma das que podemos resolver por integração direta. Primeiro rearranjamos a Equação 32.20 para que todos os termos que contenham a carga fiquem de um mesmo lado da equação:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} dt$$

O produto RC é uma constante para qualquer circuito particular.

A carga do capacitor era Q_0 em $t = 0$, quando o interruptor foi fechado. Desejamos integrar desta condição inicial até uma carga Q em um instante t posterior, ou seja,

$$\int_{Q_0}^Q \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt \quad (32.31)$$

Ambas são integrais bem-conhecidas, resultando em

$$\ln Q \Big|_{Q_0}^Q = \ln Q - \ln Q_0 = \ln \left(\frac{Q}{Q_0} \right) = -\frac{t}{RC}$$

Podemos isolar a carga Q do capacitor obtendo a função exponencial de cada lado da equação e, depois, multiplicando a equação obtida por Q_0 . Ao final, obtemos

$$Q = Q_0 e^{-t/RC} \quad (32.32)$$

Note que $Q = Q_0$ em $t = 0$, como deve ser.

O argumento de uma função exponencial deve ser adimensional; assim, a grandeza RC deve ter dimensões de tempo. É útil definir a **constante de tempo** τ de um circuito RC como

$$\tau = RC \quad (32.33)$$

Podemos, então, escrever a Equação 32.32 na forma

$$Q = Q_0 e^{-t/\tau} \quad (32.34)$$

O significado da Equação 32.34 é mais fácil de compreender quando se representa a equação graficamente. A FIGURA 32.36a mostra a carga do capacitor em função do tempo. A carga decai exponencialmente, iniciando com Q_0 , em $t = 0$, e se aproxima assintoticamente de zero quando $t \rightarrow \infty$. A constante de tempo τ é o tempo decorrido para que o valor da carga decresça para e^{-1} (cerca de 37%) de seu valor inicial. No tempo $t = 2\tau$, a carga decrescerá para e^{-2} (cerca de 13%) de seu valor inicial.

NOTA ▶ A forma do gráfico de Q é sempre a mesma, independentemente do valor específico da constante de tempo t . ◀

Obtemos a corrente do resistor usando a Equação 32.29:

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{Q_0}{RC} e^{-t/\tau} = \frac{\Delta V_C}{R} e^{-t/\tau} = I_0 e^{-t/\tau} \quad (32.35)$$

onde $I_0 = Q_0/\tau$ é a corrente inicial, imediatamente após o interruptor ter sido fechado. A FIGURA 32.36b é o gráfico da corrente do resistor versus t . Você pode ver que a corrente sofre o mesmo decaimento que a carga do capacitor, com a mesma constante de tempo.

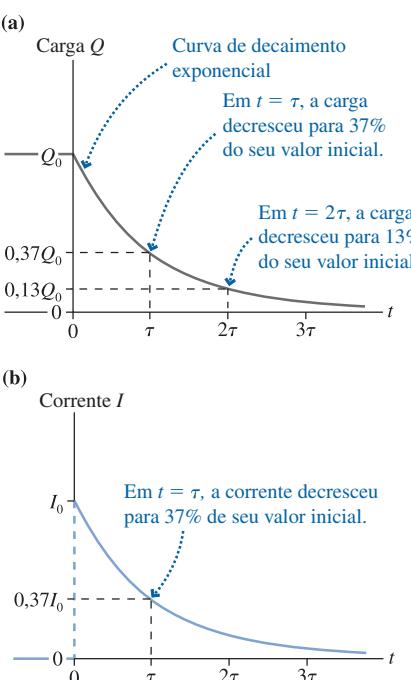


FIGURA 32.36 A curva de decaimento da carga do capacitor e da corrente no resistor.

NOTA ► Não existe um valor bem-definido de tempo decorrido no qual o capacitor se descarregue completamente, pois Q se aproxima de zero assintoticamente, todavia em $t = 5\tau$ a carga e a corrente caíram para menos de 1% de seus valores iniciais. Assim, 5τ constitui uma resposta prática razoável para a questão “quanto tempo decorre para o capacitor descarregar?” ◀

EXEMPLO 32.14 Decaimento exponencial em um circuito RC

O interruptor da FIGURA 32.37 encontra-se na posição a há um longo tempo. Em $t = 0$ s, ele é trocado para a posição b. Qual será a carga do capacitor e a corrente através do resistor em $t = 5,0 \mu\text{s}$?

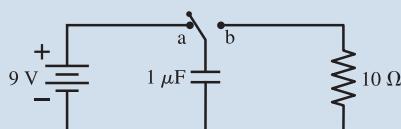


FIGURA 32.37 Um circuito RC.

MODELO A bateria carrega o capacitor a 9,0 V. Então, quando o interruptor é trocado para a posição b, o capacitor se descarregue através do resistor de 10Ω . Considere os fios como ideais.

RESOLUÇÃO A constante de tempo do circuito RC é

$$\tau = RC = (10 \Omega)(1,0 \times 10^{-6} \text{ F}) = 10 \times 10^{-6} \text{ s} = 10 \mu\text{s}$$

O capacitor está inicialmente carregado a 9,0 V, portanto $Q_0 = C\Delta V_C = 9,0 \mu\text{C}$. Em $t = 5,0 \mu\text{s}$, a carga do capacitor é

$$\begin{aligned} Q &= Q_0 e^{-t/\tau} = (9,0 \mu\text{C})e^{-(5,0 \mu\text{s})/(10 \mu\text{s})} \\ &= (9,0 \mu\text{C})e^{-0,5} = 5,5 \mu\text{C} \end{aligned}$$

A corrente inicial, imediatamente após o interruptor ser fechado, é $I_0 = Q_0/\tau = 0,90 \text{ A}$. Em $t = 5,0 \mu\text{s}$, a corrente no resistor é

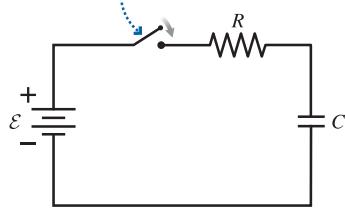
$$I = I_0 e^{-t/\tau} = (0,90 \text{ A})e^{-0,5} = 0,55 \text{ A}$$

AVALIAÇÃO Esse capacitor estará quase inteiramente descarregado em $5\tau = 50 \mu\text{s}$ após o interruptor ter sido fechado.

Carregando um capacitor

A FIGURA 32.38a mostra um circuito para carregar um capacitor. Depois que o interruptor é fechado, a escada rolante de carga da bateria move as cargas da placa inferior do capacitor para sua placa superior. Pela limitação à corrente que o resistor produz, ele atrasa o processo, mas não o detém. O capacitor carrega até que $\Delta V_C = \mathcal{E}$; e então a corrente de carregamento cessa. A carga completa do capacitor é $Q_{\max} = C(\Delta V_C)_{\max} = C\mathcal{E}$.

(a) O interruptor fecha em $t = 0$ s.



(b)

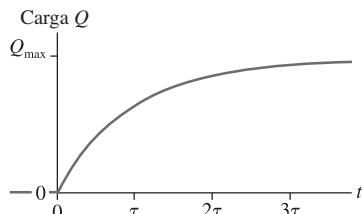


FIGURA 32.38 Um circuito para carregar um capacitor.

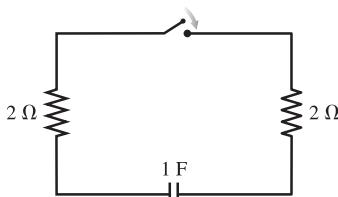
Como tema para casa, você pode mostrar que a carga do capacitor, no instante t , é dada por

$$Q = Q_{\max}(1 - e^{-t/\tau}) \quad (32.36)$$

onde, outra vez, $\tau = RC$. Este “decaimento invertido” para Q_{\max} é mostrado graficamente na FIGURA 32.38b. Circuitos RC que, alternadamente, carregam e descarregam um capacitor estão no cerne dos circuitos de registro de tempo em computadores e diversos aparelhos eletrônicos digitais.

PARE E PENSE 32.6 A constante de tempo do descarregamento deste capacitor é

- a. 5 s
- b. 4 s
- c. 2 s
- d. 1 s
- e. O capacitor não descarregue, pois os resistores se cancelam.



Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.



DICA DO PROFESSOR

No vídeo serão apresentados dois exemplos com o detalhamento do cálculo envolvendo Circuitos RC. No primeiro, um circuito RC típico em carregamento. No segundo, uma aplicação prática: o marca-passo em um modelo idealizado.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!



EXERCÍCIOS

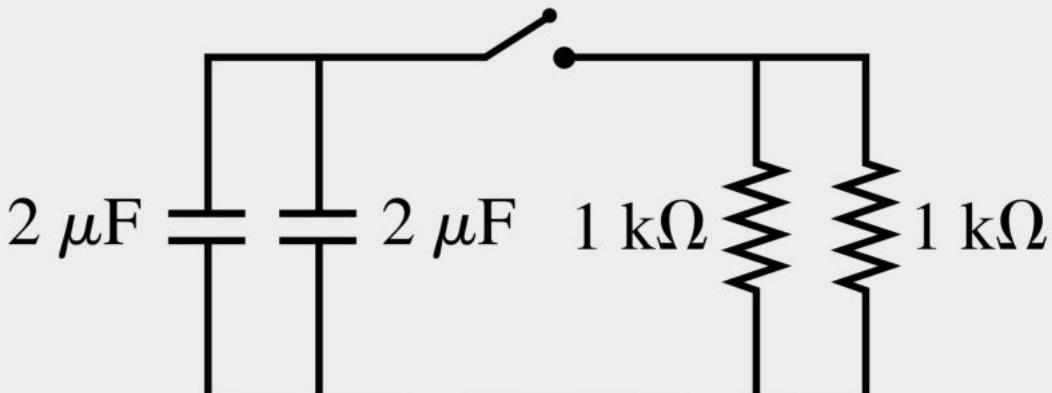
- 1) Qual é a constante de tempo para a descarga dos capacitores da figura?



- A) $\tau = 5\text{ms}$
- B) $\tau = 3\text{ms}$
- C) $\tau = 2\text{ms}$
- D) $\tau = 1\text{ms}$

E) $\tau = 20\text{ms}$

2) Qual é a constante de tempo para a descarga dos capacitores da figura?



A) $\tau = 10\text{ms}$

B) $\tau = 15\text{ms}$

C) $\tau = 20\text{ms}$

D) $\tau = 2\text{ms}$

E) $\tau = 5\text{ms}$

3) Um capacitor de $10\mu\text{F}$, inicialmente carregado com $20\mu\text{C}$, é descarregado através de um resistor de $1,0\text{k}\Omega$. Quanto tempo decorre para que a carga do capacitor se reduza para $10\mu\text{C}$?

A) $\tau \approx 7\text{ms}$

- B) $\tau \approx 3\text{ms}$
- C) $\tau \approx 12\text{ms}$
- D) $\tau \approx 6\text{ms}$
- E) $\tau \approx 8\text{ms}$
- 4) Que valor de resistência descarregará um capacitor de $1\mu\text{F}$ de modo que sua carga atinja 10% do valor inicial em 2ms?
- A) $R = 2,56 \text{ k}\Omega$
- B) $R = 13,16 \text{ k}\Omega$
- C) $R = 3,99 \text{ k}\Omega$
- D) $R = 4,5 \text{ k}\Omega$
- E) $R = 0,87 \text{ k}\Omega$
- 5) Um capacitor é descarregado através de um resistor de 100Ω . A corrente de descarga diminui para 25% de seu valor inicial em 2,5ms. Qual é o valor da capacidade do capacitor?
- A) $C = 18\mu\text{F}$
- B) $C = 25\mu\text{F}$

C) $C = 11\mu F$

D) $C = 9\mu F$

E) $C = 5\mu F$



NA PRÁTICA

Acompanhe as aplicações dos Circuitos RC na medicina.

Os Circuitos RC se apresentam como um dos mais simples filtros analógicos para eletrônica. Isso por si só já tem grande aplicação na indústria.

Por outro lado, temos a maior ferramenta utilizada na medicina no atendimento a um paciente com parada cardíaca: **O DESFIBRILADOR.**



Em linhas gerais, esse equipamento apresenta um circuito com capacitor e como todo o circuito apresenta resistência. O capacitor armazena carga durante alguns instantes e a descarrega abruptamente para tentar reanimar o paciente. Conforme a carga desejada, pode-se deixar mais ou menos tempo, buscando uma carga maior ou menor respectivamente.

Ainda na medicina cardiológica podemos citar o marca-passo, também utilizado no coração, mas de forma constante. Ele consegue dar ritmo quando o órgão apresenta tal instabilidade.



SAIBA MAIS

Para ampliar o seu conhecimento a respeito desse assunto, veja abaixo as sugestões do

professor:

BAUER, WOLFGANG WESTFALL, GARYD.; DIAS, HELIO, Física para Universitários - Eletricidade e Magnetismo, Porto Alegre: Mc Graw-Hill, 2012. Capítulo 6 - seção 6.5

Círculo RC - Condições iniciais e finais

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Capacitores: Círculo RC - Fórmula Geral

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Capacitores - Círculo RC - Constante de Tempo

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!



APRESENTAÇÃO

Circuitos RL são formados por resistores e indutores. Quando fontes de energia são subitamente aplicadas ao circuito, há uma resposta chamada de resposta forçada. Isto porque a resposta, de tensão ou corrente, é determinada pela função forçante.

Nesta Unidade de Aprendizagem, você verá os circuitos RL com fontes, ou seja, a resposta forçada para estes circuitos quando fontes atuam sobre eles. Além disso, verá a resposta a um degrau para circuitos RL e poderá analisar a equação que descreve o comportamento da resposta forçada para esses circuitos.

Bons estudos.

Ao final desta Unidade de Aprendizagem, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Analisar circuitos RL com fontes.
- Definir resposta a um degrau em circuitos RL.
- Analisar a equação que descreve a resposta forçada para circuitos RL.



DESAFIO

Indutores não são tão versáteis como os capacitores e resistores. No entanto, há várias aplicações em que os indutores não têm substitutos, como em relés, circuitos de telefone, motores elétricos e microfones.

► Como engenheiro, você foi chamado para analisar o comportamento da tensão e da corrente em um indutor em um circuito RL submetido a uma resposta forçada.

Você não teve acesso aos componentes, mas, sim, às expressões de $i(t)$ e $v_L(t)$, dadas por:



A partir dessas informações, esboce um gráfico de $i(t)$ e $v_L(t)$ em função do tempo t e a utilize as equações e a análise gráfica para responder as seguintes questões:

- A) Qual o valor de $i(t)$ quando $t=0$?
- B) Qual o valor de $v_L(t)$ quando $t=0$?
- C) Qual o valor de $i(t)$ quando $t \rightarrow \infty$?
- D) Qual o valor de $v_L(t)$ quando $t \rightarrow \infty$?

Sugestão: Monte uma tabela para auxiliá-lo neste desafio. Utilize planilha eletrônica ou outro software de sua preferência (Matlab, Scilab, Octave, CodeOcean, etc.).



INFOGRÁFICO

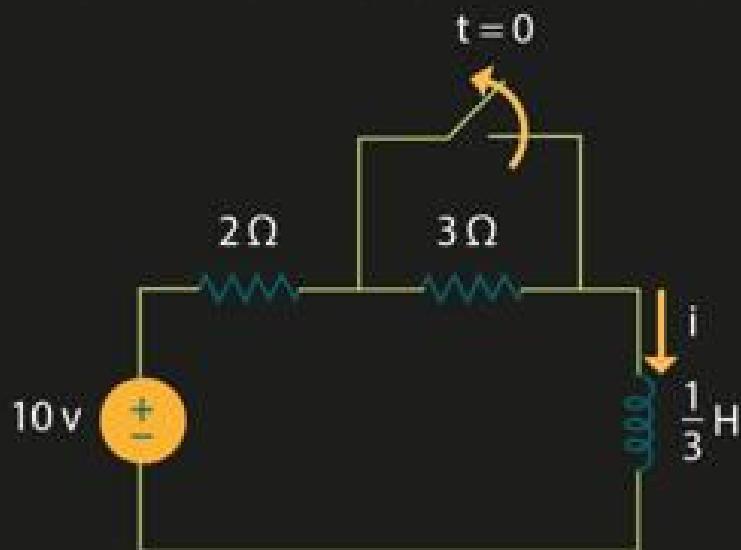
A resposta de tensão ou corrente para um circuito RL, quando fontes de energia são subitamente aplicadas, é chamada de resposta forçada. Essas fontes de energia podem ser modeladas por diferentes funções, tais como **degrau unitário, impulso unitário e rampa unitária**.

Acompanhe, no infográfico, um resumo das etapas para o cálculo da resposta a um degrau de um circuito RL a partir de um exemplo.

PASSO A PASSO DO CÁLCULO DA RESPOSTA A UM DEGRAU EM CIRCUITOS RL

► PROBLEMA:

Determine a corrente $i(t)$ no circuito da figura para $t > 0$. Suponha que a chave esteve fechada por um bom tempo.



1. A CORRENTE INICIAL, $i(0)$, NO INDUTOR

Quando $t < 0$, o resistor de 3Ω está curto-circuitado, e o indutor atua como um curto-circuito. A corrente no indutor em $t = 0^-$ é:

$$i(0^-) = 10V / 2\Omega = 5A$$

Como o indutor não pode variar sua corrente instantaneamente, temos que:
 $i(0^+) = i(0^-) = i(0) = 5A$

2. A CORRENTE FINAL NO INDUTOR, $i(\infty)$

Quando $t > 0$, a chave é aberta. Os resistores de 2Ω e 3Ω estão em série e, portanto:

$$i(\infty) = 10V / 5\Omega = 2A$$

3. A CONSTANTE DE TEMPO τ

$$\tau = L/R = (1/3)/5\Omega = 1/15 \text{ s}$$

Finalmente, determinamos a resposta ao degrau para o circuito RL:

$$i(t) = i(\infty) + [i(0) - i(\infty)]e^{-t/\tau}$$

$$i(t) = 2 + (5 - 2)e^{-15t} \text{ A}$$

$$i(t) = 2 + 3e^{-15t} \text{ A}, t > 0$$



CONTEÚDO DO LIVRO

Apesar de parecer muito elementar, a análise de circuitos RL é importante, pois estes circuitos têm diversas aplicações práticas, como relés, motores elétricos e microfones.

No capítulo Resposta forçada para circuitos RL, da obra *Circuitos elétricos II*, você verá circuitos RL com fontes, resposta a um degrau e equação que descreve o comportamento da resposta forçada para esses circuitos.

Boa leitura.

CIRCUITOS ELÉTRICOS II

Lizandro de Souza
Oliveira

Resposta forçada para circuitos RL

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste texto, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Analisar circuitos RL com fontes.
- Definir resposta a um degrau em circuitos RL.
- Analisar a resposta forçada e a resposta completa para circuitos RL.

Introdução

A análise de circuitos contendo indutores está relacionada à solução das equações íntegro-diferenciais que caracterizam os circuitos e é a base para compreensão do comportamento de diversos circuitos com aplicação em diversas áreas das engenharias elétrica e eletrônica. Como mencionado por Sadiku, Alexander e Musa, (2015), indutores não são tão versáteis como os capacitores e resistores e são mais limitados em aplicações. Ainda segundo os autores, há várias aplicações em que os indutores não têm substitutos, sendo utilizados em relés, circuitos de telefone, circuitos sintonizadores, motores elétricos e microfones, por exemplo.

Neste capítulo, você estudará circuitos formados por resistores e indutores ou, de maneira mais precisa, circuitos que poderão ser representados por um resistor equivalente, associado a um indutor equivalente. Esses circuitos, chamados de circuitos RL, serão analisados com a inclusão repentina de fontes. Você também conhecerá a resposta a um degrau e analisará a equação que descreve a resposta forçada e a resposta completa para circuitos RL.

Circuitos RL com fontes

Um circuito RL é formado por resistores e indutores. Caso tenhamos mais de um resistor ou mais de um indutor no circuito, poderemos utilizar as técnicas para análise de circuitos a fim de reduzi-lo a uma associação desses componentes, para obtermos uma resistência equivalente (R_{eq}) e uma indutância equivalente (L_{eq}). Podemos ter um circuito RL em série ou um circuito RL em paralelo. Como você deve concluir, tais nomenclaturas se referem à associação (série ou paralelo) desses componentes.

O tipo de resposta resultante, quando as fontes de energia são aplicadas subitamente a um circuito, é chamado de **resposta forçada** (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Analisaremos a situação na qual a resposta ocorre quando as fontes de energia subitamente aplicadas são fontes CC. O circuito consiste em uma bateria cuja tensão é V_s em série com uma chave, um resistor R e um indutor L . A chave é fechada conforme indica a Figura 1 (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

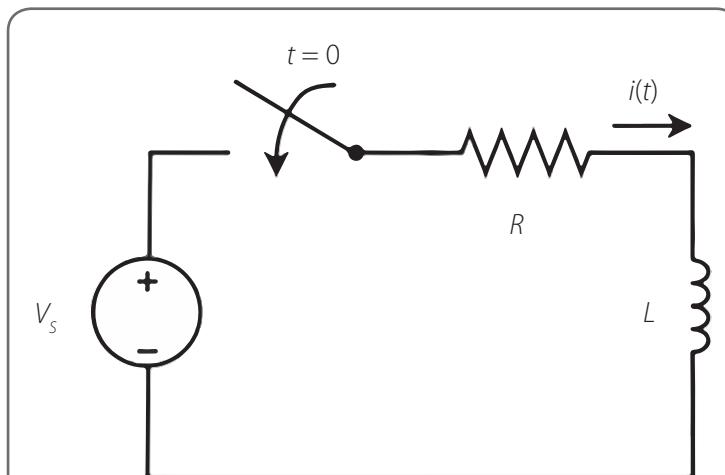


Figura 1. Circuito RL em série com a aplicação de uma fonte em $t = 0$.

Você pode observar, a partir da análise do circuito apresentado na Figura 1, que a chave esteve aberta antes de fechar no instante $t = 0$. Após ter sido fechada, a partir da lei de Kirchhoff para tensão, temos que:

$$V_s = Ri(t) + L \frac{di}{dt} \quad (1)$$

A equação (1) pode ser resolvida para a corrente, separando as variáveis i e t e, após, efetuando a integração. Primeiramente, resolveremos a equação (1) para a derivada di/dt :

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L} \left(i - \frac{V_s}{R} \right) \quad (2)$$

$$di = -\frac{R}{L} \left(i - \frac{V_s}{R} \right) dt \quad (3)$$

Agora, separaremos as variáveis da equação (3) para obter (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$\frac{di}{i - \left(\frac{V_s}{R} \right)} = -\frac{R}{L} dt \quad (4)$$

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} \frac{dx}{x - \left(\frac{V_s}{R} \right)} = -\frac{R}{L} \int_{t_0}^t dy \quad (5)$$

Realizando a integração indicada pela equação (5), temos que:

$$\ln \frac{i(t) - (V_s/R)}{I_0 - (V_s/R)} = -\frac{R}{L} (t - t_0) \quad (6)$$

$$\frac{i(t) - (V_s/R)}{I_0 - (V_s/R)} = e^{-(R/L)t} \quad (7)$$

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{\left(-\frac{R}{L} \right) t} \quad (8)$$

A equação (8) nos dá a resposta de um circuito RL após a inclusão da fonte. A partir dessa equação, podemos determinar a corrente em qualquer instante de tempo $t \geq 0$. Assim, verifique que a substituição de $t = 0$ na equação (8) resultará em $i(0) = I_0$:

$$i(0) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R} \right)$$

$$\therefore i(0) = I_0$$

A partir da análise da equação (8), observamos que, após a chave ter sido fechada, a resposta de corrente aumenta exponencialmente de zero a um valor final de V_s/R (NILSSON; RIEDEL, 2015).

Quando a energia inicial no indutor é nula, a equação (8) se reduz a:

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \frac{V_s}{R} e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} \quad (9)$$



Fique atento

A **constante de tempo** para um circuito **RL** é dada por $\tau = L/R$. Essa constante determina a taxa de crescimento da resposta.

A equação (9) pode ser escrita em função da constante de tempo do circuito. Assim, temos que:

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \frac{V_s}{R} e^{-t/\tau} \quad (10)$$

Considerando a equação (10), podemos dizer que, após uma constante de tempo depois do fechamento da chave, a corrente alcançará aproximadamente 63% do seu valor final, ou $0,6321 V_s/R$. Os demais valores para a amplitude da resposta de corrente podem ser obtidos a partir da equação (10).

Os valores de $i(t)$ para múltiplos inteiros de τ de 1 a 5 são mostrados no Quadro 1.

Quadro 1. Valores de $i(t)$ para t igual a múltiplos inteiros de τ quando $I_0 = 0$

τ	$i(t) = \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R} e^{-t/\tau}$
τ	$0,6321 V_s/R$
2τ	$0,8647 V_s/R$
3τ	$0,9502 V_s/R$
4τ	$0,9817 V_s/R$
5τ	$0,9933 V_s/R$



Fique atento

Podemos enxergar o indutor como um **curto-circuito** para **corrente contínua (CC)**.

Percebemos, a partir da análise da equação (10) e dos valores mostrados no Quadro 1, que a resposta de corrente tende a atingir o valor de V_s/R . Isso faz sentido, pois o termo exponencial da equação (10) tende a zero à medida que o tempo t tende a infinito. Além disso, também podemos observar o circuito apresentado na Figura 1. Quando a chave estiver fechada, a resposta de corrente para o circuito poderá ser analisada como sendo a tensão na fonte dividida pela resistência do circuito, já que o indutor se comporta como um curto para CC.

Analisaremos, agora, a tensão no indutor após a comutação da chave, ou seja, para $t \geq 0^+$. Sabemos que a tensão no indutor é dada por $v_L = L di/dt$. Assim, quando percorrido pela corrente mostrada na equação (8), podemos calcular a tensão no indutor como (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$v_L = L \frac{di}{dt} = L \left(\frac{-R}{L} \right) \left(I_0 - \frac{V_s}{R} e^{(-\frac{R}{L})t} \right) = (V_s - I_0 R) e^{(-\frac{R}{L})t} \quad (11)$$

Sabemos que a corrente em um indutor não pode variar instantaneamente. Assim, a corrente no indutor no instante anterior ao fechamento da chave será

igual à corrente no indutor no instante imediatamente posterior ao fechamento da chave, ou seja: $i_L(0^-) = i_L(0^+) = I_0$. Assim, em $t = 0^+$, a queda de tensão no resistor será I_0R , e a tensão nos terminais do indutor será dada pela tensão da fonte menos a queda de tensão no resistor, isto é, $v_L(0^+) = V_s - I_0R$.

Quando a corrente inicial no indutor é igual a zero, a equação (11) é simplificada para (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$v_L = V_s e^{(-\frac{R}{L})t} \quad (12)$$

Resposta a um degrau em circuitos RL

A **resposta a um degrau** é as correntes e as tensões que se estabelecem a partir de variações abruptas em fontes CC ligadas a um circuito. Pode existir ou não energia armazenada no circuito no instante em que a variação abrupta ocorre (NILSSON; RIEDEL, 2015).

Retornemos ao circuito mostrado na Figura 1. Para esse circuito, é evidente que a corrente $i(t)$ é zero antes de $t = 0$, e, portanto, podemos substituir a bateria e a chave por uma função forçante degrau de tensão $V_s u(t)$, que também não produz nenhuma resposta antes de $t = 0$. Após $t = 0$, os dois circuitos são claramente idênticos (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014). Podemos calcular a corrente $i(t)$ tanto no circuito original da Figura 1 quanto no circuito equivalente da Figura 2, a seguir.

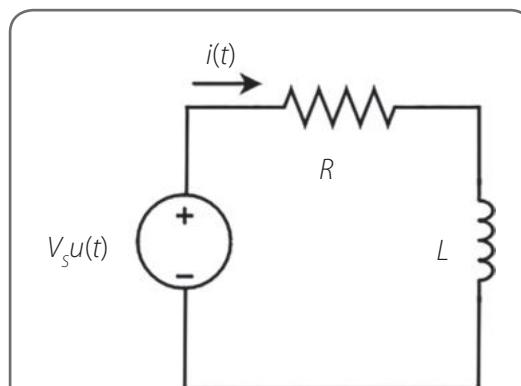


Figura 2. Circuito RL equivalente apresentando a mesma resposta $i(t)$ durante todo o tempo.

Assim, uma expressão válida descrevendo a resposta do circuito válida para todo t seria (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014):

$$i(t) = \left(\frac{V_S}{R} - \frac{V_S}{R} e^{-Rt/L} \right) u(t) \quad (13)$$

Essa equação também pode ser escrita em função da constante de tempo do circuito. Assim, temos que:

$$i(t) = \left(\frac{V_S}{R} - \frac{V_S}{R} e^{-t/\tau} \right) u(t) \quad (14)$$

As equações (13) e (14) apresentam a **resposta a um degrau** em circuitos RL. Observe que essas equações apresentam dois termos, um constante e um termo exponencial.



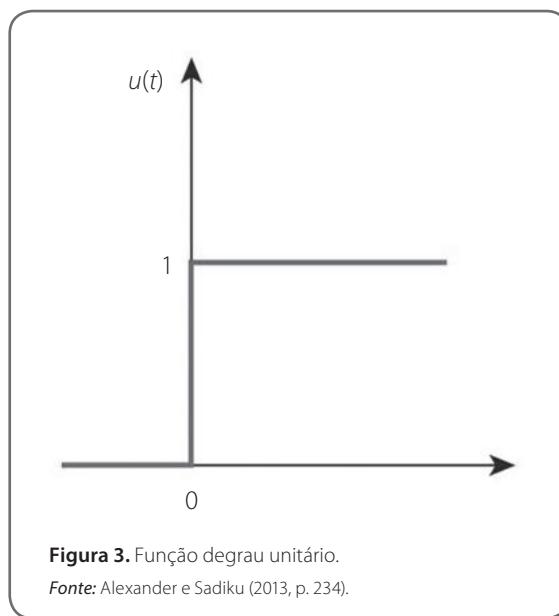
Saiba mais

As funções de singularidade (também conhecidas como **funções de comutação**) são muito úteis na análise de circuitos, pois servem como boas aproximações aos sinais de comutação que surgem em circuitos com operações de comutação, e também por serem úteis na descrição compacta e elegante de alguns fenômenos em circuitos, especialmente a resposta a um degrau de circuitos RC ou RL. As três funções de singularidade mais usadas na análise de circuitos são: **degrau unitário, impulso unitário** e **rampa unitária** (ALEXANDER; SADIQU, 2013).

A função degrau unitário $u(t)$ pode ser definida, em termos matemáticos, como (ALEXANDER; SADIQU, 2013):

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases} \quad (15)$$

Você pode observar que a função degrau unitário é indefinida em $t = 0$, em que ela muda abruptamente de 0 para 1 (ALEXANDE; SADIKU, 2013). Também convém destacar que essa função é adimensional. A Figura 3, a seguir, representa a função degrau unitário.



Se a mudança abrupta ocorrer em $t = t_0$ (em que $t_0 > 0$), em vez de $t = 0$, a função degrau unitário fica (ALEXANDER; SADIKU, 2013):

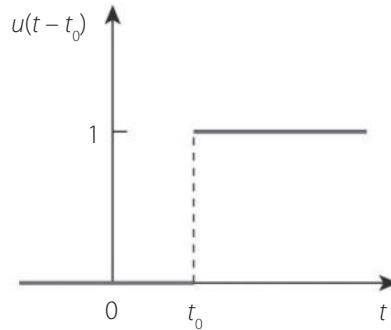
$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \quad (16)$$

A equação (16) equivale dizer que $u(t)$ está **atrasada** em t_0 segundos, como mostrado na Figura 4.

Se a mudança abrupta ocorrer em $t = -t_0$, a função degrau unitário fica (ALEXANDER; SADIKU, 2013):

$$u(t + t_0) = \begin{cases} 0, & t < -t_0 \\ 1, & t > -t_0 \end{cases} \quad (17)$$

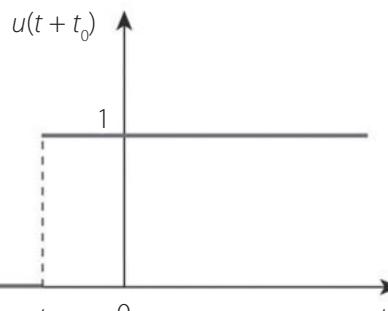
A equação (17) significa que $u(t)$ está **adiantada** em t_0 segundos, como mostrado na Figura 5.



(a)

Figura 4. Função degrau unitário atrasada de t_0 .

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 235).



(b)

Figura 5. Função degrau unitário adiantada de t_0 .

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 235).

Usamos a função degrau para representar uma mudança abrupta na tensão ou na corrente, como as mudanças que ocorrem em circuitos de sistemas de

controle e computadores digitais (ALEXANDER; SADIKU, 2013). Considere, por exemplo, a tensão dada por:

$$v(t) = \begin{cases} 0, & t < t_0 \\ 1, & t > t_0 \end{cases} \quad (18)$$

A tensão dada pela equação (18) pode ser expressa em termos da função degrau unitário como (ALEXANDER; SADIKU, 2013):

$$v(t) = V_s u(t - t_0) \quad (19)$$

Observe que, se fizermos $t_0 = 0$ na equação 19, $v(t)$ será simplesmente a tensão degrau $V_s u(t)$.



Saiba mais

A obra de Alexander e Sadiku (2013), em seu Capítulo 7, apresenta as definições e representações de outras duas funções de singularidade muito usadas na análise de circuitos: a função **impulso unitário** e a função **rampa unitária**.



Exemplo

No circuito da Figura 6, encontre $i(t)$ em $t = \infty$, $3-$, $3+$ e $100\mu\text{s}$ em e após a mudança de valor da fonte (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

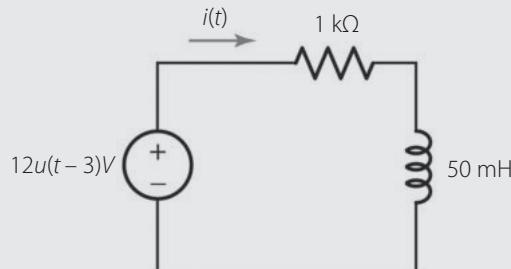


Figura 6. Circuito RL simples alimentado por um degrau de tensão.

Fonte: Hayt, Kemmerly e Durbin (2014, p. 280).

Solução:

Quando $t \rightarrow \infty$, não teremos os efeitos transitórios, e o circuito se torna um simples circuito CC alimentado por uma fonte de 12V. O indutor aparece como um curto-círcito, assim:

$$i(\infty) = \frac{12V}{1\ k\Omega} = 12mA$$

A corrente no instante $i(3^-)$ indica o instante de tempo imediatamente anterior à mudança de valor da fonte. Para $t < 3$, $u(t - 3) = 0$. Logo, $i(3^-) = 0$.

Em $t = 3^+$, a função forçante $12u(t - 3) = 12V$. No entanto, como a corrente do indutor não pode mudar em um tempo zero, $i(3^+) = i(3^-) = 0$.

A abordagem mais direta para analisar o circuito em $t > 0s$ é reescrever a equação (13) como:

$$i(t') = \left(\frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R} e^{-\frac{Rt}{L}} \right) u(t')$$

Note que essa equação também se aplica ao circuito, se deslocarmos o eixo do tempo de maneira que:

$$t' = t - 3$$

Portanto, com $V_s/R = 12mA$ e $R/L = 20.000s^{-1}$

$$i(t - 3) = (12 - 12e^{20.000(t - 3)})u(t - 3)mA$$

que pode ser reescrita mais simplesmente como:

$$i(t) = (12 - 12e^{20.000(t - 3)})u(t - 3)mA$$

Observe que a função degrau unitário força um valor zero para $t < 3$, conforme requerido. Substituindo $t = 3,0001s$ nas equações anteriores, obtemos $i = 10,38mA$ em um tempo $100\mu s$ após a mudança do valor da fonte.

Resposta forçada e resposta completa para circuitos RL

Após analisar um circuito RL com fontes e definir a resposta a um degrau para circuitos RL, analisaremos a equação que descreve a resposta forçada para circuitos RL.

De forma a estabelecer um procedimento mais direto, tentaremos interpretar os dois termos que aparecem na equação (14). O termo exponencial tem a forma da resposta natural do circuito RL — trata-se de uma exponencial negativa que se aproxima de zero à medida que o tempo aumenta e é caracterizada pela constante de tempo L/R (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014). A forma funcional dessa parte da resposta é idêntica àquela obtida para o circuito sem

fontes. No entanto, a amplitude desse termo exponencial depende da tensão V_s da fonte.

A equação (14) também tem um termo constante, V_s/R , o qual está presente porque a resposta natural aproxima-se de zero à medida que a energia é gradualmente dissipada, mas a resposta total não deve aproximar-se de zero. No final, o circuito se comporta como um resistor e um indutor em série com uma bateria. Como o indutor se comporta como um curto-círcito para CC, a única corrente que flui agora é V_s/R . Essa corrente é a parte da resposta que pode ser diretamente atribuída à função forçante, a qual chamaremos de **resposta forçada**. Ela é a resposta que está presente em um longo tempo após o fechamento da chave (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Neste momento, podemos definir a **resposta completa** para circuitos RL, a qual é composta de duas partes: a **resposta natural** e a **resposta forçada**. A resposta natural é uma característica do circuito, e não das fontes. Sua forma pode ser encontrada considerando-se o circuito sem fontes, e ela tem uma amplitude que depende da amplitude inicial da fonte e da energia inicial armazenada. A resposta forçada tem as características da função forçante; ela é encontrada supondo-se que todas as chaves tenham sido acionadas muito tempo atrás (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Considerando a energia inicial armazenada, ou seja, $I_0 \neq 0$, podemos reescrever a equação (13), que descreve um degrau em circuitos RL, como sendo, para $t \geq 0$ (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$i(t) = \frac{V_s}{R} + \left(I_0 - \frac{V_s}{R} \right) e^{\left(-\frac{R}{L} \right)t} \quad (20)$$

Veja que essa equação é idêntica à equação (8). Essas equações nos dão a resposta de um circuito RL após a inclusão da fonte, ou seja, a resposta ao degrau. Vale destacar que a representação “ $u(t)$ ” para a resposta ao degrau pode ser suprimida ao indicarmos que a expressão é válida para $t \geq 0$.

Podemos rearranjar os termos da equação (20), para obtermos:

$$i(t) = I_0 e^{\left(-\frac{R}{L} \right)t} + \frac{V_s}{R} - \frac{V_s}{R} e^{\left(-\frac{R}{L} \right)t} \quad (21)$$

A equação (21) é formada por duas partes: $I_0 e^{-Rt/L}$ e $\frac{V_S}{R} - \frac{V_S}{R} e^{-Rt/L}$. Observe que o primeiro termo se refere à resposta natural para circuitos RL, enquanto o segundo termo é a resposta forçada para esses circuitos. Assim, podemos representar a resposta completa para um circuito RL como sendo a soma de sua resposta natural com sua resposta forçada (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014):

$$i(t) = i_n(t) + i_f(t) \quad (22)$$

Na equação (22), $i_n(t)$ representa a resposta natural, e $i_f(t)$, a componente forçada para um circuito RL.



Fique atento

A resposta completa é dada pela soma da resposta natural (energia armazenada) com a resposta forçada (fonte independente). Outra maneira de observar a resposta completa é dividindo-a em duas componentes: resposta transiente (parte temporária) e resposta em regime estacionário (parte permanente).

- Resposta completa = resposta natural + resposta forçada.
- Resposta completa = resposta transiente + resposta em regime estacionário.



Referências

- ALEXANDER, C. K.; SADIQU, M. N. O. *Fundamentos de circuitos elétricos com aplicações*. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.
- HAYT, W. H.; KEMMERLY, J. E.; DURBIN, S. M. *Análise de circuitos em engenharia*. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.
- NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. *Circuitos elétricos*. 10. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2015.
- SADIQU, M. N. O.; ALEXANDER, C. K.; MUSA, S. *Análise de circuitos elétricos com aplicações*. Porto Alegre: AMGH, 2015.

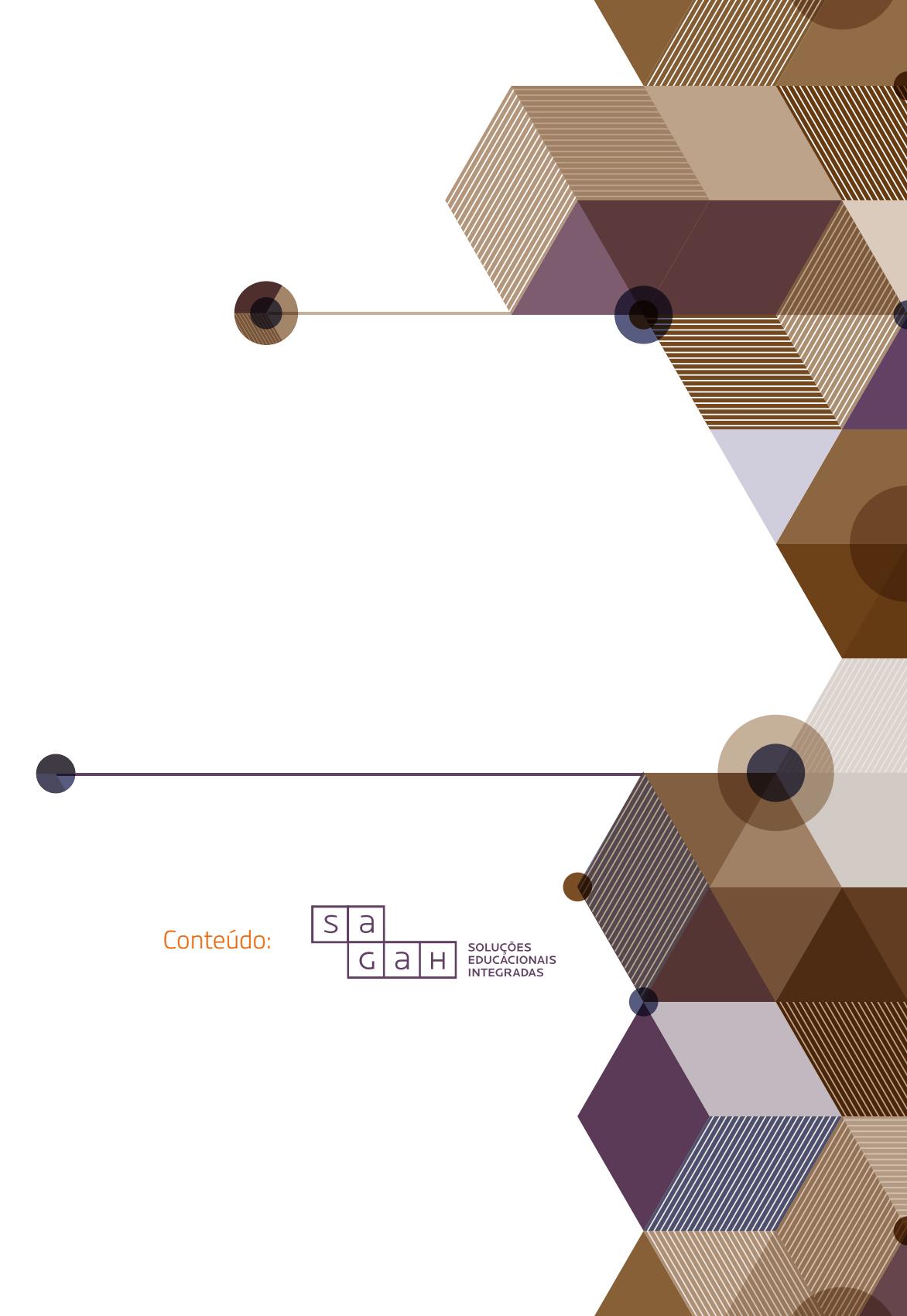
Leituras recomendadas

DORF, R. C.; SVOBODA, J. A. *Introdução aos circuitos elétricos*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

NAHVI, M.; EDMINISTER, J. A. *Circuitos elétricos*. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

THOMAS, R. E.; ROSA, A. J.; TOUSSAINT, G. J. *Análise e projeto de circuitos elétricos lineares*. Porto Alegre: Bookman, 2011.

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.



Conteúdo:



SOLUÇÕES
EDUCACIONAIS
INTEGRADAS



DICA DO PROFESSOR

Sabe-se que a resposta de circuitos RL e RC na ausência de fontes é chamada de resposta natural. Quando fontes de energia são subitamente aplicadas a um circuito, ocorre a resposta forçada.

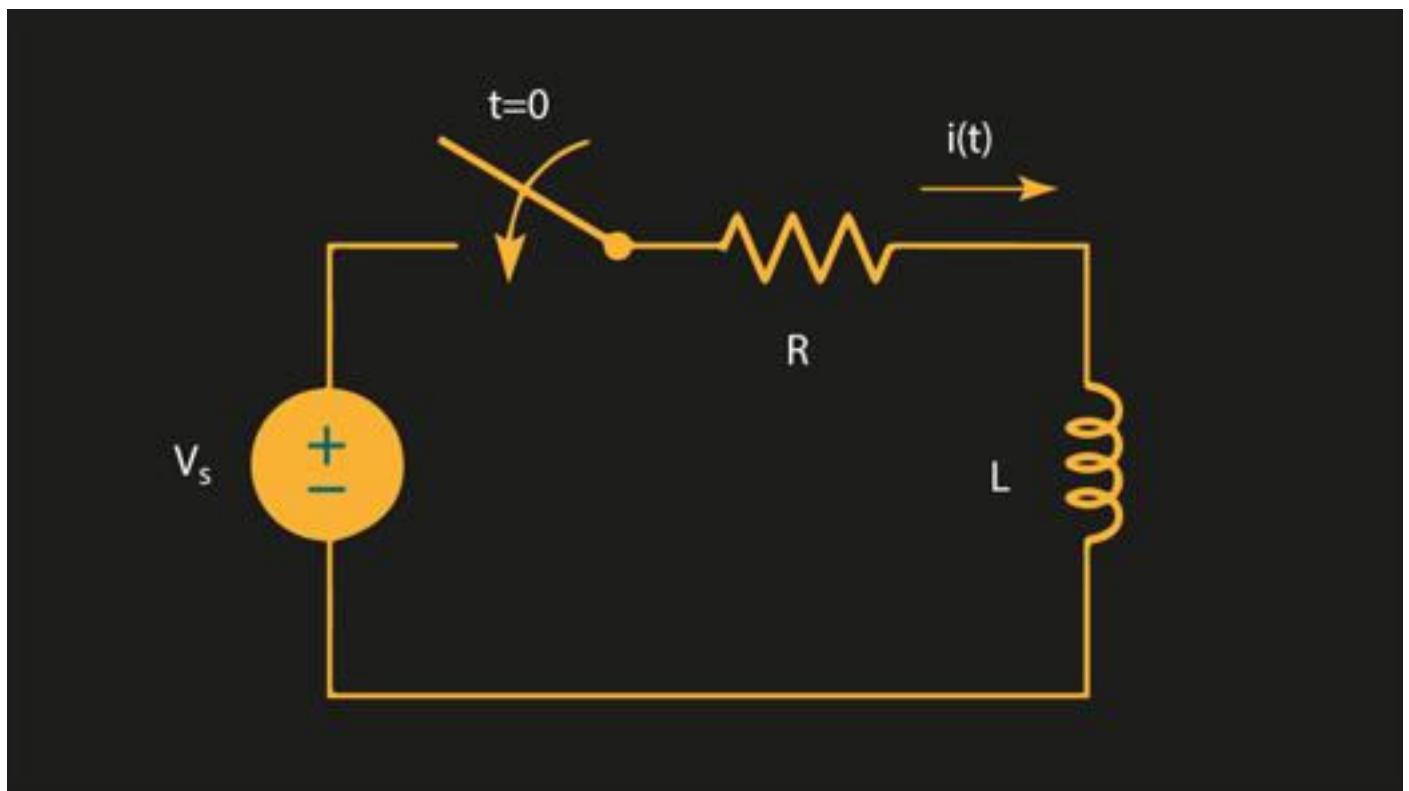
Nesta Dica do Professor, você verá a função degrau unitário, uma importante função forçante utilizada para representar a inclusão de fontes de tensão ou correntes em um circuito.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!



EXERCÍCIOS

- 1) Para o circuito RL da figura, considerando que a energia inicial no indutor seja nula, assinale a alternativa que descreve a expressão para a corrente $i(t)$ após a chave ter sido fechada, sendo $V_s=9V$, $R= 1k\Omega$ e $L=1H$.



A) $i(t)=0 \text{ A}$

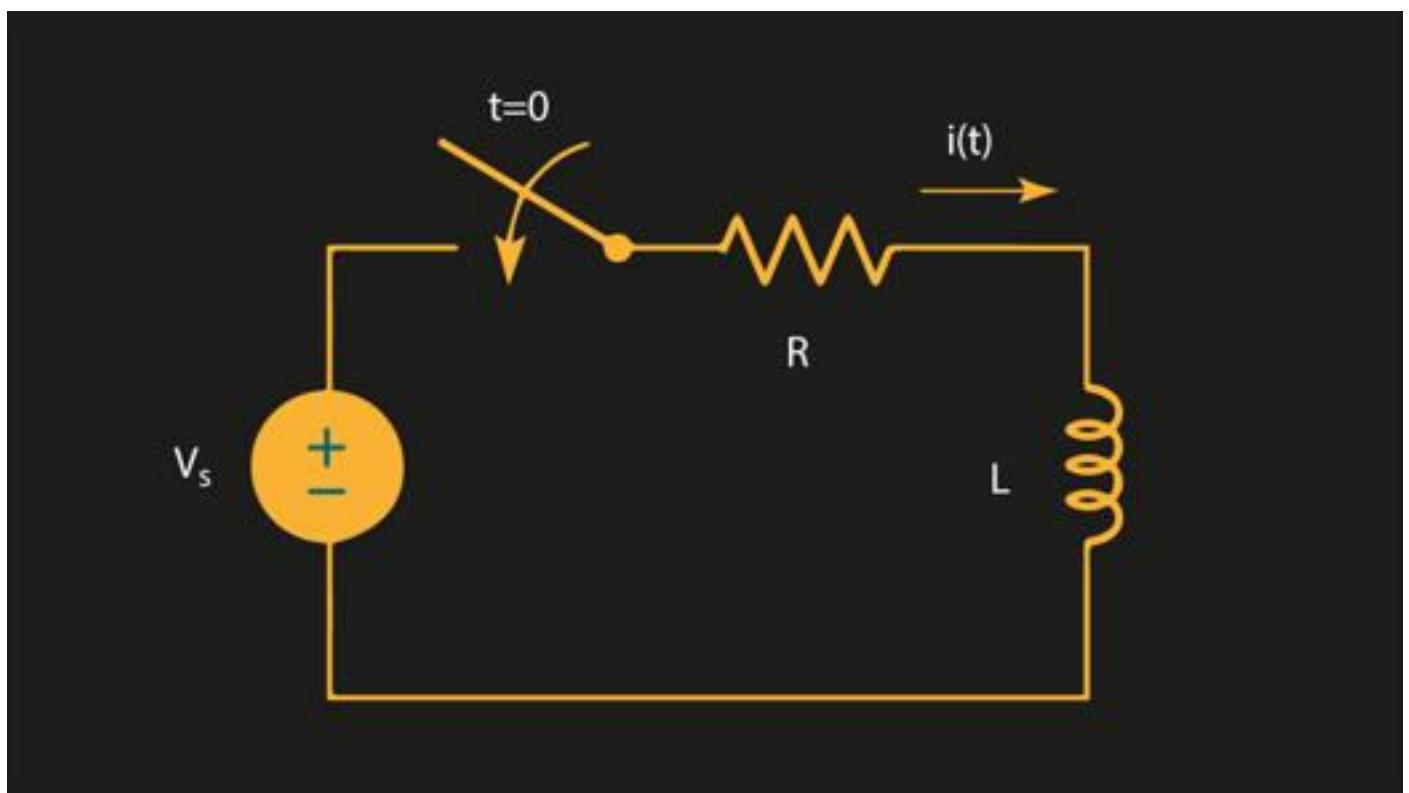
B) $i(t)=9e^{-1000t} \text{ mA}$

C) $i(t)=(9-9e^{-1000t}) \text{ A}$

D) $i(t)=(9-9e^{-1000t}) \text{ mA}$

E) $i(t)=(9-9e^{-100t}) \text{ mA}$

2) Para o circuito mostrado na figura, assinale a alternativa que descreve a expressão para a corrente $i(t)$ antes de a chave ter sido fechada, sendo $V_s=12\text{V}$, $R=1\text{k}\Omega$ e $L=1\text{H}$.



A) $i(t)=0 \text{ A}$

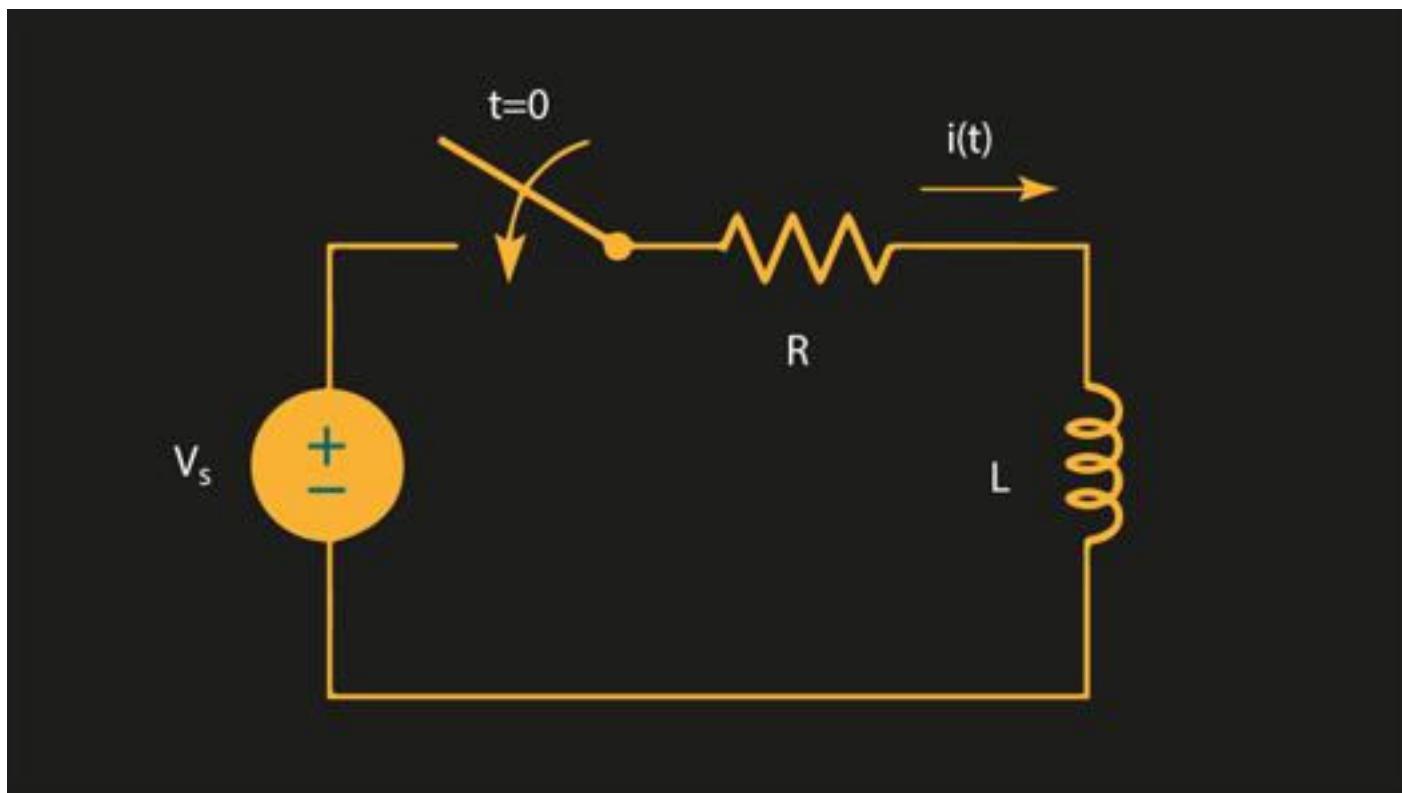
B) $i(t)=12e^{-1000t} \text{ mA}$

C) $i(t) = (12 - 12e^{-1000t}) \text{ A}$

D) $i(t) = (12 - 12e^{-1000t}) \text{ mA}$

E) $i(t) = (12 - 12e^{-100t}) \text{ mA}$

3) A chave do circuito mostrado na figura esteve aberta por um longo tempo. Em $t=0$, ela é fechada. Assinale a alternativa que descreve a expressão para a corrente $i(t)$ após a chave ter sido fechada, sendo $V_s = 24\text{V}$, $I_0 = 6\text{mA}$, $R = 2\text{k}\Omega$ e $L = 1\text{H}$.



A) $i(t) = 0 \text{ A}$

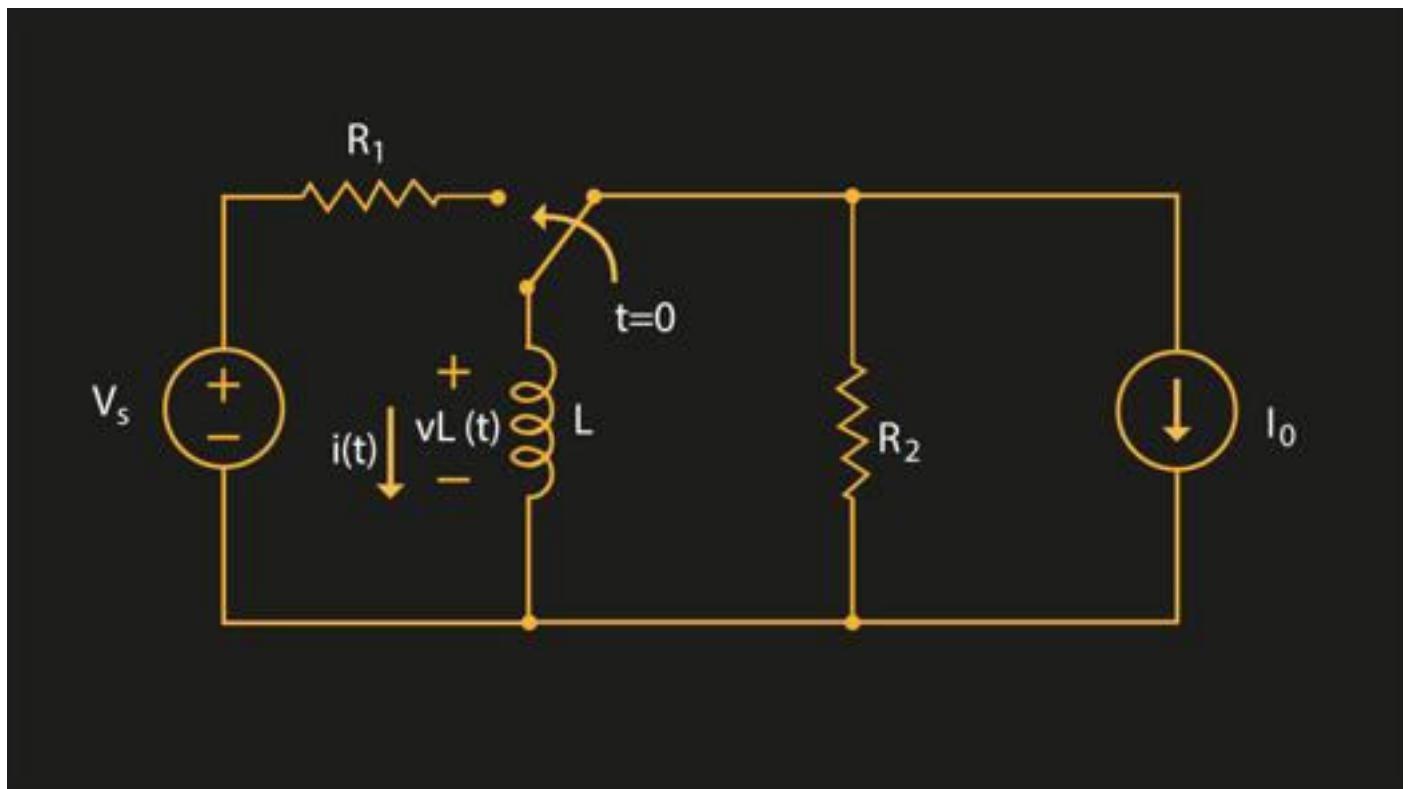
B) $i(t) = 24e^{-2000t} \text{ mA}$

C) $i(t) = (24 - 24e^{-2000t}) \text{ A}$

D) $i(t) = (12 - 12e^{-2000t}) \text{ mA}$

E) $i(t) = (12 - 6e^{-2000t}) \text{ mA}$

4) A chave na figura esteve na posição “a” por um longo tempo antes de ser movida para a posição “b” em $t=0$. Considere os seguintes valores para os componentes do circuito: $V_s = 12\text{V}$; $R_1 = 1\text{k}\Omega$; $R_2 = 10\text{k}\Omega$; $I_0 = 4\text{mA}$; $L = 1\text{H}$.



Assinale a alternativa que apresenta a tensão inicial no indutor imediatamente após a chave ter passado para a posição “b”.

A) 0V

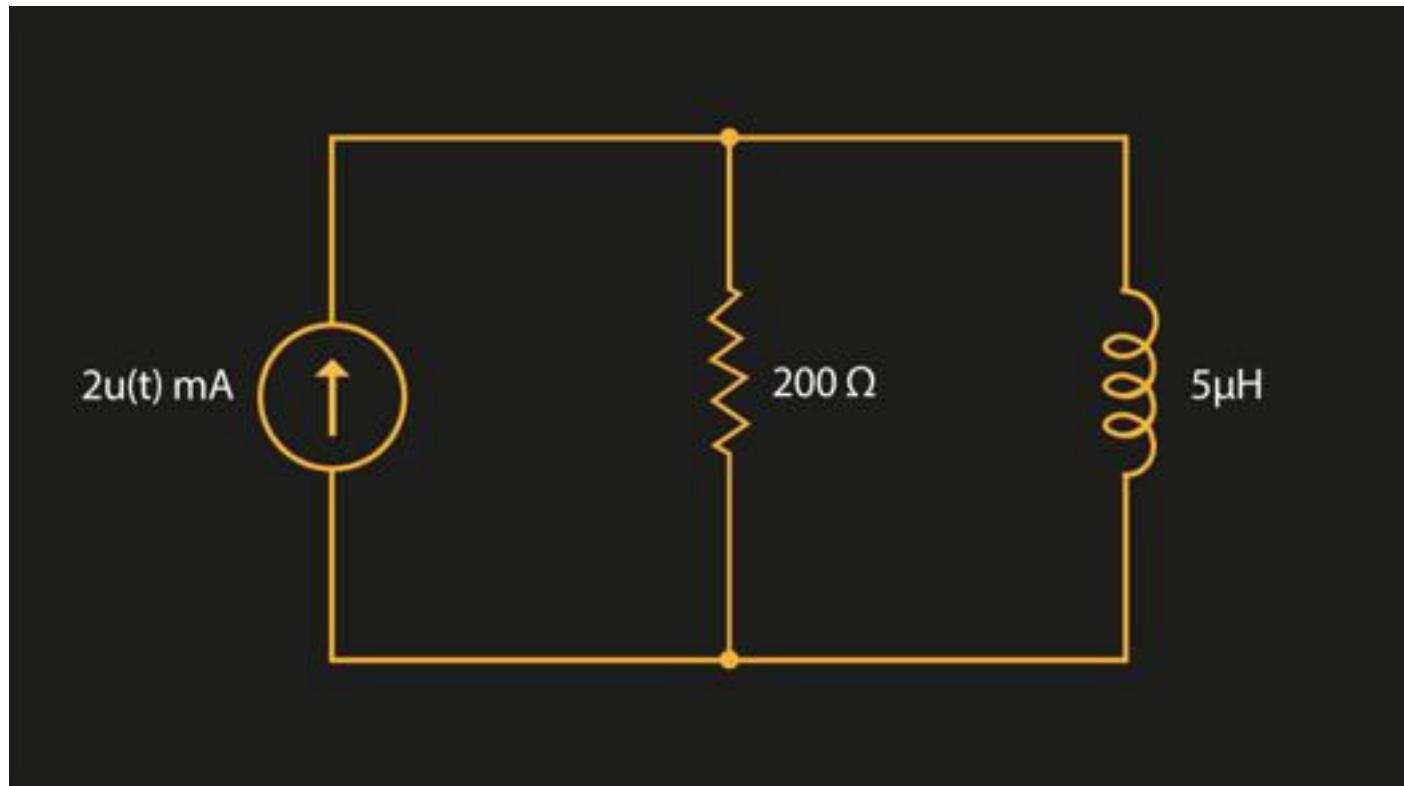
B) 4V

C) 8V

D) 12V

E) 16V

5) Assinale a alternativa que apresenta os valores de $i_L(0^-)$, $i_L(0^+)$, $v_L(0^-)$ e $v_L(0^+)$ para o circuito mostrado na figura.



A) 0A, 0A, 0V, 0V

B) 0A, 2mA, 0V, 0V

C) 0A, 2mA, 0V, 0.4V

D) 0A, 0A, 0V, 0.4V

E) 0A, 0A, 0V, 400V



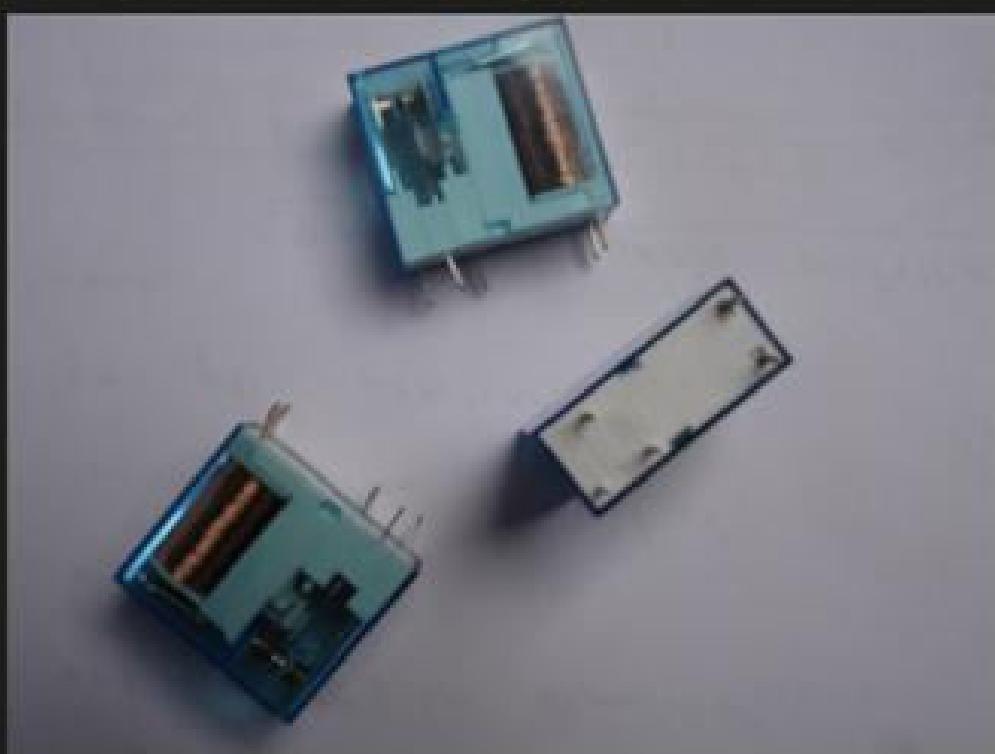
NA PRÁTICA

Circuitos com indutores estão presentes em diversas aplicações de engenharia. Uma das aplicações é o uso de circuitos de relé.

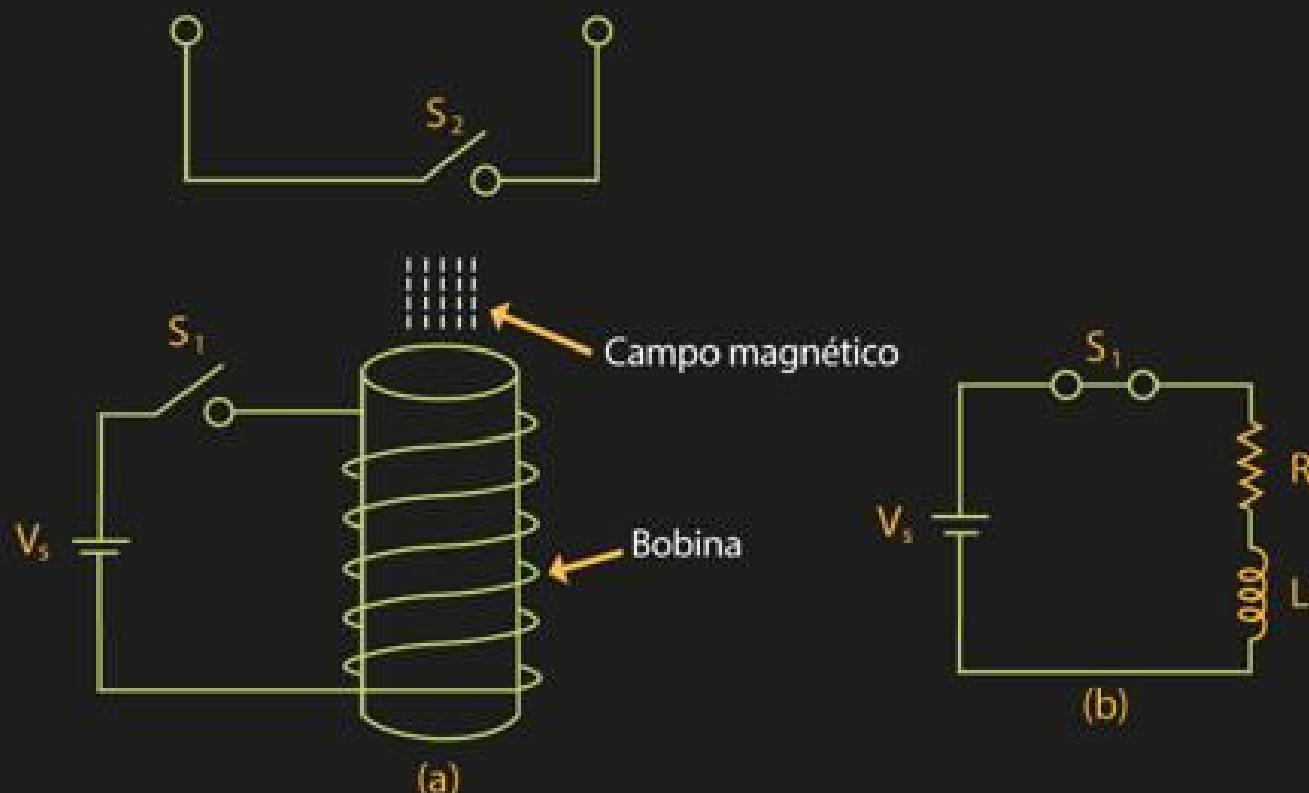
Observe esta importante aplicação para circuitos RL e sua resposta forçada.

► Muitos indutores (bobinas) usualmente estão em forma discreta e tendem a ser volumosos e caros. Isso não é tipicamente verdade para indutores usados em chaveamentos de potência e filtros EMI/RFI. Por essa razão, indutores não são versáteis como os capacitores e resistores e são limitados em aplicações. No entanto, há várias aplicações em que indutores não têm substitutos. São comumente usados em relés, atrasadores, dispositivos de detecção, pick-up heads, circuitos de telefone, circuitos sintonizadores, receptores de rádio e TV, filtros de fonte de energia, motores elétricos, microfones e alto-falantes, por exemplo.

Uma chave controlada magneticamente é chamada de relé.



► Um relé é um dispositivo eletromagnético utilizado para abrir ou fechar uma chave que controla outro circuito. Veja, na imagem a seguir, um circuito de relé típico. Note que utiliza um eletroímã. Este é um dispositivo que consiste em uma bobina de fio enrolado em volta de um núcleo de ferro. O circuito de uma bobina é um circuito RL, como mostrado em b, em que R e L são a resistência e a indutância da bobina.



► Quando a chave S1 é fechada, o circuito da bobina é energizado. A corrente na bobina aumenta gradualmente e produz um campo magnético. Por fim, o campo magnético é suficientemente forte para puxar o contato móvel no outro circuito e fechar a chave S2.

Os relés são muito úteis quando há a necessidade de controlar uma grande quantidade de corrente e/ou tensão com um pequeno sinal elétrico. Tal corrente/tensão elevada é gerada pelo colapso do campo do relé. Os relés eram utilizados nos primeiros circuitos digitais e ainda são utilizados para chavear circuitos de alta potência.



SAIBA MAIS

Para ampliar o seu conhecimento a respeito desse assunto, veja abaixo as sugestões do professor:

Círculo RL

Neste site, você encontrará uma revisão do circuito RL em série a partir do equacionamento, utilizando as leis de Kirchhoff, sendo apresentado o comportamento da corrente nesses circuitos.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Multisim

Neste *link*, você poderá adquirir o *software* Multisim, um ambiente de simulação SPICE padrão da indústria e o *software* de projeto de circuitos para o ensino e a pesquisa de eletrônica digital, analógica e de potência. É possível efetuar o *download* da versão de estudante.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Scilab

Neste *link*, você terá acesso para efetuar o *download* do *software* Scilab. Este *software* matemático poderá ser utilizado para cálculo e plotagem de curvas, dentre outras aplicações.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Círculo RL fonte constante - EDO da corrente

Neste *link*, você acessa o vídeo e confere como equacionar um circuito RL série e solucionar a equação diferencial obtida.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Círculo RL em corrente contínua

Neste *link*, você acessa um vídeo em que confere o exercício resolvido para um circuito RL em corrente contínua.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!



APRESENTAÇÃO

Circuitos RL são formados por resistores e indutores. Quando não há fontes no circuito, tem-se a resposta natural ou transitória. Isso porque essa resposta, de tensão ou corrente, é determinada pela natureza do circuito. Como não há fontes no circuito, a energia armazenada no indutor será fornecida a uma rede resistiva. Esses circuitos têm diversas aplicações práticas em diferentes áreas da engenharia, como em equipamentos de comunicação, filtros e máquinas elétricas.

Nesta Unidade de Aprendizagem, você estudará sobre circuitos RL sem fontes e sobre o parâmetro conhecido como constante de tempo de circuitos RL, além de analisar a equação que descreve o comportamento da resposta natural para esses circuitos.

Bons estudos.

Ao final desta Unidade de Aprendizagem, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Diferenciar circuitos RL sem fontes.
- Definir constante de tempo para circuitos RL.
- Analisar a equação que descreve a resposta natural para circuitos RL.



INFOGRÁFICO

A resposta de tensão ou corrente para um circuito RL sem fontes é chamada de resposta natural, que dará o comportamento da tensão ou da corrente e pode ser obtida utilizando as leis e técnicas já conhecidas para análise de circuitos.

Acompanhe, no infográfico, um resumo das etapas para o cálculo da resposta natural de um circuito RL a partir de um exemplo.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!



CONTEÚDO DO LIVRO

Apesar de parecer muito elementar, a análise de circuitos RL é importante, pois esses circuitos têm diversas aplicações práticas. Como exemplo para estas aplicações, é possível citar equipamentos de comunicação, filtros e máquinas elétricas.

No capítulo Resposta natural para circuitos RL, da obra *Circuitos elétricos II, base teórica para esta Unidade de Aprendizagem*, você estudará mais sobre os circuitos RL, a constante de tempo e a equação que descreve o comportamento da resposta natural para estes circuitos.

Boa leitura.

CIRCUITOS ELÉTRICOS II

Lizandro de
Souza Oliveira

Resposta natural para circuitos RL

Objetivos de aprendizagem

Ao final desse texto, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Diferenciar circuitos RL sem fontes.
- Definir constante de tempo para circuitos RL.
- Analisar a equação que descreve a resposta natural para circuitos RL.

Introdução

A análise de circuitos contendo indutores está relacionada à solução das equações íntegro-diferenciais, que caracterizam os circuitos. Essa análise é básica para a compreensão do comportamento de diversos circuitos, com aplicação em diversas áreas das engenharias elétrica e eletrônica.

Neste capítulo, você vai estudar circuitos formados por resistores e indutores ou, de maneira mais precisa, circuitos que poderão ser representados por um resistor equivalente associado com um indutor equivalente. Esses circuitos, chamados de circuitos RL, serão analisados sem a inclusão de fontes. Você também vai estudar a constante de tempo e vai analisar a equação que descreve a resposta natural para circuitos RL.

Círcuito RL sem fontes

Um circuito RL é um circuito formado por resistores e indutores. Caso tenezhamos mais de um resistor ou mais de um indutor no circuito, poderemos utilizar as técnicas para análise de circuitos a fim de reduzi-los para uma associação desses componentes, obtendo, assim, uma resistência equivalente (R_{eq}) e uma indutância equivalente (L_{eq}). Podemos ter um circuito RL em série ou um circuito RL em paralelo. Como você deve concluir, tais nomenclaturas referem-se à associação (série ou paralelo) desses componentes.

Quando não consideramos fontes independentes agindo sobre um circuito, teremos a chamada **resposta natural** do circuito. A resposta natural deve chegar a um fim e, por essa razão, ela é frequentemente chamada de **resposta transitória** (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Essa resposta transitória de um circuito é obtida a partir da solução da equação diferencial que descreve o comportamento desse circuito. Considere o circuito RL em série na Figura 1, em que mostramos um circuito RL em série, sem fontes.

A partir da Lei de Kirchhoff para tensão, temos que:

$$v_R(t) + v_L(t) = 0 \quad (1)$$

Na equação 1, substituímos as expressões para a tensão no resistor e para a tensão no indutor, obtendo a seguinte expressão temporal para o circuito:

$$Ri(t) + L \frac{di}{dt} = 0 \quad (2)$$

Como era esperado, temos uma equação diferencial de primeira ordem. Isso porque temos apenas um elemento que armazena energia (o indutor, nesse caso).

A equação 2 pode ser reescrita dividindo os termos pela indutância L :

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = 0 \quad (3)$$

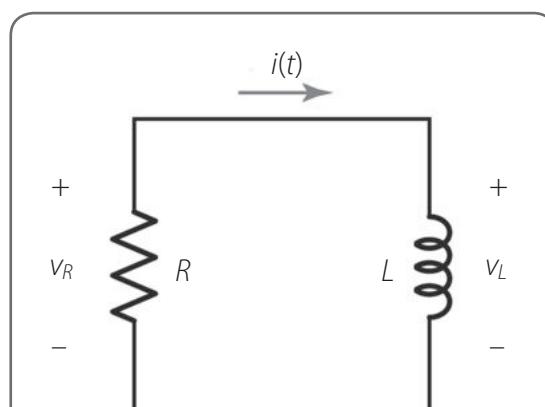


Figura 1. Circuito RL série — sem fontes.

Fonte: Hayt, Kemmerly e Durbin (2014, p. 254).

Para que possamos analisar a resposta natural do circuito RL, devemos obter uma expressão para a corrente $i(t)$ que satisfaça a equação 3.

A solução para a equação 3 pode ser obtida com a utilização de diferentes métodos. Um método muito direto de resolver uma equação diferencial consiste em escrever a equação de maneira tal que as variáveis fiquem separadas, integrando, então, cada lado da equação (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Observe que as variáveis da equação 3 são a corrente $i(t)$ e o tempo t . Essa equação pode ser multiplicada por um tempo diferencial dt . Além disso, vamos transferir o termo $i(t)$ para o lado direito, resultando em:

$$\frac{di}{dt} dt = -\frac{R}{L} i(t) dt \quad (4)$$

A equação 4 pode, então, ser dividida por $i(t)$ e obtemos:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L} dt \quad (5)$$



Fique atento

Observe que, na equação 4, a corrente $i(t)$ foi representada, por questão de simplicidade, por i . Esta notação é bastante utilizada em diversas obras sobre circuitos elétricos.

Para obtermos a solução da equação 5, integraremos ambos os lados dessa equação entre os limites correspondentes. Obteremos, assim, uma expressão para a corrente $i(t)$ como uma função do tempo t . Utilizando x e y como variáveis de integração, temos (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L} \int_{t_0}^t dy \quad (6)$$

Na equação 6, $i(t_0)$ é a corrente correspondente ao tempo t_0 , ou seja, em $t=0$. Similarmente, $i(t)$ é a corrente correspondente ao tempo t . Observe que as grandezas R e L são constantes, isto é, não são funções da variável dependente i , nem da variável independente t .

Realizando a integração indicada pela equação 6, temos que:

$$\ln x|_{i(0)}^{i(t)} = -\frac{R}{L} y|_{I_0}^t \quad (7)$$

A partir da equação 7, temos que:

$$\ln i(t) - \ln i(0) = -\frac{R}{L} (t - t_0) \quad (8)$$

Vamos considerar o tempo inicial como sendo $t_0 = 0$. Representaremos o valor de $i(t)$ em $t = 0$ como I_0 . Em outras palavras, $i(0) = I_0$ (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014). A partir dessas considerações, e resolvendo a equação 8 com a utilização da propriedade dos logaritmos para o quociente, temos que:

$$\ln \frac{i(t)}{I_0} = -\frac{R}{L} t \quad (9)$$

A partir da equação 9, vemos que a corrente $i(t)$ é dada por (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014):

$$i(t) = I_0 e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} \quad (10)$$

A equação 10 nos dá a **resposta natural** de um circuito RL. A partir desta equação, podemos determinar a corrente em qualquer instante de tempo $t \geq 0$. Assim, verifique que a substituição de $t = 0$ na equação 10 resultará em $i(0) = I_0$:

$$i(0) = I_0 e^{(0)}$$

$$\therefore i(0) = I_0$$

Observe, ainda, que a substituição da equação 10 na equação 3 resulta na identidade $0 = 0$:

$$\frac{d \left[I_0 e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} \right]}{dt} + \frac{R}{L} I_0 e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} = 0$$

$$-I_0 \left(\frac{R}{L}\right) e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} + \frac{R}{L} I_0 e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} = 0$$

$$\therefore 0 = 0$$

Verificamos nossa solução mostrando que esses dois passos são necessários, ou seja, a solução deve satisfazer a equação diferencial que caracteriza o circuito e deve também satisfazer a condição inicial (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Considere o exemplo a seguir, da Figura 2, em que vamos determinar a corrente em um determinado instante de tempo a partir da obtenção da resposta natural de um circuito RL.



Exemplo

Se o indutor da Figura 2 tiver uma corrente $i_L = 2\text{ A}$ em $t = 0$, obtenha uma expressão para $i_L(t)$ válida para $t > 0$ e seu valor em $t = 200\text{ }\mu\text{s}$ (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

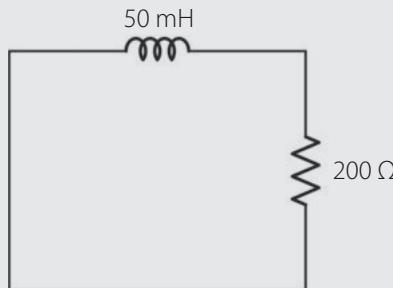


Figura 2. Circuito RL série em que a energia é armazenada no indutor em $t = 0$.

Fonte: Hayt, Kemmerly e Durbin (2014, p. 255).

Solução:

Para esse circuito, esperamos uma corrente dada pela equação 10, em que $R = 200\text{ }\Omega$, $L = 50\text{ mH}$ e I_0 é a corrente inicial no indutor em $t = 0$. Portanto, temos que:

$$i_L(t) = 2e^{\left(-\frac{200\Omega}{50mH}\right)t}$$

$$i_L(t) = 2e^{(-4000)t}$$

Para encontrar o valor de $i_L(t)$ em $t = 200\mu\text{s}$, basta substituirmos, na expressão encontrada, para $i_L(t)$:

$$i_L(200\mu\text{s}) = 2e^{(-4000)(200\mu\text{s})}$$

$$i_L(200\mu\text{s}) = 898,7mA$$



Fique atento

Caso tenhamos que determinar a corrente inicial em um indutor a partir da retirada repentina de uma fonte, determinaremos a corrente no indutor no instante anterior à abertura da chave, $i_L(0^-)$. Essa corrente pode ser igual à da corrente no indutor no instante imediatamente posterior à abertura da chave, $i_L(0^+)$. Como a corrente em um indutor não pode variar instantaneamente, podemos determinar a corrente inicial no indutor: $i_L(0^-) = i_L(0^+) = I_0$.

Em algumas situações, podemos ter circuitos formados por vários resistores e indutores. Para esses casos, determinaremos a resposta natural para o circuito RL a partir da análise do circuito. Considere o exemplo a seguir.



Exemplo

A chave, no circuito da Figura 3, está fechada por um longo tempo. Em $t = 0$, a chave é aberta. Calcule $i(t)$ para $t \geq 0$ (SADIKU; ALEXANDER; MUSA, 2015).

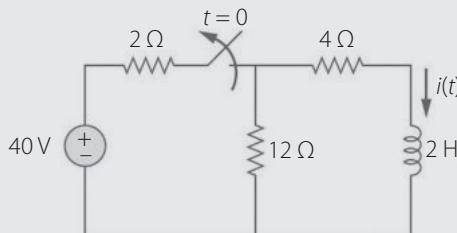


Figura 3. Circuito RL para o exemplo.

Fonte: Sadiku, Alexander e Musa (2015, p. 270).

Solução:

Iniciamos a análise desse circuito para um tempo $t < 0$. Dessa forma, teremos como determinar a corrente inicial no indutor, já que a corrente no indutor não sofre variações instantâneas. Quando $t < 0$, a chave está fechada e o indutor atua como um curto-círcuito. O circuito resultante é mostrado na Figura 4a. Determinamos a corrente i_1 a partir do resistor equivalente formado pela associação série do resistor de 2Ω com o resistor resultante da associação em paralelo dos resistores de 4Ω e 12Ω . Assim, temos que o resistor resultante da associação em paralelo é dado por:

$$R = \frac{(4\Omega)(12\Omega)}{(4\Omega + 12\Omega)} = 3\Omega$$

Assim, a corrente i_1 pode ser determinada da seguinte forma:

$$i_1 = \frac{40V}{(2\Omega + 3\Omega)} = 8A$$

A corrente $i(t)$ pode ser obtida a partir de i_1 , utilizando o divisor de corrente:

$$i(t) = \frac{(12\Omega)}{(12\Omega + 4\Omega)} i_1 = 6A, t < 0$$

A corrente $i(t)$ circula no indutor. Como essa corrente não pode variar instantaneamente, temos que:

$$i(0) = 6A$$

Analisando o circuito para $t > 0$, a chave está aberta e a tensão é desconectada. Temos, portanto, o circuito RL mostrado na Figura 4b. Para esse circuito, calculamos o resistor equivalente:

$$R_{eq} = 12\Omega + 4\Omega = 16\Omega$$

Por fim, apresentamos a expressão para a resposta natural $i(t)$ a esse circuito, a partir da equação 10 (Figura 4):

$$i(t) = I_0 e^{(-\frac{R}{L})t}$$

$$i(t) = 6e^{(-\frac{16\Omega}{2H})t}$$

$$\therefore i(t) = 6e^{-8t}A$$

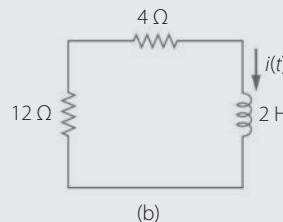
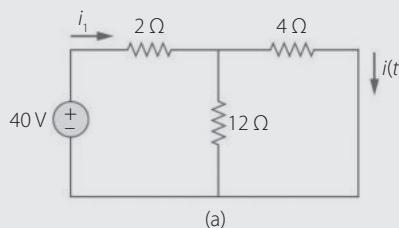


Figura 4. Resolução do circuito da Figura 3 para: (a) $t < 0$, (b) $t > 0$.

Fonte: Sadiku, Alexander e Musa (2015, p. 270).



Fique atento

Podemos enxergar o indutor como um **curto-círculo** para **corrente contínua (CC)**.

Tensão no resistor

Agora, que já conhecemos a expressão para a corrente no circuito RL, dada pela equação 10, podemos determinar a tensão no resistor a partir da aplicação da lei de Ohm. Assim, para o circuito da Figura 1, temos que (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$v_R(t) = Ri(t) = I_0 Re^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} \quad (11)$$

Potência dissipada no resistor

A potência dissipada no resistor pode ser calculada pelas expressões já conhecidas, resultando em (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014):

$$p_R(t) = I_0^2 Re^{-2(R/L)t} \quad (12)$$

Observe que, a partir da equação 12, podemos determinar a potência dissipada no resistor em qualquer instante de tempo. Podemos dizer, portanto, que estaremos determinando a **potência instantânea**.



Fique atento

Lembre-se das equações para o cálculo de potência em um resistor percorrido por uma corrente: $p = vi$, $p = i^2R$ ou $p = \frac{V^2}{R}$.

Energia fornecida ao resistor

A energia total transformada em calor no resistor é encontrada integrando-se a potência instantânea $p_R(t)$ desde o instante inicial até o instante final, obtendo (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$\begin{aligned} w_R(t) &= \int_0^t p_R dx = \int_0^t I_0^2 R e^{-2(R/L)x} dx \\ w_R(t) &= \frac{1}{2(R/L)} I_0^2 R (1 - e^{-2(R/L)t}) \\ \therefore w_R(t) &= \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - e^{-2(R/L)t}) \end{aligned} \quad (13)$$

Podemos determinar, a partir da equação 13, que a energia total transformada em calor no resistor é encontrada integrando-se a potência instantânea da equação 12 desde o instante zero até infinito, obtendo (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014):

$$w_R = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad (14)$$

Esse é o resultado que esperamos, porque é a energia inicial armazenada no indutor. Como você pode observar pela equação 13, não haverá nenhuma energia armazenada no indutor no tempo infinito. Isso porque sua corrente é zero para um tempo $t \rightarrow \infty$, o que pode ser observado na equação 10. Portanto, toda energia inicial já foi dissipada no resistor (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Constante de tempo para circuitos RL

Vamos retornar à equação 10. A corrente em $t = 0$ tem o valor I_0 . Como você pode observar, temos uma equação exponencial de crescente e, com isso, à medida que o tempo aumenta, a corrente diminui e se aproxima de zero. A forma desse decaimento exponencial é vista no gráfico $i(t) / I_0$ versus t mostrado na Figura 5.

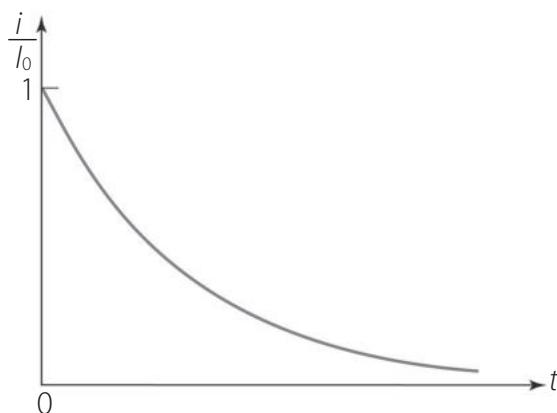


Figura 5. Gráfico de $e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$ versus t .

Fonte: Hayt, Kemmerly e Durbin (2014, p. 260).

As expressões para $i(t)$ e $v(t)$, dadas pelas equações 10 e 11, respectivamente, incluem um termo na forma $e^{-(R/L)t}$. O termo de t , dado por R/L determina a taxa a que a corrente ou tensão se aproxima de zero. A recíproca dessa razão é a **constante de tempo** do circuito (NILSSON; RIEDEL, 2015). Assim, a constante de tempo para o circuito RL é representada pela letra grega τ (tau) e dada por (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014):

$$\tau = \frac{L}{R}$$

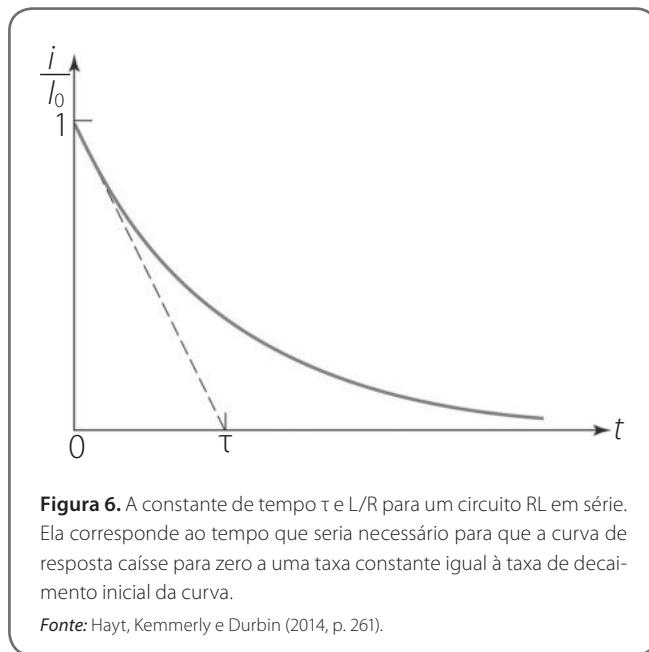
A unidade para a constante de tempo τ é o segundo, pois o expoente $-Rt/L$ deve ser a dimensional (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).



Saiba mais

Quanto menor a constante de tempo τ de um circuito, mais rápida a taxa de decaimento da resposta. Quanto maior for a constante de tempo, mais lenta a taxa de decaimento da resposta. A qualquer taxa, a resposta cai para menos de um por cento de seu valor inicial (ou seja, atinge seu regime estacionário) após 5τ (ALEXANDER; SADIQU, 2013).

A constante de tempo de um circuito RL em série pode ser determinada graficamente a partir da curva de resposta, conforme vemos na Figura 6: só é necessário traçar a tangente à curva em $t = 0$ e determinar o ponto de interseção dessa tangente como eixo do tempo. Essa é geralmente uma maneira conveniente de se obter de forma aproximada a constante de tempo a partir da tela de um osciloscópio (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).



Resposta natural para circuitos RL

Após analisar um circuito RL sem fontes e definir a constante de tempo para circuitos RL em série, vamos analisar a equação que descreve a resposta natural para circuitos RL.

Usando o conceito de constante de tempo, escrevemos as expressões para corrente, tensão, potência e energia como (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} \quad (16)$$

$$v_R(t) = I_0 R e^{-t/\tau} \quad (17)$$

$$p_R(t) = I_0^2 R e^{-2t/\tau} \quad (18)$$

$$w(t) = \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - e^{-2t/\tau}) \quad (19)$$

A equação 16 descreve a resposta natural para um circuito RL. Como já mencionado, esta resposta deve chegar a um fim. À medida que o tempo transcorrido excede cinco constantes de tempo, a corrente é menos de um por cento de seu valor inicial. Assim, após cinco constantes de tempo, para a maioria das finalidades práticas, as correntes e tensões alcançam seus valores finais (NILSSON; RIEDEL, 2015).

Podemos determinar a resposta natural para um circuito RL após uma constante de tempo. Isso pode ser obtido ao utilizarmos 1τ para o tempo t apresentado na equação 16, ou seja, $t = 1\tau$. Assim, em uma constante de tempo, a resposta cai para 36,8% de seu valor inicial (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014). De maneira similar, podemos calcular a resposta para $t = 2\tau, 3\tau, 4\tau$ e 5τ .

A existência de corrente no circuito mostrado na Figura 1 é um evento momentâneo e é denominada **resposta transitória** do circuito (NILSSON; RIEDEL, 2015). A resposta que existe após um longo tempo, aqui definido como um tempo superior a 5τ , é denominada **resposta de regime permanente**.

As equações 17 a 19 nada mais são do que as equações 11 a 13 representadas em termos da constante de tempo.

Os valores de $e^{-t/\tau}$ para múltiplos inteiros de τ de 1 a 10 são mostrados no quadro a seguir.

t	$e^{-t/\tau}$	t	$e^{-t/\tau}$
τ	$3,6788 \cdot 10^{-1}$	6τ	$2,4788 \cdot 10^{-3}$
2τ	$1,3534 \cdot 10^{-1}$	7τ	$9,1188 \cdot 10^{-4}$
3τ	$4,9787 \cdot 10^{-2}$	8τ	$3,3546 \cdot 10^{-4}$
4τ	$1,8316 \cdot 10^{-2}$	9τ	$1,2341 \cdot 10^{-4}$
5τ	$6,7379 \cdot 10^{-3}$	10τ	$4,5400 \cdot 10^{-5}$



Referências

ALEXANDER, C. K.; SADIQU, M. N. O. *Fundamentos de circuitos elétricos com aplicações*. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

HAYT, W. H.; KEMMERLY, J. E.; DURBIN, S. M. *Análise de circuitos em engenharia*. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. *Circuitos elétricos*. 10. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2015.

SADIQU, M. N. O.; ALEXANDER, C. K.; MUSA, S. *Análise de circuitos elétricos com aplicações*. Porto Alegre: AMGH, 2015.

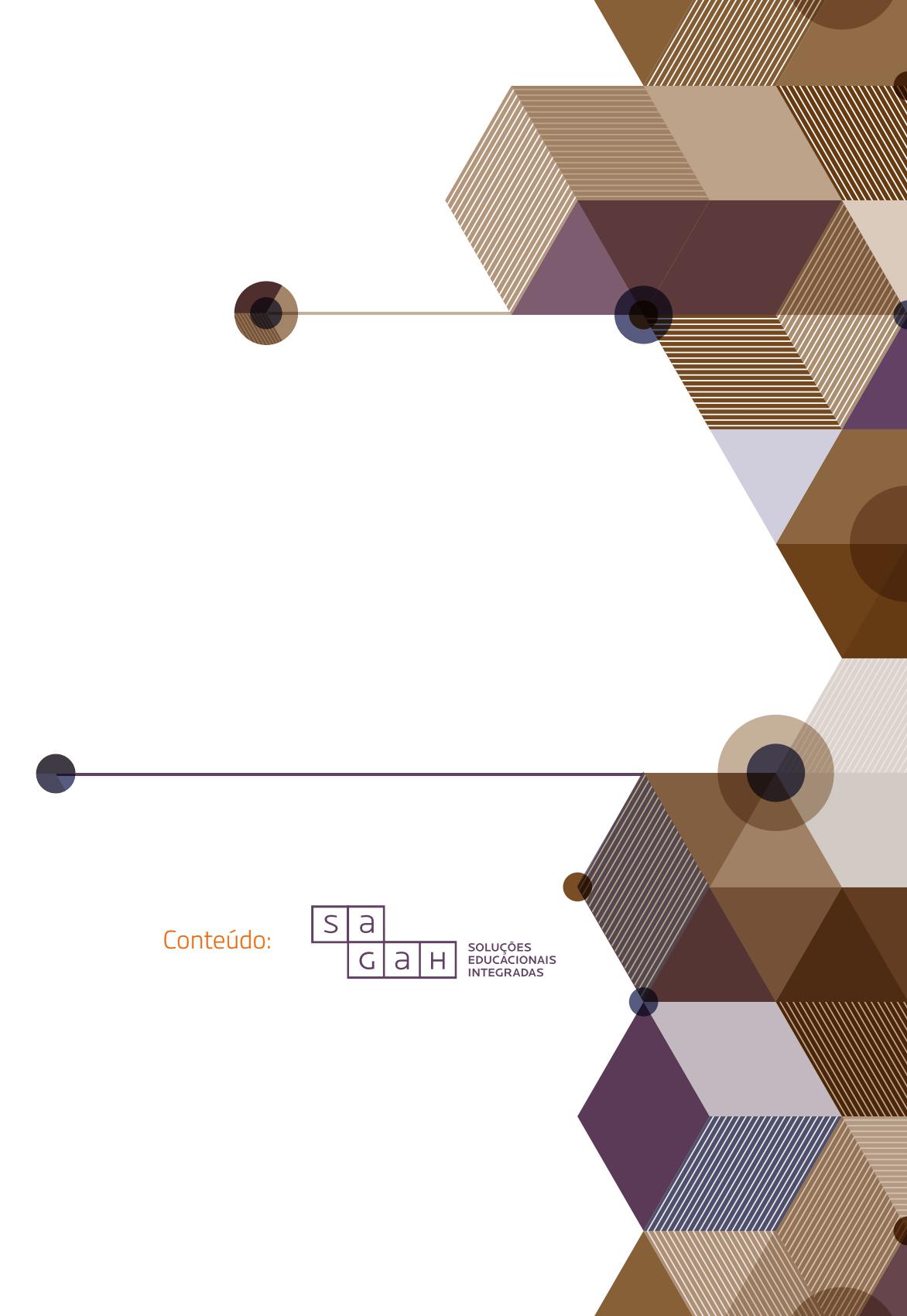
Leituras recomendadas

DORF, R. C.; SVOBODA, J. A. *Introdução aos circuitos elétricos*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

NAHVI, M.; ADMINISTER, J. A. *Circuitos elétricos*. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

THOMAS, R. E.; ROSA, A. J.; TOUSSAINT, G. J. *Análise e projeto de circuitos elétricos lineares*. Porto Alegre: Bookman, 2011.

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.



Conteúdo:



SOLUÇÕES
EDUCACIONAIS
INTEGRADAS



DICA DO PROFESSOR

Sabe-se que indutores não podem variar sua corrente instantaneamente. Além disso, também se sabe que o indutor se comporta como um curto-círcuito para corrente contínua.

No vídeo desta Dica do Professor, você verá a análise de um circuito RL após a retirada repentina da fonte. Essa análise será útil para determinar a resposta de circuitos RL sem fontes.

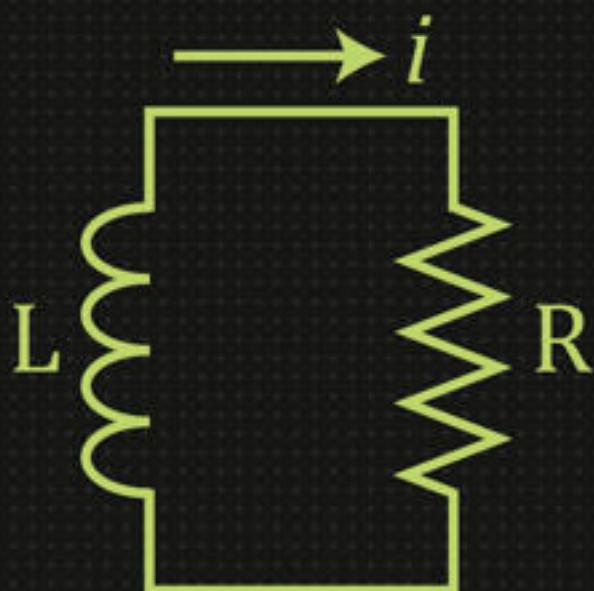
Acompanhe, a seguir.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!



EXERCÍCIOS

- 1) Dado o circuito RL mostrado na figura, determine a expressão para $i_L(t)$, se a corrente inicial no indutor é 1,5A, $R=100\Omega$ e $L=40mH$.



A) $i_L(t)=1,5e$

$$(-0,0004)t \text{ A}$$

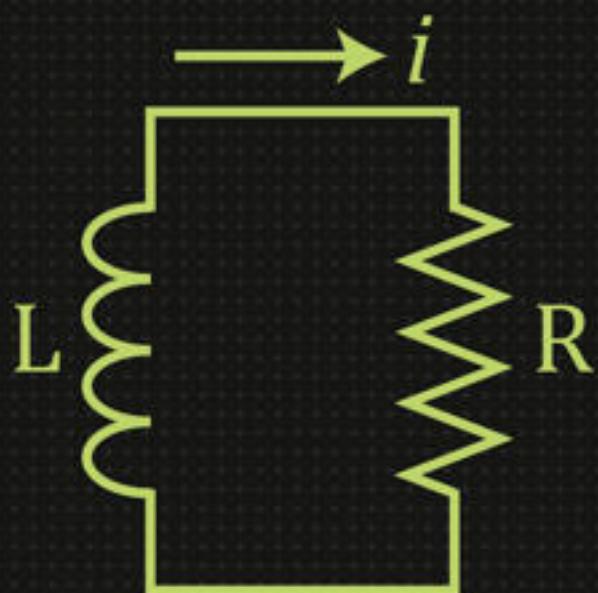
B) $i_L(t)=1,5e^{(-2.500)t} \text{ A}$

C) $i_L(t)=1,5e^{(-4.000)t} \text{ A}$

D) $i_L(t)=1,5e^{(-25.000)t} \text{ A}$

E) $i_L(t)=1,5e^{(-40.000)t} \text{ A}$

2) Dado o circuito RL mostrado na figura, calcule $i_L(t)$ para $t=1\text{ms}$, $I_0=1\text{A}$, $R=100\Omega$ e $L=100\text{mH}$.



A) 1 A

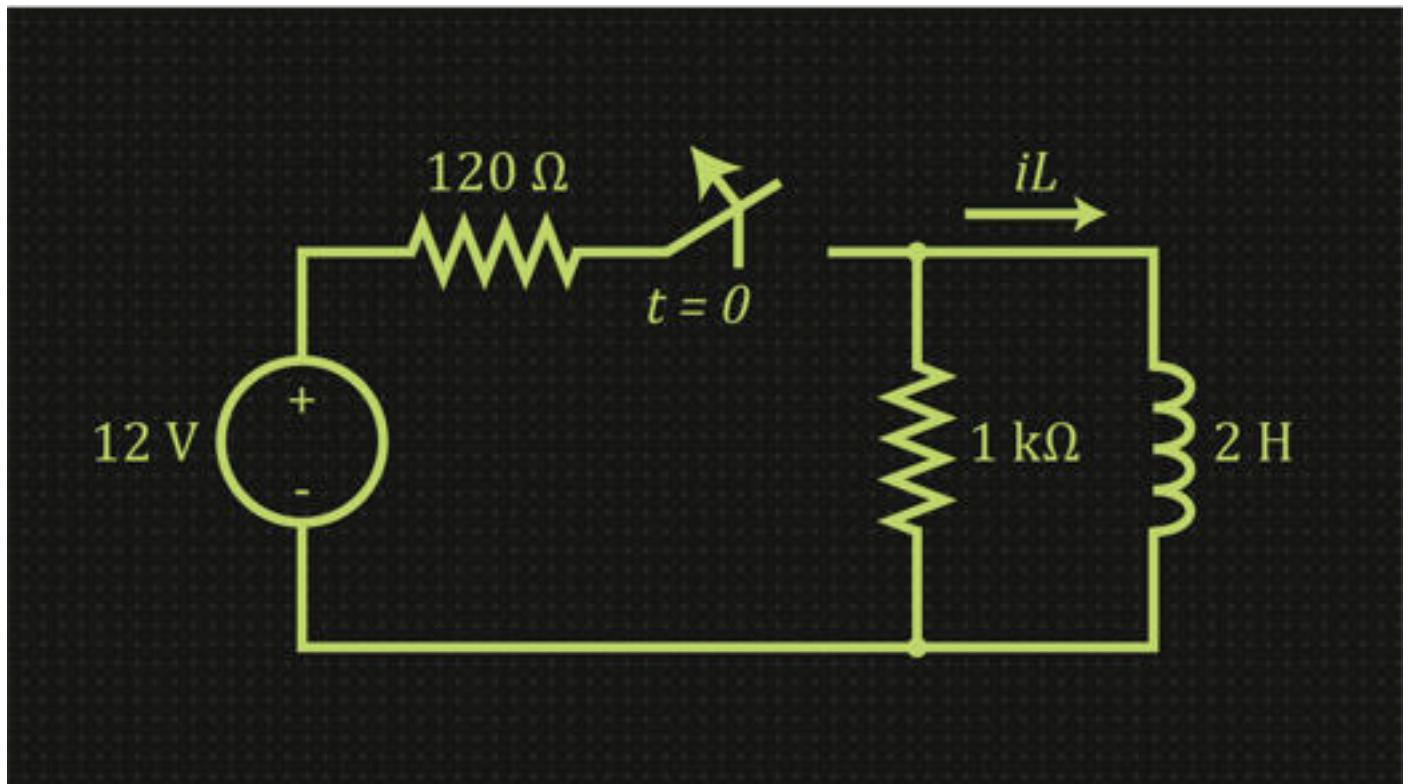
B) 0,6321 A

C) 0,1 A

D) 0,3679 A

E) 0 A

3) A chave no circuito da figura esteve fechada por um longo tempo, antes de abrir em $t=0$.



A expressão para $i_L(t)$ é:

A) $i_L(t)=0,1e^{(-500)t}$ A

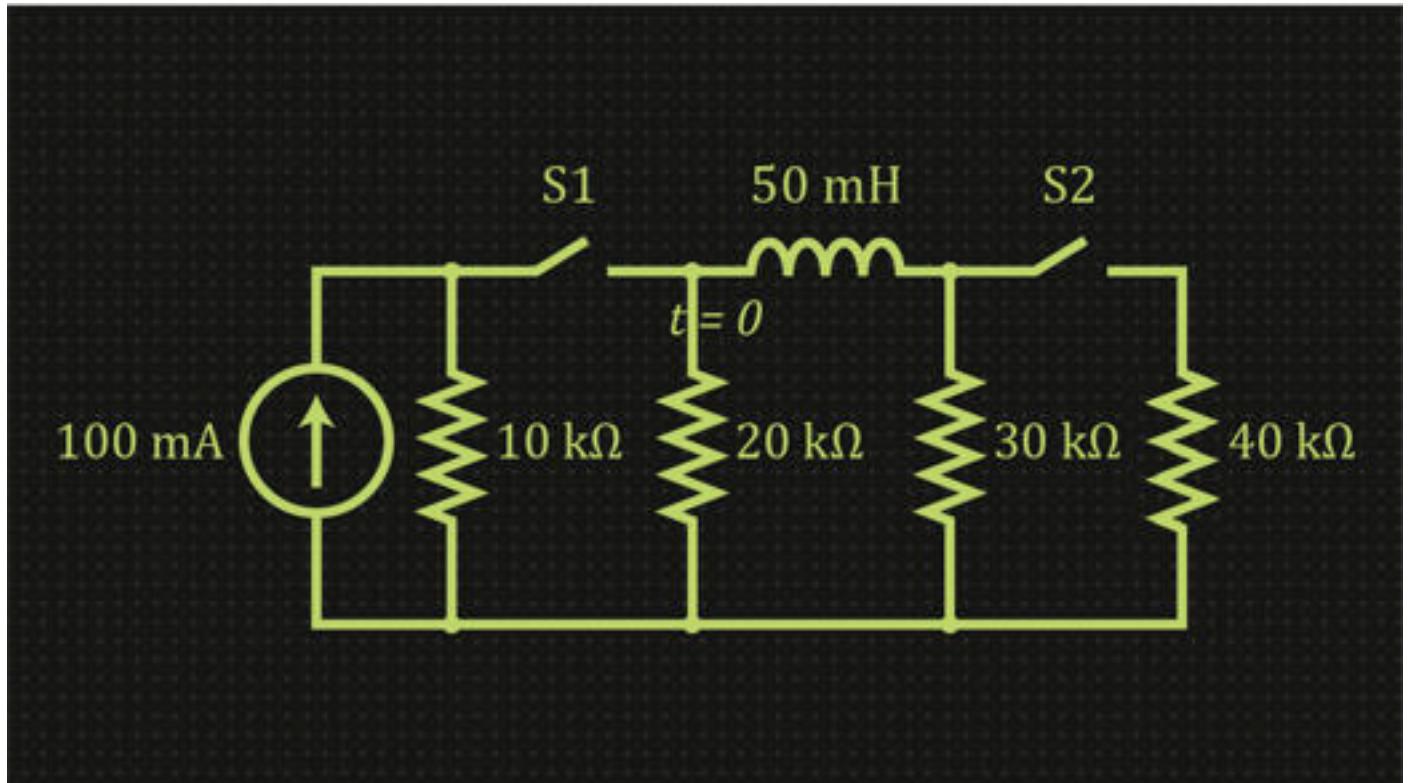
B) $i_L(t)=0,1e^{(-2000)t}$ A

C) $i_L(t)=0,1e^{(-100)t}$ A

D) $i_L(t)=e^{(-500)t}$ A

E) $i_L(t) = e^{(-1000)t} A$

4) As duas chaves S1 e S2 no circuito são sincronizadas e estiveram fechadas por um longo tempo antes de serem abertas em $t=0$.



Nessa situação, a expressão para $i_L(t)$ após a abertura das chaves será:

A) $i_L(t) = 1e^{(-96.000)t} A$

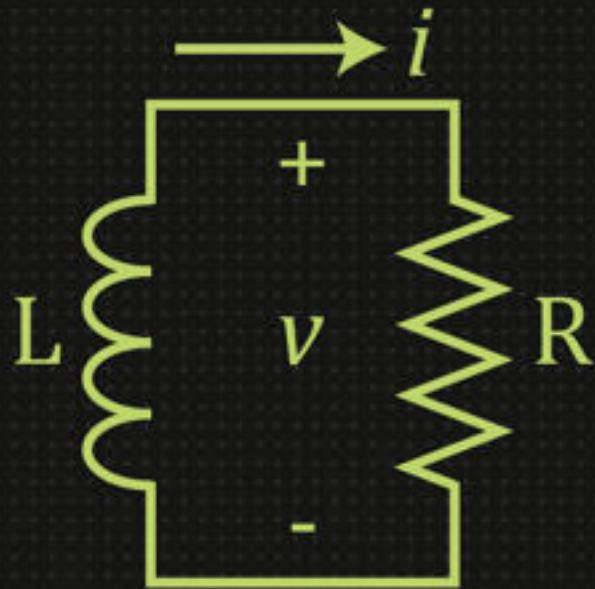
B) $i_L(t) = 0,1e^{(-1000)t} A$

C) $i_L(t) = 0,1e^{(-100.000)t} A$

D) $i_L(t) = 0,1e^{(-96.000)t} A$

E) $i_L(t) = 0,1e^{(-1.000.000)t} A$

O circuito da figura é $R=50\Omega$, $L=0,2H$ e $I_0=2A$.



Para esse circuito, a expressão para a potência instantânea dissipada no resistor será:

A) $p(t)=200e^{-250t} W$

B) $p(t)=200e^{-2000t} W$

C) $p(t)=200e^{-500t} W$

D) $p(t)=100e^{-2000t} W$

E) $p(t)=100e^{-500t} W$



NA PRÁTICA

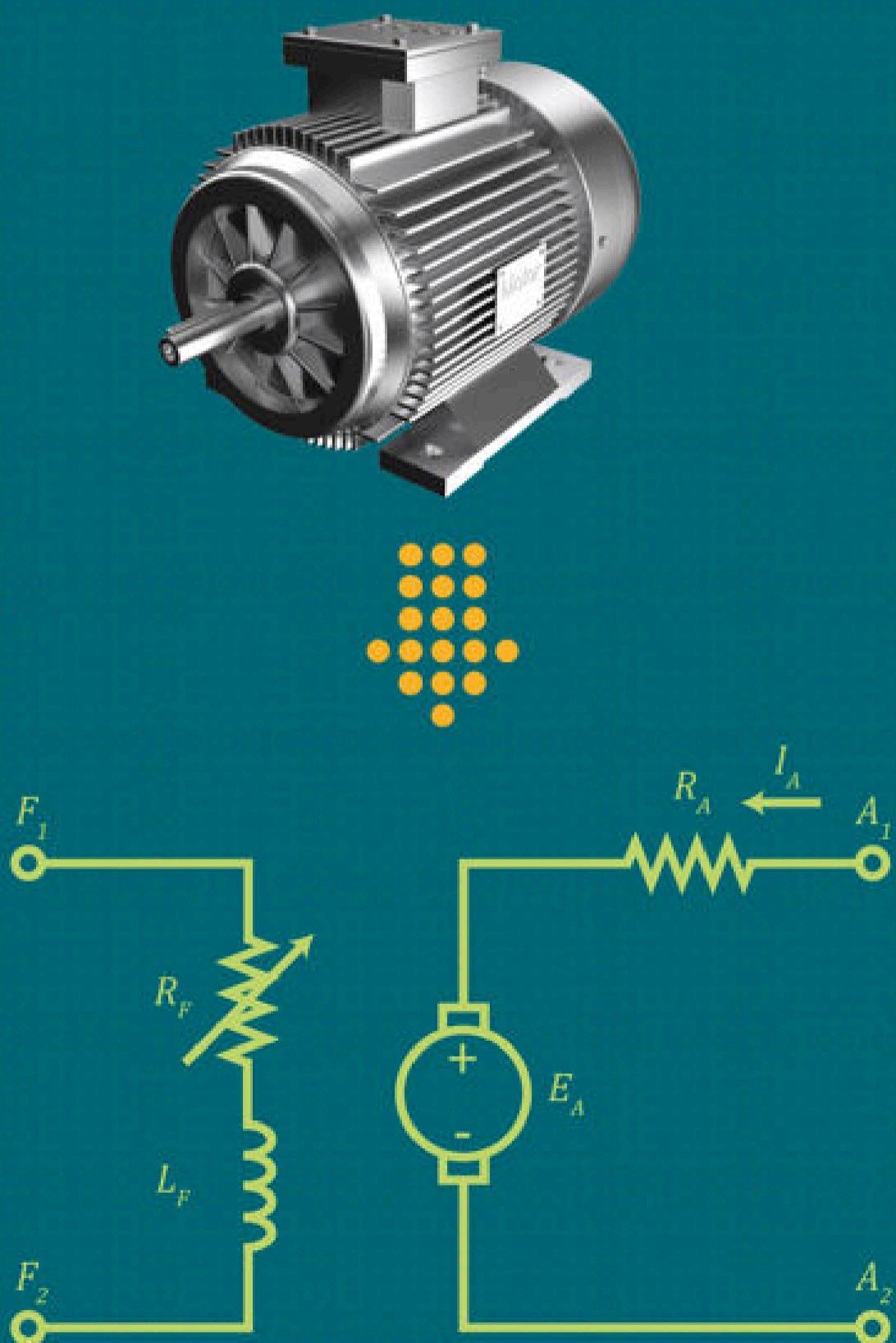
Anderson é professor de Engenharia Elétrica de uma importante Universidade do Sul do Brasil e está preparando sua aula sobre Circuitos RL e está preocupado especialmente que seus alunos compreendam a onde e como ocorre a aplicação de circuitos RL em um modelo de máquinas elétricas.

Observe a explicação de Anderson sobre o circuito equivalente simplificado para um motor CC.

A análise de regime transitório e permanente para diversos dispositivos pode ser feita a partir da simplificação de seus circuitos, ou seja, da utilização de um modelo de circuito equivalente que o descreva. Dessa forma, ao considerarmos uma máquina elétrica, determinaremos o conjunto de equações que descreva seu funcionamento a partir de seu **círcuito equivalente**.



Nesse sentido, a figura apresenta um circuito equivalente simplificado de um motor CC. O circuito de armadura é representado por uma fonte de tensão ideal E_A e um resistor R_A . As bobinas de campo, que produzem o fluxo magnético do gerador, são representadas pelo indutor L_F e pelo resistor R_F .



Para circuitos de primeira ordem, como circuitos equivalentes das máquinas, pode-se considerar que se tem a resposta em regime permanente após cinco constantes de tempo. Antes disso, tem-se a resposta transitória para o circuito.



SAIBA MAIS

Para ampliar o seu conhecimento a respeito desse assunto, veja abaixo as sugestões do professor:

Filtro passa-baixas RL

Neste vídeo, é apresentado um filtro passa-baixa, uma importante aplicação para os circuitos RL, com o cálculo do módulo de um filtro deste tipo.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Círcuito RL resposta natural

Este vídeo aborda a resposta natural de um circuito RL, com a análise a partir da equação diferencial que descreve o comportamento deste circuito.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

Circuitos de primeira ordem RL

Este material apresenta notas de aula sobre circuitos RL, abordando a resposta natural e forçada para estes circuitos.

Conteúdo interativo disponível na plataforma de ensino!

