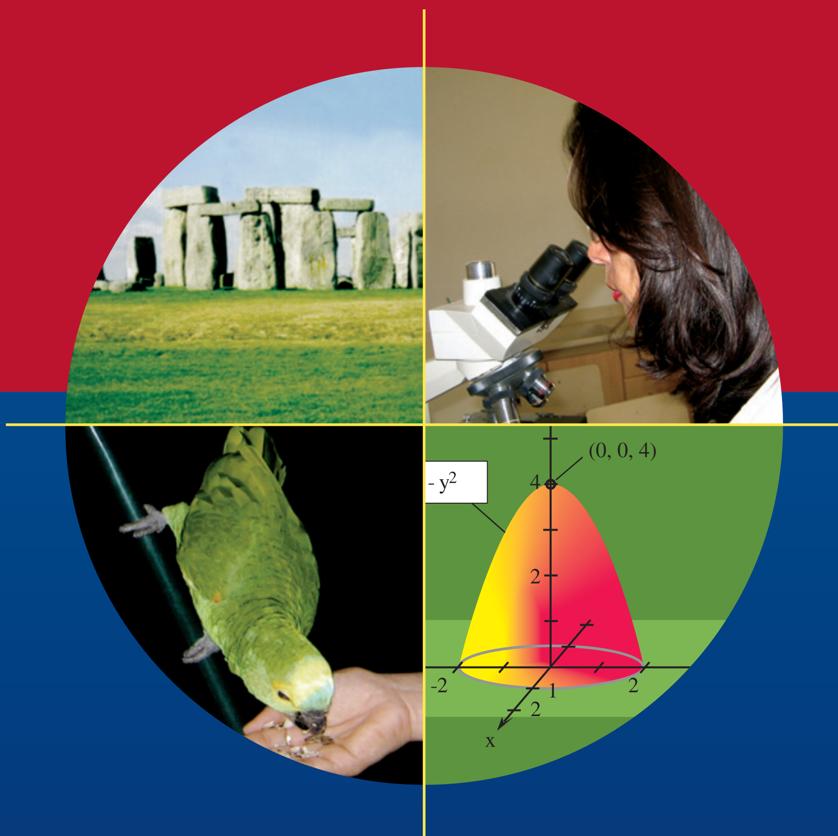
MATEMÁTICA APLICADA

ADMINISTRAÇÃO, ECONOMIA E CIÊNCIAS SOCIAIS E BIOLÓGICAS



7ª edição

Harshbarger • Reynolds

McGraw Hill Education

bookman

H324m Harshbarger, Ronald J.

Matemática aplicada [recurso eletrônico] : administração, economia e ciências sociais e biológicas / Ronald J. Harshbarger, James J. Reynolds ; tradução: Ariovaldo Griesi, Oscar Kenjiro N. Asakura; revisão técnica: Helena Maria de Ávila Castro, Afrânio Carlos Murolo. – 7. ed. – Dados eletrônicos. – Porto Alegre : AMGH, 2013.

Editado também como livro impresso em 2006.
ISBN 978-85-8055-273-7

1. Matemática aplicada. 2. Administração. 3. Economia. 4. Ciências Sociais. 5. Ciências Biológicas. I. Reynolds, James J. II. Título.

CDU 51-7

Catalogação na publicação: Ana Paula M. Magnus – CRB 10/2052

0.6 Fatoração

Fatores Comuns

Podemos fatorar monômios em um polinômio usando a Propriedade Distributiva ao contrário; a expressão $ab + ac = a(b + c)$ é um exemplo mostrando que a é um fator monômio do polinômio $ab + ac$. Mas ela é também o enunciado da Propriedade Distributiva (com os lados da equação trocados). O fator monômio do polinômio deve ser um fator de cada termo do polinômio, assim é freqüentemente chamado **fator monômio comum**.

EXEMPLO 1 **Fator Monômio**

Fatore $-3x^2t - 3x + 9xt^2$.

SOLUÇÃO

1. Podemos colocar $3x$ em evidência e obter
$$-3x^2t - 3x + 9xt^2 = 3x(-xt - 1 + 3t^2)$$
2. Ou colocar em evidência $-3x$ (pôr em evidência o sinal de menos fará o primeiro termo do polinômio positivo) e obter
$$-3x^2t - 3x + 9xt^2 = -3x(xt + 1 - 3t^2).$$

Se um fator é comum a cada termo de um polinômio, podemos utilizar esse procedimento para colocá-lo em evidência, mesmo que ele não seja um monômio. Por exemplo, podemos colocar $(a + b)$ em evidência no polinômio $2x(a + b) - 3y(a + b)$. Se fatorarmos $(a + b)$ de ambos os termos, obteremos $(a + b)(2x - 3y)$. O exemplo a seguir ilustra a técnica de **fatoração por agrupamento**.

EXEMPLO 2 **Fatoração por Agrupamento**

Fatore $5x - 5y + bx - by$.

SOLUÇÃO

Podemos fatorar este polinômio utilizando agrupamento. O agrupamento é feito de forma que os fatores comuns (freqüentemente fatores binômios) possam ser removidos. Vemos que podemos fatorar cinco dos dois primeiros termos e b dos últimos dois, o que dá
$$5(x - y) + b(x - y).$$
Isto nos fornece dois termos com o fator $x - y$ em comum, assim obtemos:
$$(x - y)(5 + b).$$

Fatorando Trinômios

Podemos utilizar a fórmula para multiplicar dois binômios para fatorar certos trinômios. A fórmula
$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$
pode ser usada para fotorar trinômios como $x^2 - 7x + 6$.

EXEMPLO 3 **Fatorando Trinômios**

Fatore $x^2 - 7x + 6$.

SOLUÇÃO

Se este trinômio pode ser fatorado em uma expressão da forma
$$(x + a)(x + b)$$
então precisamos encontrar a e b tais que
$$x^2 - 7x + 6 = x^2 + (a + b)x + ab$$
Isto é, precisamos encontrar a e b tais que $a + b = -7$ e $ab = 6$. Os dois números cuja soma é -7 e cujo produto é 6 são -1 e -6. Assim,
$$x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6).$$

Um método similar pode ser usado para fatorar trinômios tais como $9x^2 - 31x + 12$. Encontrar os fatores adequados para esse tipo de trinômio pode envolver uma grande quantidade de tentativa e erro, porque devemos encontrar fatores a, b, c e d tais que

$$(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd.$$

Uma outra técnica para fatoração é usada para fatorar tais trinômios. Ela é útil para fatorar os trinômios mais complicados, tais como $9x^2 - 31x + 12$. Este procedimento para fatorar trinômios do segundo grau é mostrado a seguir.

FATORAÇÃO DE UM TRINÔMIO

Procedimento	**Exemplo**
Para fatorar um trinômio como produto de fatores binômios:	Fator $9x^2 - 31x + 12$.
1. Faça o produto do termo de segundo grau com o termo constante.	1. $9x^2 \cdot 12 = 108x^2$
2. Determine se existem quaisquer dois fatores do produto no passo 1 cuja soma seja o termo central do trinômio. (Se a resposta for não, o trinômio não será fatorável em dois binômios.)	2. Os fatores $-27x$ e $-4x$ tem a soma $-31x$.
3. Use a soma desses dois fatores para substituir o termo central do trinômio.	3. $9x^2 - 31x + 12 = 9x^2 - 27x - 4x + 12$
4. Fatore esta expressão de quatro termos por agrupamento.	4. $9x^2 - 31x + 12 = (9x^2 - 27x) + (-4x + 12)$ $= 9x(x - 3) - 4(x - 3)$ $= (x - 3)(9x - 4)$

No exemplo acima, observe que escrever o termo intermediário ($-31x$) como $-4x - 27x$ em vez de $-27x - 4x$ (como fizemos) também resultará na fatoração correta. (Tente fazer isto.)

EXEMPLO 4 **Fatorando Trinômios**

Fatore $9x^2 - 9x - 10$.

SOLUÇÃO

O produto do termo de segundo grau com o termo constante é $-90x^2$. Fatores de $-90x^2$ que somam $-9x$ são $-15x$ e $6x$. Portanto,

$$\begin{aligned} 9x^2 - 9x - 10 &= 9x^2 - 15x + 6x - 10 \\ &= (9x^2 - 15x) + (6x - 10) \\ &= 3x(3x - 5) + 2(3x - 5) \\ &= (3x - 5)(3x + 2) \end{aligned}$$

Podemos verificar esta fatoração multiplicando

$$\begin{aligned} (3x - 5)(3x + 2) &= 9x^2 + 6x - 15x - 10 \\ &= 9x^2 - 9x - 10 \end{aligned}$$

Alguns dos produtos especiais que tornam a fatoração mais fácil são os seguintes.

Fatorações Especiais

O trinômio quadrado perfeito:

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$
$$x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$$

A diferença de dois quadrados:

$$x^2 - a^2 = (x + a)(x - a)$$

EXEMPLO 5 **Diferença de Dois Quadrados**

Fatore $25x^2 - 36y^2$.

SOLUÇÃO

O binômio $25x^2 - 36y^2$ é a diferença de dois quadrados, assim, obtemos

$$25x^2 - 36y^2 = (5x - 6y)(5x + 6y).$$

Estes dois binômios são chamados binômios conjugados porque eles diferem apenas em um sinal.

EXEMPLO 6 **Quadrados Perfeitos**

Fatore $4x^2 + 12x + 9$.

SOLUÇÃO

Embora possamos usar a técnica que aprendemos para fatorar trinômios, podemos fatorar mais rapidamente se reconhecermos que este trinômio é um quadrado perfeito. Existem dois termos que são quadrados e o termo restante ($12x$) é o dobro do produto das raízes quadradas destes quadrados ($12x = 2 \cdot 2x \cdot 3$). Assim,

$$4x^2 + 12x + 9 = (2x + 3)^2.$$

A maioria dos polinômios que fatoramos foi de polinômios de segundo grau ou **polinômios quadráticos**. Alguns polinômios que não são quadráticos estão em uma forma que pode ser fatorada da mesma maneira que os quadráticos. Por exemplo, o polinômio $x^4 + 4x^2 + 4$ pode ser escrito como $a^2 + 4a + 4$, onde $a = x^2$.

EXEMPLO 7 **Polinômios na Forma Quadrática**

Fatore $x^4 + 4x^2 + 4$ completamente.

SOLUÇÃO

O trinômio está na forma de um quadrado perfeito, assim, fazendo $a = x^2$ temos

$$x^4 + 4x^2 + 4 = a^2 + 4a + 4 = (a + 2)^2,$$

portanto,

$$x^4 + 4x^2 + 4 = (x^2 + 2)^2.$$

EXEMPLO 8 Diferença de Dois Quadrados

Fatore $x^4 - 16$.

SOLUÇÃO

O binômio $x^4 - 16$ pode ser tratado como a diferença de dois quadrados, $(x^2)^2 - 4^2$, assim

$$x^4 - 16 = (x^2 - 4)(x^2 + 4).$$

Mas $x^2 - 4$ pode ser fatorado em $(x - 2)(x + 2)$, portanto,

$$x^4 - 16 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4).$$

PONTO DE CONTROLE

1. Fatore as seguintes expressões:
   (a) $8x^3 - 12x$ (b) $3x(x^2 + 5) - 5(x^2 + 5)$ (c) $x^2 - 10x - 24$
   (d) $x^2 - 5x + 6$ (e) $4x^2 - 20x + 25$ (f) $100 - 49x^2$
2. Considere $10x^2 - 17x - 20$ e observe que $(10x^2)(-20) = -200x^2$.
   (a) Encontre duas expressões cujo produto é $-200x^2$ e cuja soma é $-17x$.
   (b) Substitua $-17x$ em $10x^2 - 17x - 20$ pelas duas expressões encontradas em (a).
   (c) Fatore (b) por agrupamento.
3. Verdadeiro ou falso:
   (a) $4x^2 + 9 = (2x + 3)^2$ (b) $x^2 - x + 12 = (x - 4)(x + 3)$
   (c) $5x^5 - 20x^3 = 5x^3(x^2 - 4) = 5x^3(x + 2)(x - 2)$

Dizemos que um polinômio está completamente fatorado se todas as fatorações possíveis já tiverem sido realizadas. Por exemplo, $(2x - 4)(x + 3)$ não está completamente fatorado porque o 2 ainda pode ser posto em evidência em $2x - 4$. Se nos limitarmos a fatores com coeficientes inteiros, podemos fatorar completamente vários polinômios utilizando os procedimentos a seguir.

Procedimentos para Fatorar Completamente

Procure por: primeiramente monômios.
A seguir, por: diferença de dois quadrados.
A seguir, por: trinômios quadrados.
A seguir, por: outros métodos para fatorar trinômios.

EXEMPLO 9 Fatorando Completamente

Fatore completamente $12x^2 - 36x + 27$.

SOLUÇÃO

$$\begin{aligned} 12x^2 - 36x + 27 &= 3(4x^2 - 12x + 9) && \text{Monômio} \\ &= 3(2x - 3)^2 && \text{Quadrado Perfeito} \end{aligned}$$

EXEMPLO 10 Fatorando Completamente

Fatore completamente $16x^2 - 64y^2$.

SOLUÇÃO

$$16x^2 - 64y^2 = 16(x^2 - 4y^2)$$
$$= 16(x + 2y)(x - 2y)$$

Fatorar imediatamente a diferença dos dois quadrados nos daria $(4x + 8y)(4x - 8y)$, o que não está completamente fatorado (porque podemos ainda fatorar 4 de $4x + 8y$ e 4 de $4x - 8y$).

SOLUÇÕES DO PONTO DE CONTROLE

1. (a) $8x^3 - 12x = 4x(2x^2 - 3)$
   (b) $3x(x^2 + 5) - 5(x^2 + 5) = (x^2 + 5)(3x - 5)$
   (c) $x^2 - 10x - 24 = (x - 12)(x + 2)$
   (d) $x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$
   (e) $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$
   (f) $100 - 49x^2 = (10 + 7x)(10 - 7x)$
2. (a) $(-25x)(+8x) = -200x^2$ e $-25x + 8x = -17x$
   (b) $10x^2 - 17x - 20 = 10x^2 - 25x + 8x - 20$
   (c) $= (10x^2 - 25x) + (8x - 20)$
   $= 5x(2x - 5) + 4(2x - 5)$
   $= (2x - 5)(5x + 4)$
3. (a) Falso. $4x^2 + 9$ não pode ser fatorado. De fato, somas de quadrados não podem ser fatoradas.
   (b) Falso. $x^2 - x + 12$ não pode ser fatorado. Não podemos encontrar dois números cujo produto é +12 e cuja soma é –1.
   (c) Verdadeiro.

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.