CIRCUITOS ELÉTRICOS II

Lizandro de Souza Oliveira

Resposta forçada para circuitos RL

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste texto, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Analisar circuitos RL com fontes.
- Definir resposta a um degrau em circuitos RL.
- Analisar a resposta forçada e a resposta completa para circuitos RL.

Introdução

A análise de circuitos contendo indutores está relacionada à solução das equações íntegro-diferenciais que caracterizam os circuitos e é a base para compreensão do comportamento de diversos circuitos com aplicação em diversas áreas das engenharias elétrica e eletrônica. Como mencionado por Sadiku, Alexander e Musa, (2015), indutores não são tão versáteis como os capacitores e resistores e são mais limitados em aplicações. Ainda segundo os autores, há várias aplicações em que os indutores não têm substitutos, sendo utilizados em relés, circuitos de telefone, circuitos sintonizadores, motores elétricos e microfones, por exemplo.

Neste capítulo, você estudará circuitos formados por resistores e indutores ou, de maneira mais precisa, circuitos que poderão ser representados por um resistor equivalente, associado a um indutor equivalente. Esses circuitos, chamados de circuitos RL, serão analisados com a inclusão repentina de fontes. Você também conhecerá a resposta a um degrau e analisará a equação que descreve a resposta forçada e a resposta completa para circuitos RL.

Circuitos RL com fontes

Um circuito RL é formado por resistores e indutores. Caso tenhamos mais de um resistor ou mais de um indutor no circuito, poderemos utilizar as técnicas para análise de circuitos a fim de reduzi-lo a uma associação desses componentes, para obtermos uma resistência equivalente (R_{eq}) e uma indutância equivalente (L_{eq}). Podemos ter um circuito RL em série ou um circuito RL em paralelo. Como você deve concluir, tais nomenclaturas se referem à associação (série ou paralelo) desses componentes.

O tipo de resposta resultante, quando as fontes de energia são aplicadas subitamente a um circuito, é chamado de **resposta forçada** (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Analisaremos a situação na qual a resposta ocorre quando as fontes de energia subitamente aplicadas são fontes CC. O circuito consiste em uma bateria cuja tensão é V_S em série com uma chave, um resistor R e um indutor L. A chave é fechada conforme indica a Figura 1 (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

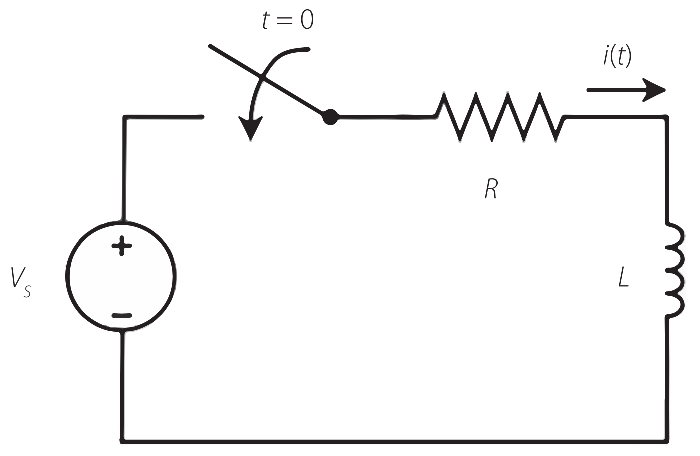

Figura 1. Circuito RL em série com a aplicação de uma fonte em $t = 0$.

Você pode observar, a partir da análise do circuito apresentado na Figura 1, que a chave esteve aberta antes de fechar no instante $t = 0$. Após ter sido fechada, a partir da lei de Kirchhoff para tensão, temos que:

$$V_S = Ri(t) + L\,\frac{di}{dt} \tag{1}$$

A equação (1) pode ser resolvida para a corrente, separando as variáveis i e t e, após, efetuando a integração. Primeiramente, resolveremos a equação (1) para a derivada di/dt:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}\left(i - \frac{V_S}{R}\right) \tag{2}$$

$$di = -\frac{R}{L}\left(i - \frac{V_S}{R}\right)dt \tag{3}$$

Agora, separaremos as variáveis da equação (3) para obter (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$\frac{di}{i - \left(\frac{V_S}{R}\right)} = -\frac{R}{L}\,dt \tag{4}$$

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} \frac{dx}{x - \left(\frac{V_S}{R}\right)} = -\frac{R}{L}\int_{t_0}^{t} dy \tag{5}$$

Realizando a integração indicada pela equação (5), temos que:

$$\ln\frac{i(t) - (V_S/R)}{I_0 - (V_S/R)} = -\frac{R}{L}\,(t - t_0) \tag{6}$$

$$\frac{i(t) - (V_S/R)}{I_0 - (V_S/R)} = e^{-(R/L)t} \tag{7}$$

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R}\right)e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} \tag{8}$$

A equação (8) nos dá a resposta de um circuito RL após a inclusão da fonte. A partir dessa equação, podemos determinar a corrente em qualquer instante de tempo $t \geq 0$. Assim, verifique que a substituição de $t = 0$ na equação (8) resultará em $i(0) = I_0$:

$$i(0) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R}\right)$$

$$\therefore i(0) = I_0$$

A partir da análise da equação (8), observamos que, após a chave ter sido fechada, a resposta de corrente aumenta exponencialmente de zero a um valor final de V_S/R (NILSSON; RIEDEL, 2015).

Quando a energia inicial no indutor é nula, a equação (8) se reduz a:

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \frac{V_S}{R}\, e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} \tag{9}$$

Fique atento

A **constante de tempo** para um circuito **RL** é dada por $\tau = L/R$. Essa constante determina a taxa de crescimento da resposta.

A equação (9) pode ser escrita em função da constante de tempo do circuito. Assim, temos que:

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \frac{V_S}{R}\, e^{-t/\tau} \tag{10}$$

Considerando a equação (10), podemos dizer que, após uma constante de tempo depois do fechamento da chave, a corrente alcançará aproximadamente 63% do seu valor final, ou 0,6321 V_S/R. Os demais valores para a amplitude da resposta de corrente podem ser obtidos a partir da equação (10).

Os valores de $i(t)$ para múltiplos inteiros de τ de 1 a 5 são mostrados no Quadro 1.

Quadro 1. Valores de i(t) para t igual a múltiplos inteiros de τ quando I0 = 0

τ	$i(t) = \frac{V_S}{R} - \frac{V_S}{R} e^{-t/\tau}$
τ	0,6321 V_S/R
2τ	0,8647 V_S/R
3τ	0,9502 V_S/R
4τ	0,9817 V_S/R
5τ	0,9933 V_S/R

Fique atento

Podemos enxergar o indutor como um **curto-circuito** para **corrente contínua (CC)**.

Percebemos, a partir da análise da equação (10) e dos valores mostrados no Quadro 1, que a resposta de corrente tende a atingir o valor de V_S/R. Isso faz sentido, pois o termo exponencial da equação (10) tende a zero à medida que o tempo t tende a infinito. Além disso, também podemos observar o circuito apresentado na Figura 1. Quando a chave estiver fechada, a resposta de corrente para o circuito poderá ser analisada como sendo a tensão na fonte dividida pela resistência do circuito, já que o indutor se comporta como um curto para CC.

Analisaremos, agora, a tensão no indutor após a comutação da chave, ou seja, para $t \geq 0^+$. Sabemos que a tensão no indutor é dada por $v_L = Ldi/dt$. Assim, quando percorrido pela corrente mostrada na equação (8), podemos calcular a tensão no indutor como (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$v_L = L\,\frac{di}{dt} = L\left(\frac{-R}{L}\right)\left(I_0 - \frac{V_S}{R}\right) e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} = (V_S - I_0R)\, e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} \qquad (11)$$

Sabemos que a corrente em um indutor não pode variar instantaneamente. Assim, a corrente no indutor no instante anterior ao fechamento da chave será igual à corrente no indutor no instante imediatamente posterior ao fechamento da chave, ou seja: $i_L(0^-) = i_L(0^+) = I_0$. Assim, em $t = 0^+$, a queda de tensão no resistor será I_0R, e a tensão nos terminais do indutor será dada pela tensão da fonte menos a queda de tensão no resistor, isto é, $v_L(0^+) = V_S - I_0R$.

Quando a corrente inicial no indutor é igual a zero, a equação (11) é simplificada para (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$v_L = V_S e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} \tag{12}$$

Resposta a um degrau em circuitos RL

A **resposta a um degrau** é as correntes e as tensões que se estabelecem a partir de variações abruptas em fontes CC ligadas a um circuito. Pode existir ou não energia armazenada no circuito no instante em que a variação abrupta ocorre (NILSSON; RIEDEL, 2015).

Retornemos ao circuito mostrado na Figura 1. Para esse circuito, é evidente que a corrente $i(t)$ é zero antes de $t = 0$, e, portanto, podemos substituir a bateria e a chave por uma função forçante degrau de tensão $V_Su(t)$, que também não produz nenhuma resposta antes de $t = 0$. Após $t = 0$, os dois circuitos são claramente idênticos (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014). Podemos calcular a corrente $i(t)$ tanto no circuito original da Figura 1 quanto no circuito equivalente da Figura 2, a seguir.

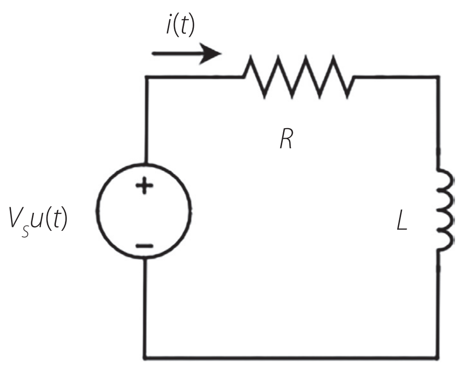

Figura 2. Circuito RL equivalente apresentando a mesma resposta *i(t)* durante todo o tempo.

Assim, uma expressão válida descrevendo a resposta do circuito válida para todo t seria (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014):

$$i(t) = \left(\frac{V_S}{R} - \frac{V_S}{R} e^{-Rt/L} \right) u(t) \tag{13}$$

Essa equação também pode ser escrita em função da constante de tempo do circuito. Assim, temos que:

$$i(t) = \left(\frac{V_S}{R} - \frac{V_S}{R} e^{-t/\tau} \right) u(t) \tag{14}$$

As equações (13) e (14) apresentam a **resposta a um degrau** em circuitos RL. Observe que essas equações apresentam dois termos, um constante e um termo exponencial.

Saiba mais

As funções de singularidade (também conhecidas como **funções de comutação**) são muito úteis na análise de circuitos, pois servem como boas aproximações aos sinais de comutação que surgem em circuitos com operações de comutação, e também por serem úteis na descrição compacta e elegante de alguns fenômenos em circuitos, especialmente a resposta a um degrau de circuitos RC ou RL. As três funções de singularidade mais usadas na análise de circuitos são: **degrau unitário**, **impulso unitário** e **rampa unitária** (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

A função degrau unitário $u(t)$ pode ser definida, em termos matemáticos, como (ALEXANDER; SADIKU, 2013):

$$u(t) = \begin{cases} 0, \ t < 0 \\ 1, \ t > 0 \end{cases} \tag{15}$$

Você pode observar que a função degrau unitário é indefinida em $t = 0$, em que ela muda abruptamente de 0 para 1 (ALEXANDE; SADIKU, 2013). Também convém destacar que essa função é adimensional. A Figura 3, a seguir, representa a função degrau unitário.

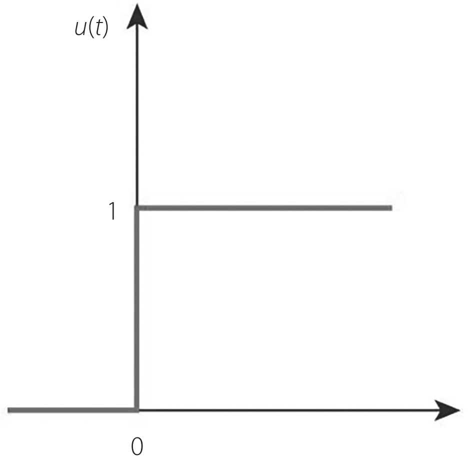

Figura 3. Função degrau unitário.
Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 234).

Se a mudança abrupta ocorrer em $t = t_0$ (em que $t_0 > 0$), em vez de $t = 0$, a função degrau unitário fica (ALEXANDER; SADIKU, 2013):

$$u(t - t_0) = \begin{cases} 0, \ \mathrm{t} < t_0 \\ 1, \ \mathrm{t} > t_0 \end{cases} \tag{16}$$

A equação (16) equivale dizer que $u(t)$ está **atrasada** em t_0 segundos, como mostrado na Figura 4.

Se a mudança abrupta ocorrer em $t = -t_0$, a função degrau unitário fica (ALEXANDER; SADIKU, 2013):

$$u(t + t_0) = \begin{cases} 0, \ \mathrm{t} < -t_0 \\ 1, \ \mathrm{t} > -t_0 \end{cases} \tag{17}$$

A equação (17) significa que $u(t)$ está **adiantada** em t_0 segundos, como mostrado na Figura 5.

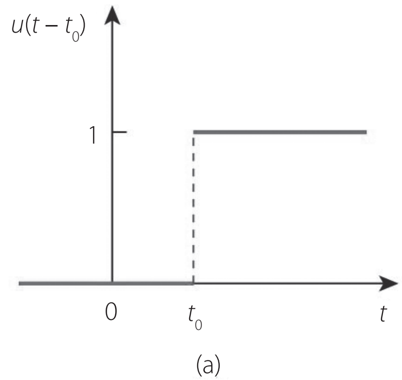

Figura 4. Função degrau unitário atrasada de t_0.
Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 235).

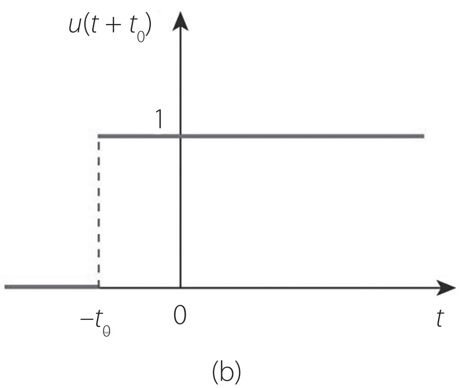

Figura 5. Função degrau unitário adiantada de t_0.
Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 235).

Usamos a função degrau para representar uma mudança abrupta na tensão ou na corrente, como as mudanças que ocorrem em circuitos de sistemas de controle e computadores digitais (ALEXANDER; SADIKU, 2013). Considere, por exemplo, a tensão dada por:

$$v(t) = \begin{cases} 0, \ t < t_0 \\ 1, \ t > t_0 \end{cases} \tag{18}$$

A tensão dada pela equação (18) pode ser expressa em termos da função degrau unitário como (ALEXANDER; SADIKU, 2013):

$$v(t) = V_S u(t - t_0) \tag{19}$$

Observe que, se fizermos $t_0 = 0$ na equação 19, $v(t)$ será simplesmente a tensão degrau $V_S u(t)$.

Saiba mais

A obra de Alexander e Sadiku (2013), em seu Capítulo 7, apresenta as definições e representações de outras duas funções de singularidade muito usadas na análise de circuitos: a função **impulso unitário** e a função **rampa unitária**.

Exemplo

No circuito da Figura 6, encontre *i*(*t*) em *t* = ∞, 3-, 3+ e 100μ*s* em e após a mudança de valor da fonte (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

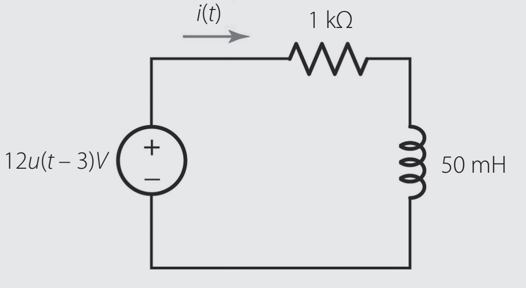

Figura 6. Circuito RL simples alimentado por um degrau de tensão.

Fonte: Hayt, Kemmerly e Durbin (2014, p. 280).

Solução:

Quando $t \to \infty$, não teremos os efeitos transitórios, e o circuito se torna um simples circuito CC alimentado por uma fonte de $12V$. O indutor aparece como um curto-circuito, assim:

$$i(\infty) = \frac{12V}{1\ k\Omega} = 12mA$$

A corrente no instante $i(3^-)$ indica o instante de tempo imediatamente anterior à mudança de valor da fonte. Para $t < 3$, $u(t-3) = 0$. Logo, $i(3^-) = 0$.

Em $t = 3^+$, a função forçante $12u(t-3) = 12V$. No entanto, como a corrente do indutor não pode mudar em um tempo zero, $i(3^+) = i(3^-) = 0$.

A abordagem mais direta para analisar o circuito em $t > 0s$ é reescrever a equação (13) como:

$$i(t') = \left(\frac{V_S}{R} - \frac{V_S}{R} e^{-\frac{Rt}{L}}\right) u(t')$$

Note que essa equação também se aplica ao circuito, se deslocarmos o eixo do tempo de maneira que:

$$t' = t - 3$$

Portanto, com $V_S/R = 12mA$ e $R/L = 20.000s^{-1}$

$$i(t-3) = (12 - 12e^{-20.000(t-3)})u(t-3)mA$$

que pode ser reescrita mais simplesmente como:

$$i(t) = (12 - 12e^{-20.000(t-3)})u(t-3)mA$$

Observe que a função degrau unitário força um valor zero para $t < 3$, conforme requerido. Substituindo $t = 3{,}0001s$ nas equações anteriores, obtemos $i = 10{,}38mA$ em um tempo $100\mu s$ após a mudança do valor da fonte.

Resposta forçada e resposta completa para circuitos RL

Após analisar um circuito RL com fontes e definir a reposta a um degrau para circuitos RL, analisaremos a equação que descreve a resposta forçada para circuitos RL.

De forma a estabelecer um procedimento mais direto, tentaremos interpretar os dois termos que aparecem na equação (14). O termo exponencial tem a forma da resposta natural do circuito RL — trata-se de uma exponencial negativa que se aproxima de zero à medida que o tempo aumenta e é caracterizada pela constante de tempo L/R (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014). A forma funcional dessa parte da resposta é idêntica àquela obtida para o circuito sem fontes. No entanto, a amplitude desse termo exponencial depende da tensão V_S da fonte.

A equação (14) também tem um termo constante, V_S/R, o qual está presente porque a resposta natural aproxima-se de zero à medida que a energia é gradualmente dissipada, mas a resposta total não deve aproximar-se de zero. No final, o circuito se comporta como um resistor e um indutor em série com uma bateria. Como o indutor se comporta como um curto-circuito para CC, a única corrente que flui agora é V_S/R. Essa corrente é a parte da resposta que pode ser diretamente atribuída à função forçante, a qual chamaremos de **resposta forçada**. Ela é a resposta que está presente em um longo tempo após o fechamento da chave (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Neste momento, podemos definir a **resposta completa** para circuitos RL, a qual é composta de duas partes: a **resposta natural** e a **resposta forçada**. A resposta natural é uma característica do circuito, e não das fontes. Sua forma pode ser encontrada considerando-se o circuito sem fontes, e ela tem uma amplitude que depende da amplitude inicial da fonte e da energia inicial armazenada. A resposta forçada tem as características da função forçante; ela é encontrada supondo-se que todas as chaves tenham sido acionadas muito tempo atrás (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Considerando a energia inicial armazenada, ou seja, $I_0 \neq 0$, podemos reescrever a equação (13), que descreve um degrau em circuitos RL, como sendo, para $t \geq 0$ (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$i(t) = \frac{V_S}{R} + \left(I_0 - \frac{V_S}{R}\right) e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} \tag{20}$$

Veja que essa equação é idêntica à equação (8). Essas equações nos dão a resposta de um circuito RL após a inclusão da fonte, ou seja, a resposta ao degrau. Vale destacar que a representação "$u(t)$" para a resposta ao degrau pode ser suprimida ao indicarmos que a expressão é válida para $t \geq 0$.

Podemos rearranjar os termos da equação (20), para obtermos:

$$i(t) = I_0 e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} + \frac{V_S}{R} - \frac{V_S}{R} e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} \tag{21}$$

A equação (21) é formada por duas partes: $I_0 e^{-Rt/L}$ e $\frac{V_S}{R} - \frac{V_S}{R} e^{-Rt/L}$. Observe que o primeiro termo se refere à resposta natural para circuitos RL, enquanto o segundo termo é a resposta forçada para esses circuitos. Assim, podemos representar a resposta completa para um circuito RL como sendo a soma de sua resposta natural com sua resposta forçada (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014):

$$i(t) = i_n(t) + i_f(t) \tag{22}$$

Na equação (22), $i_n(t)$ representa a resposta natural, e $i_f(t)$, a componente forçada para um circuito RL.

Fique atento

A resposta completa é dada pela soma da resposta natural (energia armazenada) com a resposta forçada (fonte independente). Outra maneira de observar a resposta completa é dividindo-a em duas componentes: resposta transiente (parte temporária) e resposta em regime estacionário (parte permanente).

- Resposta completa = resposta natural + resposta forçada.
- Resposta completa = resposta transiente + resposta em regime estacionário.

Referências

ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. *Fundamentos de circuitos elétricos com aplicações*. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

HAYT, W. H.; KEMMERLY, J. E.; DURBIN, S. M. *Análise de circuitos em engenharia*. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. *Circuitos elétricos*. 10. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2015.

SADIKU, M. N. O.; ALEXANDER, C. K.; MUSA, S. *Análise de circuitos elétricos com aplicações*. Porto Alegre: AMGH, 2015.

Leituras recomendadas

DORF, R. C.; SVOBODA, J. A. *Introdução aos circuitos elétricos*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

NAHVI, M.; EDMINISTER, J. A. *Circuitos elétricos*. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

THOMAS, R. E.; ROSA, A. J.; TOUSSAINT, G. J. *Análise e projeto de circuitos elétricos lineares*. Porto Alegre: Bookman, 2011.

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.

Conteúdo:

SOLUÇÕES EDUCACIONAIS INTEGRADAS