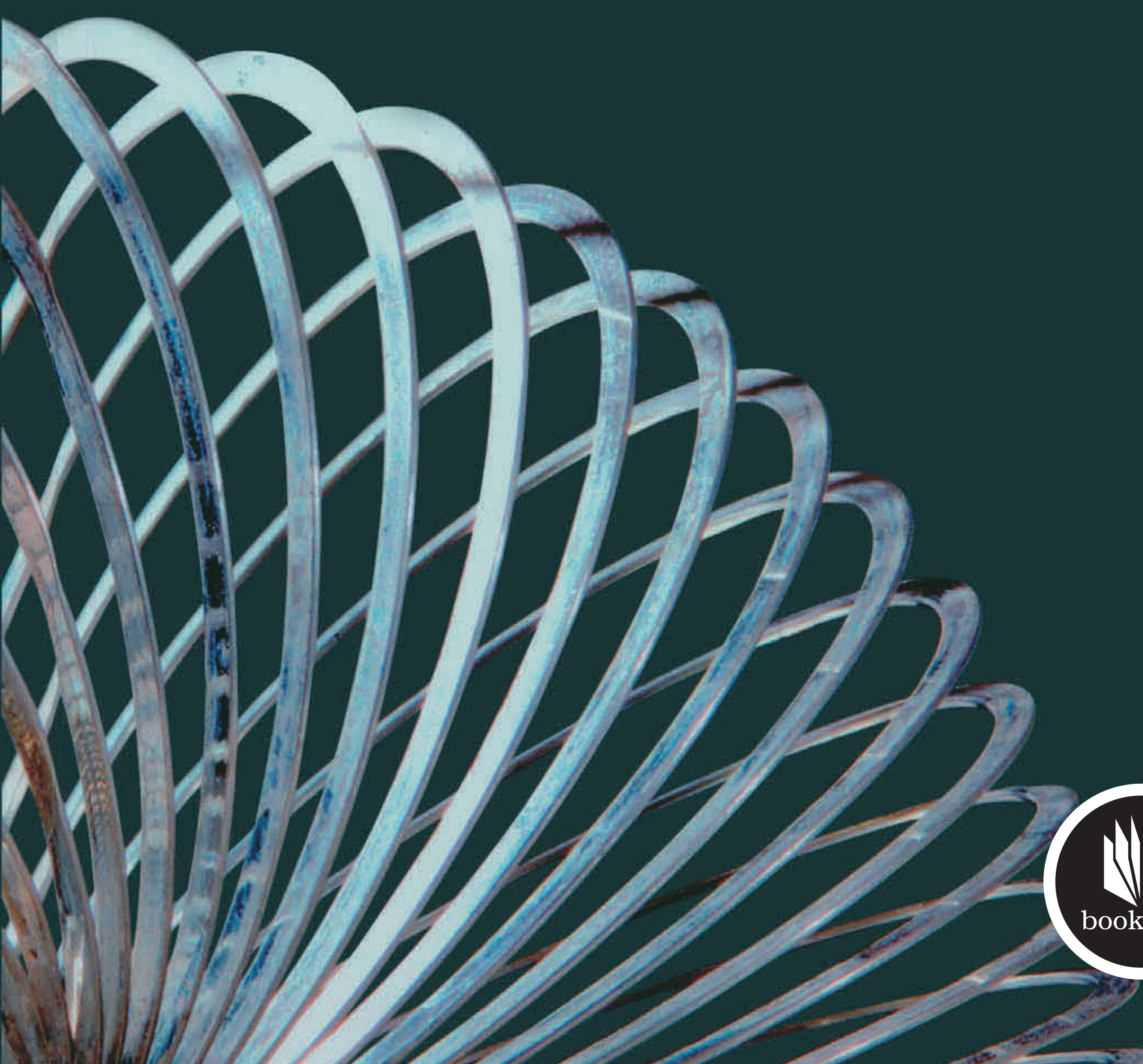
CÁLCULO

JON ROGAWSKI

VOLUME 1



bookman

R721c Rogawski, Jon.
Cálculo [recurso eletrônico] / Jon Rogawski ; tradução Claus Ivo Doering.
– Dados eletrônicos. – Porto Alegre : Bookman, 2008.
v. 1

Editado também como livro impresso em 2009.
ISBN 978-85-7780-389-7

1. Cálculo. 2. Matemática. I. Título.

CDU 51-3

Catalogação na publicação: Renata de Souza Borges CRB-10/Prov-021/08

80. Seja $p = p_1 \ldots p_s$ um inteiro com dígitos $p_1, \ldots, p_s$. Mostre que

$$\frac{p}{10^s - 1} = 0,\overline{p_1 \ldots p_s}$$

Use isso para encontrar a expansão decimal de $r = \frac{2}{11}$. Observe que

$$r = \frac{2}{11} = \frac{18}{10^2 - 1}$$

81. Uma função $f(x)$ é simétrica em relação à reta vertical $x = a$ se $f(a - x) = f(a + x)$.

(a) Trace o gráfico de uma função que é simétrica em relação a $x = 2$.

(b) Mostre que se $f(x)$ é simétrica em relação a $x = a$, então $g(x) = f(x + a)$ é par.

82. Formule uma condição para $f(x)$ ser simétrica em relação ao ponto $(a, 0)$ no eixo x.

1.2 Funções lineares e quadráticas

As funções lineares são as mais simples de todas as funções e seus gráficos (retas) são as mais simples de todas as curvas. Contudo, as funções lineares e as retas desempenham um papel extremamente importante no Cálculo. É importante, por isso, conhecer detalhadamente as propriedades básicas das funções lineares, bem como as diferentes maneiras de escrever a equação de uma reta.

Recordemos que uma **função linear** é uma função do tipo

$$\boxed{f(x) = mx + b \quad (m \text{ e } b \text{ constantes})}$$

O gráfico de $f(x)$ é uma reta de inclinação m e, como $f(0) = b$, o gráfico intersecta o eixo y no ponto $(0, b)$ (Figura 1). O número b é o ponto de corte da reta com o eixo y e dizemos que a equação $y = mx + b$ da reta está na **forma inclinação-corte**.

Usamos os símbolos Δx e Δy para denotar a *variação* (ou *incremento*) em x e $y = f(x)$ ao longo do intervalo $[x_1, x_2]$ (Figura 1):

$$\boxed{\Delta x = x_2 - x_1, \qquad \Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)}$$

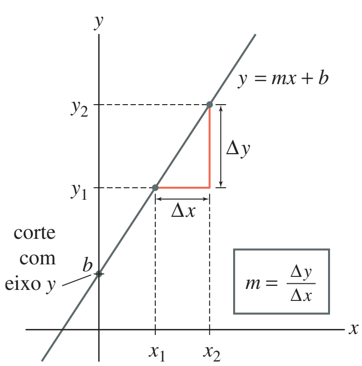


FIGURA 1 A inclinação m é a razão "elevação sobre avanço".

A inclinação m da reta é a razão

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{variação vertical}}{\text{variação horizontal}} = \frac{\text{elevação}}{\text{avanço}}$$

Isso segue da fórmula $y = mx + b$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + b) - (mx_1 + b)}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

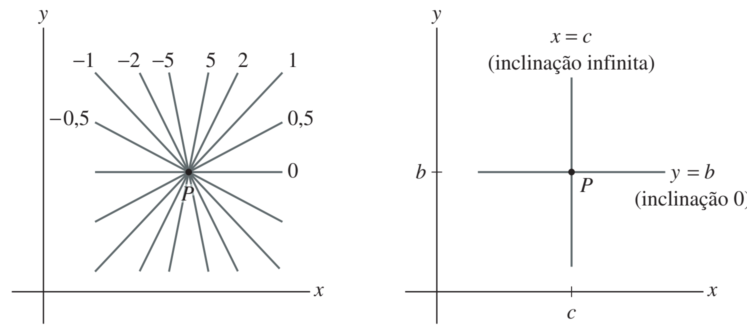
A inclinação m mede a *taxa de variação* de y em relação a x. De fato, escrevendo

$$\Delta y = m\Delta x$$

vemos que um incremento de uma unidade em x (ou seja, $\Delta x = 1$) produz uma variação de m unidades Δy em y. Por exemplo, se $m = 5$, então y aumenta cinco unidades por unidade de aumento de x. A interpretação da inclinação como taxa de variação é de importância fundamental no Cálculo. Na Seção 2.1, discutiremos isso com mais detalhes.

Graficamente, a inclinação m mede a declividade da reta $y = mx + b$. A Figura 2(A) mostra retas de diversas inclinações m. Observe as propriedades seguintes:

- **Declividade:** quanto maior o valor absoluto $|m|$, maior a declividade da reta.
- **Inclinação negativa:** se $m < 0$, a reta apresenta um declive da esquerda para a direita.
- $f(x) = mx + b$ é estritamente crescente se $m > 0$ e estritamente decrescente se $m < 0$.
- A **reta horizontal** $y = b$ tem inclinação $m = 0$ [Figura 2(B)].
- A **reta vertical** tem equação $x = c$, onde c é uma constante. Informalmente, a inclinação de uma reta vertical é "infinita", de modo que não é possível escrever a equação de uma reta vertical na forma inclinação-corte $y = mx + b$.



(A) Retas por P de diversas inclinações.

(B) Retas horizontal e vertical por P.

FIGURA 2

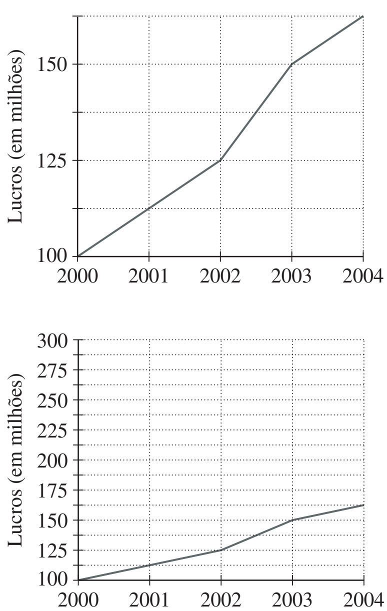


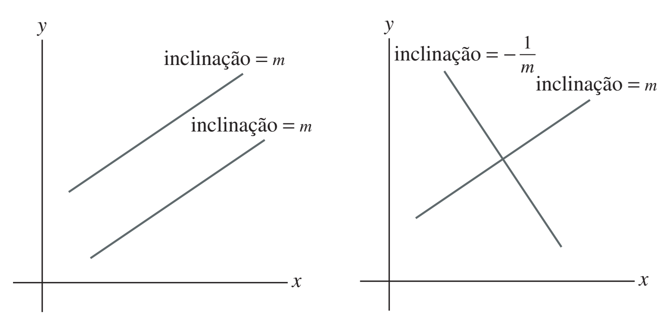
FIGURA 3 Crescimento de lucros corporativos.

ADVERTÊNCIA: Muitas vezes os gráficos são traçados utilizando escalas diferentes para os eixos x e y. Isso é feito para manter os tamanhos desses gráficos dentro do razoável. Contudo, quando as escalas são diferentes, as retas não aparecem com sua verdadeira inclinação.

A escala é especialmente importante nas aplicações porque a declividade de um gráfico depende da escolha de unidades para os eixos x e y. Podemos criar impressões *subjetivas* muito distintas com uma mudança de escala. A Figura 3 mostra o crescimento dos lucros de uma companhia ao longo de um período de quatro anos. Os dois gráficos transmitem a mesma informação mas o gráfico de cima faz esse crescimento parecer mais dramático.

Em seguida, vamos rever a relação entre as inclinações de retas paralelas e perpendiculares (Figura 4):

- Retas de inclinações m_1 e m_2 são **paralelas** se, e somente se, $m_1 = m_2$.
- Retas de inclinações m_1 e m_2 são **perpendiculares** se, e somente se, $m_1 = -1/m_2$ (ou $m_1 m_2 = -1$).



(A) Retas paralelas

(B) Retas perpendiculares

FIGURA 4 Retas paralelas e perpendiculares.

Como já mencionamos, é importante conhecer bem as diferentes maneiras de escrever a equação de uma reta. A **equação linear** geral é

$$\boxed{ax + by = c} \qquad \boxed{1}$$

em que a e b não são *ambos* zero. Para $b = 0$, isso dá a reta vertical $ax = c$. Quando $b \neq 0$, podemos reescrever (1) na forma inclinação-corte. Por exemplo, $-6x + 2y = 3$ pode ser reescrita como $y = 3x + \frac{3}{2}$.

Freqüentemente utilizamos duas outras formas, a **ponto-inclinação** e a **ponto-ponto**. Dados um ponto $P = (a, b)$ e uma inclinação m, a equação da reta pelo ponto P com inclinação m é $y - b = m(x - a)$. Analogamente, a reta por dois pontos distintos $P = (a_1, b_1)$ e $Q = (a_2, b_2)$ tem inclinação (Figura 5)

$$m = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$$

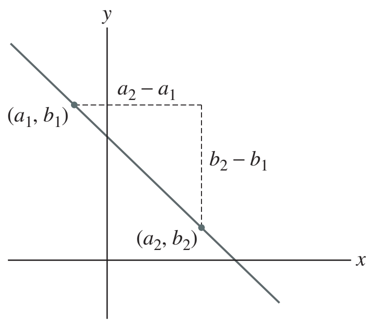


FIGURA 5 A inclinação da reta entre $P = (a_1, b_1)$ e $Q = (a_2, b_2)$ é $m = \dfrac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$.

Portanto, podemos escrever sua equação como $y - b_1 = m(x - a_1)$.

Equações para retas

1. **Forma ponto-inclinação:** A reta por $P = (a, b)$ com inclinação m tem equação

$$\boxed{y - b = m(x - a)}$$

2. **Forma ponto-ponto:** A reta por $P = (a_1, b_1)$ e $Q = (a_2, b_2)$ tem equação

$$\boxed{y - b_1 = m(x - a_1) \qquad \text{onde } m = \frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}}$$

■ **EXEMPLO 1** **Reta de inclinação dada por um ponto dado** Encontre a equação da reta por (9, 2) de inclinação $-\frac{2}{3}$.

Solução Podemos escrever a equação diretamente em forma ponto-inclinação:

$$y - 2 = -\frac{2}{3}(x - 9)$$

Na forma inclinação-corte: $y = -\frac{2}{3}(x - 9) + 2$ ou $y = -\frac{2}{3}x + 8$. Ver Figura 6. ■

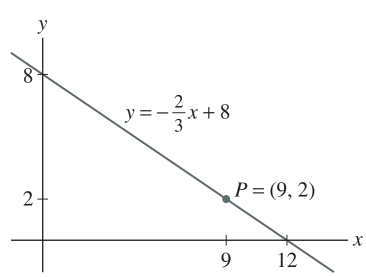


FIGURA 6 A reta por $P = (9, 2)$ de inclinação $m = -\frac{2}{3}$.

■ **EXEMPLO 2** **Reta por dois pontos** Encontre a equação da reta $\mathcal{L}$ por (2, 1) e (9, 5).

Solução A reta $\mathcal{L}$ tem inclinação

$$m = \frac{5 - 1}{9 - 2} = \frac{4}{7}$$

Como (9, 5) é um ponto de $\mathcal{L}$, sua equação é $y - 5 = \frac{4}{7}(x - 9)$. ■

ENTENDIMENTO CONCEITUAL Podemos definir os incrementos Δx e Δy ao longo do intervalo $[x_1, x_2]$ para qualquer função $f(x)$ (linear ou não) mas, em geral, a razão $\Delta y/\Delta x$ depende do intervalo. A propriedade característica de uma função linear $f(x) = mx + b$ é que $\Delta y/\Delta x$ tem o mesmo valor m para cada intervalo (Figura 7).

Em outras palavras, y tem uma taxa de variação constante em relação a x. Podemos usar essa propriedade para testar se duas quantidades estão relacionadas por uma equação linear (ver Exemplo 3).

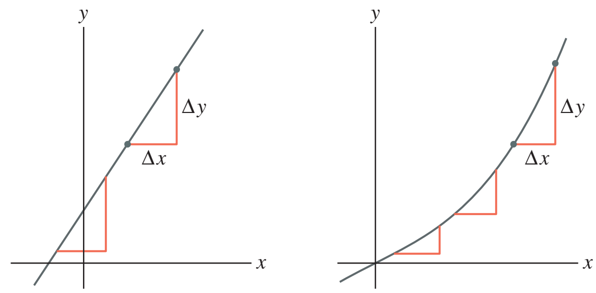


Gráfico de uma função linear. A razão $\Delta y/\Delta x$ é a mesma em qualquer intervalo.

Gráfico de uma função não-linear. A razão $\Delta y/\Delta x$ varia, dependendo do intervalo.

FIGURA 7

TABELA 1

Temperatura (°F)	Pressão (libras/pol^2)
70	187,42
75	189
85	192,16
100	196,9
110	200,06

Dados experimentais reais dificilmente revelam linearidade perfeita, mesmo se os pontos de dados estiverem, essencialmente, numa reta. O método de regressão linear é utilizado para encontrar a função linear que melhor se ajusta aos dados.

■ **EXEMPLO 3** **Testando para uma relação linear** A Tabela 1 dá a medição da pressão P de um gás em temperaturas T diferentes. Esses dados sugerem uma relação linear entre P e T?

Solução Calculamos $\dfrac{\Delta P}{\Delta T}$ em pontos de dados sucessivos e conferimos se essa razão é constante:

(T_1, P_1)	(T_2, P_2)	$\dfrac{\Delta P}{\Delta T}$
(70; 187,42)	(75; 189)	$\dfrac{189 - 187{,}42}{75 - 70} = 0{,}316$
(75; 189)	(85; 192,16)	$\dfrac{192{,}16 - 189}{85 - 75} = 0{,}316$
(85; 192,16)	(100; 196,9)	$\dfrac{196{,}9 - 192{,}16}{100 - 85} = 0{,}316$
(100; 196,9)	(110; 200,06)	$\dfrac{200{,}06 - 196{,}9}{110 - 100} = 0{,}316$

Como $\Delta P/\Delta T$ tem o valor constante 0,316, os pontos de dados estão numa reta de inclinação 0,316 (isso é confirmado pelo esboço na Figura 8). A reta passa pelo primeiro ponto de dados (70; 182,42), de modo que sua equação em forma ponto-inclinação é

$$P - 187{,}42 = 0{,}361(T - 70) \qquad \blacksquare$$

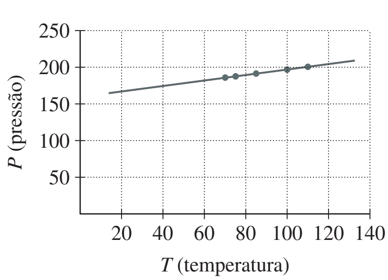


FIGURA 8 A reta pelos pontos dos dados de pressão-temperatura.

Uma **função quadrática** é uma função definida por um polinômio quadrático

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad (a, b, c \text{ constantes, com } a \neq 0)$$

O gráfico de $f(x)$ é uma **parábola** (Figura 9). A parábola abre para cima se o coeficiente dominante a for positivo e para baixo se a for negativo. O **discriminante** de $f(x)$ é a quantidade

$$D = b^2 - 4ac$$

As raízes de $f(x)$ são dadas pela **fórmula quadrática** ou **de Bhaskara** (ver Exercício 56):

$$\text{Raízes de } f(x) = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

O sinal de D determina se $f(x)$ tem ou não tem raízes reais (Figura 9). Se $D > 0$, então $f(x)$ tem duas raízes reais e, se $D = 0$, tem uma raiz real (uma "raiz dupla"). Se $D < 0$, então $\sqrt{D}$ é imaginário e $f(x)$ não tem raízes reais.

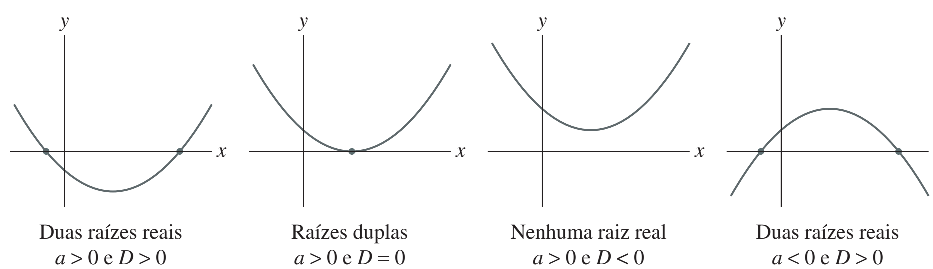


FIGURA 9

Quando $f(x)$ tem duas raízes reais r_1 e r_2, então $f(x)$ pode ser fatorado como

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Por exemplo, $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ tem discriminante $D = b^2 - 4ac = 9 - 8 = 1 > 0$ e, pela fórmula quadrática, suas raízes são $(3 \pm 1)/4$, ou 1 e $\frac{1}{2}$. Portanto,

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1 = 2(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$$

A técnica de **completar o quadrado** consiste em escrever um polinômio quadrático como um múltiplo de um quadrado mais uma constante:

$$ax^2 + bx + c = a\underbrace{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2}_{\text{Termo quadrático}} + \underbrace{\frac{4ac - b^2}{4a}}_{\text{Constante}} \qquad \boxed{2}$$

Não é necessário memorizar essa fórmula, mas é importante saber como executar um completamento de quadrado.

Os textos cuneiformes escritos em placas de argila mostram que o método de completar o quadrado era conhecido dos matemáticos babilônicos da antigüidade que viveram há cerca de 4000 anos.

EXEMPLO 4 **Completando o quadrado** Complete o quadrado do polinômio quadrático $4x^2 - 12x + 3$.

Solução Primeiro fatoramos o coeficiente dominante:

$$4x^2 - 12x + 3 = 4\left(x^2 - 3x + \frac{3}{4}\right)$$

Depois completamos o quadrado para o termo $x^2 - 3x$:

$$x^2 + bx = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}, \qquad x^2 - 3x = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

Desse modo,

$$4x^2 - 12x + 3 = 4\left(\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{3}{4}\right) = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - 6$$ ■

O método de completar o quadrado pode ser usado para encontrar o valor mínimo ou máximo de uma função quadrática.

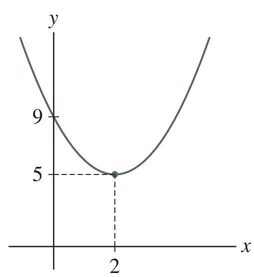


FIGURA 10 O gráfico de $f(x) = x^2 - 4x + 9$.

■ **EXEMPLO 5** **Encontrando o mínimo de uma função quadrática** Complete o quadrado e encontre o valor mínimo da função quadrática $f(x) = x^2 - 4x + 9$.

Solução Temos

$$f(x) = x^2 - 4x + 9 = (x-2)^2 - 4 + 9 = \overbrace{(x-2)^2}^{\text{Esse termo é } \geq 0} + 5$$

Assim, $f(x) \geq 5$ para cada x e o valor mínimo de $f(x)$ é $f(2) = 5$ (Figura 10). ■

1.2 RESUMO

- Uma função da forma $f(x) = mx + b$ é denominada função linear.
- A equação geral de uma reta é $ax + by = c$. A reta $y = c$ é horizontal e $x = c$ é vertical.
- Há três maneiras convenientes de escrever a equação de uma reta não-vertical:
  - Forma inclinação-corte: $y = mx + b$ (inclinação m e corte b com o eixo y)
  - Forma ponto-inclinação: $y - b = m(x - a)$ [inclinação m, passa por (a, b)]
  - Forma ponto-ponto: a reta pelos dois pontos $P = (a_1, b_1)$ e $Q = (a_2, b_2)$ tem inclinação $m = \dfrac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}$ e equação $y - b_1 = m(x - a_1)$.
- Duas retas de inclinações m_1 e m_2 são paralelas se, e somente se, $m_1 = m_2$ e são perpendiculares se, e somente se, $m_1 = -1/m_2$.
- As raízes da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são dadas pela fórmula quadrática $x = (-b \pm \sqrt{D})/2a$, onde $D = b^2 - 4ac$ é o discriminante. As raízes são reais se $D > 0$ e complexas (com parte imaginária não-nula) se $D < 0$.
- A técnica de completar o quadrado consiste em escrever uma função quadrática como um múltiplo de um quadrado mais uma constante.

1.2 EXERCÍCIOS

Exercícios preliminares

1. Qual é a inclinação da reta $y = -4x - 9$?

2. As retas $y = 2x + 1$ e $y = -2x - 4$ são perpendiculares?

3. Quando é a reta $ax + by = c$ paralela ao eixo y? E ao eixo x?

4. Seja $y = 3x + 2$. Quanto é Δy se x tiver um acréscimo de 3?

5. Qual é o mínimo de $f(x) = (x + 3)^2 - 4$?

6. Qual é o resultado de completar o quadrado de $f(x) = x^2 + 1$?

Exercícios

Nos Exercícios 1-4, encontre a inclinação, o corte com o eixo y e o corte com o eixo x da reta de equação dada.

1. $y = 3x + 12$

2. $y = 4 - x$

3. $4x + 9y = 3$

4. $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 6)$

Nos Exercícios 5-8, encontre a inclinação da reta.

5. $y = 3x + 2$

6. $y = 3(x - 9) + 2$

7. $3x + 4y = 12$

8. $3x + 4y = -8$

Nos Exercícios 9-20, encontre a equação da reta com a descrição dada.

9. Inclinação 3, corta em 8 o eixo y

10. Inclinação -2, corta em 3 o eixo y

11. Inclinação 3, passa por $(7, 9)$

12. Inclinação -5, passa por $(0, 0)$

13. Horizontal, passa por $(0, -2)$

14. Passa por $(-1, 4)$ e $(2, 7)$

15. Paralela a $y = 3x - 4$ e passa por $(1, 1)$

16. Passa por $(1, 4)$ e $(12, -3)$

17. Perpendicular a $3x + 5y = 9$ e passa por $(2, 3)$

18. Vertical e passa por $(-4, 9)$

19. Horizontal, passa por $(8, 4)$

20. Inclinação 3, corta em 6 o eixo x

21. Encontre a equação do bissetor perpendicular do segmento ligando $(1, 2)$ e $(5, 4)$ (Figura 11). *Sugestão*: o ponto médio Q do segmento ligando (a, b) a (c, d) é $\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$.

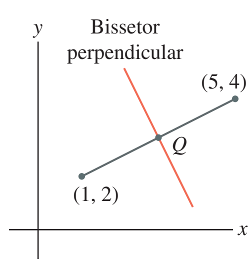


FIGURA 11

22. Forma corte-corte Mostre que a reta de corte $x = a$ com o eixo x e $y = b$ com o eixo y tem equação (Figura 12)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

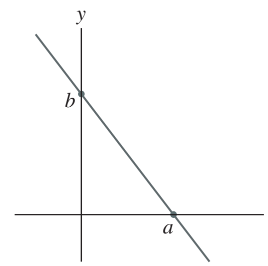


FIGURA 12 A reta de equação $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$.

23. Encontre a equação da reta que corta o eixo x em $x = 4$ e o eixo y em $y = 3$.

24. Uma reta de inclinação $m = 2$ passa por $(1, 4)$. Encontre y tal que $(3, y)$ esteja na reta.

25. Determine se existe alguma constante c tal que a reta $x + cy = 1$

(a) tenha inclinação 4

(b) passe por $(3, 1)$

(c) seja horizontal

(d) seja vertical

26. Suponha que o número N de entradas de um concerto que podem ser vendidas a um preço de P dólares por entrada seja uma função linear $N(P)$ para $10 \leq P \leq 40$. Determine $N(P)$ (denominada função demanda) se $N(10) = 500$ e $N(40) = 0$. Qual é o decréscimo ΔN no número de entradas vendidas se o preço for aumentado em $\Delta P = 5$ dólares?

27. O calor expande os materiais. Considere uma barra de metal de comprimento L_0 a uma temperatura T_0. Se a temperatura variar por uma quantidade ΔT, então o comprimento do bastão varia $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$, onde α é o coeficiente de expansão termal. Para o aço, $\alpha = 1{,}24 \times 10^{-5}\,°C^{-1}$.

(a) Um bastão de aço tem comprimento $L_0 = 40$ cm a $T_0 = 40°C$. Qual é o comprimento a $T = 90°C$?

(b) Encontre seu comprimento a $T = 50°C$ se seu comprimento a $T_0 = 100°C$ for 65 pol.

(c) Expresse o comprimento L como uma função de T se $L_0 = 65$ pol a $T_0 = 100°C$.

28. Os pontos $(0{,}5; 1)$, $(1; 1{,}2)$ e $(2; 2)$ estão num reta?

29. Encontre b tal que $(2, -1)$, $(3, 2)$ e $(b, 5)$ estejam numa reta.

30. Encontre uma expressão para a velocidade v como função de t que combine com a tabela seguinte.

t (s)	0	2	4	6
v (m/s)	39,2	58,6	78	97,4

31. Foi medido o período T de vários pêndulos de comprimentos L diferentes. Baseado nos dados a seguir, T parece ou não ser uma função linear de L?

L (pés)	2	3	4	5
T (s)	1,57	1,92	2,22	2,48

32. Mostre que $f(x)$ é linear de inclinação m se, e somente se,

$$f(x+h) - f(x) = mh \quad \text{(para quaisquer } x \text{ e } h\text{)}$$

33. Encontre as raízes dos polinômios quadráticos:

(a) $4x^2 - 3x - 1$ **(b)** $x^2 - 2x - 1$

Nos Exercícios 34-41, complete o quadrado e encontre o valor mínimo ou máximo da função quadrática.

34. $y = x^2 + 2x + 5$

35. $y = x^2 - 6x + 9$

36. $y = -9x^2 + x$

37. $y = x^2 + 6x + 2$

38. $y = 2x^2 - 4x - 7$

39. $y = -4x^2 + 3x + 8$

40. $y = 3x^2 + 12x - 5$

41. $y = 4x - 12x^2$

42. Trace o gráfico de $y = x^2 - 6x + 8$ esboçando as raízes e o ponto mínimo.

43. Trace o gráfico de $y = x^2 + 4x + 6$ esboçando o ponto mínimo, o ponto de corte com o eixo y e mais algum outro ponto.

44. Se, numa população, os alelos A e B do gene da fibrose cística ocorrem com freqüências p e $1 - p$ (onde p é uma fração entre 0 e 1), então a freqüência de portadores heterozigotos (que têm ambos alelos) é $2p(1 - p)$. Qual valor de p dá a maior freqüência de portadores heterozigotos?

45. A função $f(x) = x^2 + cx + 1$ tem uma raiz dupla para quais valores de c? E nenhuma raiz real?

46. Sejam $f(x)$ uma função quadrática e c uma constante. Qual afirmação está correta? Explique graficamente.

(a) Existe um único valor de c tal que $x = f(x) - c$ tem uma raiz dupla.

(b) Existe um único valor de c tal que $x = f(x - c)$ tem uma raiz dupla.

47. Prove que $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ para cada $x > 0$. *Sugestão*: considere $(x^{1/2} - x^{-1/2})^2$.

48. Sejam $a, b > 0$. Mostre que a *média geométrica* $\sqrt{ab}$ não é maior do que a *média aritmética* $\dfrac{a+b}{2}$. *Sugestão*: use uma variação da sugestão dada no Exercício 47.

49. Quando suspendemos objetos de pesos x e w_1 na balança da Figura 13(A), o travessão da balança está horizontal se $bx = aw_1$. Se os comprimentos a e b forem conhecidos, podemos usar essa equação para determinar um peso desconhecido x selecionando w_1 de tal maneira que o travessão esteja horizontal. Se a e b não forem conhecidos precisamente, podemos proceder como segue. Primeiro equilibramos x por w_1 à esquerda como em (A). Em seguida, trocamos de lado e equilibramos x por w_2 à direita como em (B). A média $\bar{x} = \frac{1}{2}(w_1 + w_2)$ dá uma estimativa para x. Mostre que $\bar{x}$ é maior do que ou igual ao verdadeiro peso de x.

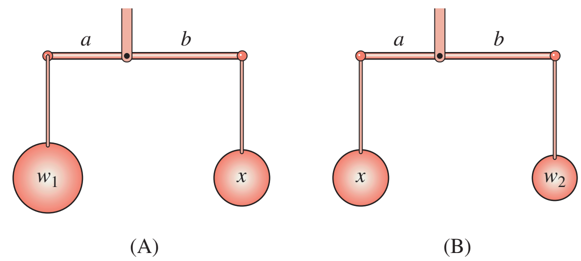


FIGURA 13

50. Encontre números x e y cuja soma é 10 e o produto é 24. *Sugestão*: encontre um polinômio quadrático satisfeito por x.

51. Encontre um par de números cuja soma e produto sejam, ambos, iguais a 8.

52. Mostre que o gráfico da parábola $y = x^2$ consiste em todos pontos P tais que $d_1 = d_2$, onde d_1 é a distância de P a $(0, \frac{1}{4})$ e d_2 é a distância de P à reta horizontal $y = -\frac{1}{4}$ (Figura 14).

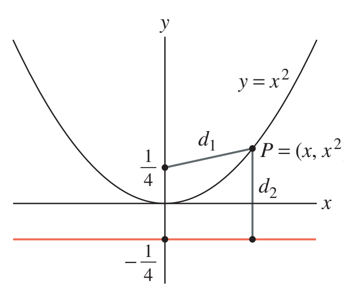


FIGURA 14

Compreensão adicional e desafios

53. Mostre que se $f(x)$ e $g(x)$ forem lineares, então $f(x) + g(x)$ também é. Vale o mesmo para $f(x)\,g(x)$?

54. Mostre que se $f(x)$ e $g(x)$ forem funções lineares tais que $f(0) = g(0)$ e $f(1) = g(1)$, então $f(x) = g(x)$.

55. Mostre que a razão $\Delta y/\Delta x$ da função $f(x) = x^2$ não é constante ao longo do intervalo $[x_1, x_2]$, pois depende do intervalo. Determine exatamente como $\Delta y/\Delta x$ depende de x_1 e x_2.

56. Use a Equação (2) para deduzir a fórmula quadrática das raízes de $ax^2 + bx + c = 0$.

57. Sejam $a, c \neq 0$. Mostre que as raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ e $cx^2 + bx + a = 0$ são recíprocas uma da outra.

58. Complete o quadrado para mostrar que as parábolas $y = ax^2$ e $y = ax^2 + bx + c$ têm o mesmo formato (mostre que a segunda parábola é congruente à primeira por meio de translação vertical e horizontal).

59. Demonstre as **fórmulas de Viète**, que afirmam que o polinômio quadrático que tem raízes dadas pelos números α e β é $x^2 + bx + c$, onde $b = -\alpha - \beta$ e $c = \alpha\beta$.

1.3 Classes básicas de funções

Seria impossível (e inútil) descrever todas as possíveis funções $f(x)$. Como os valores de uma função podem ser dados arbitrariamente, uma função escolhida aleatoriamente seria provavelmente tão complicada que não saberíamos nem traçar seu gráfico nem descrevê-la de alguma maneira razoável. No entanto, o Cálculo não tenta tratar com todas funções possíveis. As técnicas do Cálculo, mesmo poderosas e gerais como são, aplicam-se somente a funções que sejam suficientemente "bem comportadas" (quando estudarmos a derivada no Capítulo 3, veremos o que significa bom comportamento). Felizmente, tais funções são adequadas para uma grande variedade de aplicações. Neste texto, tratamos principalmente com as seguintes classes de funções bem comportadas, importantes e conhecidas:

polinômios   funções racionais   funções algébricas

funções exponenciais   funções trigonométricas

- **Polinômios:** para qualquer número real m, a função $f(x) = x^m$ é denominada **função potência** de expoente m. Um polinômio é a soma de múltiplos de funções potência de expoentes naturais (Figura 1):

$$f(x) = x^5 - 5x^3 + 4x, \qquad g(t) = 7t^6 + t^3 - 3t - 1$$

Assim, a função $f(x) = x + x^{-1}$ não é um polinômio pois inclui uma função potência x^{-1} de expoente negativo. O polinômio geral na variável x pode ser escrito

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

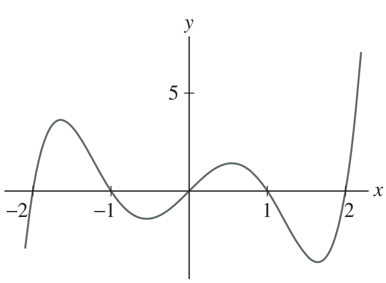


FIGURA 1 O polinômio $y = x^5 - 5x^3 + 4x$.

– Os números $a_0, a_1, \ldots, a_n$ são denominados **coeficientes**.
– O **grau** de $P(x)$ é n (supondo que $a_n \neq 0$).
– O coeficiente a_n é denominado **coeficiente dominante**.
– O domínio de $P(x)$ é **R**.

- **Funções racionais:** uma função racional é o *quociente* de dois polinômios (Figura 2):

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad [P(x) \text{ e } Q(x) \text{ polinômios}]$$

Cada polinômio é, também, uma função racional [com $Q(x) = 1$]. O domínio de uma função racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ é o conjunto de números x tais que $Q(x) \neq 0$. Por exemplo,

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \text{domínio } \{x : x \neq 0\}$$

$$h(t) = \frac{7t^6 + t^3 - 3t - 1}{t^2 - 1} \qquad \text{domínio } \{t : t \neq \pm 1\}$$

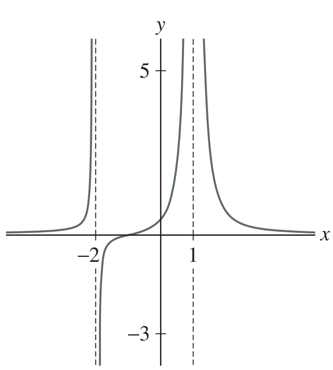


FIGURA 2 A função racional $f(x) = \dfrac{x+1}{x^3 - 3x + 2}$.

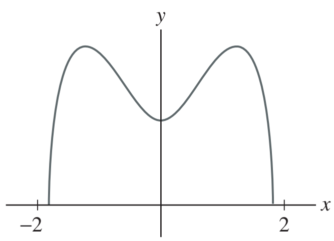


FIGURA 3 A função algébrica $f(x) = \sqrt{1 + 3x^2 - x^4}$.

- **Funções algébricas:** uma função algébrica é obtida quando tomamos somas, produtos e quocientes de *raízes* de polinômios e funções racionais (Figura 3):

$$f(x) = \sqrt{1 + 3x^2 - x^4}, \qquad g(t) = (\sqrt{t} - 2)^{-2}, \qquad h(z) = \frac{z + z^{-5/3}}{5z^3 - \sqrt{z}}$$

Um número x pertence ao domínio de f se cada expressão na fórmula de f estiver definida e o resultado não envolver divisão por zero. Por exemplo, $g(t)$ acima está definida se $t \geq 0$ e $\sqrt{t} \neq 2$, portanto o domínio de $g(t)$ é $D = \{t : t \geq 0 \text{ e } t \neq 4\}$. Mais geralmente, as funções algébricas são definidas por equações polinomiais entre x e y. Nesse caso, dizemos que y está **definido implicitamente** como função de x. Por exemplo, a equação $y^4 + 2x^2y + x^4 = 1$ define y implicitamente como função de x.

- **Funções exponenciais:** a função $f(x) = b^x$, onde $b > 0$, é denominada função exponencial de base b. Alguns exemplos são

$$y = 2^x, \qquad y = 10^x, \qquad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, \qquad y = (\sqrt{5})^x$$

A função $f(x) = b^x$ é crescente se $b > 1$ e decrescente se $b < 1$ (Figura 4). A inversa de $f(x) = b^x$ é a **função logaritmo** $y = \log_b x$. Essas função serão estudadas detalhadamente no Capítulo 7.

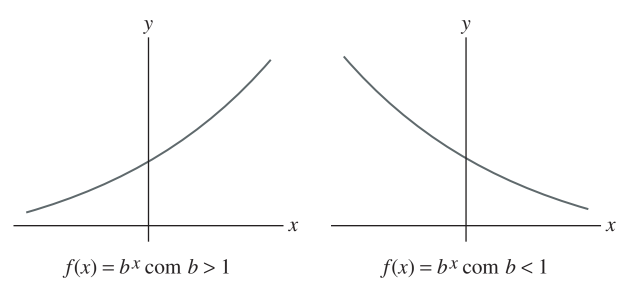


FIGURA 4 Funções exponenciais.

Qualquer função que não seja algébrica é chamada "transcendente". As funções exponenciais e trigonométricas constituem exemplos. Outras funções transcendentes, como a função gama e as funções de Bessel, ocorrem em aplicações avançadas à Física, Engenharia e Estatística. A palavra "transcendente" para descrever funções desse tipo foi utilizada nos anos 1670 por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

- **Funções trigonométricas:** as funções construídas a partir de sen x e cos x são denominadas funções trigonométricas. Essas funções serão discutidas na próxima seção.

Construindo novas funções

Se f e g são funções, podemos construir funções novas formando as funções soma, diferença, produto e quociente:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(fg)(x) = f(x)\,g(x), \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad (\text{onde } g(x) \neq 0)$$

Por exemplo, se $f(x) = x^2$ e $g(x) = \text{sen}\, x$, então

$$(f + g)(x) = x^2 + \text{sen}\, x, \qquad (f - g)(x) = x^2 - \text{sen}\, x$$

$$(fg)(x) = x^2\, \text{sen}\, x, \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x^2}{\text{sen}\, x}$$

Também podemos multiplicar funções por constantes. Uma função do tipo

$$c_1 f(x) + c_2 g(x) \quad (c_1, c_2 \text{ constantes})$$

é denominada uma **combinação linear** de $f(x)$ e $g(x)$.

A **composição** é uma outra maneira importante de construir funções novas. A composição de f e g é a função $f \circ g$, definida para os valores de x do domínio de g tais que $g(x)$ esteja no domínio de f.

EXEMPLO 1 Calcule as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$ e discuta seus domínios, sendo

$$f(x) = \sqrt{x}, \qquad g(x) = 1 - x$$

O Exemplo 1 mostra que a composição de funções não é comutativa: as funções $f \circ g$ e $g \circ f$ podem ser diferentes.

Solução Temos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(1 - x) = \sqrt{1 - x}$$

A raiz quadrada $\sqrt{1 - x}$ está definida se $1 - x \geq 0$ ou se $x \leq 1$, portanto o domínio de $f \circ g$ é $\{x : x \leq 1\}$. Por outro lado,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 1 - \sqrt{x}$$

O domínio de $g \circ f$ é $\{x : x \geq 0\}$. ■

Funções elementares

As funções inversas serão discutidas na Seção 7.2.

Revisamos algumas das funções mais básicas e conhecidas da Matemática. Todas essas funções podem ser encontradas em qualquer calculadora científica. Funções novas podem ser produzidas usando as operações de adição, multiplicação e divisão, bem como composição, extração de raízes e também tomando inversas. É conveniente nos referirmos a uma função construída dessa maneira a partir das funções básicas listadas anteriormente como uma **função elementar**. As funções seguintes são elementares:

$$f(x) = \sqrt{2x + \operatorname{sen} x}, \qquad f(x) = 10^{\sqrt{x}}, \qquad f(x) = \frac{1 + x^{-1}}{1 + \cos x}$$

1.3 RESUMO

- Para qualquer número real m, a função $f(x) = x^m$ é denominada função potência de expoente m. Um polinômio $P(x)$ é uma soma de múltiplos de funções potência x^m, onde m é um número natural:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

Esse polinômio tem grau n (supondo que $a_n \neq 0$) e a_n é denominado coeficiente dominante.

- Uma função racional é um quociente $P(x)/Q(x)$ de dois polinômios.
- Uma função algébrica é produzida tomando somas, produtos e raízes enésimas de polinômios e funções racionais.
- Funções exponenciais: $f(x) = b^x$, onde $b > 0$ (b é denominada base).
- A função composta $f \circ g$ é definida por $f \circ g(x) = f(g(x))$. O domínio de $f \circ g$ é o conjunto dos x do domínio de g tais que $g(x)$ pertença ao domínio de f.

1.3 EXERCÍCIOS

Exercícios preliminares

1. Dê um exemplo de uma função racional.

2. Será $|x|$ uma função polinomial? E $|x^2+1|$?

3. O que tem de incomum o domínio de $f \circ g$ para $f(x) = x^{1/2}$ e $g(x) = -1 - |x|$?

4. Será $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ crescente ou decrescente?

5. Dê um exemplo de uma função transcendente.

Exercícios

Nos Exercícios 1-12, determine o domínio da função.

1. $f(x) = x^{1/4}$

2. $g(t) = t^{2/3}$

3. $f(x) = x^3 + 3x - 4$

4. $h(z) = z^3 + z^{-3}$

5. $g(t) = \dfrac{1}{t+2}$

6. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$

7. $G(u) = \dfrac{1}{u^2-4}$

8. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2-9}$

9. $f(x) = x^{-4} + (x-1)^{-3}$

10. $F(s) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{s}{s+1}\right)$

11. $g(y) = 10^{\sqrt{y}+y^{-1}}$

12. $f(x) = \dfrac{x + x^{-1}}{(x-3)(x+4)}$

Nos Exercícios 13-24, identifique cada uma das funções como polinomial, racional, algébrica ou transcendente.

13. $f(x) = 4x^3 + 9x^2 - 8$

14. $f(x) = x^{-4}$

15. $f(x) = \sqrt{x}$

16. $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

17. $f(x) = \dfrac{x^2}{x + \operatorname{sen} x}$

18. $f(x) = 2^x$

19. $f(x) = \dfrac{2x^3+3x}{9-7x^2}$

20. $f(x) = \dfrac{3x - 9x^{-1/2}}{9-7x^2}$

21. $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$

22. $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x}+1}$

23. $f(x) = x^2 + 3x^{-1}$

24. $f(x) = \operatorname{sen}(3^x)$

25. Será $f(x) = 2^{x^2}$ uma função transcendente?

26. Mostre que $f(x) = x^2 + 3x^{-1}$ e $g(x) = 3x^3 - 9x + x^{-2}$ são funções racionais (mostrando que cada uma é um quociente de polinômios).

Nos Exercícios 27-34, calcule as funções compostas $f \circ g$ e $g \circ f$, determinando seus domínios.

27. $f(x) = \sqrt{x}, \quad g(x) = x+1$

28. $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad g(x) = x^{-4}$

29. $f(x) = 2^x, \quad g(x) = x^2$

30. $f(x) = |x|, \quad g(\theta) = \operatorname{sen}\theta$

31. $f(\theta) = \cos\theta, \quad g(x) = x^3 + x^2$

32. $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad g(x) = x^{-2}$

33. $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t}}, \quad g(t) = -t^2$

34. $f(t) = \sqrt{t}, \quad g(t) = 1 - t^3$

35. A população (em milhões) de um país como função do tempo t (anos) é $P(t) = 30 \cdot 2^{kt}$, com $k = 0{,}1$. Mostre que a população dobra a cada 10 anos. Mais geralmente, mostre que para quaisquer constantes não-nulas a e k, a função $g(t) = a2^{kt}$ duplica a cada $1/k$ anos.

36. Encontre todos os valores de c para os quais o domínio de $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2+2cx+4}$ seja **R**.

Compreensão adicional e desafios

Nos Exercícios 37-43, definimos a diferença primeira δf *de uma função $f(x)$ por $\delta f(x) = f(x+1) - f(x)$.*

37. Mostre que se $f(x) = x^2$, então $\delta f(x) = 2x + 1$. Calcule δf para $f(x) = x$ e $f(x) = x^3$.

38. Mostre que $\delta(10^x) = 9 \cdot 10^x$ e, em geral, que $\delta(b^x) = c \cdot b^x$ para alguma constante c.

39. Mostre que $\delta(f+g) = \delta f + \delta g$ e $\delta(cf) = c\delta(f)$, para quaisquer duas funções f e g, onde c é uma constante qualquer.

40. As diferenças primeiras podem ser usadas para deduzir fórmulas para a soma de potências k-ésimas. Suponha que saibamos encontrar uma função $P(x)$ tal que $\delta P = (x+1)^k$ e $P(0) = 0$. Prove que $P(1) = 1^k$, $P(2) = 1^k + 2^k$ e, mais geralmente, para qualquer número natural n,

$$P(n) = 1^k + 2^k + \cdots + n^k \qquad \boxed{1}$$

41. Mostre primeiro que $P(x) = \dfrac{x(x+1)}{2}$ satisfaz $\delta P = (x+1)$. Em seguida, aplique o Exercício 40 para concluir que

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

42. Calcule $\delta(x^3)$, $\delta(x^2)$ e $\delta(x)$. Então encontre um polinômio $P(x)$ de grau 3 tal que $\delta P = (x+1)^2$ e $P(0) = 0$. Conclua que

$$P(n) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2$$

43. Este exercício, combinado com o Exercício 40, mostra que, para todo k, existe um polinômio $P(n)$ satisfazendo a Equação (1). A solução requer prova por indução e o teorema binomial (ver Apêndice C).

(a) Mostre que

$$\delta(x^{k+1}) = (k+1)\,x^k + \cdots$$

onde os pontos indicam os termos envolvendo potências menores de x.

(b) Mostre por indução que, para todo número natural k, existe um polinômio de grau $k+1$ com coeficiente dominante $1/(k+1)$:

$$P(x) = \frac{1}{k+1}x^{k+1} + \cdots$$

tal que $\delta P = (x+1)^k$ e $P(0) = 0$.

1.4 Funções trigonométricas

Começamos nossa revisão de Trigonometria recordando os dois sistemas de medição de ângulos: **radianos** e **graus**. Esses sistemas são melhor descritos usando a relação entre ângulos e rotação. Como é costume, utilizamos a letra grega minúscula teta, escrita θ, para denotar ângulos e rotação.

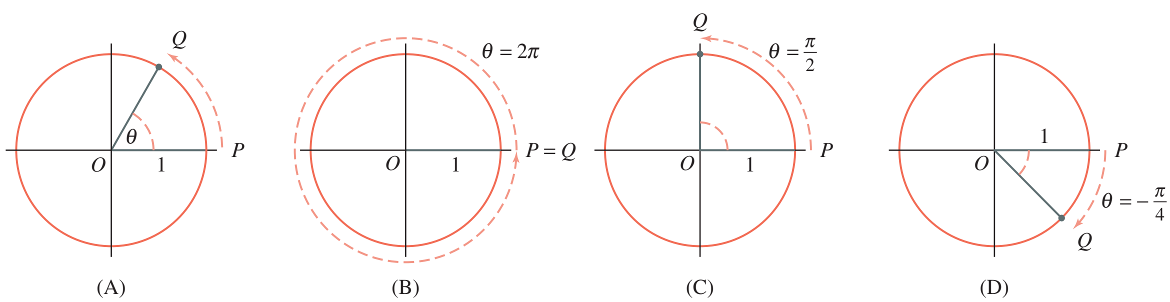


FIGURA 1 A medida em radianos θ de uma rotação é o comprimento do arco percorrido por P quando roda até Q.

TABELA 1

Rotação	Medida em radianos
Dois círculos inteiros	4π
Círculo inteiro	2π
Meio círculo	π
Um quarto de círculo	$2\pi/4 = \pi/2$
Um sexto de círculo	$2\pi/6 = \pi/3$

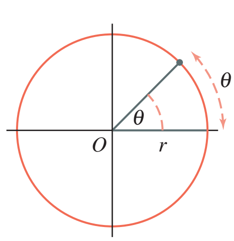


FIGURA 2 Num círculo de raio r, o arco percorrido por uma rotação de ângulo de θ radianos tem comprimento θr.

A Figura 1(A) mostra um círculo unitário de raio $\overline{OP}$ numa rotação anti-horária até o raio $\overline{OQ}$. *A medida em radianos θ dessa rotação é o comprimento do arco circular percorrido por P quando roda até Q.*

O círculo unitário tem circunferência 2π. Portanto, uma rotação de um círculo inteiro tem medida em radianos de $\theta = 2\pi$ [Figura 1(B)]. A medida em radianos de uma rotação de um quarto de círculo é $\theta = 2\pi/4 = \pi/2$ [Figura 1(C)] e, em geral, a rotação de um enésimo do círculo tem medida em radianos de $2\pi/n$ (Tabela 1). Uma rotação negativa (com $\theta < 0$) é uma rotação no sentido *horário* [Figura 1(D)]. Num círculo de raio r, *o arco percorrido por uma rotação anti-horária de ângulo de θ radianos tem comprimento θr* (Figura 2).

Agora considere o ângulo $\angle POQ$ da Figura 1(A). A medida em radianos de $\angle POQ$ é definida como a medida em radianos de uma rotação que leva $\overline{OP}$ em $\overline{OQ}$. Observe que cada rotação tem uma medida em radianos única, mas a medida em radianos de um ângulo não é única. Por exemplo, a rotação de um ângulo θ e $\theta + 2\pi$ levam, ambas, $\overline{OP}$ em $\overline{OQ}$. Embora a rotação por $\theta + 2\pi$ faça uma viagem adicional em torno do círculo, θ e $\theta + 2\pi$ representam o mesmo ângulo. Em geral, *dois ângulos coincidem se as rotações correspondentes diferirem por um múltiplo inteiro de* 2π. Por exemplo, o ângulo $\pi/4$ pode ser representado por $9\pi/4$ ou $-15\pi/4$, já que

$$\frac{\pi}{4} = \frac{9\pi}{4} - 2\pi = -\frac{15\pi}{4} + 4\pi$$

Radianos	Graus
0	$0°$
$\dfrac{\pi}{6}$	$30°$
$\dfrac{\pi}{4}$	$45°$
$\dfrac{\pi}{3}$	$60°$
$\dfrac{\pi}{2}$	$90°$

Cada ângulo tem uma medida em radianos única satisfazendo $0 \le \theta < 2\pi$. Com essa escolha, o ângulo θ subentende um arco de comprimento θr num círculo de raio r.

Os graus são definidos pela divisão do círculo (não necessariamente o unitário) em 360 partes. Um grau é (1/360)-avo de um círculo. Uma rotação de ângulo θ graus (denotado $\theta°$) é uma rotação de fração $\theta/360$ do círculo inteiro. Por exemplo, uma rotação de 90° é uma rotação de fração 90/360, ou $\frac{1}{4}$ de um círculo.

Assim como ocorre com radianos, cada rotação tem uma medida em graus única, mas a medida em graus de um ângulo não é única. Dois ângulos coincidem se sua medida em graus diferir por um múltiplo inteiro de 360. Cada ângulo tem uma medida em graus única satisfazendo $0 \le \theta < 360$. Por exemplo, os ângulos $-45°$ e $675°$ coincidem, pois $675 = -45 + 720$.

Para fazer a conversão entre radianos (que se abrevia "rad") e graus, lembre que 2π radianos é igual a 360°. Dessa forma, 1 rad é igual a $360/2\pi$ ou $180/\pi$ graus.

- Para converter de radianos para graus, multiplique por $180/\pi$.
- Para converter de graus para radianos, multiplique por $\pi/180$.

A medida em radianos costuma ser a melhor escolha para fins matemáticos, mas há boas razões práticas para usar graus. O número 360 tem muitos divisores ($360 = 8 \cdot 9 \cdot 5$) e, conseqüentemente, muitas partes fracionárias do círculo podem ser expressas como um número inteiro de graus. Por exemplo, um quinto do círculo é 72°, dois nonos é 80°, três oitavos é 135°, etc.

EXEMPLO 1 Converta **(a)** 55° em radianos e **(b)** 0,5 radianos em graus.

Solução

(a) $55° \times \dfrac{\pi}{180} \approx 0{,}9599$ rad **(b)** $0{,}5 \text{ rad} \times \dfrac{180}{\pi} \approx 28{,}648°$

Convenção: *A menos de menção explícita em contrário, sempre medimos ângulos em radianos.*

As funções trigonométricas sen θ e cos θ são definidas em termos de triângulos retângulos. Seja θ um ângulo agudo num triângulo retângulo e denotemos os lados como na Figura 3. Então

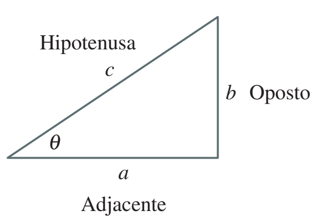


FIGURA 3

$$\boxed{\text{sen}\,\theta = \frac{b}{c} = \frac{\text{oposto}}{\text{hipotenusa}}, \qquad \cos\theta = \frac{a}{c} = \frac{\text{adjacente}}{\text{hipotenusa}}}$$

Uma desvantagem dessa definição é que só faz sentido se θ estiver entre 0 e $\pi/2$ (porque um ângulo num triângulo retângulo não pode exceder $\pi/2$). Contudo, o seno e o cosseno também podem ser definidos em termos do círculo unitário e essa definição é válida para todos ângulos. Seja $P = (x, y)$ um ponto no círculo unitário correspondente ao ângulo θ, como na Figura 4(A). Então definimos:

$$\cos\theta = \text{coordenada } x \text{ de } P, \qquad \text{sen}\,\theta = \text{coordenada } y \text{ de } P$$

Isso está de acordo com a definição por triângulo retângulo quando $0 < \theta < \pi/2$. Além disso, vemos na Figura 4(C) que sen θ é uma função ímpar e cos θ é uma função par:

$$\boxed{\text{sen}(-\theta) = -\,\text{sen}\,\theta, \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta}$$

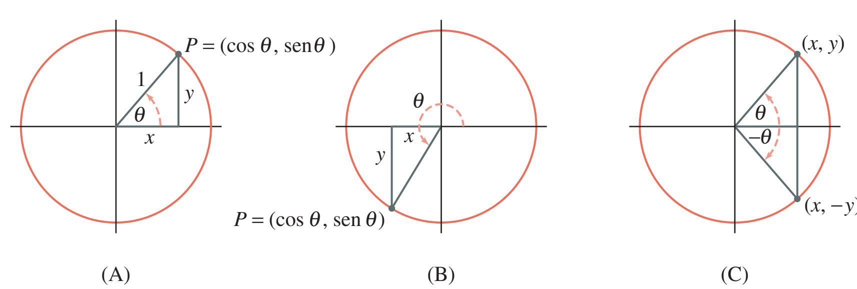


FIGURA 4 As definições de seno e cosseno do círculo unitário são válidas para todos ângulos θ.

Embora utilizemos uma calculadora para calcular o seno e o cosseno de ângulos mais gerais, os valores padrão listados na Figura 5 e Tabela 2 aparecem muito e deveriam ser memorizados.

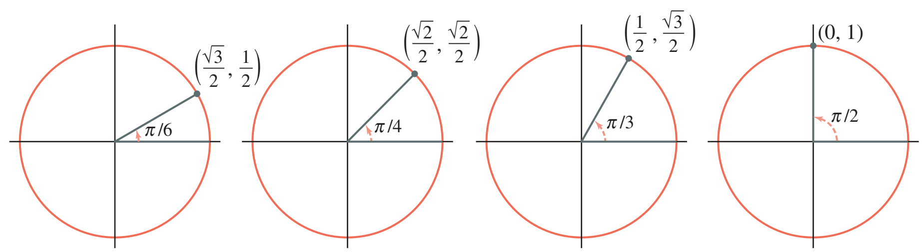


FIGURA 5 Quatro ângulos padrão: as coordenadas x e y dos pontos são $\cos\theta$ e $\operatorname{sen}\theta$.

TABELA 2

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\operatorname{sen}\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1

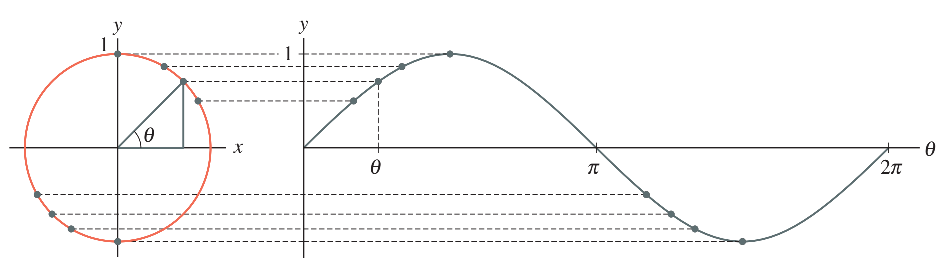


FIGURA 6 O gráfico de $y = \operatorname{sen}\theta$ é gerado quando o ponto percorre o círculo unitário.

As funções $\operatorname{sen}\theta$ *e* $\cos\theta$ *são definidas para qualquer número real* θ *e não é necessário pensar em* θ *como sendo um ângulo. Muitas vezes escrevemos* $\operatorname{sen} x$ *e* $\cos x$*, usando* x *em vez de* θ*. Dependendo da aplicação, a interpretação de ângulo pode ser ou não apropriada.*

O gráfico de $y = \operatorname{sen}\theta$ é a conhecida "onda senoidal" ou, simplesmente, "senóide", mostrada na Figura 6. Observe como o gráfico é gerado pela coordenada y de um ponto que percorre o círculo unitário. O gráfico de $y = \cos\theta$ tem o mesmo formato, mas é transladado $\frac{\pi}{2}$ unidades para a esquerda (Figura 7). Os sinais de $\operatorname{sen}\theta$ e $\cos\theta$ variam quando o ponto $P = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ do círculo unitário muda de quadrante (Figura 7).

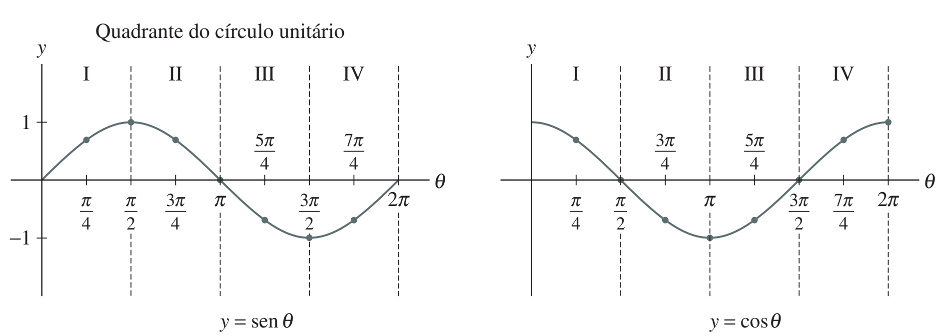


FIGURA 7 Os gráficos de $y = \operatorname{sen}\theta$ e $y = \cos\theta$ ao longo de um *período* de comprimento 2π.

Uma função $f(x)$ é dita **periódica** de período T se $f(x + \mathrm{T}) = f(x)$ (para cada x) e T é o menor número positivo com essa propriedade. As funções seno e cosseno são periódicas com período $T = 2\pi$, já que ângulos que diferem por um múltiplo inteiro de $2\pi k$ correspondem ao mesmo ponto do círculo unitário (Figura 8):

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(x + 2\pi k), \qquad \cos x = \cos(x + 2\pi k)$$

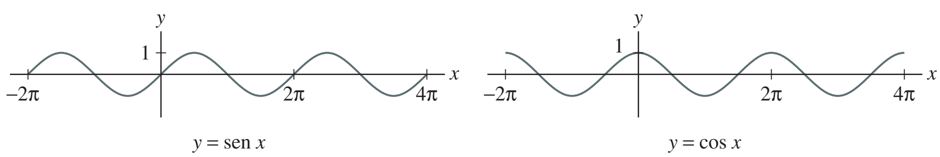


FIGURA 8 O seno e o cosseno têm período 2π.

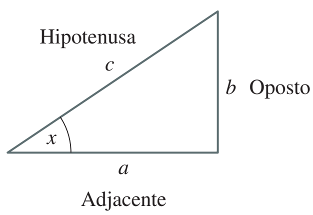


FIGURA 9

Lembre que há outras quatro funções trigonométricas padrão, cada uma definida em termos de sen x e cos x ou como razões dos lados de um triângulo retângulo (Figura 9):

$$\text{Tangente:} \quad \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{b}{a}, \qquad \text{Co-tangente:} \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = \frac{a}{b}$$

$$\text{Secante:} \quad \sec x = \frac{1}{\cos x} = \frac{c}{a}, \qquad \text{Cossecante:} \quad \operatorname{cossec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{c}{b}$$

Essas funções são periódicas (Figura 10): $y = \operatorname{tg} x$ e $y = \operatorname{cotg} x$ têm período π, $y = \sec x$ e $y = \operatorname{cossec} x$ têm período 2π (ver Exercício 51).

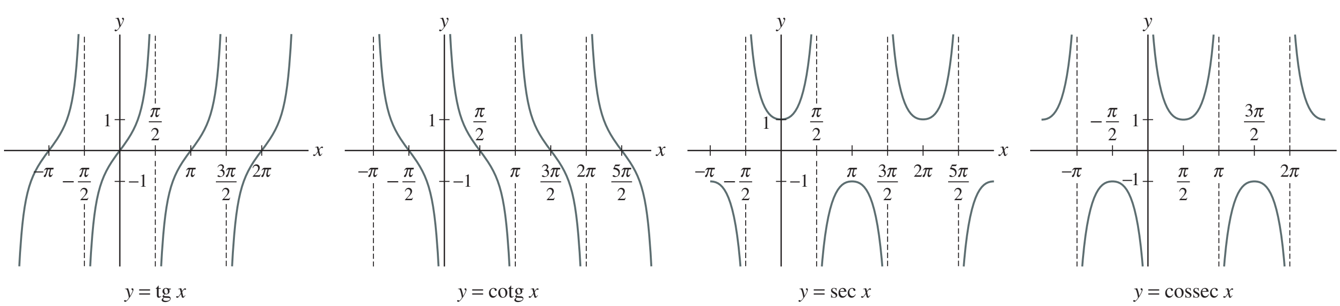


FIGURA 10 Gráficos das funções trigonométricas padrão.

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.