CIRCUITOS ELÉTRICOS II

Lizandro de Souza Oliveira

Resposta natural para circuitos RL

Objetivos de aprendizagem

Ao final desse texto, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Diferenciar circuitos RL sem fontes.
- Definir constante de tempo para circuitos RL.
- Analisar a equação que descreve a resposta natural para circuitos RL.

Introdução

A análise de circuitos contendo indutores está relacionada à solução das equações íntegro-diferenciais, que caracterizam os circuitos. Essa análise é básica para a compreensão do comportamento de diversos circuitos, com aplicação em diversas áreas das engenharias elétrica e eletrônica.

Neste capítulo, você vai estudar circuitos formados por resistores e indutores ou, de maneira mais precisa, circuitos que poderão ser representados por um resistor equivalente associado com um indutor equivalente. Esses circuitos, chamados de circuitos RL, serão analisados sem a inclusão de fontes. Você também vai estudar a constante de tempo e vai analisar a equação que descreve a resposta natural para circuitos RL.

Circuito RL sem fontes

Um circuito RL é um circuito formado por resistores e indutores. Caso tenhamos mais de um resistor ou mais de um indutor no circuito, poderemos utilizar as técnicas para análise de circuitos a fim de reduzi-los para uma associação desses componentes, obtendo, assim, uma resistência equivalente (R_{eq}) e uma indutância equivalente (L_{eq}). Podemos ter um circuito RL em série ou um circuito RL em paralelo. Como você deve concluir, tais nomenclaturas referem-se à associação (série ou paralelo) desses componentes.

Quando não consideramos fontes independentes agindo sobre um circuito, teremos a chamada **resposta natural** do circuito. A resposta natural deve chegar a um fim e, por essa razão, ela é frequentemente chamada de **resposta transitória** (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Essa resposta transitória de um circuito é obtida a partir da solução da equação diferencial que descreve o comportamento desse circuito. Considere o circuito RL em série na Figura 1, em que mostramos um circuito RL em série, sem fontes.

A partir da Lei de Kirchhoff para tensão, temos que:

$$v_R(t) + v_L(t) = 0 \tag{1}$$

Na equação 1, substituímos as expressões para a tensão no resistor e para a tensão no indutor, obtendo a seguinte expressão temporal para o circuito:

$$Ri(t) + L\,\frac{di}{dt} = 0 \tag{2}$$

Como era esperado, temos uma equação diferencial de primeira ordem. Isso porque temos apenas um elemento que armazena energia (o indutor, nesse caso).

A equação 2 pode ser reescrita dividindo os termos pela indutância L:

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}\,i(t) = 0 \tag{3}$$

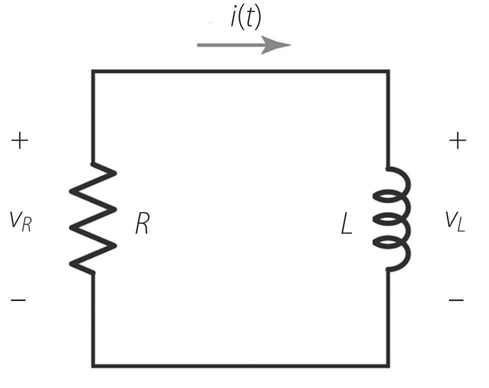


Figura 1. Circuito RL série — sem fontes.

Fonte: Hayt, Kemmerly e Durbin (2014, p. 254).

Para que possamos analisar a resposta natural do circuito RL, devemos obter uma expressão para a corrente $i(t)$ que satisfaça a equação 3.

A solução para a equação 3 pode ser obtida com a utilização de diferentes métodos. Um método muito direto de resolver uma equação diferencial consiste em escrever a equação de maneira tal que as variáveis fiquem separadas, integrando, então, cada lado da equação (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Observe que as variáveis da equação 3 são a corrente $i(t)$ e o tempo t. Essa equação pode ser multiplicada por um tempo diferencial dt. Além disso, vamos transferir o termo $i(t)$ para o lado direito, resultando em:

$$\frac{di}{dt}\,dt = -\frac{R}{L}\,i(t)dt \tag{4}$$

A equação 4 pode, então, ser dividida por $i(t)$ e obtemos:

$$\frac{di}{i} = -\frac{R}{L}\,dt \tag{5}$$

Fique atento

Observe que, na equação 4, a corrente $i(t)$ foi representada, por questão de simplicidade, por i. Esta notação é bastante utilizada em diversas obras sobre circuitos elétricos.

Para obtermos a solução da equação 5, integraremos ambos os lados dessa equação entre os limites correspondentes. Obteremos, assim, uma expressão para a corrente $i(t)$ como uma função do tempo t. Utilizando x e y como variáveis de integração, temos (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} \frac{dx}{x} = -\frac{R}{L}\int_{t_0}^{t} dy \tag{6}$$

Na equação 6, $i(t_0)$ é a corrente correspondente ao tempo t_0, ou seja, em $t = 0$. Similarmente, $i(t)$ é a corrente correspondente ao tempo t. Observe que as grandezas R e L são constantes, isto é, não são funções da variável dependente i, nem da variável independente t.

Realizando a integração indicada pela equação 6, temos que:

$$\ln x\Big|_{i(0)}^{i(t)} = -\frac{R}{L}\, y\Big|_{t_0}^{t} \tag{7}$$

A partir da equação 7, temos que:

$$\ln i(t) - \ln i(0) = -\frac{R}{L}(t - t_0) \tag{8}$$

Vamos considerar o tempo inicial como sendo $t_0 = 0$. Representaremos o valor de $i(t)$ em $t = 0$ como I_0. Em outras palavras, $i(0) = I_0$ (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014). A partir dessas considerações, e resolvendo a equação 8 com a utilização da propriedade dos logaritmos para o quociente, temos que:

$$\ln \frac{i(t)}{I_0} = -\frac{R}{L}\, t \tag{9}$$

A partir da equação 9, vemos que a corrente $i(t)$ é dada por (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014):

$$i(t) = I_0 e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} \tag{10}$$

A equação 10 nos dá a **resposta natural** de um circuito RL. A partir desta equação, podemos determinar a corrente em qualquer instante de tempo $t \geq 0$. Assim, verifique que a substituição de $t = 0$ na equação 10 resultará em $i(0) = I_0$:

$$i(0) = I_0 e^{(0)}$$

$$\therefore i(0) = I_0$$

Observe, ainda, que a substituição da equação 10 na equação 3 resulta na identidade 0 = 0:

$$\frac{d\left[I_0 e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t}\right]}{dt} + \frac{R}{L}\, I_0 e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} = 0$$

$$-I_0\left(\frac{R}{L}\right)e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} + \frac{R}{L}\, I_0 e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} = 0$$

$$\therefore 0 = 0$$

Verificamos nossa solução mostrando que esses dois passos são necessários, ou seja, a solução deve satisfazer a equação diferencial que caracteriza o circuito e deve também satisfazer a condição inicial (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Considere o exemplo a seguir, da Figura 2, em que vamos determinar a corrente em um determinado instante de tempo a partir da obtenção da resposta natural de um circuito RL.

Exemplo

Se o indutor da Figura 2 tiver uma corrente $i_L = 2\,A$ em $t = 0$, obtenha uma expressão para $i_L(t)$ válida para $t > 0$ e seu valor em $t = 200$ μs (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

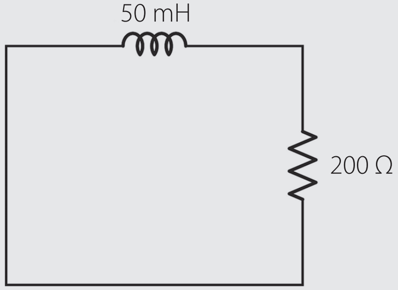


Figura 2. Circuito RL série em que a energia é armazenada no indutor em $t = 0$.
Fonte: Hayt, Kemmerly e Durbin (2014, p. 255).

Solução:
Para esse circuito, esperamos uma corrente dada pela equação 10, em que $R = 200\ \Omega$, $L = 50$ mH e I_0 é a corrente inicial no indutor em $t = 0$. Portanto, temos que:

$$i_L(t) = 2e^{\left(-\frac{200\Omega}{50mH}\right)t}$$

$$i_L(t) = 2e^{(-4000)t}$$

Para encontrar o valor de $i_L(t)$ em $t = 200\mu s$, basta substituirmos, na expressão encontrada, para $i_L(t)$:

$$i_L(200\mu s) = 2e^{(-4000)(200\mu s)}$$

$$i_L(200\mu s) = 898{,}7mA$$

Fique atento

Caso tenhamos que determinar a corrente inicial em um indutor a partir da retirada repentina de uma fonte, determinaremos a corrente no indutor no instante anterior à abertura da chave, $i_L(0^-)$. Essa corrente pode ser igual à da acorrente no indutor no instante imediatamente posterior à abertura da chave, $i_L(0^+)$. Como a corrente em um indutor não pode variar instantaneamente, podemos determinar a corrente inicial no indutor: $i_L(0^-) = i_L(0^+) = I_0$.

Em algumas situações, podemos ter circuitos formados por vários resistores e indutores. Para esses casos, determinaremos a resposta natural para o circuito RL a partir da análise do circuito. Considere o exemplo a seguir.

Exemplo

A chave, no circuito da Figura 3, está fechada por um longo tempo. Em $t = 0$, a chave é aberta. Calcule $i(t)$ para $t \geq 0$ (SADIKU; ALEXANDER; MUSA, 2015).

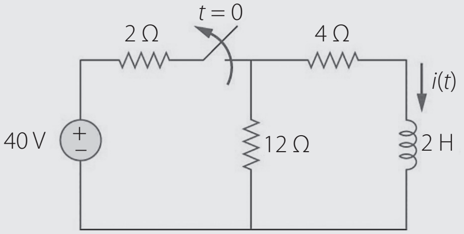


Figura 3. Circuito RL para o exemplo.

Fonte: Sadiku, Alexander e Musa (2015, p. 270).

Solução:

Iniciamos a análise desse circuito para um tempo $t < 0$. Dessa forma, teremos como determinar a corrente inicial no indutor, já que a corrente no indutor não sofre variações instantâneas. Quando $t < 0$, a chave está fechada e o indutor atua como um curto--circuito. O circuito resultante é mostrado na Figura 4a. Determinamos a corrente i_1 a partir do resistor equivalente formado pela associação série do resistor de 2 Ω com o resistor resultante da associação em paralelo dos resistores de 4 Ω e 12 Ω. Assim, temos que o resistor resultante da associação em paralelo é dado por:

$$R = \frac{(4\Omega)(12\Omega)}{(4\Omega + 12\Omega)} = 3\Omega$$

Assim, a corrente i_1 pode ser determinada da seguinte forma:

$$i_1 = \frac{40V}{(2\Omega + 3\Omega)} = 8A$$

A corrente $i(t)$ pode ser obtida a partir de i_1, utilizando o divisor de corrente:

$$i(t) = \frac{(12\Omega)}{(12\Omega + 4\Omega)}\, i_1 = 6A,\ t < 0$$

A corrente $i(t)$ circula no indutor. Como essa corrente não pode variar instantaneamente, temos que:

$$i(0) = 6\ A$$

Analisando o circuito para $t > 0$, a chave está aberta e a tensão é desconectada. Temos, portanto, o circuito RL mostrado na Figura 4b. Para esse circuito, calculamos o resistor equivalente:

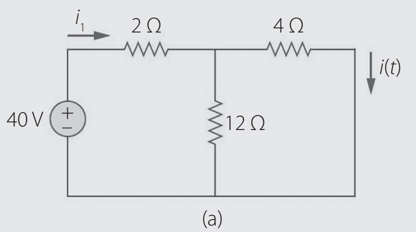
$$R_{eq} = 12\Omega + 4\Omega = 16\Omega$$

Por fim, apresentamos a expressão para a resposta natural $i(t)$ a esse circuito, a partir da equação 10 (Figura 4):

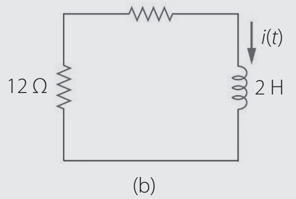
$$i(t) = I_0 e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t}$$

$$i(t) = 6e^{\left(-\frac{16\Omega}{2H}\right)t}$$

$$\therefore i(t) = 6e^{-8t}A$$



(a)



(b)

Figura 4. Resolução do circuito da Figura 3 para: (a) $t < 0$, (b) $t > 0$.

Fonte: Sadiku, Alexander e Musa (2015, p. 270).

Fique atento

Podemos enxergar o indutor como um **curto-circuito** para **corrente contínua (CC)**.

Tensão no resistor

Agora, que já conhecemos a expressão para a corrente no circuito RL, dada pela equação 10, podemos determinar a tensão no resistor a partir da aplicação da lei de Ohm. Assim, para o circuito da Figura 1, temos que (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$v_R(t) = Ri(t) = I_0 R e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t} \tag{11}$$

Potência dissipada no resistor

A potência dissipada no resistor pode ser calculada pelas expressões já conhecidas, resultando em (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014):

$$p_R(t) = I_0^2 R e^{-2(R/L)t} \tag{12}$$

Observe que, a partir da equação 12, podemos determinar a potência dissipada no resistor em qualquer instante de tempo. Podemos dizer, portanto, que estaremos determinando a **potência instantânea**.

Fique atento

Lembre-se das equações para o cálculo de potência e num resistor percorrido por uma corrente: $p = vi$, $p = i^2R$ ou $p = \frac{v^2}{R}$.

Energia fornecida ao resistor

A energia total transformada em calor no resistor é encontrada integrando-se a potência instantânea $p_R(t)$ desde o instante inicial até o instante final, obtendo (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$w_R(t) = \int_0^t p_R dx = \int_0^t I_0^2 R e^{-2(R/L)x} dx$$

$$w_R(t) = \frac{1}{2(R/L)} I_0^2 R(1 - e^{-2(R/L)t}) \tag{13}$$

$$\therefore w_R(t) = \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - \mathrm{e}^{-2(R/L)t})$$

Podemos determinar, a partir da equação 13, que a energia total transformada em calor no resistor é encontrada integrando-se a potência instantânea da equação 12 desde o instante zero até infinito, obtendo (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014):

$$w_R = \frac{1}{2} L I_0^2 \tag{14}$$

Esse é o resultado que esperamos, porque é a energia inicial armazenada no indutor. Como você pode observar pela equação 13, não haverá nenhuma energia armazenada no indutor no tempo infinito. Isso porque sua corrente é zero para um tempo $t \rightarrow \infty$, o que pode ser observado na equação 10. Portanto, toda energia inicial já foi dissipada no resistor (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Constante de tempo para circuitos RL

Vamos retornar à equação 10. A corrente em $t = 0$ tem o valor I_0. Como você pode observar, temos uma equação exponencial de crescente e, com isso, à medida que o tempo aumenta, a corrente diminui e se aproxima de zero. A forma desse decaimento exponencial é vista no gráfico $i(t) / I_0$ *versus* t mostrado na Figura 5.

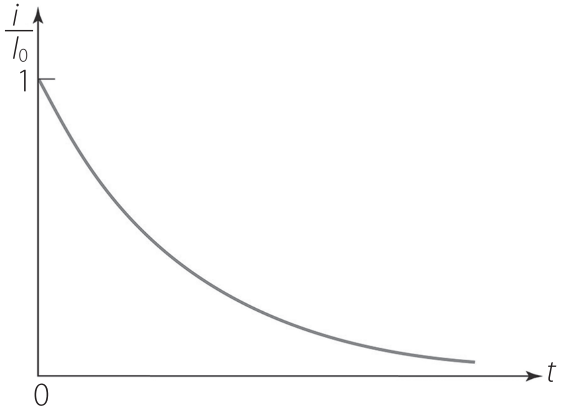


Figura 5. Gráfico de $e^{\left(-\frac{R}{L}\right)t}$ *versus t.*

Fonte: Hayt, Kemmerly e Durbin (2014, p. 260).

As expressões para *i*(*t*) e *v*(*t*), dadas pelas equações 10 e 11, respectivamente, incluem um término na forma $e^{-(R/L)t}$. O termo de *t,* dado por R/L determina a taxa a que a corrente ou tensão se aproxima de zero. A recíproca dessa razão é a **constante de tempo** do circuito (NILSSON; RIEDEL, 2015). Assim, a constante de tempo para o circuito RL é representada pela letra grega τ (tau) e dada por (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014):

$$\tau = \frac{L}{R}$$

A unidade para a constante de tempo τ é o segundo, pois o expoente $-Rt/L$ deve ser a dimensional (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

Saiba mais

Quanto menor a constante de tempo τ de um circuito, mais rápida a taxa de decaimento da resposta. Quanto maior for a constante de tempo, mais lenta a taxa de decaimento da resposta. A qualquer taxa, a resposta cai para menos de um por cento de seu valor inicial (ou seja, atinge seu regime estacionário) após 5τ (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

A constante de tempo de um circuito RL em série pode ser determinada graficamente a partir da curva de resposta, conforme vemos na Figura 6: só é necessário traçar a tangente à curva em $t = 0$ e determinar o ponto de interseção dessa tangente como eixo do tempo. Essa é geralmente uma maneira conveniente de se obter de forma aproximada a constante de tempo a partir da tela de um osciloscópio (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014).

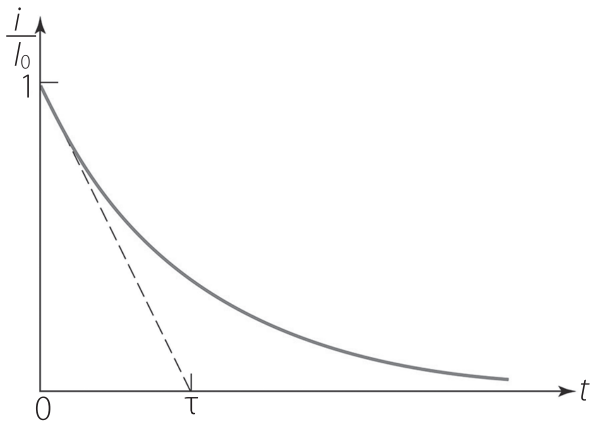


Figura 6. A constante de tempo τ e L/R para um circuito RL em série. Ela corresponde ao tempo que seria necessário para que a curva de resposta caísse para zero a uma taxa constante igual à taxa de decaimento inicial da curva.

Fonte: Hayt, Kemmerly e Durbin (2014, p. 261).

Resposta natural para circuitos RL

Após analisar um circuito RL sem fontes e definir a constante de tempo para circuitos RL em série, vamos analisar a equação que descreve a resposta natural para circuitos RL.

Usando o conceito de constante de tempo, escrevemos as expressões para corrente, tensão, potência e energia como (NILSSON; RIEDEL, 2015):

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} \tag{16}$$

$$v_R(t) = I_0 R e^{-t/\tau} \qquad (17)$$

$$p_R(t) = I_0^2 R e^{-2t/\tau} \qquad (18)$$

$$w(t) = \frac{1}{2} L I_0^2 (1 - e^{-2t/\tau}) \qquad (19)$$

A equação 16 descreve a resposta natural para um circuito RL. Como já mencionado, esta resposta deve chegar a um fim. À medida que o tempo transcorrido excede cinco constantes de tempo, a corrente é menos de um por cento de seu valor inicial. Assim, após cinco constantes de tempo, para a maioria das finalidades práticas, as correntes e tensões alcançam seus valores finais (NILSSON; RIEDEL, 2015).

Podemos determinar a resposta natural para um circuito RL após uma constante de tempo. Isso pode ser obtido ao utilizarmos 1τ para o tempo t apresentado na equação 16, ou seja, $t = 1\tau$. Assim, em uma constante de tempo, a resposta cai para 36,8% de seu valor inicial (HAYT; KEMMERLY; DURBIN, 2014). De maneira similar, podemos calcular a resposta para $t = 2\tau$, 3τ, 4τ e 5τ.

A existência de corrente no circuito mostrado na Figura 1 é um evento momentâneo e é denominada **resposta transitória** do circuito (NILSSON; RIEDEL, 2015). A resposta que existe após um longo tempo, aqui definido como um tempo superior a 5τ, é denominada **resposta de regime permanente**.

As equações 17 a 19 nada mais são do que as equações 11 a 13 representadas em termos da constante de tempo.

Os valores de $e^{-t/\tau}$ para múltiplos inteiros de τ de 1 a10 são mostrados no quadro a seguir.

t	$e^{-t/\tau}$	***t***	$e^{-t/\tau}$
τ	$3{,}6788 \cdot 10^{-1}$	6τ	$2{,}4788 \cdot 10^{-3}$
2τ	$1{,}3534 \cdot 10^{-1}$	7τ	$9{,}1188 \cdot 10^{4}$
3τ	$4{,}9787 \cdot 10^{-2}$	8τ	$3{,}3546 \cdot 10^{-4}$
4τ	$1{,}8316 \cdot 10^{-2}$	9τ	$1{,}2341 \cdot 10^{-4}$
5τ	$6{,}7379 \cdot 10^{-3}$	10τ	$4{,}5400 \cdot 10^{-5}$

Referências

ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. *Fundamentos de circuitos elétricos com aplicações*. 5. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

HAYT, W. H.; KEMMERLY, J. E.; DURBIN, S. M. *Análise de circuitos em engenharia*. 8. ed. Porto Alegre: AMGH, 2014.

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. *Circuitos elétricos*. 10. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2015.

SADIKU, M. N. O.; ALEXANDER, C. K.; MUSA, S. *Análise de circuitos elétricos com aplicações*. Porto Alegre: AMGH, 2015.

Leituras recomendadas

DORF, R. C.; SVOBODA, J. A. *Introdução aos circuitos elétricos*. 9. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2016.

NAHVI, M.; EDMINISTER, J. A. *Circuitos elétricos*. 5. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014.

THOMAS, R. E.; ROSA, A. J.; TOUSSAINT, G. J. *Análise e projeto de circuitos elétricos lineares*. Porto Alegre: Bookman, 2011.

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.

Conteúdo: SAGAH SOLUÇÕES EDUCACIONAIS INTEGRADAS