ANÁLISE DE CIRCUITOS ELÉTRICOS

Lucas Araújo da Costa

sagah
SOLUÇÕES EDUCACIONAIS INTEGRADAS

Elementos armazenadores de energia

Objetivos de aprendizagem

Ao final deste texto, você deve apresentar os seguintes aprendizados:

- Determinar as características dos capacitores.
- Definir as características dos indutores.
- Analisar a associação de capacitores e de indutores em série e em paralelo.

Introdução

Neste capítulo, você vai estudar os elementos armazenadores de energia dos circuitos elétricos: os indutores e os capacitores são essenciais em quase todas as aplicações da engenharia elétrica. O comportamento de um indutor está relacionado ao campo magnético gerado por uma corrente elétrica que o percorre. Já o comportamento de um capacitor tem relação com o campo elétrico gerado por cargas elétricas separadas por um material dielétrico.

Como uma forma de energia pode ser armazenada em campos de qualquer natureza (por exemplo, o campo gravitacional da terra que armazena a energia potencial), a energia elétrica pode ser armazenada nos campos magnético, dos indutores, e elétrico, dos capacitores. Ambos os elementos não dissipam energia, como os resistores, e tampouco a geram; apenas a armazenam, podendo-se utilizá-la posteriormente para outros fins. Por essa razão, indutores e capacitores são denominados elementos passivos. Os campos magnético e elétrico presentes nesses elementos são decorrentes das interações eletromagnéticas e de suas formas de construção.

As relações de tensão e corrente desses elementos são dadas por equações diferenciais e integrais. Circuitos contendo indutores e capacitores podem ser analisados com as mesmas técnicas de análise de circuitos aplicadas aos circuitos que contêm apenas resistores. As duas

Leis de Kirchhoff, de tensões e de correntes, são igualmente válidas. Assim, indutores e capacitores podem ser associados em série e em paralelo, como resistores, obtendo-se as respectivas indutâncias e capacitâncias equivalentes.

Neste capítulo, você vai estudar as características dos capacitores e indutores e vai analisar a sua associação em série e em paralelo.

Características dos capacitores

Um capacitor, em sua forma genérica, é formado por dois materiais condutores separados, entre os quais há um material dielétrico, isto é, um material isolante, que impede o movimento livre de portadores de carga. Uma construção simples de um capacitor é dada por duas placas condutoras paralelas (por exemplo, duas folhas de alumínio), tendo-se entre elas um dielétrico qualquer (por exemplo, o ar). São diversos os materiais dielétricos utilizados na construção dos capacitores. Os autores Alexander e Sadiku (2013) citam cerâmica, papel e mica como alguns dos mais utilizados nos capacitores comerciais. Um capacitor de placas paralelas de área A, separadas por uma distância d, é apresentado na Figura 1.

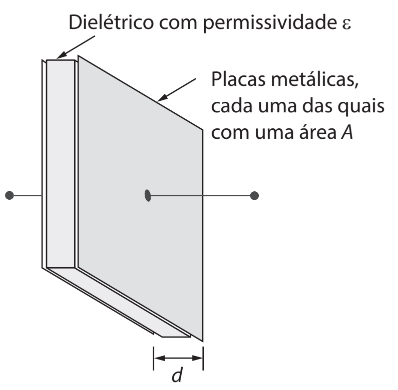


Figura 1. Capacitor comum.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 190).

Os terminais elétricos de um capacitor estão sobre seus condutores, e por eles é possível a aplicação de uma tensão elétrica, obtendo-se, entre eles, uma diferença de potencial. Com a aplicação da tensão, são acumuladas cargas elétricas de sinais opostos sobre os condutores do capacitor, que, mesmo separadas, interagem entre si, criando um campo elétrico no espaço ocupado pelo material dielétrico, como explicam Nilsson e Riedel (2008).

Uma característica importante nos dielétricos é a sua permissividade elétrica, representada por ϵ, que indica o quão fácil é para um material se polarizar com um campo elétrico aplicado sobre ele, conforme explicam os autores Buck e Hayt (2013). A permissividade elétrica está, assim, relacionada ao quanto de carga elétrica um capacitor pode acumular sobre suas placas para um dado valor de campo elétrico, conforme conceituam Alexander e Sadiku (2013). A Figura 2 mostra um capacitor sobre o qual é aplicada uma tensão *v*. Você pode observar o acúmulo de cargas de sinais opostos sobre as placas condutoras. Isso pode ser interpretado como uma armazenagem de carga elétrica pelo capacitor.

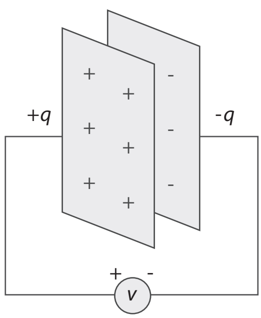


Figura 2. Capacitor com tensão aplicada em *v*.
Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 190).

A relação entre a quantidade de carga elétrica acumulada sobre os condutores do capacitor e a tensão aplicada sobre ele é diretamente proporcional, conforme conceituam Niessel e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013). Essa relação é dada pela Equação (1).

$$q = Cv \tag{1}$$

A quantidade C da Equação (1) é denominada de **capacitância**, cuja unidade no SI (sistema internacional de unidades) é o Farad (representada por

F). A capacitância expressa o quanto de carga elétrica pode ser depositada em um capacitor pela tensão elétrica aplicada sobre ele. A capacitância, contudo, é dependente somente da construção do capacitor (ou seja, de suas dimensões físicas) e da permissividade elétrica do seu dielétrico, conforme explicam Alexander e Sadiku (2013). Assim, para um capacitor de placas paralelas de área A, separadas por uma distância d, com um dielétrico de permissividade elétrica ϵ, como o representado na Figura 1, a capacitância é dada pela Equação (2).

$$C = \frac{\epsilon A}{d} \tag{2}$$

Exemplo

Um capacitor de 100 uF está ligado a uma bateria de 9 V. Calcule a carga armazenada no capacitor.

Solução: Com base na Equação 1, temos que:

$$q = C \times v$$
$$q = 100 \times 10^{-6} \times 9$$
$$q = 900\ \mu\text{C}$$

De um modo geral, para capacitores de qualquer forma de construção, não somente de placas paralelas, a capacitância é tanto maior quanto maior for o valor da área dos condutores (placas, por exemplo) e da permissividade elétrica do dielétrico, e é tanto menor quanto maior for o valor da distância entre os condutores. Os valores de capacitância dos capacitores disponíveis no mercado estão na ordem de μF e pF. Segundo Alexander e Sadiku (2013), a capacitância não necessariamente é um valor fixo em um capacitor: existem capacitores variáveis, para os quais o valor de capacitância pode ser ajustado.

Como o capacitor armazena carga elétrica, tendo um campo elétrico no espaço do dielétrico, o capacitor armazena energia elétrica, que pode ser utilizada posteriormente, como expõem Alexander e Sadiku (2013). A utilização da energia armazenada no capacitor descarrega-o, ou seja, as cargas elétricas depositadas sobre os condutores são deslocadas, deixando-o.

A relação entre a tensão aplicada sobre um capacitor cuja capacitância não varia com o tempo e a corrente que o percorre é dada pela Equação (3), teorizada por Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

$$i = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv}{dt} \tag{3}$$

A Equação (3) mostra uma relação dada por uma equação diferencial: a corrente no capacitor é proporcional à taxa de variação no tempo da tensão aplicada sobre ele. Assim, obviamente, uma tensão que varia com o tempo aplicada sobre um capacitor gera uma corrente elétrica que passa por ele. Uma tensão constante em relação ao tempo gera uma corrente somente até o carregamento completo do capacitor. Após esse instante, não há mais corrente percorrendo-o, e o capacitor se torna equivalente a um **circuito aberto** entre seus terminais. Diz-se, então, que foi atingido o regime permanente, conforme explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

A corrente que percorre o dielétrico do capacitor, que é um material isolante, é dada pelas cargas que se movimentam dentro do dielétrico, sendo denominada de **corrente de deslocamento**. Em termos do campo elétrico, uma tensão que varia no tempo aplicada sobre um capacitor gera um campo elétrico que varia com o tempo entre os condutores do capacitor. O campo elétrico variável, por sua vez, é o responsável pela corrente de deslocamento no dielétrico. A corrente de deslocamento em um capacitor é, para todos os efeitos, a corrente de condução que se observará nos seus terminais, conforme explicam Nilsson e Riedel (2008).

A Equação (3) mostra, também, que a tensão aplicada sobre um capacitor não pode variar instantaneamente (uma descontinuidade no tempo entre valores da tensão), pois isso causaria uma corrente de valor infinito, o que não é possível fisicamente. Isso, porém, não é válido para a corrente que o percorre, que pode variar instantaneamente, conforme afirmam os autores Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

A relação dada na Equação (3) é linear se a capacitância for independente da tensão aplicada, como mostra a reta do gráfico $i \times \frac{dv}{dt}$ da Figura 3; o capacitor, nesse caso, é dito linear. Se a capacitância for dependente da tensão aplicada, a relação é não linear (a relação não pode ser representada por uma reta), e o capacitor é dito não linear, conforme afirmam Alexander e Sadiku (2013).

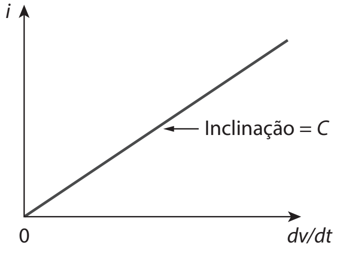


Figura 3. Relação tensão-corrente de um capacitor.
Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 192).

A Figura 4 mostra as representações utilizadas para os capacitores fixos (Figura 4a) e variáveis (Figura 4b) nos esquemas de circuitos, com a tensão v e a corrente i. É importante que você note que, segundo a convenção passiva de sinais, se o produto $v \cdot i$ for maior que zero (que é obtido com $v > 0$ e $i > 0$, ou $v < 0$ e $i < 0$), o capacitor está sendo carregado (está-se armazenando energia elétrica nele), e, se for menor que zero, está sendo descarregado (está-se utilizando a energia armazenada nele), conforme explicam Alexander e Sadiku (2013). Você deve sempre se recordar de que, em circuitos contendo capacitores, ambas as leis de Kirchhoff, a Lei das Tensões e a Lei das Correntes, são igualmente válidas, bem como em circuitos contendo somente resistores, como esclarecem Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

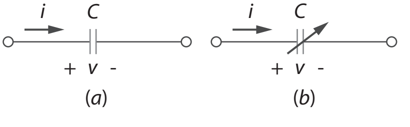


Figura 4. Símbolos para capacitores, sendo (a) capacitor fixo e (b) capacitor variável.
Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 191).

Você pode observar que, como a corrente que percorre o capacitor pode ser obtida pela derivada da tensão sobre ele, a tensão pode ser obtida pela integral da corrente, como afirmam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013):

$$idt = Cdv \quad \rightarrow \quad \int_{v(t_0)}^{v(t)} dx = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau \quad \rightarrow \quad v(t) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v(t_0) = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + \frac{q(t_0)}{C}$$

Assim, se $t_0 = 0$, tem-se a Equação (4) para a tensão sobre um capacitor, onde $v(0)$ e $q(0)$ são, respectivamente, a tensão e a carga elétrica inicial no capacitor:

$$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + v(0) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + \frac{q(0)}{C} \qquad (4)$$

Exemplo

Por um capacitor de 0,5 F passa uma corrente $i_c = 6 \cdot \cos(4t)$. Sabendo que o instante inicial é $t_0 = 0$ e que o capacitor no instante $t = 0$ possui uma tensão de 3 V, determine a tensão aplicada neste capacitor.

Solução: Com base na Equação 4, temos que:

$$v_c = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v(0)$$

$$v_c = \frac{1}{0{,}5}\int_0^t 6 \times \cos(4\tau)d\tau + 3$$

$$v_c = \frac{6}{0{,}5}\int_0^t \cos(4\tau)d\tau + 3$$

$$v_c = 12\left(\left.\frac{\text{sen}(4\tau)}{4}\right|_0^t\right) + 3$$

$$v_c = 12\left(\frac{\text{sen}(4t)}{4} - \frac{\text{sen}(4 \cdot 0)}{4}\right) + 3$$

$$v_c = 12\left(\frac{\text{sen}(4t)}{4}\right) + 3$$

$$v_c = \frac{12}{4}(\text{sen}(4t)) + 3$$

$$v_c = 3 \times \text{sen}(4t) + 3\,\text{V}$$

A equação dada para a tensão sobre um capacitor mostra que esse elemento é dependente da corrente nos instantes anteriores a um determinado instante de análise. Ou seja, conforme Alexander e Sadiku (2013), o capacitor pode ser utilizado como uma memória da informação contida nessa grandeza. Como as relações para a tensão e a corrente em um capacitor já foram dadas, você pode obter a expressão para a potência elétrica do capacitor, p, na Equação (5), com base em Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

$$p = vi = Cv\frac{dv}{dt} = i\left[\frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau + \frac{q(0)}{C}\right] \tag{5}$$

Para obter a **energia elétrica armazenada no capacitor**, w, é realizada a integração de p no tempo, segundo a definição de energia baseada em Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013):

$$dw = p = Cvdv \quad \rightarrow \quad \int_{w(t_0)}^{w(t)} dx = C\int_{v(t_0)}^{v(t)} ydy \quad \rightarrow \quad w(t) - w(t_0) = \frac{1}{2}C[v(t) - v(t_0)]^2$$

Assim, sendo $v = 0$ e $w = 0$ em $t_0 = 0$ (ou seja, em um instante de tempo inicial), tem-se a Equação (6), na qual é omitida a dependência no tempo.

$$w = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{q^2}{2C} \tag{6}$$

Você pode observar que as Equações (5) e (6) são para instantes de tempo específicos. Sendo a tensão sobre o capacitor variável, a potência instantânea também o é, assim como a energia armazenada no seu campo elétrico.

Exemplo

Tomando como referência o capacitor de 0,5 F do exemplo anterior, em que foi aplicado uma tensão de 3 · sen (4*t*) + 3 V, determine a energia armazenada no capacitor no instante *t* = 7,5 s.

Solução: Com base na Equação (6), temos que:

$$w = \frac{1}{2} \times C \times v^2$$

$$w = \frac{1}{2} \times 0{,}5 \times (3 \times \text{sen}(4t) + 3)^2$$

Para *t* = 7,5 s:

$$w = \frac{1}{2} \times 0{,}5 \times (3 \times \text{sen}(4 \times 7{,}5) + 3)^2$$

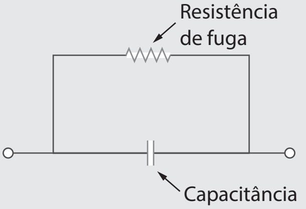
$$w = \frac{1}{2} \times 0{,}5 \times (3 \times \text{sen}(30) + 3)^2$$

$$w = \frac{1}{2} \times 0{,}5 \times (3 \times 0{,}5 + 3)^2$$

$$w = 5{,}06 \text{ W}$$

Fique atento

Embora se considere, normalmente, nas análises de capacitores em circuitos, que esses elementos não dissipam energia, sendo, portanto, considerados ideais, capacitores reais o fazem. Tem-se neles, assim, uma corrente de fuga que percorre o dielétrico, mesmo quando o capacitor está carregado e a tensão sobre ele não varia. Um capacitor real pode ser representado pela figura ao lado, onde há uma resistência de fuga em paralelo com o capacitor. O valor dessa resistência, contudo, é geralmente muito elevado, sendo justificável que se despreze-a nas análises (ALEXANDER; SADIKU, 2013).



Características dos indutores

Um indutor, genericamente, é dado por qualquer condutor de corrente elétrica. Porém, o elemento normalmente designado como indutor é formado por um condutor enrolado de modo espiral, com um núcleo central, que pode ser de material sólido e magnético, como o ferro e outros metais, ou sólido e não magnético, como o plástico, ou até o próprio ar. É constituído, assim, de espiras de fio condutor, formando uma bobina, sendo, por isso, também conhecido como **bobina** ou **bobina de solenoide**, como definem Alexander e Sadiku (2013). Um indutor formado por uma bobina cilíndrica de comprimento l com N espiras e seção transversal A é apresentado na Figura 5.

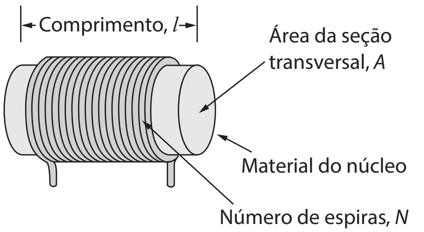


Figura 5. Forma típica de um indutor.
Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 199).

A **corrente elétrica** que percorre o indutor gera um campo magnético no entorno das espiras, que envolve o indutor; diz-se que o condutor está imerso em um campo magnético. O material do núcleo do indutor pode intensificar esse campo magnético, se for um material magnético, como explicam os autores Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013). Uma característica importante dos materiais utilizados para o núcleo é a sua permeabilidade magnética, representada por μ, que indica quão alta será a magnitude da intensidade de campo magnético em um material na presença de uma dada densidade de fluxo magnético sobre ele. Materiais magnéticos possuem baixo valor de μ (ou seja, eles são "permeáveis" ao fluxo magnético), enquanto materiais não magnéticos possuem altos valores de μ (ou seja, eles oferecem uma "resistência" maior ao fluxo magnético), conforme expõem Buck e Hayt (2013).

O campo magnético que envolve o indutor, quando percorrido por uma corrente, armazena energia elétrica; assim, o indutor é um elemento armazenador de energia, como o capacitor. A energia armazenada no indutor pode ser utilizada posteriormente, deixando o indutor por meio de uma corrente elétrica, como explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

A relação entre a tensão sobre um indutor cuja indutância não varia com o tempo e a corrente que o percorre é dada pela equação diferencial expressa na Equação (7), com base em Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

$$v = L\frac{di}{dt} \tag{7}$$

A Equação (7) mostra que a tensão sobre o indutor é proporcional à taxa de variação no tempo da corrente que o percorre. Assim, uma corrente que varia com o tempo em um indutor gera uma tensão elétrica sobre seus terminais. Para uma corrente constante em relação ao tempo, há uma tensão diferente de zero sobre o indutor somente até o seu carregamento completo. Após esse instante, o indutor se torna equivalente a um curto-circuito entre seus terminais — como para o capacitor, diz-se que foi atingido o regime permanente, como explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

A Equação (7) mostra, também, que a corrente que percorre um indutor não pode variar instantaneamente (uma descontinuidade no tempo entre valores finitos de corrente), pois isso exige uma tensão de valor infinito, o que não é possível fisicamente. Isso quer dizer, por exemplo, que se um interruptor pelo qual um indutor está sendo alimentado for aberto (o que interromperia o fluxo de corrente que passa por ele), haverá uma continuidade do fluxo de corrente por meio de um centelhamento no espaço da abertura do interruptor. A tensão sobre o indutor, porém, pode variar instantaneamente, sem problemas, segundo Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

A relação dada na Equação (7) é linear se a indutância for independente da corrente, como mostra a reta do gráfico $v \times \frac{di}{dt}$ da Figura 6; o indutor, nesse caso, é dito linear. Se a indutância for dependente da corrente, a relação é não linear (a relação não pode ser representada por uma reta), e o indutor é dito não linear, conforme explicam Alexander e Sadiku (2013).

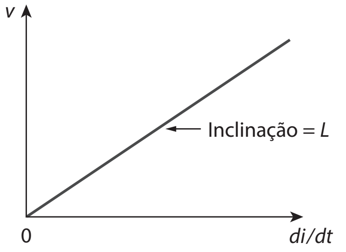


Figura 6. Relação tensão-corrente de um indutor.
Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 200).

A quantidade L da Equação (7) é denominada de indutância, cuja unidade no SI é o Henry (representada por H). A indutância expressa a oposição que o indutor faz à mudança da corrente elétrica que o percorre. A indutância de um indutor, semelhantemente à capacitância, no capacitor, é dependente somente da construção do indutor e da permeabilidade magnética do material do núcleo, conforme explicam Alexander e Sadiku (2013). Assim, para o indutor formado por uma bobina cilíndrica de comprimento l com N espiras e seção transversal A, como o representado na Figura 6, a indutância é dada pela Equação (8).

$$L = \frac{N^2 \mu A}{\ell} \tag{8}$$

De um modo geral, para indutores de qualquer forma de construção, a indutância é tanto maior quanto maior for o número de espiras da bobina, o valor da área de sua seção transversal e o valor da permeabilidade magnética do material do núcleo, e é tanto menor quanto maior for o valor do comprimento da bobina. Os valores de indutância dos indutores disponíveis no mercado estão na ordem de μH até algumas dezenas de H. A indutânc ia, assim como a capacitância, não necessariamente é um valor fixo em um indutor: há indutores variáveis, nos quais se pode ajustar o valor de indutância, conforme afirmam Alexander e Sadiku (2013).

A Figura 7 mostra as representações utilizadas nos esquemas de circuitos para os indutores fixos de núcleo preenchido com ar (Figura 7a), fixos de núcleo de ferro (Figura 7b) e variáveis de núcleo de ferro (Figura 7c), com a tensão v e a corrente i. Segundo a convenção passiva de sinais, como para o capacitor, você pode notar que, se o produto $v \cdot i$ em um indutor for maior que zero (que é obtido com $v > 0$ e $i > 0$, ou $v < 0$ e $i < 0$), o indutor está sendo carregado (está-se armazenando energia elétrica nele), e se for menor que zero, está sendo descarregado (está-se utilizando a energia armazenada nele), conforme explicam os autores Alexander e Sadiku (2013). Do mesmo modo que para os capacitores, em circuitos contendo indutores, ambas as Leis de Kirchhoff, a Lei das Tensões e a Lei das Correntes, são válidas, segundo Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

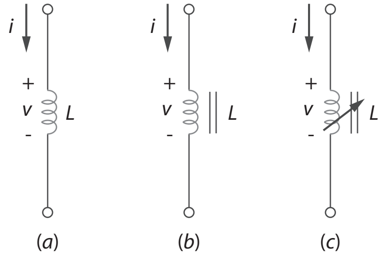


Figura 7. Símbolos para indutores: (a) núcleo preenchido com ar; (b) núcleo de ferro; (c) núcleo de ferro variável.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 200).

Fique atento

Embora também se considere nas análises de indutores em circuitos, como para capacitores, que esses elementos não dissipam energia, sendo considerados ideais, indutores reais o fazem, devido à resistência do condutor de que são formados. Como o indutor é percorrido por uma corrente, essa corrente dissipa energia na resistência do condutor. Essa resistência é denominada de **resistência de enrolamento**. Além da resistência de enrolamento, há uma capacitância entre as bobinas do indutor, denominada **capacitância de enrolamento**. Um indutor real pode ser representado pela figura ao lado, onde há a resistência e a capacitância de enrolamento em série e em paralelo com o indutor, respectivamente. Os valores, tanto da resistência quanto da capacitância de enrolamento, contudo, são geralmente muito baixos, sendo justificável que ambos não sejam considerados nas análises (ALEXANDER; SADIKU, 2013).

Você pode observar que, como a tensão sobre o indutor pode ser obtida pela derivada da corrente que o percorre, a corrente pode ser obtida pela integral da tensão, conforme Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013):

$$vdt = Ldi \quad \longrightarrow \quad L\int_{i(t_0)}^{i(t)} dx = \int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau \quad \longrightarrow \quad i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i(t_0)$$

Assim, se $t_0 = 0$, tem-se a Equação (9) para a corrente que passa por um indutor, onde $i(0)$ é a corrente que o percorre inicialmente:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{0}^{t} v(\tau)d\tau + i(0) \tag{9}$$

Você pode observar, na equação dada para a corrente em um indutor, que esse elemento é dependente da tensão nos instantes anteriores a um determinado instante de análise. Ou seja, o indutor, assim como o capacitor, pode ser utilizado como uma memória da informação contida em uma grandeza elétrica, como expõem Alexander e Sadiku (2013).

Exemplo

Sabe-se que o indutor é um elemento armazenador de energia no seu campo magnético. Suponha um indutor de 0,5 H sobre o qual é aplicada uma tensão de 12 · sen (3*t*) V. Sabendo que no tempo inicial $t_0 = 0$ a corrente no indutor é de 0,01 A, determine a expressão que modela a corrente através deste elemento.

Solução: Com base na Equação (9), temos que:

$$i(t) = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i(0)$$

$$i(t) = \frac{1}{0{,}5}\int_{0}^{t} 12 \cdot \text{sen}(3\tau)d\tau + 0{,}01$$

$$i(t) = \frac{12}{0{,}5}\int_{0}^{t} \text{sen}(3\tau)d\tau + 0{,}01$$

$$i(t) = 24 \cdot \left(\frac{-1}{3}\cos(3\tau)\Big|_{0}^{t}\right) + 0{,}01$$

$$i(t) = 24 \cdot \left(\frac{-1}{3}\cos(3t) + \frac{1}{3}\cos(3 \cdot 0)\right) + 0{,}01$$

$$i(t) = (-8\cos(3t) + 8 + 0{,}01)\ A$$

Você pode obter a expressão para a **potência elétrica do indutor**, *p*, com as relações para a tensão e a corrente, como dadas na Equação (10), com base em Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013):

$$p = vi = Li\frac{di}{dt} = v\left[\frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i(t_0)\right] \tag{10}$$

Você pode obter, também, a energia elétrica armazenada no indutor, *w*, realizando a integração de *p* no tempo, ainda conforme os autores:

$$dw = p = Lidi \quad \rightarrow \quad \int_{w(t_0)}^{w(t)} dx = L\int_{i(t_0)}^{i(t)} ydy \quad \rightarrow \quad w(t) - w(t_0) = \frac{1}{2}L[i(t) - i(t_0)]^2$$

Assim, sendo $i = 0$ e $w = 0$ em $t_0 = 0$ (ou seja, em um instante de tempo inicial), tem-se a Equação (11), na qual, como na Equação (6), é omitida a dependência no tempo:

$$w = \frac{1}{2}Li^2 \tag{11}$$

Você pode observar que as Equações (10) e (11), como as Equações (5) e (6) do capacitor, são para instantes de tempo específicos. Sendo a corrente sobre o indutor variável, a potência instantânea também o é, assim como a energia armazenada no seu campo elétrico.

Fique atento

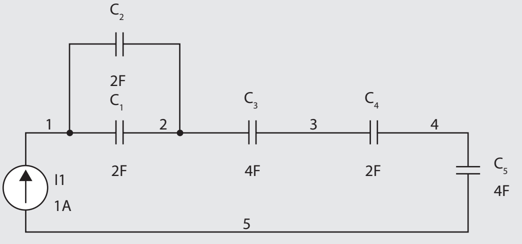
Se no instante correspondente a $t_0 = 0$ as grandezas elétricas não forem nulas, você pode referenciar as integrais das Equações (9) a (11) a um $t_0 = -\infty$, ou seja, a um instante de tempo muito distante do instante de observação considerado. Isso vale também para as equações do capacitor, as Equações (4) a (6). O valor inicial das grandezas é chamado normalmente de condição inicial. Se há energia armazenada em um capacitor ou indutor antes do instante de análise, então as condições iniciais nesses elementos não são nulas, como explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

As condições iniciais podem ser representadas no circuito como fontes, para um melhor entendimento: uma tensão inicial em um capacitor é representada como uma fonte de tensão CC em série com ele, e uma corrente inicial em um indutor é representada como uma fonte de corrente em paralelo com ele. Porém essa representação não é obrigatória, desde que as condições iniciais sejam observadas nos cálculos, como afirma Bretas ([2018]).

Você também deve notar a excitação da(s) fonte(s) do circuito em análise; se esta for em CC, não há variação de tensões e correntes no circuito em regime permanente, e, assim, capacitores e indutores não vão influenciar o circuito, como explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

Exemplo

Dado o circuito a seguir, determine a capacitância equivalente vista pela fonte.



Solução:

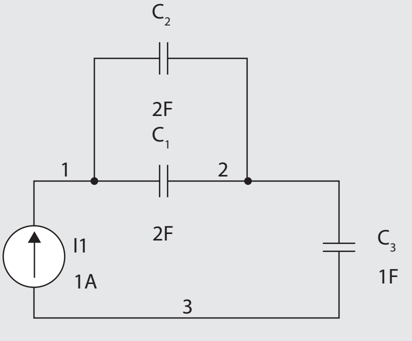
Primeiro vamos achar um capacitor equivalente aos capacitores em série (C_3, C_4 e C_5). De acordo com a Equação (14), temos que:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$$

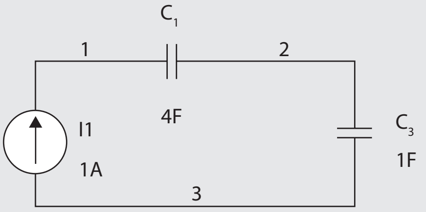
$$\frac{1}{C_{eq}} = 1$$

$$C_{eq} = 1$$



Agora precisamos resolver os dois capacitores em paralelo (C_1 e C_2). De acordo com a Equação (13) temos que:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 2 + 2 = 4$$



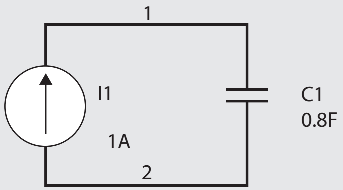
Para finalizar, temos a série de C_1 e C_3:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{5}{4}$$

$$C_{eq} = \frac{4}{5} F$$



Associação de capacitores e associação de indutores em série e em paralelo

Capacitores e indutores, em circuitos elétricos, assim como resistores, podem ser associados em série e em paralelo, obtendo-se um capacitor e um indutor equivalentes, respectivamente, reduzindo-se o circuito. Segundo Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013), esse método pode facilitar muito a análise dos circuitos nos quais verifica-se o emprego dessas combinações. Porém, as associações somente são possíveis quando os elementos são lineares.

Associação de capacitores em série e em paralelo

Considerando-se N capacitores em paralelo, como mostra a Figura 8a, a capacitância do respectivo capacitor equivalente da associação, C_{eq}, como mostra a Figura 8b, pode ser obtida por meio da Lei de Kirchhoff das Correntes, somando-se as correntes que percorrem todos os capacitores e observando-se que sobre os terminais de todos eles está a tensão v, conforme lecionam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

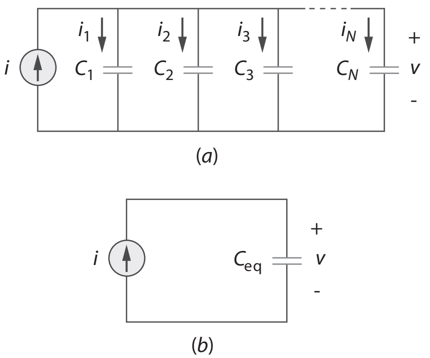


Figura 8. (a) Conexão em paralelo de *N* capacitores; (b) circuito equivalente para os capacitores em paralelo.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 196).

Assim, obtém-se a Equação (12), utilizando-se a relação $i = C\frac{dv}{dt}$ dada na Equação (3).

$$\begin{aligned} i = i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_N &= C_1\frac{dv}{dt} + C_2\frac{dv}{dt} + C_3\frac{dv}{dt} + \cdots + C_N\frac{dv}{dt} \\ &= (C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_N)\frac{dv}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{N} C_k\right)\frac{dv}{dt} = C_{eq}\frac{dv}{dt} \end{aligned} \qquad (12)$$

Portanto, para N capacitores em paralelo, C_{eq} é a soma das capacitâncias de todos os N capacitores, como é feito na associação em série de resistores, conforme explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_N = \sum_{k=1}^{N} C_k \qquad (13)$$

Considerando-se N capacitores em série, como mostra a Figura 9a, a capacitância do respectivo capacitor equivalente da associação, C_{eq}, como dado na Figura 9b, pode ser obtida por meio da Lei de Kirchhoff das Tensões, somando-se as quedas de tensões ao longo da malha e observando-se que a corrente i percorre todos os capacitores, como explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

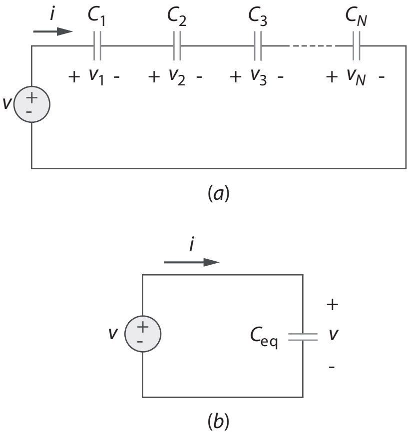


Figura 9. (a) Conexão em série de *N* capacitores; (b) circuito equivalente para os capacitores em série.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 197).

Assim, obtém-se a Equação (14), conhecendo-se a relação $v = \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v(t_0)$, utilizada na Equação (4).

$$
\begin{aligned}
v &= v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N \\
&= \frac{1}{C_1}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v_1(t_0) + \frac{1}{C_2}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v_2(t_0) + \frac{1}{C_3}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v_3(t_0) + \cdots \\
&\quad + \frac{1}{C_N}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v_N(t_0) \\
&= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_N}\right)\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v_1(t_0) + v_2(t_0) + v_3(t_0) + \cdots \\
&\quad + v_N(t_0) = \frac{1}{C_{eq}}\int_{t_0}^{t} i(\tau)d\tau + v(t_0)
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Portanto, para N capacitores em série, tem-se $\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_N}$.

Assim, C_{eq} é dado na Equação (14), ou seja, é o inverso da soma dos inversos das capacitâncias individuais de todos os N capacitores, como feito na associação em paralelo de resistores, conforme lecionam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \cdots + \frac{1}{C_N}}$$

Já a tensão $v(t_0)$ é dada pela Equação (15), sendo a soma das tensões em todos os N capacitores em série.

$$v(t_0) = v_1(t_0) + v_2(t_0) + v_3(t_0) + \cdots + v_N(t_0) \tag{15}$$

Uma observação importante a se fazer é que capacitores em série apresentam a mesma quantidade de carga elétrica, $\frac{q_{eq}}{C_{eq}} = \frac{q_{eq}}{C_1} + \frac{q_{eq}}{C_2} + \frac{q_{eq}}{C_3} + \cdots + \frac{q_{eq}}{C_N} =$

$v_1(t) + v_2(t), + v_3(t) + \cdots + v_N(t) = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} + \frac{q_3}{C_3} + \cdots + \frac{q_N}{C_N}$, o que mostra

que $q_1 = q_2 = q_3 = \cdots = q_N = q_{eq}$.

Associação de indutores em série e em paralelo

Considerando-se N indutores em série, como mostra a Figura 10a, a indutância do respectivo indutor equivalente da associação, L_{eq}, como mostra a Figura 10b, pode ser obtida por meio da Lei de Kirchhoff das Tensões, somando-se as quedas de tensões ao longo da malha e observando-se que a corrente i percorre todos os indutores, conforme lecionam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

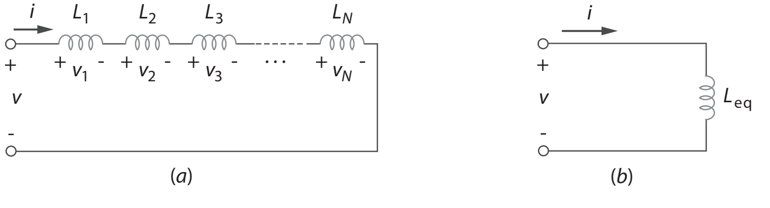
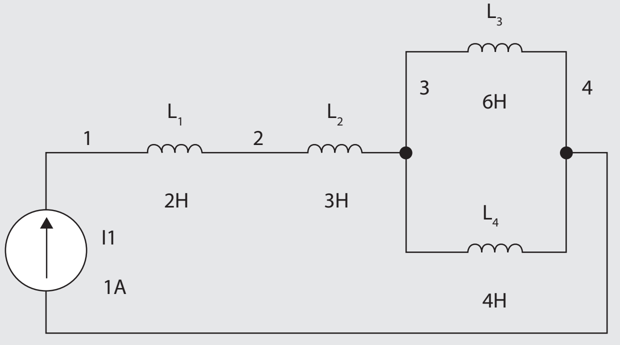


Figura 10. (a) Conexão em série de *N* indutores; (b) circuito equivalente para os indutores em série.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 203).

Exemplo

Determinar o indutor equivalente para o circuito a seguir.

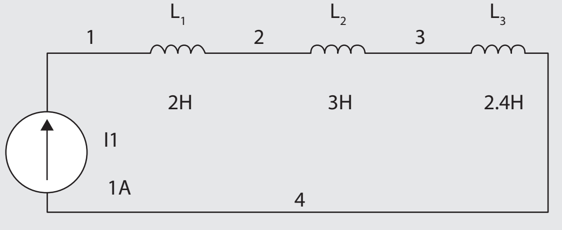


Solução: Vamos começar com o paralelo entre L_3 e L_4. De acordo com a Equação (18), temos que:

$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_3} + \frac{1}{L_4}$$

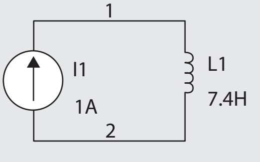
$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{6} + \frac{1}{4}$$

$$L_{eq} = 2{,}4\ \mathrm{H}$$



Agora basta realizar a série de L_1, L_2 e L_3 conforme a Equação (16):

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 = 2 + 3 + 2{,}4 = 7{,}4\ \mathrm{H}$$



Assim, obtém-se a Equação (16), conhecendo-se a relação $v = L\frac{di}{dt}$ dada na Equação (7).

$$v = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_N = L_1\frac{di}{dt} + L_2\frac{di}{dt} + L_3\frac{di}{dt} + \cdots + L_N\frac{di}{dt} =$$

$$(L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_N)\frac{di}{dt} = \left(\sum_{k=1}^{N} L_k\right)\frac{di}{dt} = L_{eq}\frac{di}{dt} \quad (16)$$

Você pode notar, portanto, que, para N indutores em série, L_{eq} é dado na Equação (17), ou seja, é a soma das indutâncias de todos os N indutores, como feito na associação em série de resistores, conforme explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \cdots + L_N = \sum_{k=1}^{N} L_k \quad (17)$$

Considerando-se N indutores em paralelo, como mostra a Figura 11a, a indutância do respectivo indutor equivalente da associação, L_{eq}, como mostra a Figura 11b, pode ser obtida por meio da Lei de Kirchhoff das Correntes, somando-se as correntes que percorrem todos os indutores e observando-se que, sobre os terminais de todos eles, está a tensão v, como explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

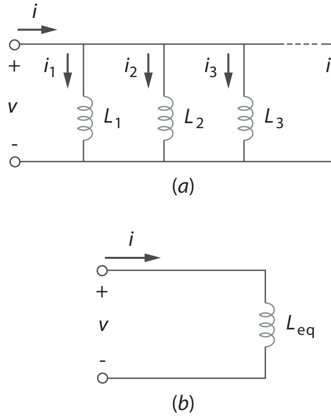


Figura 11. (a) Ligação em paralelo de *N* indutores; (b) circuito equivalente para os indutores em paralelo.

Fonte: Alexander e Sadiku (2013, p. 203).

Assim, obtém-se a Equação (18), conhecendo-se a relação $i = \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i(t_0)$, utilizada para se obter a Equação (9).

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 + i_3 + \cdots + i_N \\ &= \frac{1}{L_1}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i_1(t_0) + \frac{1}{L_2}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i_2(t_0) + \frac{1}{L_3}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau \\ &\quad + i_3(t_0) + \cdots + \frac{1}{L_N}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i_N(t_0) \\ &= \left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_N}\right)\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i_1(t_0) + i_2(t_0) \\ &\quad + i_3(t_0) + \cdots + i_N(t_0) = \frac{1}{L_{eq}}\int_{t_0}^{t} v(\tau)d\tau + i(t_0) \end{aligned} \tag{18}$$

Você pode notar, portanto, que, para N indutores em paralelo, tem-se $\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_N}$ e, assim, L_{eq} é dado na Equação (19), ou seja, é o inverso da soma dos inversos das indutâncias individuais de todos os N indutores, como feito na associação em paralelo de resistores, conforme explicam Nilsson e Riedel (2008) e Alexander e Sadiku (2013).

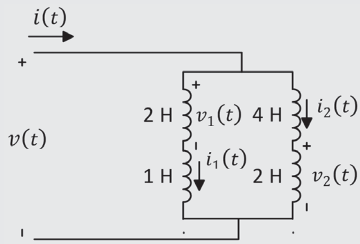
$$L_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \cdots + \frac{1}{L_N}} \tag{19}$$

A corrente $i(t_0)$ é dada pela Equação (20), sendo a soma das correntes que percorrem todos os N indutores em paralelo

$$i(t_0) = i_1(t_0) + i_2(t_0) + i_3(t_0) + \cdots + i_N(t_0) \tag{20}$$

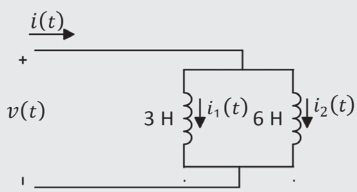
Exemplo

Determine as correntes $i(t)$, $i_1(t)$ e $i_2(t)$, as tensões $v_1(t)$ e $v_2(t)$ e a indutância equivalente total do circuito da figura abaixo, sabendo que $v(t) = -40e^{-10t}$ V e que as correntes iniciais são nulas, e sendo $t_0 = 0$ s.



Resolução:

A resolução solicitada pode ser simplificada se esse circuito for reduzido. Há duas associações em série de indutores e uma associação em paralelo das respectivas associações em série. Tem-se que as indutâncias dos indutores equivalentes dos indutores em série são dadas por $L_{eq1} = 2 + 1 = 3$ H e $L_{eq2} = 4 + 2 = 6$ H, sendo o circuito equivalente dado abaixo.



Assim, tem-se que

$$i_1(t) = \frac{1}{3} \cdot \int_{t_0}^{t} (-40)e^{-10t} d\tau = \frac{1}{3} \cdot (4 \cdot e^{-10t}) = \frac{4}{3} e^{-10t} \text{ A},$$

$$i_1(t) = \frac{1}{6} \cdot \int_{t_0}^{t} (-40)e^{-10t} d\tau = \frac{1}{6} \cdot (4 \cdot e^{-10t}) = \frac{4}{6} e^{-10t} \text{ e}$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \frac{12}{6} e^{-10t} = 2e^{-10t} \text{ A}.$$

Portanto, segundo o circuito original, tem-se que

$$v_1(t) = 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{d(e^{-10t})}{dt} = -\frac{8}{3} \cdot 10e^{-10t} = -\frac{80}{3} e^{-10t} \text{ V e}$$

$$v_2(t) = 2 \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{d(e^{-10t})}{dt} = -\frac{8}{6} \cdot 10e^{-10t} = -\frac{80}{6} e^{-10t} \text{ V}.$$

Tem-se que a indutância do indutor equivalente de todos os indutores é dada por:

$$L_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{(2+1)} + \frac{1}{(4+2)}} = \frac{3 \cdot 6}{3+6} = 2 \text{ H}$$

Referências

ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O. *Fundamentos de circuitos elétricos*. 5. ed. Porto Alegre: McGraw Hill, 2013.

BRETAS, A. S. *Aulas 3 e 4*. [2018]. Disponível em: <http://www.ece.ufrgs.br/~abretas/eng04031/index.html>. Acesso em: 14 jul. 2018.

BUCK, J. A.; HAYT, W. H. *Eletromagnetismo*. 8. ed. Porto Alegre: McGraw Hill, 2013.

NILSSON, J. W.; RIEDEL, S. A. *Circuitos elétricos*. 8. ed. São Paulo: Pearson, 2008.

Encerra aqui o trecho do livro disponibilizado para esta Unidade de Aprendizagem. Na Biblioteca Virtual da Instituição, você encontra a obra na íntegra.

Conteúdo:

SOLUÇÕES EDUCACIONAIS INTEGRADAS