МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
КИЇВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ імені Тараса Шевченка
ФАКУЛЬТЕТ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ
Кафедра програмних систем і технологій

Дисципліна
«Ймовірнісні основи програмної інженерії»

Лабораторна робота № 5
«Дискретні розподіли ймовірностей»

Виконала:	Манойлова Катерина Борисівна	**Перевірила**:	Вечерковська Анастасія Сергіївна
Група	ІПЗ-21	Дата перевірки	
Форма навчання	денна	Оцінка	
Спеціальність	121		

2022

Тема: дискретні розподіли ймовірностей.
Мета роботи: навчитись використовувати на практиці набуті знання про центральні тенденції та міри.

Завдання

1. Аналітичним шляхом розв’язати вказані задачі.
1. Ймовірність знаходження в кожному прибулому потязі вагонів на дане призначення 0,2. Визначити ймовірність того, що в трьох із п’яти потягів, які прибувають протягом однієї години, будуть вагони на дане призначення.
2. Знайти ймовірність того, що в п’яти незалежних випробуваннях подія А відбудеться: а) рівно 4 рази; б) не менше 4 разів, якщо в кожному випробуванні ймовірність появи події становить 0,8.
3. На кондитерській фабриці 20% всіх цукерок складають льодяники. Знайти ймовірність того, що серед 400 вибраних навмання цукерок буде рівно 80 льодяників.
4. На автомобільному заводі у звичному режимі роботи з конвеєра сходить 100000 автомобілів. Ймовірність бракованого автомобіля дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що з конвеєра зійшло 5 бракованих автомобілів.
5. Ймовірність того, що пара взуття, яка взята навмання з виготовленої партії виявиться вищого ґатунку дорівнює 0,4. Чому дорівнює ймовірність того, що серед 600 пар, які поступили на контроль, виявиться від 228 до 252 пар взуття вищого ґатунку?
6. Банк обслуговує 100 клієнтів, від кожного з яких може надійти вимога на проведення фінансової операції на наступний день з ймовірністю 0,4. Знайти найімовірніше число вимог клієнтів кожного дня, та його ймовірність.
7. Завод випускає в середньому 4% нестандартних виробів. Яка ймовірність того, що число нестандартних виробів у партії з 4000 штук не більше 170?.
8. Яка ймовірність того, що при 10000 незалежних киданнях монети герб випаде 5000 разів?
9. Фірма відправила на базу 1000 якісних виробів. Ймовірність того, що вироби в дорозі пошкодяться дорівнює 0,002. Знайти ймовірність того, що на базу прибуде 5 пошкоджених виробів.
10. Нехай ймовірність того, що грошовий приймальник автомату при опусканні монети скидає неправильно дорівнює 0,03. Знайти найімовірніше число випадків правильної роботи автомату, якщо буде кинуто 150 монет.
2. Написати програму, яка, використовуючи відомі формули теорії ймовірності(запрограмувати вручну) розв’яже задачі приведені у п.1.
3. Порівняти результати обчислень, зробити висновки.

Математична модель:

Формула сполучення: $\mathrm{C}_\mathrm{n}^\mathrm{k} = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{k}!(\mathrm{m}-\mathrm{k})!}$

Формула Бернуллі: $P_n = C_n^m * p^m * q^{n-m}$

m – кількість разів, коли відбудеться подія

n – загальна кількість експериментів,

p – ймовірність появи випадкової події,

q = p – 1 – ймовірність не появи випадкової події

Локальна теорема Муавра-Лапласа:

$p_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x_m)$

$\varphi(x_m) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{x^2}{2}}$

m – кількість разів, коли відбудеться подія

n – загальна кількість експериментів,

p – ймовірність появи випадкової події,

q = p – 1 – ймовірність не появи випадкової події

Теорема Пуассона:

$\lambda = np$

$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}$

m – кількість разів, коли відбудеться подія

n – загальна кількість експериментів,

Інтегральна теорема Муавра-Лапласа:

$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$

$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$

$\Phi(x) = \frac{1^x}{\sqrt{2\pi}}\int_0 e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

$P_n = \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$

Ф(-x) = -Ф(x);

Якщо x > 5 Ф(x) ≈ 0,5

Якщо x < -5 Ф(x) ≈-0,5

Де: n – загальна кількість експериментів, p – ймовірність появи випадкової події, q = p – 1 – ймовірність не появи випадкової події, m1 та m2 – межі кількостей появи події

Псевдокод алгоритмів:

Знаходження сполучення:

```
C = n!/r!*(n-r)!
```

Бернуллі:

```
B = C(k, n)* pow(p, k)*pow((1-p), (n-k))
```

Локальна формула Муавра-Лапласа:

```
x = (k-n*p)/sqrt(n*p*(1-p))
f = (1/sqrt(2*π))*pow(e, (x**2)/2)
ML = (1/sqrt(n*p*(1-p)))*f
```

Пуассон:

```
l = n*p
P = (pow(l, k)/k!)*pow(e, -l)
```

Інтегральна формула Муавра-Лапласа:

```
x1 = (k1-n*p)/sqrt(n*p*(1-p))
x2 = (k2-n*p)/sqrt(n*p*(1-p))
if x1<-5:
    f1 = -0.5
else if x1>5:
    f1 = 0.5
else:
    if(x1<0):
        f1 = -табличне значення функції від -x1
    else:
        f1 = табличне значення функції від x1

if x2<-5:
    f2 = -0.5
else if x2>5:
    f2 = 0.5
else:
    if(x2<0):
        f2 = -табличне значення функції від -x2
    else:
        f2 = табличне значення функції від x2

ML = f2 - f1
```

Знаходження найбільш ймовірного числа подій:

```
for i in range(n*p-(1-p), n*p+p, 0.01):
    if число ціле:
        result = i
```

Рішення задач є лише використанням вищезазначених функцій.

Випробування алгоритму

```
Завдання 1:
Ймовірність того, що в трьох із п’яти потягів будуть вагони на дане призначення.:  0.0512
--------------------------------------------------------------------------------------------------------
Завдання 2:
Ймовірність того, що в п’яти незалежних випробуваннях подія А відбудеться:
а) рівно 4 рази:  0.4096
б) не менше 4 разів:  0.7373
--------------------------------------------------------------------------------------------------------
Завдання 3:
Ймовірність того, що серед 400 вибраних навмання цукерок буде рівно 80 льодяників:  0.0499
--------------------------------------------------------------------------------------------------------
Завдання 4:
Ймовірність того, що з конвеєра зійшло 5 бракованих автомобілів:  0.0378
--------------------------------------------------------------------------------------------------------
Завдання 5:
Ймовірність того, що серед 600 пар виявиться від 228 до 252 пар взуття вищого ґатунку:  0.6827
--------------------------------------------------------------------------------------------------------
Завдання 6:
Найімовірніше число вимог клієнтів кожного дня:  40
його ймовірність:  0.0814
--------------------------------------------------------------------------------------------------------
Завдання 7:
Ймовірність, що число нестандартних виробів у партії з 4000 штук не більше 170:  0.7901
--------------------------------------------------------------------------------------------------------
Завдання 8:
Ймовірність, що при 10000 незалежних киданнях монети герб випаде 5000 разів:  0.00798
--------------------------------------------------------------------------------------------------------
Завдання 9:
Ймовірність того, що на базу прибуде 5 пошкоджених виробів:  0.0361
--------------------------------------------------------------------------------------------------------
Завдання 10:
Найімовірніше число випадків правильної роботи автомату, якщо буде кинуто 150 монет:  146
```

Аналітичний розв’язок

1. Ймовір. знах. в кожному прибулому потязі вагонів на дане призначення = 0,2. Визнач. ймов. того, що в 3 з 5 потягах, які прибув. протягом 1 години, будуть вагони на дане признач.

Формула Бернуллі: $P_k(n) = C_n^k p^k q^{n-k}$

$P_5(3) = C_5^3 \cdot 0{,}2^3 \cdot (1-0{,}2)^{5-3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}051$

2. Знайти ймов. того, що в 5 незалеж. випр. подія А відбудеться: а) рівно 4 рази; б) не менше 4 разів, якщо ймовір. події = 0,8

а) стандартна ф-ла Бернуллі

$P_5(4) = C_5^4 \cdot 0{,}8^4 \cdot (1-0{,}8)^{5-4} \approx 0{,}4096$

б) не менше 4 разів = 4 або 5 разів $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$P_5(4) + P_5(5)$

$P_5(5) = C_5^5 \cdot 0{,}8^5 \cdot 1 \approx 0{,}328$

Відп.: $0{,}4096 + 0{,}328 \approx 0{,}7376$

3. 20% цукерок — льодяники. Знайти ймовір., що серед 400 цукерок рівно 80 льодяників

Оскільки числа надвеликі для ф-ли Бернуллі, викор. локальну теорему Муавра-Лапласа

$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \phi(x)$

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{x^2}{2}} \qquad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}$

$P_{400}(80) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \cdot \phi(x) = \frac{1}{8}\phi(x)$

$x = \frac{80 - 400 \cdot 0{,}2}{8} = 0$

$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

$P_{400}(80) = \frac{1}{8\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}04987$

4. На автозаводі з конвеєра сходить 100000 авто. Ймовір. бракованого авто = 0,0001. Знайти ймов. того, що з к. зійшло 5 брак. авто. $p = 0{,}0001$, $n = 100000$, $k = 5$

Формула Пуассона: $\lambda = np$

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}$$

$$P_{100000}(5) = \frac{10^5}{5!} \cdot e^{-10} \approx 0{,}0378$$

5. Ймов. вищого ґатунку $= 0{,}4$. Ймов., що серед 600 пар від 228 до 252 пар вз. вищого ґатунку $= ?$

Викор. локальну теорему Муавра-Лапласа

$$x_1 = \frac{228 - 600 \cdot 0{,}4}{\sqrt{600 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} = \frac{-12}{12} = -1 \qquad x_2 = \frac{252 - 600 \cdot 0{,}4}{\sqrt{600 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} = 1$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$ – інтеграл не береться

$\Phi(-x) = -\Phi(x)$ $\qquad \Phi(1) = 0{,}3413$ (табличне знач.)

$$P = 0{,}3413 - (-0{,}3413) = 0{,}6826$$

6. Банк обслуг. 100 клієнтів, ймовір. фінанс. оп. $= 0{,}4$. Знайти найймов. ч. вкладників кожного дня, та його ймовір.

Найбільш ймовірне число клієнтів знах. у проміжку

$$np - q \le k \le np + p$$

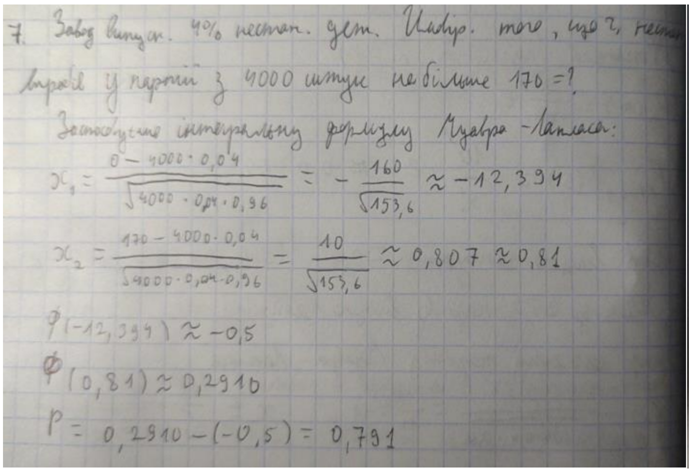
$$39{,}4 \le k \le 40{,}4$$

$$\Rightarrow k = 40$$

Ймовір.: $$x = \frac{40 - 100 \cdot 0{,}4}{\sqrt{100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} = 0$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{0^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 0{,}399$$

$$P_{100}(40) = \frac{1}{\sqrt{100 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6}} \cdot 0{,}399 \approx 0{,}0814$$



7. Завод випуск. 4% нестан. дет. Ймовір. того, що к. нестан. виробів у партії з 4000 штук не більше 170 =?

Застосуємо інтегральну формулу Муавра-Лапласа:

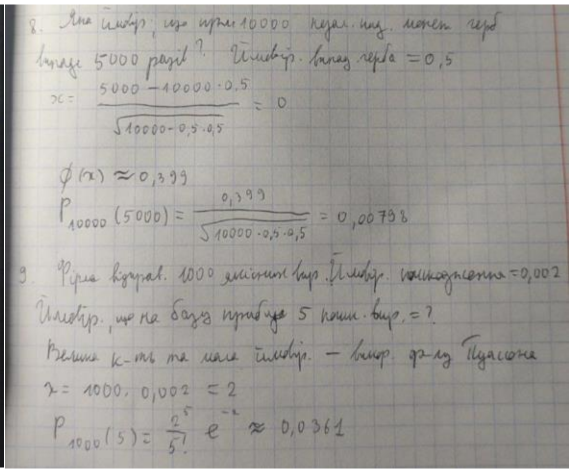
$$x_1 = \frac{0 - 4000 \cdot 0,04}{\sqrt{4000 \cdot 0,04 \cdot 0,96}} = -\frac{160}{\sqrt{153,6}} \approx -12,394$$

$$x_2 = \frac{170 - 4000 \cdot 0,04}{\sqrt{4000 \cdot 0,04 \cdot 0,96}} = \frac{10}{\sqrt{153,6}} \approx 0,807 \approx 0,81$$

$\Phi(-12,394) \approx -0,5$

$\Phi(0,81) \approx 0,2910$

$P = 0,2910 - (-0,5) = 0,791$



8. Яка ймовір., що при 10000 підкид. мон. монета герб випаде 5000 разів? Ймовір. випад. герба $= 0,5$

$$x = \frac{5000 - 10000 \cdot 0,5}{\sqrt{10000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 0$$

$\varphi(x) \approx 0,399$

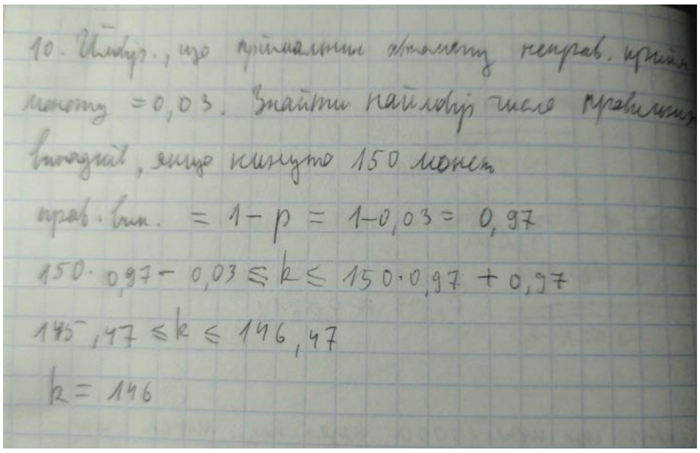
$$P_{10000}(5000) = \frac{0,399}{\sqrt{10000 \cdot 0,5 \cdot 0,5}} = 0,00798$$

9. Фірма відправ. 1000 якісних вир. Ймовір. пошкодження $= 0,002$. Ймовір., що на базу прибуде 5 пошк. вир. =?

Велика к-ть та мала ймовір. — викор. ф-лу Пуассона

$\lambda = 1000 \cdot 0,002 = 2$

$$P_{1000}(5) = \frac{2^5}{5!} e^{-2} \approx 0,0361$$



10. Ймовір., що випадання неправ. монету $= 0,03$. Знайти найймовір. число правильних випадків, якщо кинуто 150 монет

прав. вип. $= 1 - p = 1 - 0,03 = 0,97$

$150 \cdot 0,97 - 0,03 \le k \le 150 \cdot 0,97 + 0,97$

$145,47 \le k \le 146,47$

$k = 146$

Висновок

Під час виконання даної лабораторної роботи було проаналізовано алгоритми і формули, необхідні для знаходження рішень завдань. Було аналітично вирішено задачі. Було розроблено алгоритми для знаходження сполучення, формули Бернуллі, локальної та інтегральної теореми Муавра-Лапласа, формули Пуассона. Було порівняно результати аналітичного та програмного розв'язків, і зроблено висновок, що рішення є вірним, оскільки максимальна похибка у результатах не перебільшує тисячної долі. Найбільша похибка (0.0009) виникає у 7-му завданні при обчисленні значень інтегральної теореми Муавра-Лапласа, оскільки функція бібліотеки scipy, використана для визначення табличних значень функції Лапласа, обчислює більш точні значення, враховуючи тисячні долі, ніж зазначені в таблиці, які зупиняються на сотих. Інші похибки (0.0003 у 2-му завданні та 0.0001 у 5-му) є лише результатами округлення.