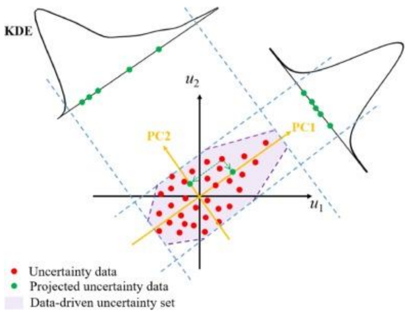
Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής
Και Υπολογιστών

Ενότητα Β' – Συστήματα Αβεβαιότητας
1_Η έννοια της Αβεβαιότητας



Κατερίνα Γεωργούλη
Οκτώβριος 2019

Στόχος της Ενότητας

- Σύντομη εισαγωγή στα συστήματα κανόνων
- Εισαγωγή στις έννοιες της αβεβαιότητας
- Παρουσίαση σύγχρονων τρόπων αναπαράστασης αβέβαιας γνώσης και εξαγωγής συμπερασμάτων για λήψη αποφάσεων.
- Ανάλυση πρώιμων θεωριών και συστημάτων αντιμετώπισης αβεβαιότητας
- Τρέχουσα έρευνα στον χώρο των συστημάτων αντιμετώπισης αβεβαιότητας.

Συστήματα Κανόνων

Οι κανόνες ως μια μέθοδος αναπαράσταση γνώσης

Ένας *κανόνας (rule)* στην ΤΝ:

- αποτελεί το συνηθέστερο τρόπο αναπαράσταση διαδικαστικής γνώσης,
- μπορεί να προσδιοριστεί ως μια δομή ΕΑΝ-ΤΟΤΕ η οποία συνδέει πληροφορίες ή γεγονότα (facts) στο ΕΑΝ μέρος με ενέργειες στο ΤΟΤΕ μέρος.
- παρέχει ένα είδος περιγραφής για το πώς να λυθεί ένα πρόβλημα, αποτελεί δηλαδή τελεστή του προβλήματος

Σύνταξη κανόνων

- Η βασική μορφή ενός κανόνα μέσα στα συστήματα κανόνων είναι η ακόλουθη:

ΕΑΝ προϋποθέσεις/ προαπαιτούμενα/ γεγονότα ΤΟΤΕ ενέργειες/ συμπεράσματα	**IF <permises> /<assertions> / <facts> THEN <actions>/<conclusions>**

- Ένας κανόνας μπορεί να περιλαμβάνει AND και OR στο IF μέρος του

IF <antecedent 1 AND <antecedent 2> : : AND <antecedent *n*> THEN <consequent>	**IF <antecedent 1 OR <antecedent 2> : : OR <antecedent *n*> THEN <consequent>**

Συστήματα Βασισμένα στη Γνώση
Knowledge Based Systems

Συστήματα Κανόνων
Rule-Based Systems

Συστήματα Εξαγωγής Συμπερασμάτων	Συστήματα Παραγωγής

Δομή Συστημάτων Κανόνων

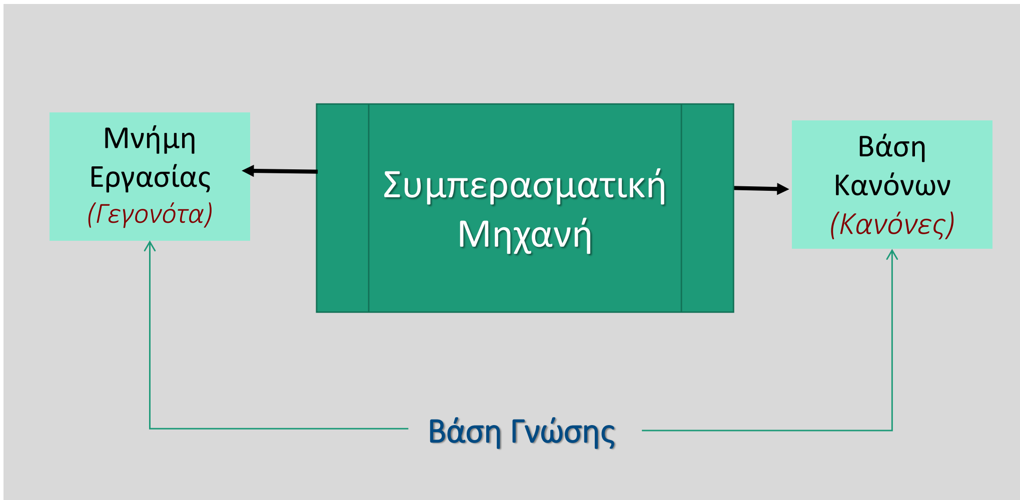
Τα Συστήματα αποτελούνται από:

- ✓**IF-THEN κανόνες παραγωγής (production rules)**
- ✓**Συλλογή γεγονότων (facts) ισχυρισμών (assertions)**
- ✓**Συμπερασματική μηχανή (inference engine)**

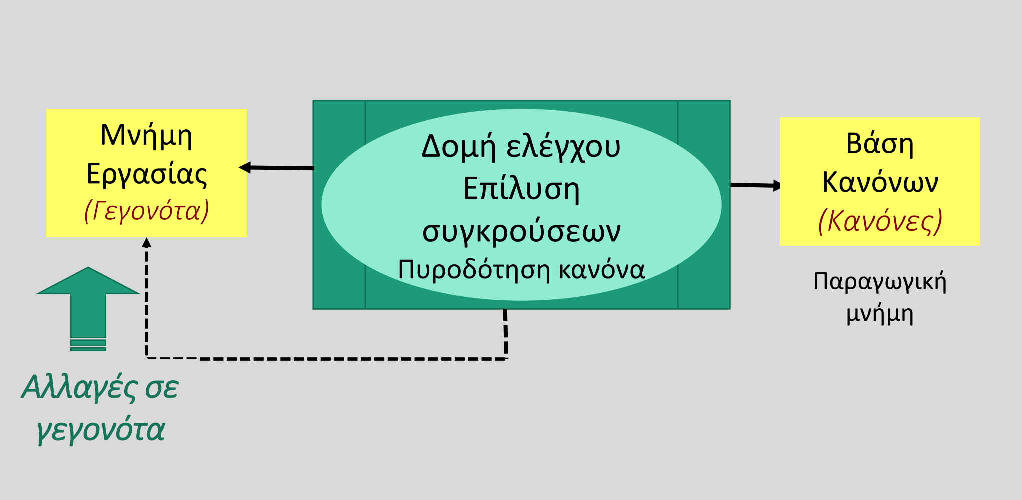
Η αλήθεια των ισχυρισμών που προηγούνται σε ένα κανόνα είναι αρκετοί για την εξαγωγή συμπερασμάτων αλλά όχι απαραίτητοι, εκτός και αν είναι οι μόνοι ισχυρισμοί που καταλήγουν στο συγκεκριμένο συμπέρασμα. Π.χ.:

ΕΑΝ ρίξει χιόνι ΤΟΤΕ η σκεπή θα ασπρίσει

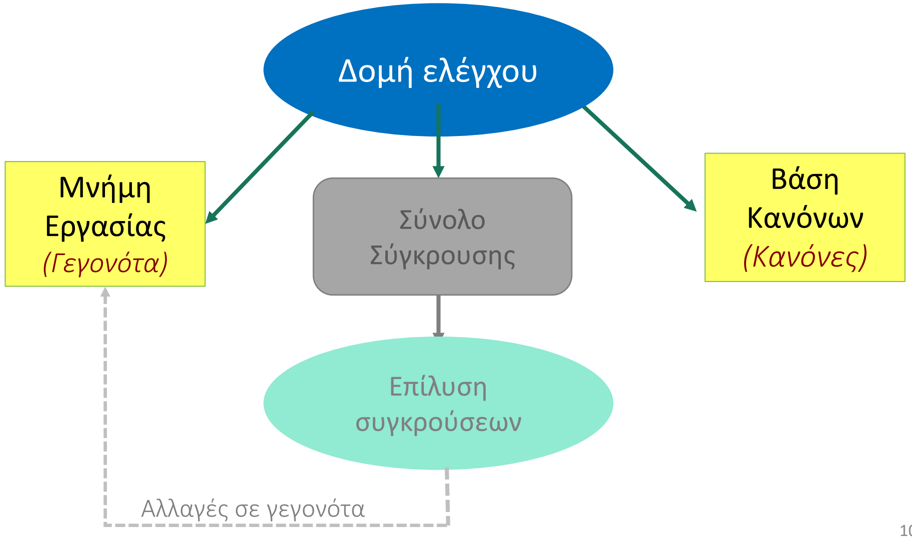
Δομή και Λειτουργία Συστημάτων Κανόνων 1/3



Δομή και Λειτουργία Συστημάτων Κανόνων 2/3



Δομή και Λειτουργία Συστημάτων Κανόνων 3/3



Σύνταξη γενικευμένων κανόνων

Ένας κανόνας γενικεύεται με τη χρήση μεταβλητών αντί συγκεκριμένων γεγονότων μέσα στο IF μέρος.

Παραδείγματα κανόνων:

- **Χωρίς χρήση μεταβλητών**

```
IF (είναι Ελένη πληροφορικός)
THEN πρόσθεσε το γεγονός (γνωρίζει Ελένη
                          προγραμματισμό)
```

- **Με χρήση μεταβλητών**

```
IF (είναι ?X πληροφορικός)
THEN πρόσθεσε το γεγονός (γνωρίζει ?X
                          προγραμματισμό)
```

Η αποτύπωση γνώσης μέσα σε γενικευμένους κανόνες οδηγεί στην ανάγκη **ταιριάσματος προτύπων** για να μπορέσουν να χρησιμοποιηθούν.

Ταίριασμα προτύπων 1/3

Ορισμός για τη διαδικασία ***ταιριάσματος προτύπων (pattern matching)***:

Ένα *πρότυπο (pattern) ταιριάζει* (*matches*) με ένα γεγονός (fact) αν υπάρχουν *προσδέσεις* (*bindings*) για τις μεταβλητές στο πρότυπο τέτοιες που, αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές με τις προσδεδεμένες τιμές (προσδέσεις) τους, το γεγονός και το πρότυπο γίνονται συντακτικά ταυτόσημα.

```
Fact:     είναι Ελένη πληροφορικός
Pattern:  είναι ?x πληροφορικός
Bindings: ?x=Ελένη
```

Ταίριασμα προτύπων 2/3

Οι μεταβλητές στα έμπειρα συστήματα συνήθως ξεκινούν με το σύμβολο **?** που ακολουθείται από έναν αριθμό αποδεκτών χαρακτήρων

Γραμματική έκφραση:

Variable → ?(any_eligible_character)⁺

Σημειώσεις:

A (?x, ?y) σημαίνει ότι ρωτάμε ποιες είναι οι τιμές του ?x και ποιες του ?y για τις οποίες το A (?x, ?y) είναι αληθές (οποιοσδήποτε συνδυασμός).

π.χ. αν A (a, b) είναι αληθές τότε το ?x δεσμεύεται στο a και ?y δεσμεύεται στο b

Το A (a, ?y) σημαίνει ότι ρωτάμε ποιες είναι οι τιμές του ?y για τις οποίες το A (a, ?y) είναι αληθές.

ΕΝΟΠΟΙΗΣΗ (UNIFICATION)

Αφορά τις μεταβλητές μέσα στον **ΙΔΙΟ** κανόνα

Ταίριασμα προτύπων 3/3

A(?x,?y), B(?z) → C(?x,?y,?z)

σημαίνει ότι αυτή είναι μια έγκυρη παραγωγή για κάθε πιθανή τιμή του?x, ?y and ?z.

Αλλά τι συμβαίνει όταν έχουμε την παρακάτω παραγωγή;

A(?x, **?y**), B(**?y**) → C(?x, ?y)

↑ ↑

Πρέπει να **ενοποιήσουμε** (must unify) τις κοινές μεταβλητές!

Παρατηρήσεις πάνω στην Ενοποίηση μεταβλητών

- Οι προτάσεις p και q καλούνται **κυριολεκτικά (*literals*)**
- **Ενοποίηση των** p και q ⇒ σύνδεση (pattern matching) των μεταβλητών p & q με **όρους (terms)**
- Οι όροι μπορεί να είναι μεταβλητές, σταθερές, συναρτήσεις, κλπ

Παρατήρηση 1

(?x ← t) αντικατάσταση της ?x από τον όρο t

Παρατήρηση 2

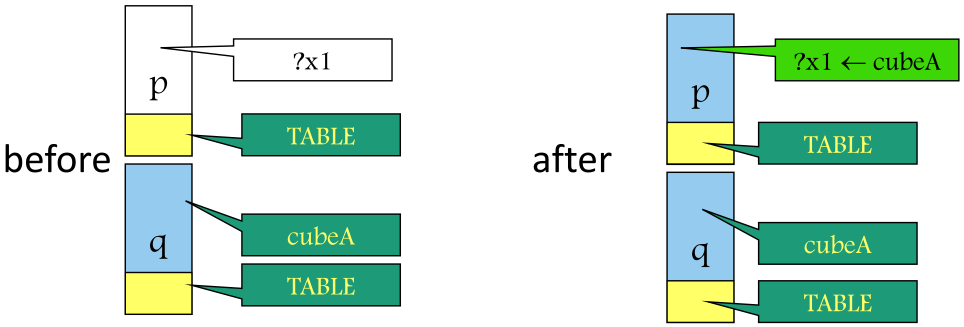
υποθέτοντας ότι F= {p(?x,?y), q(t1, t2)} τότε

θ = (?x ← t1, ?y ← t2)

Καλείται ενοποιητής (unifier) του F εάν: p≅q,

δηλαδή είναι κυριολεκτικά της ίδιας σύνταξης

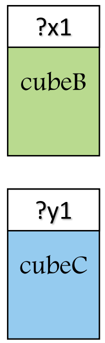
Ενοποίηση 2 ή περισσοτέρων κυριολεκτικών 1/4



e.g. p=(is ?x1 on **TABLE**)

q=(is **cubeA** on **TABLE**) Unification → θ=(?x1 ← cubeA)

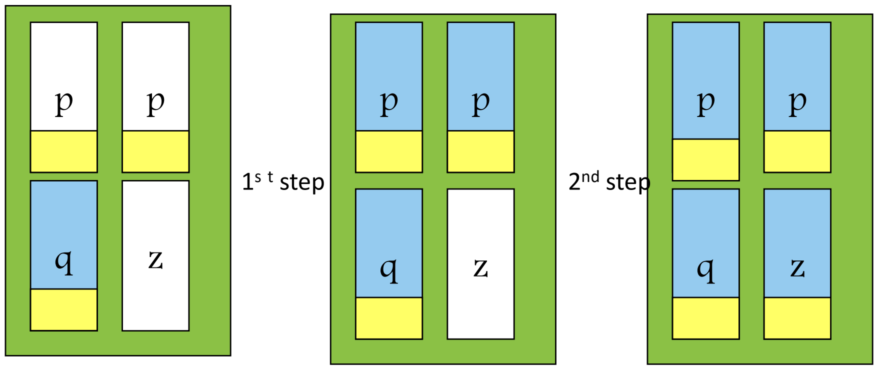
Ενοποίηση 2 ή περισσοτέρων κυριολεκτικών 2/4



(is ?x1 on cubeB)
(is ?y1 on cubeC) Unification → *Αδύνατον, γιατι;*

Ενοποίηση 2 ή περισσοτέρων κυριολεκτικών 3/4

- Unifying p and q ⇒ binding variables of p and q
- Unifying q and z ⇒ binding variables of q and z



Π.χ. p=(is ?x1 on cubeB) ∨ z=(is ?x1 on ?y1)
q=(is cubeA on cubeB)

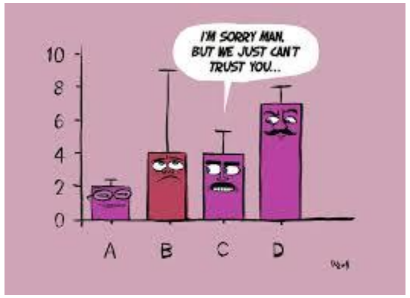
Unification → θ=(?x1 ← **cubeA** ?y1 ← **cubeB**)

Αβεβαιότητα

Αβεβαιότητα σε κανόνες

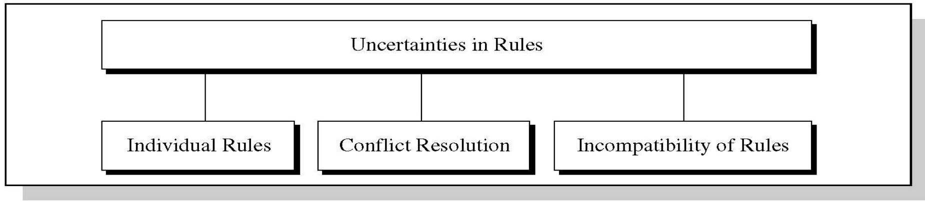
- Οι αβεβαιότητες σχετίζονται με την πίστη στα δεδομένα ενός κανόνα όπως και στα συμπεράσματά του.

- **Αντιμετώπιση αβεβαιότητας:**
  - Bayesian Probability Theory
  - Certainty Factors
  - Dempster-Shafer Theory
  - Fuzzy Logic

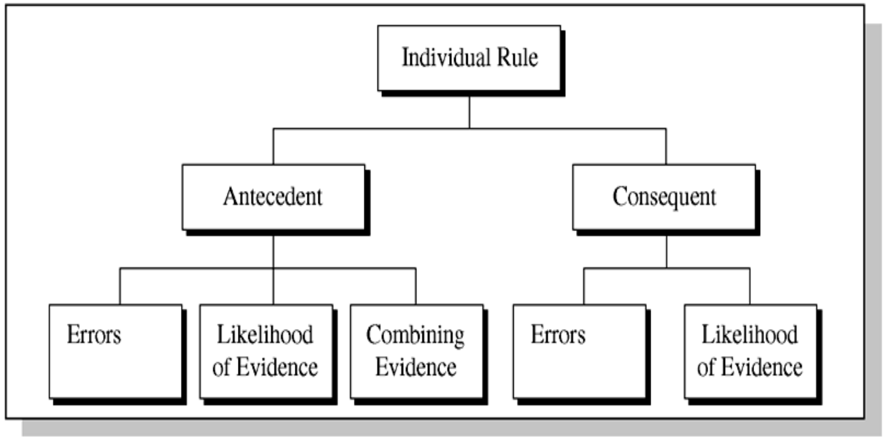


Πηγές αβεβαιότητας σε κανόνες

- Αβεβαιότητα σε μεμονωμένους κανόνες
- Αυθαίρετη συλλογιστική (απαγωγική συλλογιστική)
- Αβεβαιότητα που προκύπτει κατά την επίλυση συγκρούσεων
- Αβεβαιότητα λόγω ασυμβατότητας των κανόνων



Η Αβεβαιότητα σε μεμονωμένους κανόνες

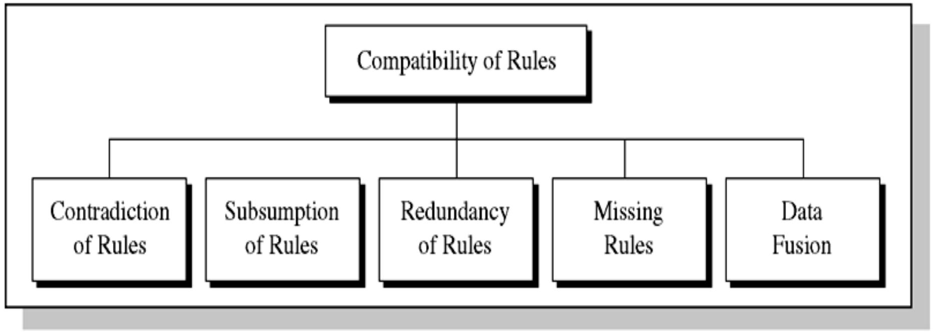


Πηγές Αβεβαιότητας σε έναν κανόνα

- Δεδομένα/Πληροφορίες/Γνώση μπορεί να είναι:
  - ατελή
  - αναξιόπιστα
  - εσφαλμένα
  - ανακριβή

- Δηλαδή δεν αποδεικνύεται μετά βεβαιότητας ότι ισχύουν (likelihood of evidence)

Η αβεβαιότητα που σχετίζεται με τη συμβατότητα των κανόνων



Μορφές Αβεβαιότητας που σχετίζονται με την ασυμβατότητα των κανόνων 1/2

- Πιθανή αντίφαση (contradiction) των κανόνων - οι κανόνες μπορεί να πυροδοτούν με αντιφατικές συνέπειες, πιθανώς ως αποτέλεσμα των προϋποθέσεων που δεν καθορίζονται σωστά.

  A and B → C and D
  A and B → C and not D

- Υποσύνολα (subsumption) κανόνων - ένας κανόνας υποκρύπτεται από έναν άλλο εάν ένα τμήμα του είναι υποσύνολο του άλλου κανόνα.

  A and B → E
  A and B and C → F

Μορφές Αβεβαιότητας που σχετίζονται με την ασυμβατότητα των κανόνων 2/2

- Δύο κανόνες είναι περιττοί (redundant) εάν και μόνο εάν οι προϋποθέσεις τους είναι ταυτόχρονα είτε ικανοποιημένες είτε όχι ικανοποιημένοι σε όλες τις πιθανές καταστάσεις και οι συνέπειές τους είναι ίδιες.

  A and B →
  A and not B → C

- Συγχώνευση (fusion) δεδομένων.

  A and B and C→ F
  A and B and E → F
  => A and B and (C or E) → F

Πηγές Αβεβαιότητας

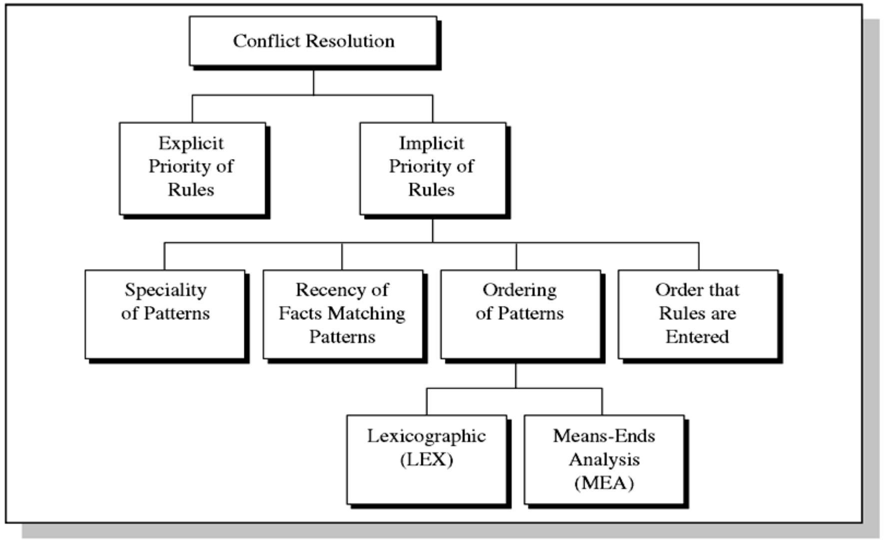
- Οι περιττοί κανόνες εισάγονται τυχαία / συμβαίνουν όταν ένας κανόνας τροποποιείται με βάση κάποιο πρότυπο διαγραφής (pattern deletion).

  Η απόφαση σχετικά με ποιος περιττός κανόνας να είναι ένα σημαντικό θέμα.

- Η αβεβαιότητα που προκύπτει από τους κανόνες που λείπουν συμβαίνει εάν ο ανθρώπινος εμπειρογνώμονας ξεχνά ή αγνοεί έναν κανόνα.

- Η ανάγκη συγχώνευσης δεδομένων, προκύπτει σε κανόνες που έχουν προκύψει από διαφορετικές πηγές

Αβεβαιότητα κατά την Επίλυση Συγκρούσεων



Αβεβαιότητα κατά την Επίλυση Συγκρούσεων

Υπάρχει αβεβαιότητα όσον αφορά την επίλυση συγκρούσεων σε σχέση με την προτεραιότητα της πυροδότησης των κανόνων και μπορεί να εξαρτηθεί από διάφορους παράγοντες, όπως:

- Σαφής προσδιορισμός προτεραιοτήτων στους κανόνες
- Σιωπηλή προτεραιότητα κανόνων οφειλόμενη σε:
  - Είδος των προτύπων (patterns)
  - Πρόσφατη εμφάνιση των γεγονότων που ταιριάζουν με τα πρότυπα
  - Σειρά εμφάνισης των προτύπων
    - Λεξικογραφική
    - Means-Ends Analysis
  - Σειρά με την οποία οι κανόνες μπήκαν στο σύνολο σύγκρουσης

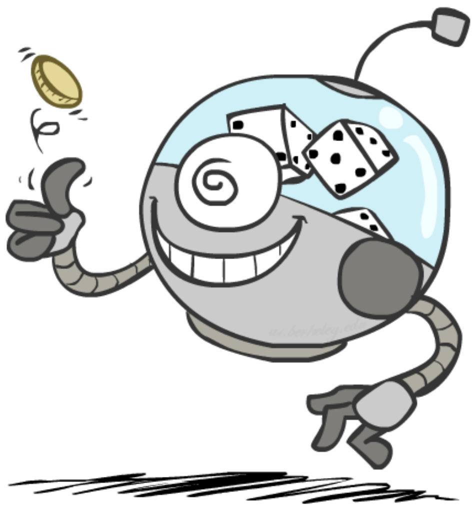
Σκοπός του Μηχανικού Γνώσης

- Ο μηχανικός της γνώσης προσπαθεί να ελαχιστοποιήσει ή να εξαλείψει την αβεβαιότητα αν είναι δυνατόν.
- Η ελαχιστοποίηση της αβεβαιότητας αποτελεί μέρος της επαλήθευσης των κανόνων.
- Η επαλήθευση αφορά την ορθότητα των δομικών στοιχείων του συστήματος - δηλ. τους κανόνες.

Τρόποι Διαχείρισης Αβεβαιότητας

- Θεωρία Πιθανοτήτων
- Bayesian δίκτυα
- Τεχνικές βασισμένες σε κανόνες (certainty-factors).
- Dempster-Shafer προσέγγιση

Θεωρία Πιθανοτήτων



Πιθανότητα-Probability

- Χρήσιμη για να:
  - περιγράφει πραγματικά τυχαίο κόσμο (τυχερά παιχνίδια, ...)
  - περιγράφει τον κανονικό κόσμο (στατιστική συσχέτιση, ...)
  - περιγράφει εξαιρέσεις (ποσοστά σφάλματος, ...)
  - ως βάση για μάθηση (επαγωγή δέντρων αποφάσεων, ...)
- Κλασσική άποψη: μακροπρόθεσμα, η σχετική συχνότητα ενός γεγονότος προσεγγίζει την πιθανότητά του
- Bayesian άποψη: μια πιθανότητα είναι ένας βαθμός πεποίθησης που επικρατεί σε κάποια υπόθεση ή γεγονός

Τυχαίες Μεταβλητές

- Μια τυχαία μεταβλητή είναι κάποια πτυχή του κόσμου για την οποία εμείς (ίσως) έχουμε αβεβαιότητα
  - R = Βρέχει;
  - T = Είναι ζεστό ή κρύο;
  - L = Πού είναι το pacman;
- Οι τυχαίες μεταβλητές έχουν πεδία τιμών:
  - R στο {true, false} (συχνά γράφουμε σαν {+ r, -r})
  - T στο {ζεστό, κρύο}
  - L σε πιθανές θέσεις, ίσως {(0,0), (0,1), ...}

Κατανομές πιθανότητας

- Συσχετίζει μια πιθανότητα με κάθε τιμή από το πεδίο τιμών.

- Θερμοκρασία:

$P(T)$

T	P
hot	0.5
cold	0.5

- Καιρός:

$P(W)$

W	P
sun	0.6
rain	0.1
fog	0.3
storm	0.0

Τρία αξιώματα της της Τυπικής Θεωρίας Πιθανοτήτων

1. $0 \leq P(E) \leq 1$
2. $\sum_i P(E_i) = 1$
3. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2)$

Εάν E1 και E2 είναι αμοιβαίως αποκλειστικά γεγονότα

Κλασσική θεωρία Πιθανοτήτων

P(e) $\in$ *[0,1]*
$P(e_1)+P(e_2)+\ldots+P(e_n) = 1$

Τα e1 και e2 πρέπει να είναι ανεξάρτητα

Παράδειγμα 1: good coin P(head) = P(tail) = 0.5
biased coin P(head) = 0.7 P(tail) = 0.3

$P(e_1 \text{ and } e_2) = P(e_1)*P(e_2)$

$P(e_1 \text{ or } e_2) = P(e_1)+P(e_2)-P(e_1)*P(e_2)$

P(not e) = 1-P(e)

Τα e1 και e2 δεν είναι απαραίτητα αμοιβαίως αποκλειστικά

Παράδειγμα 2: ρίχνουμε 2 ζάρια,
πιθανά αποτελέσματα HH HT TH TT
P(H and H) = 1/2 * 1/2 = 1/4 = 0.25
P(H or H) = 1/2 + 1/2 - 1/2 * 1/2 = 3/4 = 0.75

Κοινές Κατανομές

- Μια κοινή κατανομή σε ένα σύνολο τυχαίων μεταβλητών: $X_1, X_2, \ldots X_n$

καθορίζει έναν πραγματικό αριθμό για κάθε εκχώρηση (ή αποτέλεσμα):

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots X_n = x_n)$$

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

- Πρέπει να υπακούει στα ακόλουθα:

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n) \geq 0$$

$$\sum_{(x_1, x_2, \ldots x_n)} P(x_1, x_2, \ldots x_n) = 1$$

$P(T, W)$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

Πιθανοτικά Μοντέλα 1/2

- Ένα πιθανοτικό μοντέλο είναι μια κοινή κατανομή επί ενός συνόλου τυχαίων μεταβλητών

Κατανομή πάνω από T,W

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

- Πιθανά μοντέλα:
  (Τυχαίες) μεταβλητές με τομείς
  Οι αναθέσεις τιμών ονομάζονται **αποτελέσματα**
  Κοινές διανομές: δηλώσεις πόσο πιθανές οι αναθέσεις (αποτελέσματα)
  Κανονικοποίηση: άθροισμα στο 1,0
  Ιδανικά: μόνο ορισμένες μεταβλητές αλληλεπιδρούν άμεσα

Πιθανοτικά Μοντέλα 2/2

Προβλήματα ικανοποίησης περιορισμών:

- Μεταβλητές με περιοχές τιμών
- **Περιορισμοί:** δηλώσεις εάν είναι δυνατές οι αντιστοιχίσεις (T, F)
- **Ιδανικά:** μόνο ορισμένες μεταβλητές αλληλεπιδρούν άμεσα

Περιορισμός πάνω από T,W

T	W	P
hot	sun	T
hot	rain	F
cold	sun	F
cold	rain	T

Συμβάντα (events)

- Ένα συμβάν είναι ένα σύνολο E αποτελεσμάτων

$$P(E) = \sum_{(x_1 \ldots x_n) \in E} P(x_1 \ldots x_n)$$

- Από μια κοινή κατανομή, μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανότητα οποιουδήποτε συμβάντος
  - Πιθανότητα ότι είναι καυτή και ηλιόλουστη;
  - Πιθανότητα ότι είναι καυτή;
- Τυπικά, τα συμβάντα που μας ενδιαφέρουν είναι μερικές αναθέσεις, όπως το P (T = hot)

$P(T, W)$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

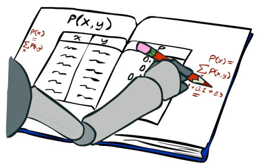
Quiz: Events

- P(+x, +y) ?
- P(+x) ?
- P(-y OR +x) ?

$P(X, Y)$

X	Y	P
+x	+y	0.2
+x	-y	0.3
-x	+y	0.4
-x	-y	0.1

Περιθωριακές Κατανομές
Marginal Distributions



- Οι περιθωριακές κατανομές είναι υπο-πίνακες με μεταβλητές που έχουν εξαλειφθεί
- Περιθωριοποίηση (marzinalization): Συνδυάστε τις καταγεγραμμένες σειρές προσθέτοντας

$P(T, W)$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(t) = \sum_s P(t, s)$$

$P(T)$

T	P
hot	0.5
cold	0.5

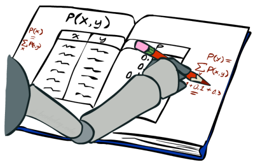
$$P(s) = \sum_t P(t, s)$$

$P(W)$

W	P
sun	0.6
rain	0.4

$$P(X_1 = x_1) = \sum_{x_2} P(X_1 = x_1, X_2 = x_2)$$

Quiz: Marginal Distributions



$P(X,Y)$

X	Y	P
+x	+y	0.2
+x	-y	0.3
-x	+y	0.4
-x	-y	0.1

$$P(x) = \sum_y P(x,y)$$

$P(X)$

X	P
+x	
-x	

$$P(y) = \sum_x P(x,y)$$

$P(Y)$

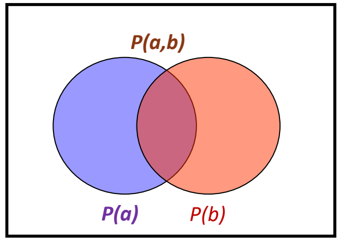
Y	P
+y	
-y	

Πιθανότητες υπό συνθήκη
Conditional Probabilities

Μια απλή σχέση μεταξύ κοινών και υπό συνθήκη πιθανοτήτων

- Στην πραγματικότητα, αυτό λαμβάνεται ως ο ορισμός μιας υπό συνθήκη πιθανότητας

$$P(a|b) = \frac{P(a,b)}{P(b)}$$



$P(T,W)$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

$$P(W=s|T=c) = \frac{P(W=s,T=c)}{P(T=c)} = \frac{0.2}{0.5} = 0.4$$

$$= P(W=s,T=c) + P(W=r,T=c)$$
$$= 0.2 + 0.3 \quad = 0.5$$

Quiz: Conditional Probabilities

$P(X,Y)$

X	Y	P
+x	+y	0.2
+x	-y	0.3
-x	+y	0.4
-x	-y	0.1

- P(+x | +y) ?
- P(-x | +y) ?
- P(-y | +x) ?

Κατανομές υπό συνθήκη
Conditional Distributions

- Οι κατανομές υπό συνθήκη είναι οι κατανομές πιθανότητας σε ορισμένες μεταβλητές στις οποίες έχουν δοθεί καθορισμένες τιμές άλλων μεταβλητών

Conditional Distributions

$P(W|T)$

$P(W|T=hot)$

W	P
sun	0.8
rain	0.2

$P(W|T=cold)$

W	P
sun	0.4
rain	0.6

Joint Distribution

$P(T,W)$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

Normalization Trick

$P(T, W)$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

SELECT the joint probabilities matching the evidence

$P(c, W)$

T	W	P
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

NORMALIZE the selection (make it sum to one)

$P(W|T=c)$

W	P
sun	0.4
rain	0.6

Normalization Trick

$P(T, W)$

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

SELECT the joint probabilities matching the evidence

$P(c, W)$

T	W	P
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

NORMALIZE the selection (make it sum to one)

$P(W|T=c)$

W	P
sun	0.4
rain	0.6

$$P(x_1|x_2) = \frac{P(x_1, x_2)}{P(x_2)} = \frac{P(x_1, x_2)}{\sum_{x_1} P(x_1, x_2)}$$

Quiz: Normalization Trick

- P(X | Y=-y) ?

$P(X, Y)$

X	Y	P
+x	+y	0.2
+x	-y	0.3
-x	+y	0.4
-x	-y	0.1

SELECT the joint probabilities matching the evidence

NORMALIZE the selection (make it sum to one)

Για να γίνει κανονικοποίηση

Όλες μαζί οι καταχωρήσεις μιας κατανομής να αποκτήσουν άθροισμα 1

Διαδικασία:

- Βήμα 1 1:Υπολόγισε το Z = το άθροισμα όλων των επιμέρους καταχωρήσεων
- Βήμα 2: Διαίρεση κάθε επιμέρους καταχώρηση με το Z

Παράδειγμα 1

W	P
sun	0.2
rain	0.3

Normalize

Z = 0.5

W	P
sun	0.4
rain	0.6

Παράδειγμα 2

T	W	P
hot	sun	20
hot	rain	5
cold	sun	10
cold	rain	15

Normalize

Z = 50

T	W	P
hot	sun	0.4
hot	rain	0.1
cold	sun	0.2
cold	rain	0.3

Πιθανοτική Εξαγωγή Συμπερασμάτων

Πιθανοτική εξαγωγή συμπερασμάτων: υπολογισμός μιας επιθυμητής πιθανότητας από άλλες γνωστές πιθανότητες

Υπολογίζουμε γενικά τις υπό όρους πιθανότητες, π.χ.
P (έγκαιρη άφιξη | μη αναφορά ατυχήματος) = 0,90
Αυτά αντιπροσωπεύουν πεποιθήσεις, λαμβάνοντας υπόψη υπάρχοντα στατιστικά στοιχεία

Οι πιθανότητες αλλάζουν με νέα στοιχεία:
P (έγκαιρη | χωρίς ατυχήματα, 5 π.μ.) = 0,95
P (έγκαιρα | χωρίς ατυχήματα, 5 π.μ., βροχή) = 0,80
Η παρατήρηση νέων στοιχείων οδηγεί στην ενημέρωση των πεποιθήσεων

Πρότερη και Ύστερη Πιθανότητα

Πρότερη Πιθανότητα ή Απροσδιόριστη Πιθανότητα: πιθανότητα ενός γεγονότος, ελλείψει γνώσης που να υποστηρίζει την εμφάνισή του

Ύστερη Πιθανότητα ή Πιθανότητα υπό Όρους: πιθανότητα ενός γεγονότος δεδομένου ενός άλλου γεγονότος

$$P(e_1 \mid e_2) = \frac{| e_1 \text{ and } e_2 |}{| e_2 |}$$

Παράδειγμα: Ένας δάσκαλος μαθηματικών έδωσε τάξη δύο εξετάσεις. Το 25% της τάξης πέρασε αμφότερες τις δοκιμές και το 42% της κατηγορίας πέρασε την πρώτη δοκιμασία.

Ποιο ποσοστό των ατόμων που πέρασαν την πρώτη δοκιμή πέρασε επίσης τη δεύτερη δοκιμασία;

Λύση: $P(\text{Second}|\text{First}) = \frac{P(\text{First and Second})}{P(\text{First})}$

$= 0.25/0.42 = 0.6 = 60\%$

Ο Κανόνας Παραγωγής

- Μερικές φορές έχουμε τις υπό συνθήκες κατανομές αλλά θέλουμε τις κοινές

$$P(y)P(x|y) = P(x,y) \quad \Longleftrightarrow \quad P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}$$

Ο Κανόνας Παραγωγής

$$P(y)P(x|y) = P(x,y)$$

- Παράδειγμα:

$P(W)$

R	P
sun	0.8
rain	0.2

$P(D|W)$

D	W	P
wet	sun	0.1
dry	sun	0.9
wet	rain	0.7
dry	rain	0.3

$\Longleftrightarrow$

$P(D,W)$

D	W	P
wet	sun	
dry	sun	
wet	rain	
dry	rain	

Ο Αλυσιδωτός κανόνας

- Γενικότερα, οποιαδήποτε κοινή κατανομή μπορεί πάντα να γραφτεί ως διαδοχικό αποτέλεσμα εξαρτημένων κατανομών

$$P(x_1, x_2, x_3) = P(x_1)P(x_2|x_1)P(x_3|x_1, x_2)$$

$$P(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_i P(x_i|x_1 \ldots x_{i-1})$$

Bayesian Συλλογιστική

Κανόνας Bayes

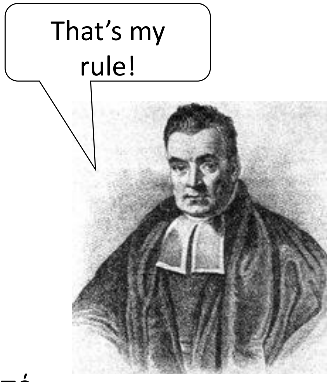
- Δύο τρόποι για τον προσδιορισμό μιας κοινής κατανομής σε δύο μεταβλητές:

$$P(x, y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x)$$

- Διαχωρίζοντας, παίρνουμε:

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)}{P(y)}P(x)$$

- Γιατί είναι αυτό χρήσιμο;
  - Μας επιτρέπει να χτίσουμε μια πιθανότητα από την αντίστροφή της
  - Συχνά μια υπό συνθήκες κατανομή είναι δύσκολη αλλά η αντίστροφή της είναι απλή



Bayesian Συλλογιστική

$$P(h \mid e) = \frac{P(h) * P(e \mid h)}{P(e)}$$

h = hypothesis
e = evidence

<u>Παράδειγμα:</u>
evidence (symptom): patient has fever
hypothesis (disease): patient has the flu

$$P(\text{flu} \mid \text{fever}) = \frac{P(\text{flu}) * P(\text{fever} \mid \text{flu})}{P(\text{fever})} = \frac{0.001 * 0.9}{0.003} = 0.3$$

Είναι ευκολότερο να βρεθούν οι τιμές στο δεξί μέρος από ότι στο αριστερό

Παράδειγμα: (PROSPECTOR):

$P(d \mid a) = P(d \mid a \wedge b) \cdot P(b \mid a) + P(d \mid a \wedge \neg b) \cdot P(\neg b \mid a)$

Προβλήματα της Bayesian Συλλογιστικής

- Η απόκτηση των σχετικών προγενέστερων και μεταγενέστερων πιθανοτήτων απαιτεί εκτεταμένη συλλογή και επαλήθευση δεδομένων
- Στην πράξη, πρέπει να αντιμετωπίζονται πολλαπλά συμπτώματα. Αν αυτά τα συμπτώματα δεν είναι ανεξάρτητα, απαιτείται μια πιο γενική μορφή Bayes:

$$P(d \mid s_1 \& s_2 \& \,..\, s_n) = \frac{P(d) * P(s_1 \& s_2 \& \,..\, s_n \mid d)}{P(s_1 \& s_2 \& \,..\, s_n)}$$

- Οι αρνητικές πληροφορίες πρέπει να αντιμετωπιστούν απαιτώντας:

$$P\,(\text{όχι } s) = 1 - P\,(s) \text{ και } P\,(\text{όχι } d \mid s) = 1 - P\,(d \mid s)$$

Προβλήματα της Bayesian Συλλογιστικής

Η ποιο γενική μορφή του κανόνα Bayes είναι:

$$P(hi \mid e) = \frac{P(e \mid hi) * P\,(hi)}{\sum_k (P(e \mid h_k) * P\,(h_k))}$$

απαιτώντας όλα τα $P(e \mid h_k)$ να είναι ανεξάρτητα

Προβλήματα της Bayesian Συλλογιστικής

Εάν η εμφάνιση του συμβάντος p (hi) εξαρτάται από δύο μόνο αμοιβαία αποκλειστικά συμβάντα, π.χ. E and NOT E τότε:

$$P(hi) = P(hi \mid e) * P\,(e) + P(hi \mid \neg e) * P\,(\neg e) \text{ and}$$

$$P(e) = P(e \mid hi) * P\,(hi) + P(e \mid \neg hi) * P\,(\neg hi)$$

Ο κανόνας Bayes rule διαμορφώνεται ως εξής:

$$P(hi \mid e) = \frac{P(e \mid hi) * P\,(hi)}{P(e \mid hi) * P\,(hi) + P(e \mid \neg hi) * P\,(\neg hi)}$$