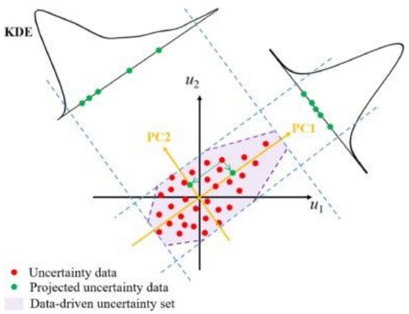
Πανεπιστήμιο Δυτικής Αττικής
Τμήμα Μηχανικών Πληροφορικής
Και Υπολογιστών

Ενότητα Β' – Συστήματα Αβεβαιότητας
2_**Bayesian Συλλογιστική - Δίκτυα**



Κατερίνα Γεωργούλη
Δεκέμβριος 2019

Bayesian Συλλογιστική

Πιθανότητες: επανάληψη

- Conditional probability $$P(x|y) = \frac{P(x,y)}{P(y)}$$
- Product rule $$P(x,y) = P(x|y)P(y)$$
- Chain rule $$\begin{aligned} P(X_1, X_2, \ldots X_n) &= P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1,X_2)\ldots \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i|X_1,\ldots,X_{i-1}) \end{aligned}$$
- X, Y independent if and only if: $\forall x,y : P(x,y) = P(x)P(y)$
- X and Y are conditionally independent given Z if and only if:

$$X \perp\!\!\!\perp Y | Z \qquad \forall x,y,z : P(x,y|z) = P(x|z)P(y|z)$$

Συλλογιστική λαμβάνοντας υπόψη Χρόνο και Χώρο

- Συχνά, θέλουμε να εξάγουμε συμπεράσματα για μια σειρά παρατηρήσεων
  - Αναγνώρισης ομιλίας
  - Εντοπισμός ρομπότ
  - Ιατρική παρακολούθηση
- Πρέπει να εισαγάγουμε χρόνο (ή χώρο) στα μοντέλα μας

Μοντέλα Markov

- Η τιμή του X σε μια δεδομένη χρονική στιγμή ονομάζεται η κατάσταση (the state)

$$X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4 \dashrightarrow$$

$$P(X_1) \qquad P(X_t|X_{t-1})$$

- Παράμετροι: οι αποκαλούμενες πιθανότητες μετάβασης (transition probabilities) ή δυναμικές (dynamics), καθορίζουν τον τρόπο με τον οποίο εξελίσσεται η κατάσταση με την πάροδο του χρόνου (επίσης, πιθανότητες αρχικής κατάστασης)
- Υπόθεση ύπαρξης στασιμότητας: πιθανότητες μετάβασης οι ίδιες ανά πάσα χρονική στιγμή

Κοινή Κατανομή του Μοντέλου Markov

$$X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4$$

$$P(X_1) \qquad P(X_t|X_{t-1})$$

- Κοινή κατανομή:

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_2)P(X_4|X_3)$$

- Γενικότερα:

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_T) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_2)\ldots P(X_T|X_{T-1})$$
$$= P(X_1)\prod_{t=2}^{T} P(X_t|X_{t-1})$$

Αλυσιδωτός κανόνας και Μοντέλα Markov

$$X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4$$

- Από τον αλυσιδωτό κανόνα, κάθε κοινή κατανομή πάνω στο σύνολο X_1, X_2, X_3, X_4 μπορεί να γραφεί ως:

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_1, X_2)P(X_4|X_1, X_2, X_3)$$

- Υποθέτοντας ότι:

$$X_3 \perp\!\!\!\perp X_1 \mid X_2 \qquad \text{and} \qquad X_4 \perp\!\!\!\perp X_1, X_2 \mid X_3$$

Καταλήγουμε στη συνάρτηση της προηγούμενης διαφάνειας:

$$P(X_1, X_2, X_3, X_4) = P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_2)P(X_4|X_3)$$

Αλυσιδωτός κανόνας και Μοντέλα Markov

$$X_1 \to X_2 \to X_3 \to X_4 \dashrightarrow$$

- Από τον αλυσιδωτό κανόνα, κάθε κοινή κατανομή πάνω στο σύνολο $X_1, X_2, \ldots, X_T$ μπορεί να γραφεί ως:

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_T) = P(X_1)\prod_{t=2}^{T} P(X_t|X_1, X_2, \ldots, X_{t-1})$$

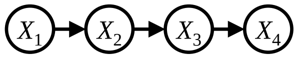
- Υποθέτοντας ότι για όλα τα t:

$$X_t \perp\!\!\!\perp X_1, \ldots, X_{t-2} \mid X_{t-1}$$

καταλήγουμε στην έκφραση που δόθηκε στη προηγούμενη διαφάνεια:

$$P(X_1, X_2, \ldots, X_T) = P(X_1)\prod_{t=2}^{T} P(X_t|X_{t-1})$$

Υπονοούμενες υπό όρους ανεξαρτησίες



- Υποθέτουμε: $X_3 \perp\!\!\!\perp X_1 \mid X_2$ and $X_4 \perp\!\!\!\perp X_1, X_2 \mid X_3$

- Ισχύει ότι $X_1 \perp\!\!\!\perp X_3, X_4 \mid X_2$?

  Ναί!

Απόδειξη:
$$\begin{aligned} P(X_1 \mid X_2, X_3, X_4) &= \frac{P(X_1, X_2, X_3, X_4)}{P(X_2, X_3, X_4)} \\ &= \frac{P(X_1)P(X_2 \mid X_1)P(X_3 \mid X_2)P(X_4 \mid X_3)}{\sum_{x_1} P(x_1)P(X_2 \mid x_1)P(X_3 \mid X_2)P(X_4 \mid X_3)} \\ &= \frac{P(X_1, X_2)}{P(X_2)} \\ &= P(X_1 \mid X_2) \end{aligned}$$

Επανάληψη Μοντέλων Markov

- Σαφής παραδοχή για το *t* : $X_t \perp\!\!\!\perp X_1, \ldots, X_{t-2} \mid X_{t-1}$
- Επακόλουθο, η κοινή κατανομή μπορεί να γραφεί ως:
$$\begin{aligned} P(X_1, X_2, \ldots, X_T) &= P(X_1)P(X_2|X_1)P(X_3|X_2)\ldots P(X_T|X_{T-1}) \\ &= P(X_1)\prod_{t=2}^{T} P(X_t|X_{t-1}) \end{aligned}$$
- Υπονοούμενες υπο συνθήκες ανεξαρτησίες:
  - Οι παλαιότερες μεταβλητές είναι ανεξάρτητες των μελλοντικών με δεδομένες τις παρούσες.

  Π.χ., Εάν $t_1 < t_2 < t_3$ ή $t_1 > t_2 > t_3$ τότε: $X_{t_1} \perp\!\!\!\perp X_{t_3} \mid X_{t_2}$

- Επιπλέον σαφείς παραδοχές: $P(X_t \mid X_{t-1})$ είναι η ίδια για όλα τα *t*.

Παράδειγμα Αλυσίδας Markov : Καιρός

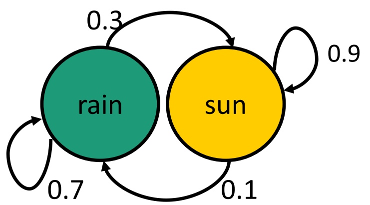
- Καταστάσεις:

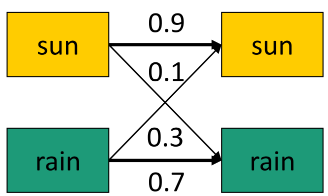
  X = {rain, sun}

Δυο τρόποι αναπαράστασης του ίδιου CPT

- Αρχική κατανομή (t0: 1.0 sun)
- CPT* $P(X_t \mid X_{t-1})$:

X_{t-1}	X_t	$P(X_t \mid X_{t-1})$
sun	sun	0.9
sun	rain	0.1
rain	sun	0.3
rain	rain	0.7

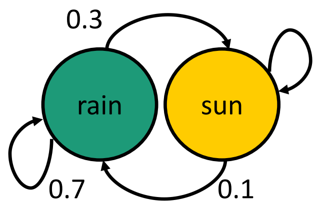




*Conditional Probability Table

Παράδειγμα Αλυσίδας Markov : Καιρός

- Αρχική κατανομή: 1.0 sun



- Ποια είναι η πιθανοτική κατανομή μετά από ένα βήμα;

$$\begin{aligned} P(X_2 = \text{sun}) = \; & P(X_2 = \text{sun}|X_1 = \text{sun})P(X_1 = \text{sun}) + \\ & P(X_2 = \text{sun}|X_1 = \text{rain})P(X_1 = \text{rain}) \end{aligned}$$

$$0.9 \cdot 1.0 + 0.3 \cdot 0.0 = 0.9$$

Mini-Forward Αλγόριθμος

- Ερώτηση: Ποια είναι η P(X) σε κάποια μέρα t?

$$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \dashrightarrow$$

$$P(x_1) = \text{known}$$

$$P(x_t) = \sum_{x_{t-1}} P(x_{t-1}, x_t)$$

$$= \sum_{x_{t-1}} P(x_t \mid x_{t-1}) P(x_{t-1})$$

Forward simulation

Παραδειγματική εκτέλεση του Mini-Forward Αλγόριθμου

- Από την αρχική παρατήρηση για την παράμετρο sun:

$$\left\langle \begin{matrix} 1.0 \\ 0.0 \end{matrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{matrix} 0.9 \\ 0.1 \end{matrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{matrix} 0.84 \\ 0.16 \end{matrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{matrix} 0.804 \\ 0.196 \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} 0.75 \\ 0.25 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{P}(X_1) \quad \mathrm{P}(X_2) \quad \mathrm{P}(X_3) \quad \mathrm{P}(X_4) \quad \mathrm{P}(X_\infty)$$

- Από την αρχική παρατήρηση για την παράμετρο rain:

$$\left\langle \begin{matrix} 0.0 \\ 1.0 \end{matrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{matrix} 0.3 \\ 0.7 \end{matrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{matrix} 0.48 \\ 0.52 \end{matrix} \right\rangle \quad \left\langle \begin{matrix} 0.588 \\ 0.412 \end{matrix} \right\rangle \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} 0.75 \\ 0.25 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{P}(X_1) \quad \mathrm{P}(X_2) \quad \mathrm{P}(X_3) \quad \mathrm{P}(X_4) \quad \mathrm{P}(X_\infty)$$

- Από την αρχική παρατήρηση για κάποια παράμετρο $P(X_1)$:

$$\left\langle \begin{matrix} p \\ 1-p \end{matrix} \right\rangle \quad \cdots \quad \Rightarrow \left\langle \begin{matrix} 0.75 \\ 0.25 \end{matrix} \right\rangle$$

$$\mathrm{P}(X_1) \qquad \mathrm{P}(X_\infty)$$

Σταθερές Κατανομές

- Για τις περισσότερες αλυσίδες ισχύει ότι:
  - Η επίδραση της αρχικής κατανομής γίνεται ολοένα και λιγότερο σημαντική με την πάροδο του χρόνου.
  - Η κατανομή στην οποία καταλήγουμε είναι ανεξάρτητη από την αρχική κατανομή

- **Σταθερή Κατανομή:**
  - Στην κατανομή που καταλήγει η αλυσίδα καλείται Σταθερή Κατανομή P_∞ της αλυσίδας
  - και ικανοποιεί τη σχέση:

$$P_\infty(X) = P_{\infty+1}(X) = \sum_x P(X|x) P_\infty(x)$$

Παράδειγμα: Σταθερές Κατανομές

- Ερώτηση: Ποια είναι η P(X) την χρονική στιγμή t =άπειρο;

$$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow X_3 \rightarrow X_4 \dashrightarrow$$

$$P_\infty(sun) = P(sun|sun)P_\infty(sun) + P(sun|rain)P_\infty(rain)$$
$$P_\infty(rain) = P(rain|sun)P_\infty(sun) + P(rain|rain)P_\infty(rain)$$
$$P_\infty(sun) = 0.9P_\infty(sun) + 0.3P_\infty(rain)$$
$$P_\infty(rain) = 0.1P_\infty(sun) + 0.7P_\infty(rain)$$
$$P_\infty(sun) = 3P_\infty(rain)$$
$$P_\infty(rain) = 1/3P_\infty(sun)$$

X_{t-1}	X_t	$P(X_t \mid X_{t-1})$
sun	sun	0.9
sun	rain	0.1
rain	sun	0.3
rain	rain	0.7

Επίσης: $P_\infty(sun) + P_\infty(rain) = 1$ $\Rightarrow$

$$P_\infty(sun) = 3/4$$
$$P_\infty(rain) = 1/4$$

Κανόνας Bayes

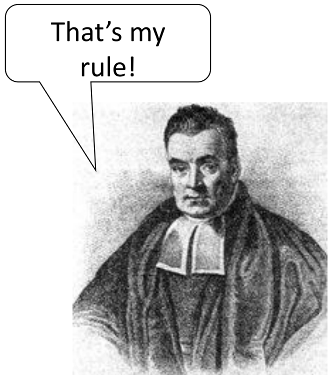
- Δύο τρόποι για τον προσδιορισμό μιας κοινής κατανομής σε δύο εξαρτώμενες μεταβλητές:

$$P(x,y) = P(x|y)P(y) = P(y|x)P(x)$$

- Διαχωρίζοντας, παίρνουμε:

$$P(x|y) = \frac{P(y|x)}{P(y)}P(x)$$

- Γιατί είναι αυτό χρήσιμο;
  - Μας επιτρέπει να χτίσουμε μια πιθανότητα από την αντίστροφή της
  - Συχνά μια υπό συνθήκες κατανομή είναι δύσκολη αλλά η αντίστροφή της είναι απλή



Δίκτυα Bayes - Bayes' Nets

Δύο προβλήματα υπάρχουν με τη χρήση πινάκων πλήρως διασυνδεδεμένης κατανομής ως πιθανοτικά μοντέλα:

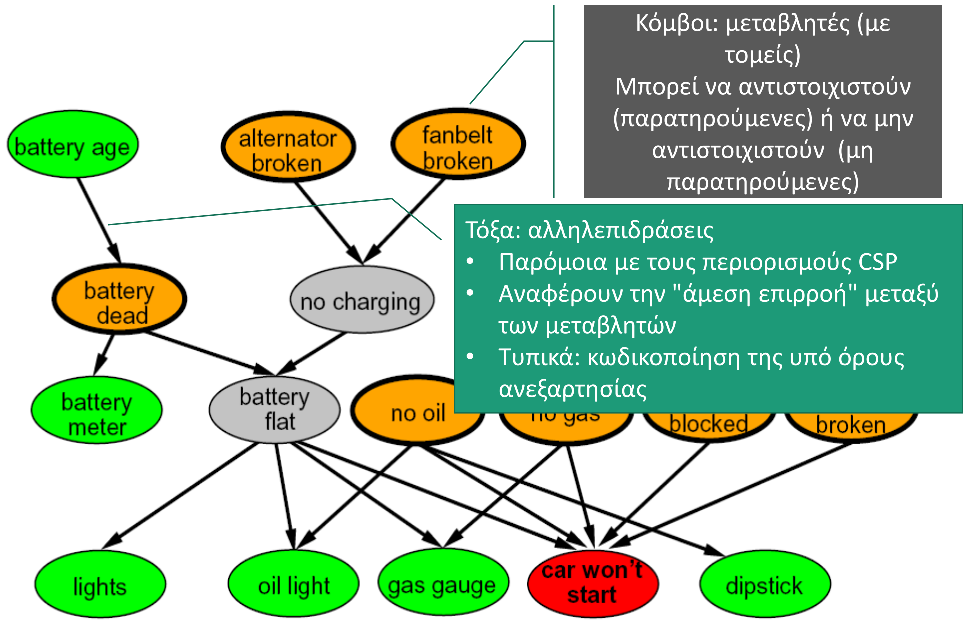
- Η διάρθρωση είναι πολύ μεγάλη ώστε να εκπροσωπείται ρητά, εκτός και αν υπάρχουν λίγες μεταβλητές
- Είναι δύσκολο να μάθεις (εκτιμήσεις) οτιδήποτε εμπειρικά για περισσότερες από μερικές μεταβλητές τη φορά

Δίκτυα Bayes - Bayes' Nets

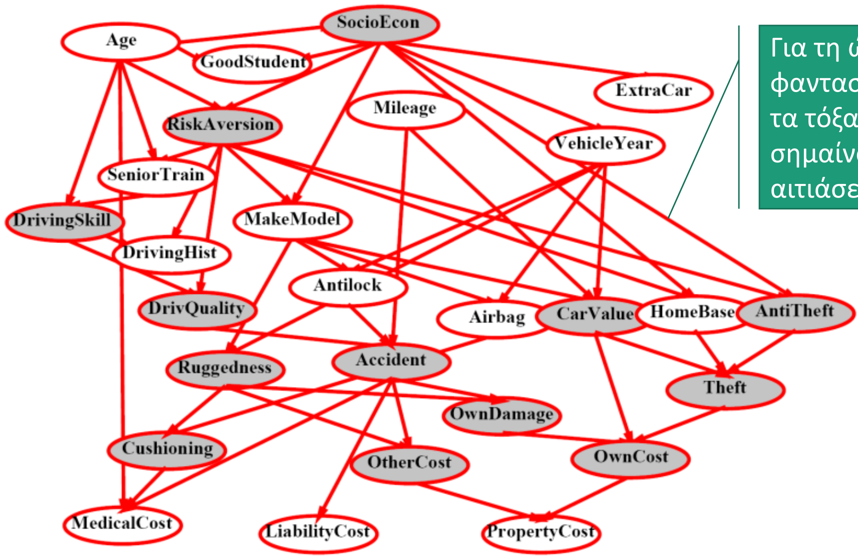
Bayes' nets: μια τεχνική για την περιγραφή πολύπλοκων κοινών κατανομών (μοντέλων) χρησιμοποιώντας απλές, τοπικές κατανομές (πιθανότητες υπό προϋποθέσεις - conditional probabilities)

- Πιο σωστά ονομάζονται γραφικά μοντέλα (graphical models)
- Περιγράφουν πώς αλληλεπιδρούν τοπικά οι μεταβλητές
- Τοπική αλυσίδα αλληλεπιδράσεων μαζί για να δώσει σφαιρικές, έμμεσες αλληλεπιδράσεις

Παράδειγμα Bayes' Net: Αυτοκίνητο



Παράδειγμα Bayes' Net: Ασφάλεια



Για τη ώρα: φανταστείτε ότι τα τόξα σημαίνουν άμεσες αιτιάσεις

Παράδειγμα: Ρίξεις Νομίσματος

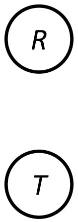
- N ανεξάρτητες ρίψεις νομίσματος

- Όχι συσχετισμοί μεταξύ των μεταβλητών: απόλυτη ανεξαρτησία

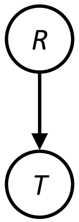
Παράδειγμα: Κυκλοφοριακή συμφόρηση

- Variables:
  - R: It rains
  - T: There is traffic

- Μοντέλο 1: ανεξαρτησία



- Μοντέλο 2: εξάρτηση-η βροχή προκαλεί συμφόρηση



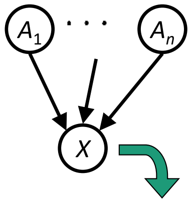
Άσκηση: Κυκλοφοριακή συμφόρηση II

Φτιάξτε ένα γραφικό μοντέλο για την αλληλεξάρτηση των μεταβλητών:

- T: Συμφόρηση
- R: Βρέχει
- V: Ορατότητα
- A: Ατύχημα
- S: Οδόστρωμα
- C: Κλειστοί δρόμοι

Τα Semantics των Bayes' Δικτύων

- Ένα σύνολο κόμβων, ένας για κάθε μεταβλητή X
- Ένας κατευθυνόμενος, άκυκλος γράφος (που συνθέτουν οι ακμές)
- Μια κατανομή υπό συνθήκη για κάθε κόμβο
  - Μια συλλογή από κατανομές επί του X,
    $$P(X|a_1 \dots a_n)$$
  - Ένας CPT: πίνακας υπό συνθήκη πιθανότητας (conditional probability table)
  - Περιγραφή μιας θορυβώδους (noisy) «αιτιώδους» διαδικασίας

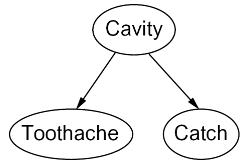


$P(X|A_1 \dots A_n)$

A Bayes net = Topology (graph) + Local Conditional Probabilities

Πιθανότητες στα BNs

- Τα Bayes' nets κωδικοποιούν εμμέσως τις κοινές κατανομές
  - Ως αποτέλεσμα των τοπικών υπό συνθήκες κατανομών
    $$P(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|\mathit{parents}(X_i))$$
  - Για να βρεθεί η πιθανότητα που δίνει ένα BN με πλήρη ανάθεση τιμών στους κόμβους του, αρκεί να πολλαπλασιαστούν μαζί όλες οι σχετικές συνθήκες :
  - Παράδειγμα:

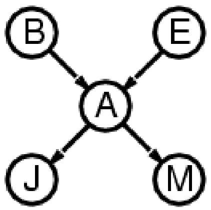


$P(+\mathit{cavity}, \ +\mathit{catch}, \ -\mathit{toothache})$

Πιθανότητες στα BNs

<u>Παράδειγμα 2</u>

$$\mathbf{P}(j \land m \land a \land \neg b \land \neg e)$$
$$= \mathbf{P}(j \mid a)\, \mathbf{P}(m \mid a)\, \mathbf{P}(a \mid \neg b, \neg e)\, \mathbf{P}(\neg b)\, \mathbf{P}(\neg e)$$



Πιθανότητες σε BNs

- Ο αλυσιδωτός κανόνας (ισχύει για όλες τις κατανομές):
  $$P(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|x_1 \dots x_{i-1})$$
- Υποθέτουμε τις υπό συνθήκες ανεξαρτησίες :
  $$P(x_i|x_1, \dots x_{i-1}) = P(x_i|\mathit{parents}(X_i))$$

  → Μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:
  $$P(x_1, x_2, \dots x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i|\mathit{parents}(X_i))$$
- Δεν είναι δυνατόν κάθε BN να μπορεί να αναπαραστήσει κάθε κοινή κατανομή
  - Η τοπολογία επιβάλει κάποιες υπό συνθήκες ανεξαρτησίες

Παράδειγμα: Ρίψεις Νομίσματος

$P(X_1)$

h	0.5
t	0.5

$P(X_2)$

h	0.5
t	0.5

. . .

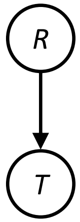
$P(X_n)$

h	0.5
t	0.5

$$P(h, h, t, h) =$$

Μόνο κατανομές με ανεξάρτητες μεταβλητές μπορούν να αναπαρασταθούν με Bayes' net χωρίς τόξα.

Παράδειγμα: Κυκλοφοριακή συμφόρηση



$P(R)$

+r	1/4
-r	3/4

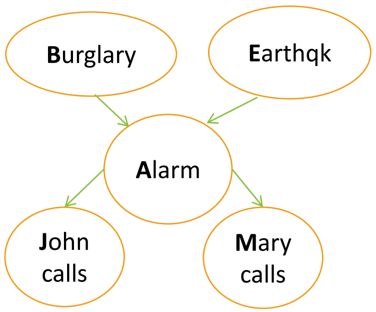
$P(T|R)$

+r	+t	3/4
	-t	1/4
-r	+t	1/2
	-t	1/2

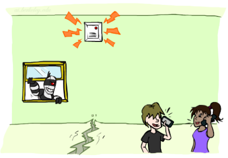
$$P(+r, -t) =$$

Παράδειγμα: Συναγερμός

B	P(B)
+b	0.001
-b	0.999



E	P(E)
+e	0.002
-e	0.998

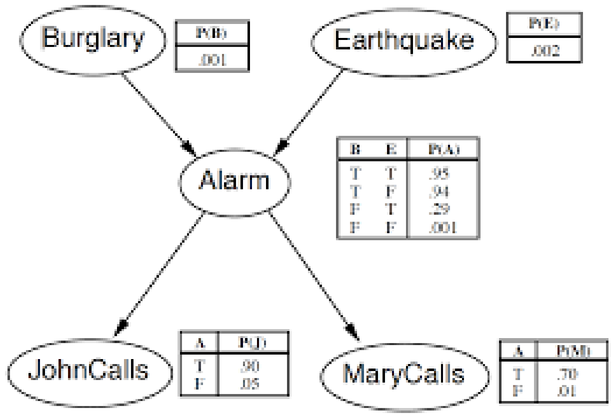


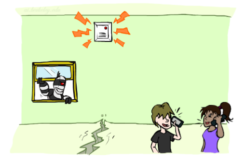
A	J	P(J|A)
+a	+j	0.9
+a	-j	0.1
-a	+j	0.05
-a	-j	0.95

A	M	P(M|A)
+a	+m	0.7
+a	-m	0.3
-a	+m	0.01
-a	-m	0.99

B	E	A	P(A|B,E)
+b	+e	+a	0.95
+b	+e	-a	0.05
+b	-e	+a	0.94
+b	-e	-a	0.06
-b	+e	+a	0.29
-b	+e	-a	0.71
-b	-e	+a	0.001
-b	-e	-a	0.999

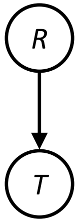
Παράδειγμα: Συναγερμός (άλλη αναπαράσταση)





Παράδειγμα: Κυκλοφοριακή συμφόρηση

- Αιτιώδης κατεύθυνση (Causal direction)



$P(R)$

+r	1/4
-r	3/4

$P(T|R)$

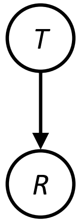
+r	+t	3/4
	-t	1/4
-r	+t	1/2
	-t	1/2

$P(T,R)$

+r	+t	3/16
+r	-t	1/16
-r	+t	6/16
-r	-t	6/16

Παράδειγμα: Αντίστροφη Κυκλοφοριακή Συμφόρηση

- Τι θα γίνει αν αντιστρέψουμε την αιτιώδη κατεύθυνση?



$P(T)$

+t	9/16
-t	7/16

$P(R|T)$

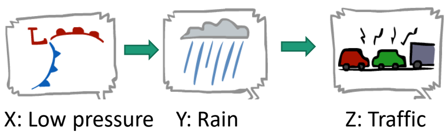
+t	+r	1/3
	-r	2/3
-t	+r	1/7
	-r	6/7

$P(T,R)$

+r	+t	3/16
+r	-t	1/16
-r	+t	6/16
-r	-t	6/16

Αλυσίδες Αιτίου-Αιτιατού

- Το παρακάτω αποτελεί μια "αιτιώδη αλυσίδα (causal chain)"



$$P(x,y,z) = P(x)P(y|x)P(z|y)$$

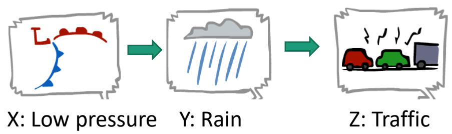
- Δυο απομακρυσμένες μεταβλητές της αλυσίδας ΔΕΝ ΕΊΝΑΙ απαραίτητα ανεξάρτητες.
  - Για παράδειγμα:

P(+y | +x) = 1, P(-y | - x) = 1,

P(+z | +y) = 1, P(-z | -y) = 1

Αλυσίδες Αιτίου-Αιτιατού

- Το παρακάτω αποτελεί μια "αιτιώδη αλυσίδα (causal chain)"



$$P(x,y,z) = P(x)P(y|x)P(z|y)$$

- Δυο απομακρυσμένες μεταβλητές της αλυσίδας ΕΊΝΑΙ ανεξάρτητες δεδομένων των ενδιάμεσων μεταβλητών.
  - Για παράδειγμα:

$$P(z|x,y) = \frac{P(x,y,z)}{P(x,y)}$$

$$= \frac{P(x)P(y|x)P(z|y)}{P(x)P(y|x)}$$

$$= P(z|y)$$

Κατασκευή Bayesian δικτύων

1. Επέλεξε ένα σύνολο μεταβλητών $X_1, \ldots, X_n$
2. Από $i = 1$ έως n

   πρόσθεσε X_i στο δίκτυο

   Διάλεξε τους γονείς από το σύνολο $X_1, \ldots, X_{i-1}$ τέτοιους που

$$\mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i)) = \mathbf{P}(X_i \mid X_1, \ldots X_{i-1})$$

Μια τέτοια επιλογή γονέων εγγυάται ότι:

$$\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) = \Pi_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \mid X_1, \ldots, X_{i-1}) \text{ (chain rule)}$$

$$= \Pi_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i \mid Parents(X_i)) \text{ (εκ της κατασκευής)}$$

Παράδειγμα κατασκευής BN

Έστω ότι επιλέγουμε τη σειρά των μεταβλητών

M, J, A, B, E για το παράδειγμα του συναγερμού

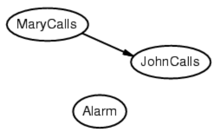
Ισχύει ότι

***P**(J | M) = **P**(J)?*

Παράδειγμα κατασκευής BN

Έστω ότι επιλέγουμε τη σειρά των μεταβλητών

M, J, A, B, E για το παράδειγμα του συναγερμού



Ισχύει ότι

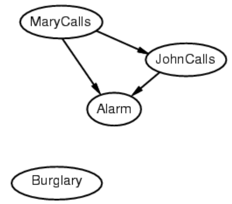
***P**(J | M) = **P**(J)?* **No**

***P**(A | J, M) = **P**(A | J)? **P**(A | J, M) = **P**(A)?*

Παράδειγμα κατασκευής BN

Έστω ότι επιλέγουμε τη σειρά των μεταβλητών

M, J, A, B, E για το παράδειγμα του συναγερμού



Ισχύει ότι

***P**(J | M) = **P**(J)?* **No**

***P**(A | J, M) = **P**(A | J)? **P**(A | J, M) = **P**(A)?* **No**

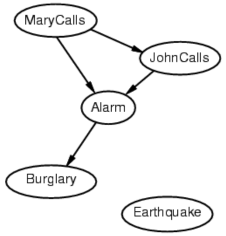
***P**(B | A, J, M) = **P**(B | A)?*

***P**(B | A, J, M) = **P**(B)?*

Παράδειγμα κατασκευής BN

Έστω ότι επιλέγουμε τη σειρά των μεταβλητών

M, J, A, B, E για το παράδειγμα του συναγερμού



Ισχύει ότι

$\mathbf{P}(J \mid M) = \mathbf{P}(J)$? **No**

$\mathbf{P}(A \mid J, M) = \mathbf{P}(A \mid J)$? $\mathbf{P}(A \mid J, M) = \mathbf{P}(A)$? **No**

$\mathbf{P}(B \mid A, J, M) = \mathbf{P}(B \mid A)$? **Yes**

$\mathbf{P}(B \mid A, J, M) = \mathbf{P}(B)$? **No**

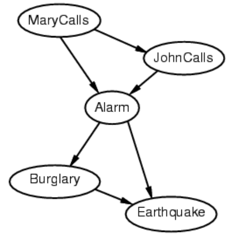
$\mathbf{P}(E \mid B, A, J, M) = \mathbf{P}(E \mid A)$?

$\mathbf{P}(E \mid B, A, J, M) = \mathbf{P}(E \mid A, B)$?

Παράδειγμα κατασκευής BN

Έστω ότι επιλέγουμε τη σειρά των μεταβλητών

M, J, A, B, E για το παράδειγμα του συναγερμού



Ισχύει ότι

$\mathbf{P}(J \mid M) = \mathbf{P}(J)$? **No**

$\mathbf{P}(A \mid J, M) = \mathbf{P}(A \mid J)$? $\mathbf{P}(A \mid J, M) = \mathbf{P}(A)$? **No**

$\mathbf{P}(B \mid A, J, M) = \mathbf{P}(B \mid A)$? **Yes**

$\mathbf{P}(B \mid A, J, M) = \mathbf{P}(B)$? **No**

$\mathbf{P}(E \mid B, A, J, M) = \mathbf{P}(E \mid A)$? **No**

$\mathbf{P}(E \mid B, A, J, M) = \mathbf{P}(E \mid A, B)$? **Yes**

Άσκηση: Συναγερμός

Φτιάξτε BN για την αλληλεξάρτηση των παρακάτω μεταβλητών και τους αντίστοιχους πίνακες πιθανοτήτων και αλληλεξαρτήσεων και αναφέρετε ρητά τις αλυσίδες αιτίου-αιτιατού και τις ανεξάρτητες μεταξύ τους μεταβλητές :

C: Εκδήλωση καρκίνου

A: Ηλικία

G: Φύλλο

E: Έκθεση σε τοξικά

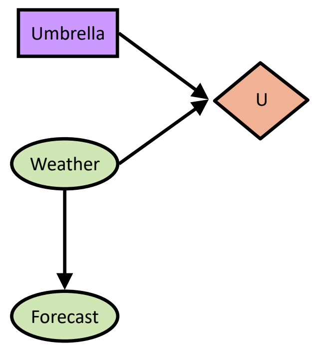
S: Κάπνισμα

L: Καρκίνος του πνεύμονα

T: Χημειοθεραπεία

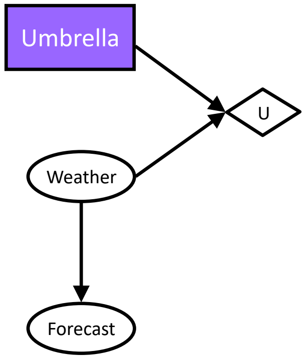
Δίκτυα Απόφασης

- **Επιλογή ενέργειας που μεγιστοποιεί την προσδοκώμενη ωφέλεια (u) βάσει των ισχυρισμών**
  - Νέοι τύποι κόμβων:
    - Κόμβοι πιθανότητας (ακριβώς όπως στα BNs)
    - Ενέργειες (ορθογώνια, δεν μπορούν να έχουν γονείς, ενεργούν ως παρατηρούμενα στοιχεία)
    - Κόμβος χρησιμότητας (ρόμβος, εξαρτάται από κόμβους δράσης και πιθανότητας)



Δίκτυα Απόφασης

- **Επιλογή Ενέργειας**
  - Υποθέστε όλους τους ισχυρισμούς για το πρόβλημα *(καιρός)*
  - Θέστε τους κόμβους ενεργειών με κάθε αρμόζοντα τρόπο *(να πάρω-να μη πάρω ομπρέλα)*
  - Υπολογίστε τα προγενέστερα για όλους τους γονείς του κόμβου χρησιμότητας, δεδομένων των ισχυρισμών που υποθέσατε (πρόγνωση)
  - Υπολογίστε την αναμενόμενη χρησιμότητα για κάθε κόμβο ενέργειας
  - Επιλέξτε την ενέργεια που μεγιστοποιεί το αποτέλεσμα



Δίκτυα Απόφασης

Umbrella = leave

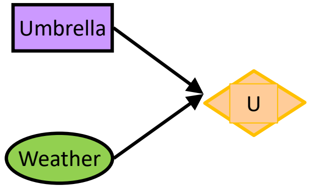
$$\mathrm{EU}(\mathrm{leave}) = \sum_w P(w)U(\mathrm{leave}, w)$$
$$= 0.7 \cdot 100 + 0.3 \cdot 0 = 70$$

Umbrella = take

$$\mathrm{EU}(\mathrm{take}) = \sum_w P(w)U(\mathrm{take}, w)$$
$$= 0.7 \cdot 20 + 0.3 \cdot 70 = 35$$

Optimal decision = leave

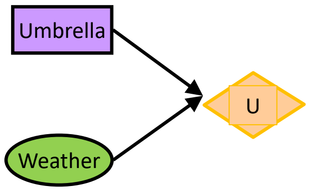
$$\mathrm{MEU}(\varnothing) = \max_a \mathrm{EU}(a) = 70$$

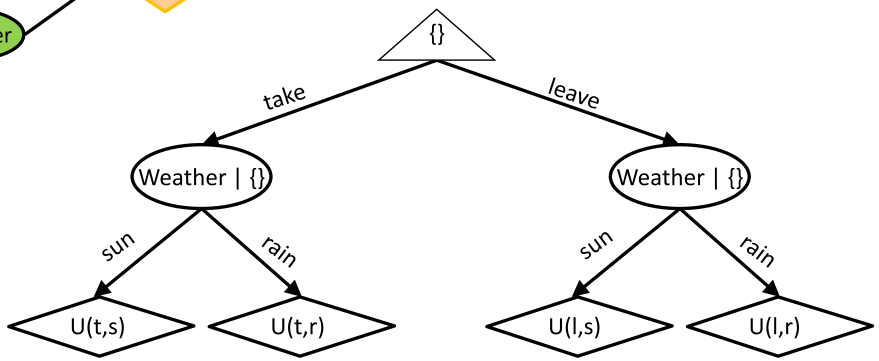


W	P(W)
sun	0.7
rain	0.3

A	W	U(A,W)
leave	sun	100
leave	rain	0
take	sun	20
take	rain	70

Οι Αποφάσεις ως Δένδρα





Παράδειγμα: Δίκτυα Απόφασης

Umbrella = leave

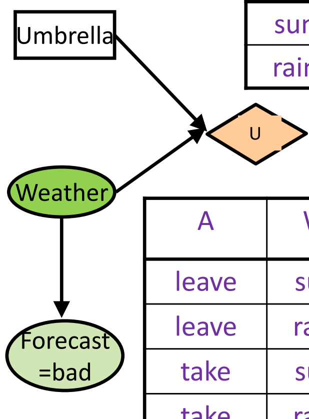
$$\mathrm{EU}(\mathrm{leave}|\mathrm{bad}) = \sum_w P(w|\mathrm{bad})U(\mathrm{leave}, w)$$
$$= 0.34 \cdot 100 + 0.66 \cdot 0 = 34$$

Umbrella = take

$$\mathrm{EU}(\mathrm{take}|\mathrm{bad}) = \sum_w P(w|\mathrm{bad})U(\mathrm{take}, w)$$
$$= 0.34 \cdot 20 + 0.66 \cdot 70 = 53$$

Optimal decision = take

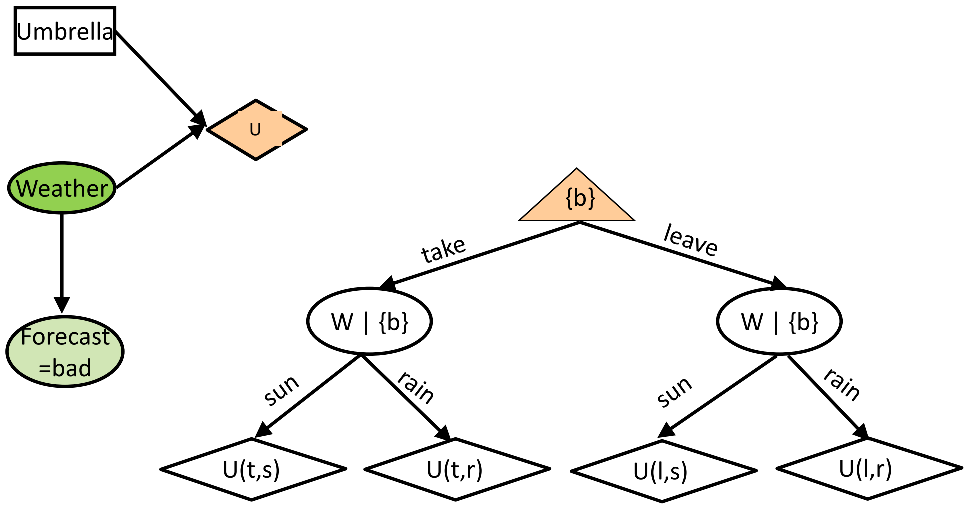
$$\mathrm{MEU}(F = \mathrm{bad}) = \max_a \mathrm{EU}(a|\mathrm{bad}) = 53$$



W	P(W|F=bad)
sun	0.34
rain	0.66

A	W	U(A,W)
leave	sun	100
leave	rain	0
take	sun	20
take	rain	70

Αποφάσεις ως Δένδρα



Τέλος Ενότητας