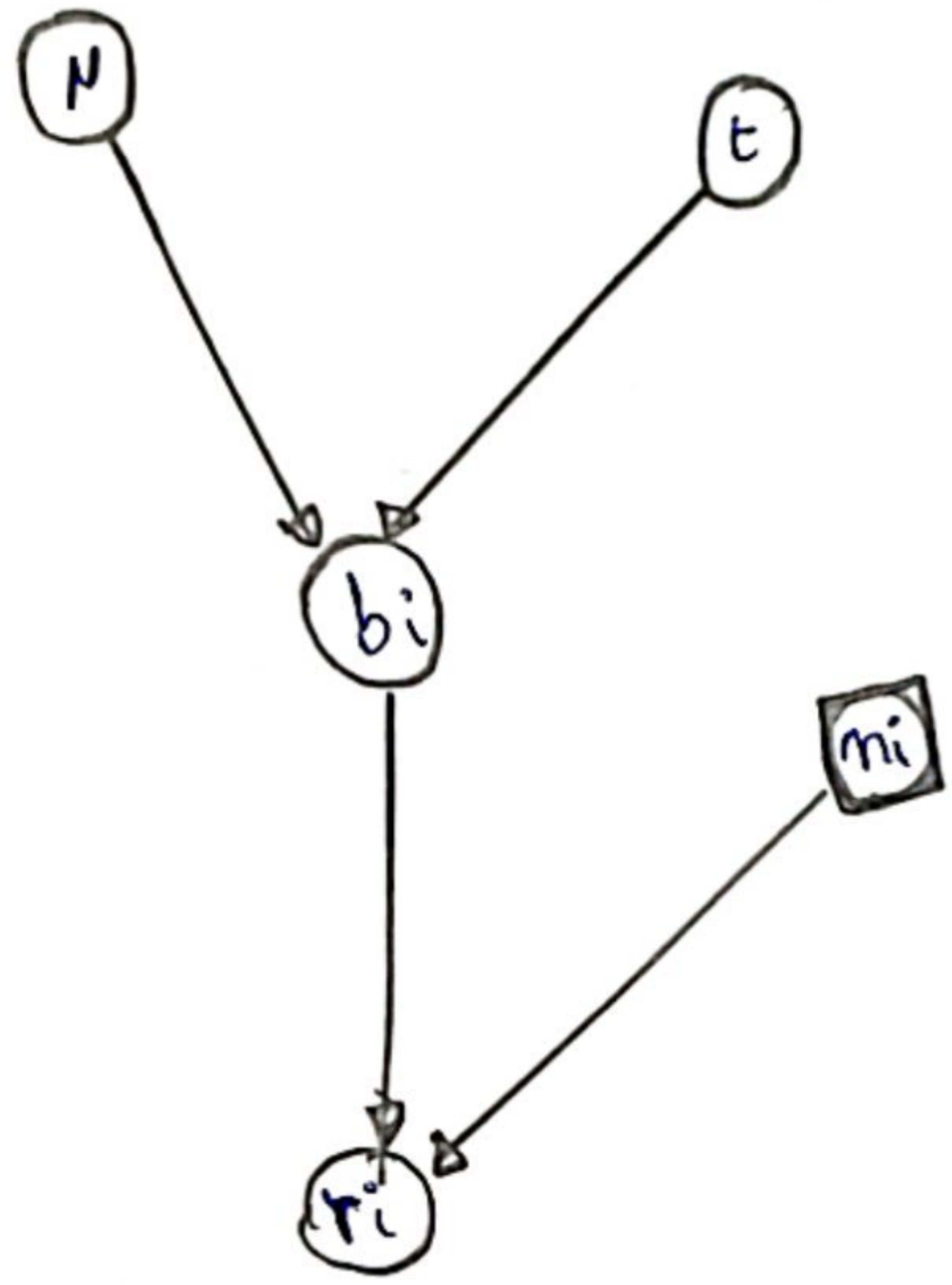
Projet : Surgical : institutional ranking

Nous avons deux modèles : 1 et 2.
Le premier modèle étant pas important, nous procédons par modéliser le second.

Modèle 2 : Le DAG associé est :



On calcul les différentes probabilités suivantes

$f(b_i | N, r_i, t) \propto f(b_i | N, t) \cdot f(r_i | b_i)$

or $f(b_i | N, t)$ a pour loi $\mathcal{N}(N, t)$ et
$f(r_i | b_i)$ a pour loi Binomial(p_i, n_i)

On sait que par hypothèse $\text{logit}(p_i) = b_i$

$\Rightarrow p_i = \dfrac{e^{b_i}}{1+e^{b_i}} \Rightarrow f(r_i | b_i) \sim \text{Binomiale}\left(\dfrac{e^{b_i}}{1+e^{b_i}}, n_i\right)$

Donc $f(b_i | N, r_i, t) \propto e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{b_i - N}{t}\right)^2} \left(\dfrac{e^{b_i}}{1+e^{b_i}}\right)^{b_i} \left(1 - \dfrac{e^{b_i}}{1+e^{b_i}}\right)^{n_i - b_i}$

Cette densité n'a pas de forme explicite donc nous allons utiliser Metropolis-Hasting à l'intérieur du Gibbs.

$$f(N \mid b_i, v_i, t) \propto f(N) \prod_{i=1}^{n} f(b_i \mid N, t)$$

$$\propto e^{-\frac{1}{2}\frac{N^2}{\sigma_N^2}} \prod_{i=1}^{n_i} e^{-\frac{1}{2t^{-1}}(b_i - N)^2}$$

$$\propto e^{-\frac{1}{2}\frac{N^2}{\sigma_N^2} - \frac{1}{2t^{-1}}\sum_{i=1}^{n}(b_i - N)^2}$$

$$\propto e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{N^2}{\sigma_N^2} + \frac{1}{t^{-1}}\sum_{i=1}^{n}(b_i^2 - 2Nb_i + N^2)\right]}$$

$$\propto e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{N^2 t^{-1} + \sigma_N^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - 2\sigma_N^2 N \sum b_i + \sigma_N^2 n N^2}{\sigma_N^2 t^{-1}}\right]}$$

$$\propto e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{N^2(t^{-1} + \sigma_N^2 n) - 2N\sigma_N^2 \sum_{i=1}^{n} b_i + \sigma_N^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2}{\sigma_N^2 t^{-1}}\right]}$$

$$\propto e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t^{-1} + \sigma_N^2 n}{\sigma_N^2 t^{-1}}\right)\left[N - \frac{\sigma_N^2 \sum_{i=1}^{n} b_i}{t^{-1} + \sigma_N^2 n}\right]}$$

$$\propto N\left(\frac{\sigma_N^2 \sum_{i=1}^{n} b_i}{t^{-1} + \sigma_N^2 n_i}; \frac{\sigma_N^2 t^{-1}}{t^{-1} + \sigma_N^2 n}\right)$$

$$f(t \mid N, v_i, b_i) \propto f(t) \prod_{i=1}^{n} f(b_i \mid N, t)$$

$$\propto t^{a-1} b^a e^{-bt} \times \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi t^{-1}}}\right)^{\frac{n}{2}} e^{-\frac{1}{2t^{-1}}\sum_{i=1}^{n}(b_i - N)^2}$$

$$\propto t^{a-1+\frac{n}{2}} e^{-t\left(b + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(b_i - N)^2\right)}$$

$$\propto \underbrace{\Gamma}_{\text{gamma}}\left(a + \frac{n}{2}; b + 2^{-1}\sum_{i=1}^{n}(b_i - N)^2\right)$$