19. (17 分) 复数的引入在数学发展史上具有重要的意义。

(1) 已知对任意函数 $f(x)$，有 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}x^n$，其中 $f^{(n)}(x)$ 表示 $f(x)$ 的 n 阶导函数。$n!=1\times 2\times\cdots\times n$。

试证：$e^{\mathrm{i}\theta}=\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)$；(5 分)

(2) 定义新运算"$\oplus$"和"$\oplus_a^b$"，如果 $F(x)$ 的导函数为 $f(x)$，那么 $F(x)=\oplus f(x)$；$\oplus_a^b f(x)=F(b)-F(a)$。

对于自变量为实数的函数，我们可以将其自变量替换为复数。已知对有些函数，我们可以对替换后的函数做 $\oplus_a^b$ 运算，其中 a、b 为复数，且满足 $\oplus_a^b f(z)+\oplus_b^c f(z)=\oplus_a^c f(z)$。我们称这样的函数为"好函数"。我们接下来研究的函数都为"好函数"。利用 $\oplus_a^b f(z)+\oplus_b^c f(z)=\oplus_a^c f(z)$，我们可以将 $\oplus_a^a f(z)$ 分解为沿一个围道进行多次操作的结果。若无论如何选取围道，$\oplus_a^a f(z)$ 恒等于 0，则称 $f(z)$ 为"纯函数"。否则称 $f(z)$ 为"非纯函数"。

试证：若非纯函数 $f(z)$ 满足 $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-z_0)^n$，则若计算 $\oplus_a^a f(z)$ 时所选取的围道中仅包含 z_0 一个使 $f(z)$ 无意义的点，则 $\oplus_a^a f(z)=2\pi\mathrm{i}c_{-1}$；(8 分)

(3) 已知若计算 $\oplus_a^a f(z)$ 时所选取的围道中包含多个无意义的点，则其值等于所有计算时选取的围道仅包含一个不同的无意义点所得 $\oplus_a^a f(z)$ 的和。

试求：$\oplus_0^{2\pi}\frac{1}{1+\sin^2(x)}$；(4 分)

个人感觉算是把目前流行的出题的要素全糅合进去了，基本包括：较高的数学背景；有现成的符号不用，偏好定义新运算；偏好给已经有名称的东西命名；上一问所证为求解下一问的引理；最后一问思维跨度大。

放过孩子们吧。

by 食司

2024 年 2 月 5 日