∇ 算符问题

食司

HomePage

Date: 2024 年 4 月 16 日

∇ 算符的矢量形式，不只是一种表达方式，而是有实在意义的。在其有基矢时，宜强调写为 $\vec{\nabla}$。譬如，求散度时的"点乘"的操作，不应当理解为简单的对应相乘，而应具体地写开，强调基矢与基矢的内积。∇ 同样作用在基矢上。

譬如在球坐标系下

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{0.1}$$

则散度的表达式应为

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r}\vec{A} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\vec{A} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}\vec{A} \tag{0.2}$$

而非

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r}A_r + \hat{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}A_\theta + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi}A_\varphi \tag{0.3}$$

正确结果为

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \sin\theta A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{0.4}$$

更一般地，在任意坐标系中，矢量场的散度都可表示为

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}H_2H_3A_1 + \frac{\partial}{\partial u_2}H_1H_3A_2 + \frac{\partial}{\partial u_3}H_1H_2A_3\right] \tag{0.5}$$

而旋度可表为

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} H_1\hat{e}_1 & H_2\hat{e}_2 & H_3\hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ H_1A_1 & H_2A_2 & H_3A_3 \end{vmatrix} \tag{0.6}$$

其中 H_1、H_2、H_3 称拉梅系数，是坐标基矢的归一化系数。对球坐标系，$H_1 = 1$，$H_2 = r$，$H_3 = r\sin\theta$。

当我们谈及 $\vec{\nabla}$ 直接作用在矢量上时，事实上它就是点乘。因为

$$\vec{\nabla}\vec{A} = \mathrm{tr}(\nabla^a A_b) = \nabla^a A_a = \vec{\nabla}\cdot\vec{A} \tag{0.7}$$

而在无基矢的 ∇ 作用时，它只是一个标量算符，即无非有

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \tag{0.8}$$

但要注意无论如何，求偏导的过程都要连带基矢，即

$$\nabla\vec{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)A_x\hat{e}_x+\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)A_y\hat{e}_y+\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)A_z\hat{e}_z \tag{0.9}$$

对 $A_i\hat{e}_i$ 求偏导时要使用莱布尼茨律展开。

关于对基矢求导的问题，特别地，在球坐标系中，我们有

	$\hat{e}_r$	$\hat{e}_\theta$	$\hat{e}_\phi$
∂_r	0	$\hat{e}_\theta$	$\sin\theta\hat{e}_\phi$
∂_θ	0	$-\hat{e}_r$	$\cos\theta\hat{e}_\phi$
∂_ϕ	0	0	$-\sin\theta\hat{e}_r-\cos\theta\hat{e}_\theta$

对具有正交归一性质的任意坐标系 q_i，其拉梅系数为 H_i，那么一般地，有

$$\frac{\partial\hat{e}_i}{\partial q_j}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial H_j}{q_i}\hat{e}_j \tag{0.10}$$

$$\frac{\partial\hat{e}_i}{q_i}=-\frac{1}{H_j}\frac{\partial H_i}{q_j}\hat{e}_j-\frac{1}{H_k}\frac{\partial H_i}{q_k}\hat{e}_k \tag{0.11}$$

如果要将倒三角算符一致地写为 ∇，则上式中的 ∇ 应改为 $\vec{e}\cdot\nabla$。

这里还存在顺序上的问题。$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ 自然是正常的求散度，但注意 $\vec{\nabla}$ 只能向右作用。即对于 $\vec{A}\cdot\vec{\nabla}$，有

$$\vec{A}\cdot\vec{\nabla}=A_x\hat{e}_x\cdot\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\hat{e}_y\cdot\hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\hat{e}_z\cdot\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{0.12}$$

$$=A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{0.13}$$

即 $\vec{A}\cdot\vec{\nabla}$ 成为一个前文所提及的标量算符。