∇ 算符问题

食司

HomePage

Date: 2024 年 4 月 13 日

∇ 算符的矢量形式，不只是一种表达方式，而是有实在意义的。在其有基矢时，宜强调写为 $\vec{\nabla}$。譬如，求散度时的“点乘”的操作，不应当理解为简单的对应相乘，而应具体地写开，强调基矢与基矢的内积。∇ 同样作用在基矢上。

譬如在极坐标系下

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{0.1}$$

则散度的表达式应为

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \vec{A} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{A} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{A} \tag{0.2}$$

而非

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} A_r + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_\theta + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi \tag{0.3}$$

正确结果为

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial \sin\theta A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \tag{0.4}$$

更一般地，在任意坐标系中，矢量场的散度都可表示为

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} h_2 h_3 A_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} h_1 h_3 A_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} h_1 h_2 A_3 \right] \tag{0.5}$$

而旋度可表为

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \hat{e}_1 & h_2 \hat{e}_2 & h_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix} \tag{0.6}$$

其中 h_1、h_2、h_3 称拉梅系数，是坐标基矢的归一化系数。对球坐标系，$h_1 = 1$，$h_2 = r$，$h_3 = r \sin\theta$。当我们谈及 $\vec{\nabla}$ 直接作用在矢量上时，事实上它就是点乘。因为

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \mathrm{tr}(\nabla^a A_b) = \nabla^a A_a = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \tag{0.7}$$

而在无基矢的 ∇ 作用时，它只是一个标量算符，即无非有

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \tag{0.8}$$

结果的基矢完全取矢量场分量所对应的基矢，即

$$\nabla\vec{A}=\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)A_x\hat{e}_x+\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)A_y\hat{e}_y+\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)A_z\hat{e}_z \tag{0.9}$$

如果要将倒三角算符一致地写为 ∇，则上式中的 ∇ 应改为 $\vec{e}\cdot\nabla$。

这里还存在顺序上的问题。$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ 自然是正常的求散度，但注意 $\vec{\nabla}$ 只能向右作用。即对于 $\vec{A}\cdot\vec{\nabla}$，有

$$\vec{A}\cdot\vec{\nabla}=A_x\hat{e}_x\cdot\hat{e}_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\hat{e}_y\cdot\hat{e}_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\hat{e}_z\cdot\hat{e}_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{0.10}$$

$$=A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{0.11}$$

即 $\vec{A}\cdot\vec{\nabla}$ 成为一个前文所提及的标量算符。