

▽ 算符问题

食司

HomePage

Date: 2024 年 4 月 26 日

▽ 算符的矢量形式，不只是一种表达方式，而是有实在意义的。在其有基矢时，宜强调写为 $\vec{\nabla}$ 。譬如，求散度时的“点乘”的操作，不应当理解为简单的对应相乘，而应具体地写开，强调基矢与基矢的内积。▽ 同样作用在基矢上。

譬如在球坐标系下

$$\vec{\nabla} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (0.1)$$

则散度的表达式应为

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} \vec{A} + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \vec{A} + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \vec{A} \quad (0.2)$$

而非

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \hat{e}_r \frac{\partial}{\partial r} A_r + \hat{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} A_\theta + \hat{e}_\varphi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_\varphi \quad (0.3)$$

正确结果为

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 A_r}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \sin \theta A_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \quad (0.4)$$

更一般地，在任意坐标系中，矢量场的散度都可表示为

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} H_2 H_3 A_1 + \frac{\partial}{\partial u_2} H_1 H_3 A_2 + \frac{\partial}{\partial u_3} H_1 H_2 A_3 \right] \quad (0.5)$$

而旋度可表为

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \hat{e}_1 & H_2 \hat{e}_2 & H_3 \hat{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ H_1 A_1 & H_2 A_2 & H_3 A_3 \end{vmatrix} \quad (0.6)$$

其中 H_1 、 H_2 、 H_3 称拉梅系数，是坐标基矢的归一化系数。对球坐标系， $H_1 = 1$ ， $H_2 = r$ ， $H_3 = r \sin \theta$ 。

当我们谈及 $\vec{\nabla}$ 直接作用在矢量上时，事实上它就是点乘。因为

$$\vec{\nabla} \vec{A} = \text{tr}(\nabla^a A_b) = \nabla^a A_a = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \quad (0.7)$$

而在无基矢的 ∇ 作用时，它只是一个标量算符，即无非有

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \quad (0.8)$$

但要注意无论如何，求偏导的过程都要连带基矢，即

$$\nabla \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) A_x \hat{e}_x + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) A_y \hat{e}_y + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) A_z \hat{e}_z \quad (0.9)$$

对 $A_i \hat{e}_i$ 求偏导时要使用莱布尼茨律展开。

关于对基矢求导的问题，特别地，在球坐标系中，我们有

| | \hat{e}_r | \hat{e}_θ | \hat{e}_ϕ |
|-------------------|----------------------------|----------------------------|---|
| ∂_r | 0 | 0 | 0 |
| ∂_θ | \hat{e}_θ | $-\hat{e}_r$ | 0 |
| ∂_ϕ | $\sin \theta \hat{e}_\phi$ | $\cos \theta \hat{e}_\phi$ | $-\sin \theta \hat{e}_r - \cos \theta \hat{e}_\theta$ |

对具有正交归一性质的任意坐标系 q_i ，其拉梅系数为 H_i ，那么一般地，有

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial H_j}{\partial q_i} \hat{e}_j \quad (0.10)$$

$$\frac{\partial \hat{e}_i}{\partial q_i} = -\frac{1}{H_j} \frac{\partial H_i}{\partial q_j} \hat{e}_j - \frac{1}{H_k} \frac{\partial H_i}{\partial q_k} \hat{e}_k \quad (0.11)$$

如果要将倒三角算符一致地写为 ∇ ，则上式中的 ∇ 应改为 $\vec{e} \cdot \nabla$ 。

这里还存在顺序上的问题。 $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ 自然是正常的求散度，但注意 $\vec{\nabla}$ 只能向右作用。即对于 $\vec{A} \cdot \vec{\nabla}$ ，有

$$\vec{A} \cdot \vec{\nabla} = A_x \hat{e}_x \cdot \hat{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \hat{e}_y \cdot \hat{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \hat{e}_z \cdot \hat{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (0.12)$$

$$= A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (0.13)$$

即 $\vec{A} \cdot \vec{\nabla}$ 成为一个前文所提及的标量算符。