4η Γραπτή Άσκηση
Αλγόριθμοι και Πολυπλοκότητα

CoReLab

ΣΗΜΜΥ

24 Μαρτίου 2014

Ο αλγόριθμος είναι μία απλή παραλλαγή του *BFS*.

- Ξεκινάμε το *BFS* από την κορυφή v_1 με $p(v_1) = NULL$
- Έστω ότι είμαστε στην κορυφή v_i και έστω v_j γείτονάς του.
- Αν $\delta_i + w_{ij} < \delta_j$ οι αποστάσεις είναι λάθος. Αν $\delta_i + w_{ij} = \delta_j$, σημειώνουμε την κορυφή και ανανεώνουμε τον πίνακα προγόνων $p[j] = i$. Αλλιώς, προχωράμε.
- Αν ολοκληρωθεί η διαδικασία ελέγχουμε τον πίνακα προγόνων εάν έχει σε κάποια θέση εκτός την πρώτη *NULL*. Αν έχει, τότε απορρίπτουμε τις δοθείσες αποστάσεις. Αλλιώς, επιστρέφουμε τον πίνακα προγόνων που αποτελεί το ΔΣΜ.
- Η πολυπλοκότητα είναι $O(n + m)$.

Άσκηση 1 - β και 1 -γ

- Μειώνεται το μήκος της ακμής $e = (x, y)$ σε $w'(x, y) < w(x, y)$. Άρα για κάθε ζεύγος κορυφών v_i,v_j υπάρχει περίπτωση να μειωθεί η απόσταση μεταξύ τους μόνο εάν το μήκος του μονοπατιού που περνά από την e είναι μικρότερο από το δοθέν $d(v_i, v_j)$.
- Το μήκος αυτό είναι $d(v_i, x) + w'(x, y) + d(y, v_j)$ και υπολογίζεται προφανώς σε ένα υπολογιστικό βήμα. Έτσι εφόσον έχουμε $O(n^2)$ ζεύγη, η πολυπλοκότητα του αλγορίθμου είναι $O(n^2)$.
- Αν αυξηθεί το μήκος της ακμής $e = (x, y)$ σε $w'(x, y) > w(x, y)$, δεν αρκεί στη γενική περίπτωση να συγκρίνουμε τη δοθείσα απόσταση $d(v_i, v_j)$ με το μήκος **ενός μόνο** μονοπατιού. Αν ισχύει πως $d(v_i, x) + w'(x, y) + d(y, v_j) = d(v_i, v_j)$ δεν χρειάζεται να αλλάξουμε τίποτα. Αν όμως $d(v_i, x) + w'(x, y) + d(y, v_j) > d(v_i, v_j)$ τότε θα πρέπει αναγκαστικά να συγκρίνουμε το $d(v_i, v_j)$ με το μήκος όλων των υπολοίπων μονοπατιών μεταξύ v_i και v_j.

Άσκηση 2 - α

Κριτήριο

Φτιάχνουμε ένα γράφημα $G(V, E)$ όπου:

- Για κάθε μεταβλητή x_i βάζουμε μία κορυφή v_i
- Για κάθε περιορισμό $x_i - x_j \leq b_{i,j}$ βάζουμε μία ακμή ανάμεσα στα v_i και v_j βάρους $b_{i,j}$

Το σύστημα ανισοτήτων S είναι ικανοποιήσιμο εάν και μόνο εάν το γράφημα G δεν έχει αρνητικό κύκλο

Ορθότητα κριτηρίου
Αν το γράφημα δεν έχει αρνητικό κύκλο, τότε εφαρμόζοντας Bellman-Ford από μία εξωτερική κορυφή v που τη συνδέουμε με ακμές βάρους 0 προς όλες τις υπόλοιπες, βρίσκουμε συντομότερες αποστάσεις απ′ το v. Αναθέτουμε σε κάθε μεταβλητή x_i τιμή ίση με την απόσταση απ′ τη v όπως προκύπτει απ′ το δέντρο ελάχιστων διαδρομών. Οι ανισότητες αντιστοιχούν σε ακμές αυτού του δέντρου ικανοποιούνται με ισότητα. Οι υπόλοιπες ικανοποιούνται λόγω τριγωνικής ανισότητας στις αποστάσεις ελάχιστων διαδρομών. Άρα το S είναι ικανοποιήσιμο με αυτές τις τιμές.

Άσκηση 2 - α

Ορθότητα κριτηρίου

Αν το γράφημα έχει αρνητικό κύκλο έστω τον $v_1', v_2', ..., v_k', v_1'$ με μήκος $L < 0$, προσθέτοντας τις αντίστοιχες ανισότητες κατά μέλη, έχουμε:

- Στο πρώτο μέλος 0
- Στο δεύτερο μέλος κάτι αρνητικό καθώς ο κύκλος είναι αρνητικού μήκους
- Άρα: $0 \leq L < 0$ (Άτοπο)

Άρα, για οποιαδήποτε ανάθεση τιμών στις μεταβλητές, το σύστημα δεν μπορεί να είναι ικανοποιήσιμο

Αποδοτικός Αλγόριθμος

Αλγόριθμος για εύρεση ύπαρξης κύκλου αρνητικού μήκους: Bellman-Ford n-1 βήματα: Σε κάθε βήμα εξετάζονται όλες οι ακμές και ελέγχουμε εάν μπορούν να μας ελαττώσουν την απόσταση προς κάποια κορυφή. Αν μετά από τα $n-1$ βήματα, εξακολουθεί να υπάρχει ακμή που να ελαττώνει την απόσταση προς κάποια κορυφή, σημαίνει ότι υπάρχει κύκλος αρνητικού μήκους. Άρα τότε το σύστημα δεν είναι ικανοποιήσιμο. Διαφορετικά είναι. Η πολυπλοκότητα είναι $O(n \cdot m)$ ($n-1$ βήματα, σε κάθε βήμα m ακμές)

Άσκηση 2 - β

Στην περίπτωση που το S είναι ικανοποιήσιμο ο Bellman-Ford κρατάει και τους προγόνους που οδηγούν σε κάθε κορυφή, οπότε έτσι μπορούμε να φτιάξουμε ένα δέντρο ελαχίστων διαδρομών από την x_1. Άρα, θέτοντας $x_1 = 0$ και τις υπόλοιπες μεταβλητές να ισούνται με την απόστασή τους από την v_1, έχουμε ένα σύστημα που είναι ικανοποιήσιμο, όπως εξηγήσαμε πριν. Η πολυπλοκότητα στην περίπτωση αυτή είναι $O(n \cdot m)$.

Άσκηση 2 - β

Διαφορετικά το ελάχιστο υποσύστημα που δεν είναι ικανοποιήσιμο υπολογίζεται ως εξής:
$L^{(l)}$: πίνακας συντομότερων μονοπατιών με το πολύ l ακμές
$P^{(l)}$: πίνακας προγόνων

$$L^{(l+1)}(i,j) = min\{L^{(l)}(i,k) + L^{(1)}(k,j), L^{(l)}(i,j)\}$$

$$P^{(l+1)}(i,j) = \begin{cases} -1, min\{L^{(l)}(i,k) + L^{(1)}(k,j)\} > L^{(l)}(i,j) \\ argmin_k\{L^{(l)}(i,k) + L^{(1)}(k,j)\}, otherwise \end{cases}$$

Αν κατά τον υπολογισμό του $L^{(l+1)}$, για κάποια (i,j) έχουμε $L^{(l+1)}(i,j) + b_{j,i} < 0$ τότε έχουμε κύκλο αρνητικού μήκους με το πολύ $l+2$ ακμές που μπορούμε να εξάγουμε απ' τον πίνακα προγόνων.
Πολυπλοκότητα: $O(n^4)$ για τον υπολογισμό του $L^{(n)}$ (για κάθε $L^{(l)}$ είναι $O(n^3)$. Μπορεί να βελτιωθεί σε $O(n^3 \cdot \log n)$ με χρήση δυαδικής αναζήτησης.

Άσκηση 2 - γ

$L^{(c)}$: πίνακας συντομότερων μονοπατιών με το πολύ βάρος c $P^{(c)}$: πίνακας προγόνων

$L^{(c+1)}(i,j) = min\{L^{(c-k')}(i,k) + L^{(k'+1)}(k,j), b_{i,j}$ αν $w_{i,j} \leq c+1\}$

$$P^{(c+1)}(i,j) = \begin{cases} (-1,-1), b_{i,j} < min\{\text{Ł}^{(c-k')}(i,k) + L^{(k'+1)}(k,j)\} \\ \quad and\ w_{i,j} \leq c+1 \\ argmin_{(k',k)}\{L^{(c-k')}(i,k) + L^{(k'+1)}(k,j)\}, otherwise \end{cases}$$

Αν κατά τον υπολογισμό του $L^{(c+1)}$, για κάποια (i,j) έχουμε $L^{(c+1)}(i,j) + b_{j,i} < 0$ τότε έχουμε κύκλο αρνητικού μήκους.

Άσκηση 2 - γ

Συγκρίνουμε το βάρος του με το βάρος του ελάχιστου που έχουμε βρει ως τότε και ανανεώνουμε το ελάχιστο. Στο τέλος, από τον πίνακα προγόνων βρίσκουμε σε ποιον κύκλο αντιστοιχεί ο ελάχιστος (το (-1,-1) σημαίνει ότι αντιστοιχεί σε απευθείας ακμή).
Πολυπλοκότητα: $O(n^3 \cdot C^2)$ για τον υπολογισμό του $L^{(C)}$ όπου C είναι το άθροισμα των βαρών. Άρα ο αλγόριθμός μας είναι ψευδοπολυωνυμικός.

Πρόβλημα απόφασης

Δίνεται ένα σύστημα S με n μεταβλητές $x_1, ..., x_n$ και m ανισότητες της μορφής $x_i - x_j \leq b_{i,j}$, κάθε μία από τις οποίες έχει βάρος $w_{i,j}$.

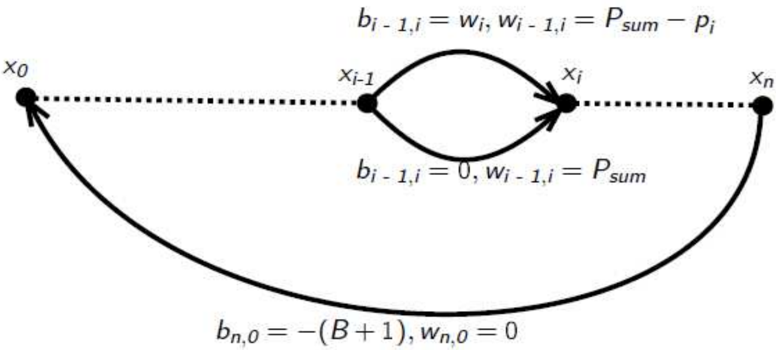
Υπάρχει μη ικανοποιήσιμο υποσύστημα S' βάρους μικρότερου ή ίσου με C;

Αναγωγή από Knapsack

Γενικό στιγμιότυπο του Knapsack: n στοιχεία, το i-οστό με βάρος w_i και κέρδος p_i. Υπάρχει υποσύνολό τους με συνολικό βάρος μικρότερο ή ίσο του B και συνολικό κέρδος μεγαλύτερο ή ίσο του P; Θα το μετασχηματίσουμε σε ένα ειδικό στιγμιότυπο του προβλήματός μας. Έστω P_{sum} το άθροισμα των κερδών. Για το i-οστό στοιχείο δημιουργώ μια κορυφή x_i. Συνδέω τη x_{i-1} με τη x_i με μία ακμή μήκους w_i και βάρους $P_{sum} - p_i$ και με μία ακμή μήκους 0 και βάρους P_{sum}. (Θεωρούμε και μία αρχική κορυφή x_0). Τέλος, βάζω μία ακμή από το x_n στο x_0 με μήκος $-(B + 1)$ και βάρος 0.

Άσκηση 2 - δ

Σχήμα: Reduction



Άσκηση 2 - δ

NP-hard

Κάθε αρνητικός κύκλος σε αυτό το πρόβλημα ισοδυναμεί με μία επιλογή στοιχείων του Knapsack με συνολικό βάρος μικρότερο ή ίσο του B. Τα στοιχεία που επιλέγονται είναι αυτά στα οποία επιλέγεται η πρώτη ακμή. Άρα, αν μπορούσαμε να λύσουμε το πρόβλημα της ύπαρξης αρνητικού κύκλου με βάρος μικρότερο ή ίσο από $n \cdot P_{sum} - P$(που είναι ισοδύναμο με την εύρεση υποσυνόλου συνολικού βάρους μικρότερου ή ίσου του P) τότε μπορούμε να λύσουμε και το γενικό στιγμιότυπο του Knapsack. Όμως το τελευταίο είναι NP-complete. Άρα το πρόβλημά μας είναι τουλάχιστον τόσο δύσκολο (NP-hard).

NP-complete

Προφανώς, το πρόβλημα ανήκει στο NP καθώς εύκολα μπορούμε να επαληθεύσουμε αν ένα δοθέν υποσύνολο είναι μη ικανοποιήσιμο (αποτελεί αρνητικό κύκλο) και έχει βάρος μικρότερο ή ίσο του C.

Συνεπώς, αφού ανήκει στο NP και είναι NP-hard, είναι NP-complete.

Άσκηση 3-α και 3-β

- Για το (α): Δημιουργούμε το υπολειμματικό δίκτυο σε γραμμικό χρόνο και με ένα *BFS* (πάλι σε γραμμικό χρόνο) ελέγχουμε εάν υπάρχει επαυξητικό μονοπάτι. Αν δεν υπάρχει, τότε και μόνον τότε η δοθείσα ροή είναι μέγιστη.
- Για το (β): Θέλουμε να βρούμε μία εφικτή ροή στο νέο γράφημα και μετά να χρησιμοποιήσουμε τον αλγόριθμο *Ford − Fulkerson* ξεκινώντας από τη ροή αυτή για να φτάσουμε στη μέγιστη.
- Αν $c'_e \geq f_e$, τότε δε χρειάζεται καμία αλλαγή. Αλλιώς, θέτουμε $f'_e = c'_e$ και εκτελούμε τον ακόλουθο αλγόριθμο.
- Έστω $e = (x, y)$. Η εφικτή ροή υπολογίζεται με δύο *BFS*: Το πρώτο διασχίζοντας το υπογράφημα από το x στο s και το άλλο από το y στο t. Σκοπός είναι ξεκινώντας με τη μείωση κατά $f_e - c'_e$ από το x (προχωρώντας προς το s) και μετά όμοια από το y (προχωρώντας προς το t), να δημιουργηθεί μία εφικτή ροή.

Άσκηση 3 - β

- Κατά το *BFS*, έστω σε μία κορυφή v_i φτάνει νέα ροή f_i' και θέλουμε να μειώσουμε τη ροή στις προσπίπτουσες ακμές κατά k'. Μειώνεις τη ροή προς ένα γείτονα μέχρι είτε η ροή της ακμής να μηδενιστεί, είτε να έχουμε φτάσει στις k' μονάδες ροής, όποιο γίνει πρώτα. Επαναλαμβάνουμε για τους υπόλοιπους γείτονες μέχρι να μειώσουμε συνολικά k' μονάδες ροής.
- Αφού δημιουργήσουμε την εφικτή ροή f', εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Ford-Fulkerson. Εφόσον θα χρειαστεί προφανώς το πολύ k επαναλήψεις, η πολυπλοκότητα είναι $O(k \cdot (V + E))$ όπου k σταθερά.

Άσκηση 3 - γ

- Αντιστρέφουμε όλες τις ακμές και αναζητούμε τη μέγιστη ροή. Η ιδέα είναι πως θέλουμε να δούμε πόση ροή μπορούμε να στείλουμε πίσω χωρίς να χαλάσουμε τους περιορισμούς.
- Βάζουμε νέες χωρητικότητες στο γράφημα για να λάβουμε υπόψη τους περιορισμούς: $c'_e = f_e - \ell_e$. Υπολογίζουμε τη μέγιστη ροή στο νέο γράφημα που συμβολίζουμε με h.
- Άρα η τελική ροή που είναι $g = f - h$ είναι προφανώς ελάχιστη και ισχύει επίσης $g_e = f_e - h_e \geq f_e - c'_e \geq f_e - f_e + \ell_e = \ell_e$ και $g_e = f_e - h_e \leq f_e \leq c_e$.

Άσκηση 4 - 3-Partition

Γενικό στιγμιότυπο του Partition: $A = \{w_1, ..., w_n\}$. Να βρεθεί διαμέριση A_1, A_2 του A ώστε $w(A_1) = w(A_2)$.
Το μετασχηματίζω σε ειδικό στιγμιότυπο του 3-Partition.
$A' = \{w_1, ..., w_n, W = \frac{w_1 + ... + w_n}{2}\}$.
Υποχρεωτικά, το W θα μπει σε ένα σύνολο και άρα τα άλλα δύο σύνολα είναι η διαμέριση του αρχικού προβλήματος του Partition. Άρα NP-hard. Προφανώς, μπορούμε να επαληθεύσουμε εύκολα αν μία διαμέριση είναι ισοβαρής για ένα στιγμιότυπο του $3 - Partition$. Άρα ανήκει στο NP. Οπότε είναι $NP - complete$.

Άσκηση 4 - Συνδετικό Δέντρο Περιορισμένο ως προς φύλλα

Hamilton Path $\leq$ s-t Hamilton Path

Γενικό στιγμιότυπο μονοπατιού *Hamilton*: Γράφημα $G(V, E)$. Θέλουμε να βρούμε αν υπάρχει μονοπάτι Hamilton. Το μετασχηματίζουμε σε στιγμιότυπο του προβλήματός μας όπου θέλουμε να βρούμε μονοπάτι Hamilton, με άκρα τα s, t. Προσθέτουμε δύο κορυφές s, t και τις συνδέουμε με όλες τις κορυφές του γραφήματος. Υπάρχει $s - t$ Hamilton Path εάν και μόνο εάν υπάρχει Hamilton Path.
Ανήκει στο NP. Άρα είναι NP-complete.

Άσκηση 4 - Συνδετικό Δέντρο Περιορισμένο ως προς φύλλα

s-t Hamilton Path $\leq$ Sp. Tr. Leaf R.

Γενικό στιγμιότυπο σ-τ μονοπατιού Hamilton: Γράφημα $G(V, E)$.
Θέλουμε να βρούμε αν υπάρχει μονοπάτι Hamilton με άκρα τα s και t.
Το μετασχηματίζουμε σε στιγμιότυπο του δικού μας προβλήματος. Αν έχουμε ως φύλλα τα s και t, τότε έχουμε απαραίτητα μονοπάτι με αυτά ως άκρα, άρα αν βάλουμε αυτά στο L τα προβλήματα είναι ισοδύναμα.
Προφανώς δεν μπορούμε να έχουμε δέντρο με λιγότερα από δύο φύλλα.
Ανήκει στο NP. Άρα είναι $NP-complete$.

Vertex Cover $\leq$ FVS-D

Γενικό στιγμιότυπο: Γράφημα $G(V, E)$ και φυσικός αριθμός k. Ζητείται υποσύνολο των κορυφών που να ακουμπάει σε όλες τις ακμές και να έχει το πολύ k κορυφές. Το μετασχηματίζουμε σε ειδικό στιγμιότυπο του προβλήματός μας. Αντικαθιστούμε μη κατευθυνόμενη ακμή μεταξύ u και v με δύο κατευθυνόμενες (u, v) και (v, u). Αν αφαιρέσουμε μία από τις δύο κορυφές κάθε ακμής, αυτόματα εξαφανίζονται όλοι οι κύκλοι (αφού εξαφανίζονται όλες οι ακμές). Έστω και μία ακμή του αρχικού να μην εξαφανιστεί, αποτελεί κύκλο στο καινούργιο στιγμιότυπο. Άρα τα προβλήματα είναι ισοδύναμα. Ανήκει στο NP επειδή, αφαιρώντας τις κορυφές του S, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε αν υπάρχει κύκλος. Άρα είναι $NP - complete$.

Άσκηση 4 - Constrained Shortest Path

Η αναγωγή γίνεται από το Knapsack όμοια με αυτήν της Άσκησης 2(δ).
Γενικό στιγμιότυπο: n στοιχεία, το i-οστό με βάρος w_i και κέρδος p_i.
Υπάρχει υποσύνολό τους με συνολικό βάρος μικρότερο ή ίσο του B και συνολικό κέρδος μεγαλύτερο ή ίσο του P;
Θα το μετασχηματίσουμε σε ένα ειδικό στιγμιότυπο του προβλήματός μας.

Άσκηση 4 - Constrained Shortest Path

Δημιουργούμε κατευθυνόμενο γράφημα με κορυφές $x_0, ..., x_n$ όπου x_0 η αρχική κορυφή και $x_1, ..., x_n$ αντιστοιχούν στα στοιχεία του σακιδίου. Υπάρχουν δύο κατευθυνόμενες ακμές από κάθε x_{i-1} στο x_i. Διαισθητικά η μία ακμή αντιστοιχεί στην επιλογή του στοιχείου i για το σακίδιο με $m(e) = w_i$ και $t(e) = P_{sum} - p_i$. Η δεύτερη ακμή αντιστοιχεί στη μη επιλογή του στοιχείου i για το σακίδιο και έχει $m(e) = 0$ και $t(e) = P_{sum}$. Θέτουμε επίσης $a = x_0$, $b = x_n$, $M = B$ και $T = n \cdot P_{sum} - P$.

Βλέπουμε εύκολα πως η εύρεση ενός αποδεκτού σακιδίου είναι ισοδύναμη με την εύρεση ενός μονοπατιού από το x_0 στο x_n που πληροί τους περιορισμούς.