# <u>4η Σειρά Γραπτών ασκήσεων</u>

Μάνος Αραπίδης
ΑΜ: 03116071

1η Άσκηση

a)

Έχουμε ένα ισχυρά συνεκτικό , κατευθυνόμενο γράφημα $G(V,E,w)$ με n κορυφές, m ακμές και μήκη w σε κάθε ακμή , ενδεχομένως αρνητικά. Συμβολίζουμε ως $d(u,v)$ την απόσταση της κορυφής u από την v στο G. Δίνονται n αριθμοί $\delta_1$, ..., $\delta_n$ , όπου $\delta_\kappa$ ισούται με την απόσταση της κορυφής $u_1$ με την $u_\kappa$.
Θέλουμε να δείξουμε ότι ισχύει $\delta_\kappa = d(u_1, u_k), \forall u_k \in V$ .

Για να κάνουμε το παραπάνω θα χρησιμοποιήσουμε ένα τροποποιημένο dfs ξεκινώντας από την κορυφή $u_1$ . Αρχικοποιούμε τον πίνακα parent με NULL και σε κάθε φάση του dfs θα αλλάζουμε τις τιμές του πίνακα σύμφωνα με τα παρακάτω.
Έστω ότι βρισκόμαστε στην κορυφή $u_i$ και η $u_j$ είναι η γειτονική της.

- Αν $\delta_j > \delta_i + w(u_i, u_j)$ τότε οι αποστάσεις $\delta_\kappa$ είναι λάθος ,άφου βρήκαμε συντομότερη απόσταση προς την $u_j$ και σταματάμε το dfs.
- Αν $\delta_j = \delta_i + w(u_i, u_j)$ , τότε υποθέτουμε υποθέτουμε ότι οι αποστάσεις είναι σωστές και ενημερώνουμε τον πίνακα γονέων, $parent[j] = i$ .
- Αν $\delta_j < \delta_i + w(u_i, u_j)$ , στην περίπτωση αυτή δεν ενημερώνουμε τον πίνακα γονέων και συνεχίζουμε το dfs. Θα περιμένουμε να βρούμε πάλι την κορυφή $u_j$ από μία άλλη για την οποία θα ισχύει η δεύτερη περίπτωση.

Μετά την ολοκλήρωση του dfs διατρέχουμε τον πίνακα parent . Αν συναντήσουμε NULL τιμή, πέραν της θέσης 1, τότε σημαίνει ότι για την κορυφή εκείνη η απόσταση της από την $u_1$ είναι λάθος . Σε διαφορετική περίπτωση οι αποστάσεις $\delta_\kappa$ είναι σωστές.

b)

Έστω ότι μειώνουμε το μήκος της ακμής $e = (w, y)$ σε $w'(x, y) < w(x, y)$ . Με την μείωση τις ακμής e θα μειωθούν τα μήκη των μονοπατιών που περιλαμβάνουν την e. Προκειμένου να βρούμε ποία μονοπάτια d($u_i$,$u_j$) θα μειωθούν , θα συγκρίνουμε τις παλιές τιμές με εκείνες των νέων μονοπατιών που θα περιλαμβάνουν την μειωμένη e: $d'(u_i, u_j) = d(u_i, x) + w'(x, y) + d(y, u_j)$ . Αν ισχύει $d'(u_i, u_j) < d(u_i, u_j)$ τότε το μήκος του μονοπατιού $u_i$->$u_j$ έχει μειωθεί και αντικαθιστούμε $d(u_i, u_j) = d'(u_i, u_j)$ . Σε διαφορετική περίπτωση διατηρούμε την τιμή $d(u_i, u_j)$ . Για κάθε ζεύγος ($u_i$,$u_j$) χρειαζόμαστε $O(1)$ και έχουμε συνολικά $n^2$ ζεύγη, οπότε η πολυπλοκότητα είναι $O(n^2)$ .

c)

Στην περίπτωση που αυξήσουμε την ακμή e δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω, καθώς ένα μονοπάτι που αρχικά περιλάμβανε την ακμή e μετά την αύξηση της να μην την περιέχει και να χρειαστεί να αναζητηθεί νέο μονοπάτι. Πιο συγκεκριμένα αν $d(u_i, u_j) = d'(u_i, u_j) = d(u_i, x) + w'(x, y) + d(y, u_j)$ ,δηλαδή παρά την επαύξηση της e υπάρχει μονοπάτι με $d(u_i, u_j)$ δεν χρειάζεται να γίνει καμία αλλαγή. Αν όμως αν $d(u_i, u_j) < d(u_i, x) + w'(x, y) + d(y, u_j)$ , τότε θα πρέπει θα πρέπει να βρούμε εκ νέου το μονοπάτι $d(u_i, u_j)$ .

2η Άσκηση

a)

Έστω $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ n ακέραιες μεταβλητές. Θεωρούμε σύστημα S από m ανισότητες $x_i - x_j \leq b_{ij}$, για $1 \leq i, j \leq n$ και $b_{ij}$ ακέραιοι. Το σύστημα είναι ικανοποιήσιμο αν υπάρχουν $x_1$, $x_2$, ..., $x_n$ που ικανοποιούν όλες τις ανισότητες.
Για να διαπιστώσουμε αν είναι είναι ικανοποιήσιμο, δημιουργούμε ένα γράφημα $G(V, E)$ με n κορυφές, όπου καθεμία αντιστοιχεί σε μια μεταβλητή $x_i$ και με m ακμές, όπου ενώνουν $u_i$ και $u_j$ κορυφές με βάρος $b_{ij}$.
Το κριτήριο είναι, το σύστημα S είναι ικανοποιήσιμο αν δεν υπάρχουν αρνητικοί κύκλοι.

<u>Απόδειξη</u>

- Ευθύς :

Έστω ότι το γράφημα έχει αρνητικό κύκλο . Αν προσθέσουμε κατά μέλη όλες τις ακμές που ανήκουν στο κύκλο τότε προκύπτει το εξής:
$x_1 - x_2 + x_2 - x_3 + ... + x_{k-1} - x_k + x_k - x_1 \leq b_{12} + b_{23} + ... + b_{k1} \Leftrightarrow 0 \leq b_{12} + b_{23} + ... + b_{k1}$
Όμως έχουμε αρνητικό κύκλο ισχύει $b_{12} + b_{23} + ... + b_{k1} < 0$ . Οπότε προκύπτει $0 \leq b_{12} + b_{23} + ... + b_{k1} < 0$ το οποίο είναι άτοπο.

- Αντίστροφο :

Έστω ότι το γράφημα δεν περιέχει αρνητικό κύκλο . Προσθέτουμε μια κορυφή s και την συνδέουμε με όλες τις άλλες, με ακμές μηδενικού βάρους. Εκτελούμε τον αλγόριθμο Bellman-Ford από την κορυφή s και βρίσκουμε τις συντομότερες διαδρομές προς όλες τις κορυφές. Έστω δυο γειτονικές κορυφές $u_i$, $u_j$ και τα μήκη των συντομότερων μονοπατιών είναι : $d(s,u_i)$ και $d(s,u_j)$. Θέτουμε κάθε μεταβλητή $x_i$ ίση με $d(s,u_i)$. Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα ισχύει
$d(s, u_i) \leq d(s, u_j) + w(u_i, u_j) \Leftrightarrow d(s, u_i) - d(s, u_j) \leq w(u_i, u_j) \Leftrightarrow x_i - x_j \leq b_{ij}$ . Άρα αποδείξαμε ότι το σύστημα είναι ικανοποιήσιμο.

Οπότε αποδείξαμε ότι το S είναι ικανοποιήσιμο αν και μόνο αν δεν υπάρχει κύκλος αρνητικού μήκους.
Εφαρμόσαμε τον αλγόριθμο Bellman-Form σε ένα γράφημα με n+1 κορυφές και n+m ακμες, οπότε προκύπτει πολυπλοκότητα $O(n*(n+m)) = O(n^2 + n*m)$ . Όμως μπορούμε να την βελτιώσουμε με το να αρχικοποιήσουμε τα μήκη των μονοπατιών σε 0 αντί για άπειρο, καθώς 0 είναι η απόσταση του s από όλες τις κορυφές και να εξετάζουμε σε κάθε επανάληψη του αλγορίθμου μόνο τις m αρχικές ακμές. Με αυτόν τον τρόπο η πολυπλοκότητα είναι $O(n*m)$ .

b)

Αρχικά πρέπει να ελέγξουμε αν το σύστημα είναι ικανοποιήσιμο, όπως περιγράψαμε παραπάνω. Στην περίπτωση που είναι τότε θέτουμε ως $x_i = d(s, u_i), \text{για } 1 \leq i \leq n$ και οι τιμές αυτές αποτελούν μία λύση του συστήματος S.

Στην περίπτωση που δεν είναι ικανοποιήσιμο το σύστημα θέλουμε να βρούμε το ελάχιστο σύνολο ανισοτήτων για τις οποίες παραμένει ανικανοποίητο. Όπως είπαμε παραπάνω το σύστημα καθίσταται ανικανοποίητο λόγω της ύπαρξης κύκλων αρνητικού μήκους, οπότε αν περιλαμβάναμε μόνο ακμές-ανισότητες που σχηματίζουν τέτοιο κύκλο θα εξασφαλίζαμε το παραπάνω. Οπότε η λύση στο πρόβλημα μας είναι να βρούμε τον κύκλο με τον ελάχιστο αριθμό ακμών, που συνεπάγεται ελάχιστο σύνολο ανισοτήτων.

c)

Σε κάθε ανισότητα $x_i - x_j \leq b_{ij}$ αντιστοιχούμε και ένα θετικό βάρος $w_{ij}$. Θέλουμε να βρούμε το σύνολο των ανισοτήτων με ελάχιστο συνολικό . Ομοίως με προηγουμένως ψάχνουμε να βρούμε κύκλους αρνητικού μήκους. Η λύση στο πρόβλημα μας βρίσκεται στο κύκλο που έχει το ελάχιστο βάρος και οι ακμές-ανισότητες είναι το σύνολο που επιστρέφουμε.

4η Άσκηση

a)

Θεωρούμε ένα κατευθυνόμενο s->t δίκτυο $G(V, E, c)$ με n κορυφές, με m ακμές και θετικές ακέραιες χωρητικότητες c στις ακμές.
Για να ελέγχξουμε αν μια ροή f είναι η μέγιστη ροή $f_{max}$ δημιουργούμε το ελλειμματικό δίκτυο. Έπειτα εκτελώντας bfs ελέγχουμε αν υπάρχει επαυξητικό μονοπάτι. Στην περίπτωση που υπάρχει η ροή μας f δεν είναι η μέγιστη, καθώς υπάρχει ακόμα περιθώριο για αυξήσουμε την ροή. Οπότε αν δεν υπάρχει επαυξητικό μονοπάτι η ροή $f = f_{max}$ .
Η κατασκευή του ελλειμματικού δικτύου και το bfs χρειάζονται γραμμικό χρόνο, οπότε η επαλήθευση για την ροή f γίνεται σε γραμμικό χρόνο.

b)

Έστω η νέα χωρητικότητα $c'_e$ για την ακμή e. Αν ισχύει $f_e \leq c'_e$ , όπου $f_e$ η ροή που διέρχεται την e τότε δεν χρειάζεται να γίνει καμία αλλαγή και η ροή f παραμένει μέγιστη. Όμως στην περίπτωση που $f_e > c'_e$ υπερβαίνουμε την χωρητικότητα της ακμής και θα χρειαστεί η αναπροσαρμογή της μέγιστης ροής σε μία νέα f΄.
Για να κάνουμε το παραπάνω αρχικά θα πρέπει να βρούμε μια εφικτή ροή για το γράφημα G και ύστερα να εκτελέσουμε τον αλγόριθμο Ford-Fulkerson για να την μεγιστοποιήσουμε. Αρχικά θέτουμε $f'_e = c'_e$ και εκτελούμε τον παρακάτω αλγόριθμο:

- Έστω $e = (x, y)$ . Για να υπολογίσουμε την εφικτή ροή, θα μειώσουμε τη ροή κατά μήκος των διαδρομών x-s και y-t κατά $k' = f_e - c'_e, k' \leq k$ . Αυτό θα το πετύχουμε εκτελώντας δύο bfs στα υπογραφήματα x-s και y-t, όπως περιγράφουμε παρακάτω.
- Κατά την εκτέλεση του bfs για κάθε κορυφή u που συναντάμε, στην οποία φτάνει ροή $f_u$ , θέλουμε να μειώσουμε την ροή στις ακμές που περιέχουν την u κατά k΄. Αυτό το κάνουμε μειώνοντας την ροή προς ένα γείτονα μέχρι να μηδενιστεί όπου και συνεχίζουμε στον επόμενο. Επαναλαμβάνουμε μέχρι να καταφέρουμε να μειώσουμε την ροή προς τους γείτονες κατά k΄ .

Μετά την ολοκλήρωση των δύο bfs έχουμε βρει την εφικτή ροή f΄ και εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο Ford-Fulkerson . Θα χρειαστεί να τον εκτελέσουμε k φορές καθώς η ροή αυξάνεται κατά 1 και δεν μπορεί να ξεπεράσει την αρχική τιμή της πριν την μείωση της χωρητικότητας e. Άρα ο αλγόριθμος έχει πολυπλοκότητα $O(k*(|V|+|E|))$ .

c)

Θέλουμε να μειώσουμε την συνολική ροή, από την μέγιστη δυνατή f, μέχρι το σημείο h που για κάθε ακμή e να ισχύουν οι περιορισμοί $c_e \geq h_e \geq l_e$ . Για να το κάνουμε αυτό αντιστρέφουμε τις ακμές και ψάχνουμε να βρούμε την μέγιστη ροή. Θεωρούμε ότι η μείωση που θέλουμε να φέρουμε στο δίκτυο ισούται με την μέγιστη ροή που μπορούμε να στείλουμε προς τα πίσω.

Στο νέο γράφημα αντικαθιστούμε τις χωρητικότητες κάθε ακμής e με νέες $c'_e = f_e - l_e$ , όπου $f_e$ είναι η μέγιστη ροή και $l_e$ η ελάχιστη ροή. Υπολογίζουμε την μέγιστη ροή m χρησιμοποιώντας ένα από τους γνωστούς αλγόριθμους.
Οπότε η ροή στο αρχικό γράφημα θα είναι $h = f - m$ , η οποία είναι η ελάχιστη δυνατή και ισχύουν :

- $h_e = f_e - m_e \leq f_e \leq c_e \Leftrightarrow h_e \leq c_e$

- $h_e = f_e - m_e \geq f_e - c'_e \geq f_e - f_e + l_e \geq l_e \Leftrightarrow h_e \geq l_e$

5η Άσκηση

**3-Partion**

Είσοδος: Σύνολο $A = \{w_1, w_{2,\ldots}, w_n\}$ με n θετικούς αριθμούς . Θεωρούμε ότι το συνολικό άθροισμα $w(A) = \sum_{i \in A} w_i$ των στοιχείων του A είναι πολλαπλάσιο του 3.
Έξοδος: Υπάρχει διαμέριση του A σε σύνολα $A_1$,$A_2$ και $A_3$ τέτοια ώστε $w(A_1) = w(A_2) = w(A_3)$ ;

Το πρόβλημα ανήκει στο NP , γιατί αν δοθεί η διαμέριση επαληθεύεται σε γραμμικό χρόνο αν το άθροισμα των στοιχείων κάθε διαμέρισης ισούται με $w(A)/3$ .
Το πρόβλημα είναι NP-hard γιατί μπορεί να αναχθεί πολυωνυμικά από το πρόβλημα Partion.

Έστω $A' = \{w_1, w_{2,\ldots}, w_n, w' = \frac{w_1, w_{2,\ldots}, w_n}{2}\}$ . Θα δείξουμε ότι υπάρχει 2-διαμέριση στο A αν υπάρχει 3-διαμέριση στο A΄. Μια διαμέριση του A΄ εισάγει το στοιχείο w΄ σε ξεχωριστό σύνολο και τα υπόλοιπα στοιχεία τα χωρίζει σε δυο σύνολα με συνολικό βάρος $w(A)/2$ . Όμως, τα δύο αυτά σύνολα αποτελούν μια 2-διαμέριση του A. Προφανώς ισχύει ότι μια 2-διαμέριση του A αρκεί για μια 3-διαμέριση του A΄.
Οπότε το 3-partion είναι NP-πλήρες.

**Μακρύ μονοπάτι**

Είσοδος: Μη κατευθυνόμενο συνεκτικό γράφημα $G(V, E)$
Έξοδος: Υπάρχει στο G μονοπάτι με μήκος τουλάχιστον $|V|/4$ ;

Το πρόβλημα ανήκει στο NP καθώς αν μας δοθεί το μονοπάτι μπορούμε να ελέγξουμε σε γραμμικό χρόνο το μήκος του.

Το πρόβλημα είναι NP-hard γιατί υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή στο πρόβλημα κύκλου Hamilton.

Έστω παραγόμενο γράφημα $G'(V', E')$ με $|V'| = |V|/4$ , το οποίο προκύπτει αφαιρώντας $(3 * |V|)/4$ κορυφές από το G, μαζί με τις προσπίπτουσες σε αυτές ακμές. Θα δείξουμε ότι αν υπάρχει κύκλος Hamilton στο G΄ , τότε υπάρχει απλό μονοπάτι μήκους με τουλάχιστον $|V|/4$ κορυφές.

Έστω ότι στο G΄ υπάρχει κύκλος Hamilton. Τότε υπάρχει μονοπάτι που διέρχεται από όλες τις κορυφές του G΄ μια μόνο φορά, δηλαδή έχει μέγεθος $|V|/4$ κορυφές. Επειδή το G΄ είναι παραγόμενο του G το ίδιο μονοπάτι ικανοποιεί και την συνθήκη για τον G.

Αντίστροφα, έστω ότι υπάρχει απλό μονοπάτι που διέρχεται από $|V|/4$ κορυφές. Επειδή είναι απλό διέρχεται από κάθε κορυφή μια μόνο φορά. Οπότε το ίδιο μονοπάτι είναι κύκλος Hamilton στο G΄.

Άρα το πρόβλημα είναι NP-πλήρες.

**Ικανοποιησιμότητα με περιορισμούς**

Είσοδος : Λογική πρόταση $\varphi = \Lambda_{j=1}^{m}(l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3} \vee l_{j4})$ σε μορφή 4-CNF.
Έξοδος: Υπάρχει λογική ανάθεση τιμών ώστε κάθε όρος $(l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3} \vee l_{j4})$ να περιέχει τουλάχιστον ένα ψευδές και ένα αληθές literal;

Το πρόβλημα ανήκει στο NP , γιατί αν δοθεί η ανάθεση μπορούμε να την επαληθεύσουμε σε γραμμικό χρόνο.

Το πρόβλημα είναι NP-hard γιατί υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από το 3-SAT.

Έστω $\varphi = \Lambda_{j=1}^{m}(l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3})$ σε μορφή 3-CNF και θέλουμε να ελέγξουμε αν υπάρχει ανάθεση τιμών που να την ικανοποιεί, δηλαδή να υπάρχει τουλάχιστον ένα αληθές literal.

Έστω $\varphi' = \Lambda_{j=1}^{m}(l_{j1} \vee l_{j2} \vee l_{j3} \vee h)$ . Θα δείξουμε ότι αν υπάρχει ανάθεση που να ικανοποιεί τον περιορισμό για φ΄ τότε η φ είναι ικανοποιήσιμη και το αντίστροφο.

- Ευθύ:

Αν υπάρχει μια ανάθεση για την φ΄ που ικανοποιεί τον περιορισμό , τότε αν z=false η ίδια ανάθεση ικανοποιεί την φ, σε διαφορετική περίπτωση ικανοποιεί την αντίθετη της.

- Αντίστροφο

Αν υπάρχει ανάθεση που ικανοποιεί την φ, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα literal αληθές. Οπότε θέτοντας z=false ικανοποιείται ο περιορισμός του φ΄.

Άρα το πρόβλημα είναι NP-πλήρες.

**Επιλογή ανεξαρτήτων υποσυνόλων**

Είσοδος : Συλλογή $S = \{S_{1,\ldots}, S_m\}$ ενός υποσυνόλου U με n στοιχεία και φυσικός αριθμός $k, 2 \leq k \leq m$
Έξοδος : Υπάρχουν k υποσύνολα που να είναι, ανά δύο, ξένα μεταξύ τους;

Το πρόβλημα ανήκει στο NP γιατί αν μας δοθούν τα υποσύνολα μπορούμε να τα ελέγξουμε αν ικανοποιούν την συνθήκη σε πολυωνιμηκό χρόνο.

Το πρόβλημα είναι NP-hard γιατί υπάρχει πολυωνυμική αναγωγή από το MIS.

Για κάθε κόμβο του γραφήματος $G(V, E)$ δημιουργούμε ένα υποσύνολο στο S, στο οποίο προσθέτουμε όλες τις προσπίπτουσες ακμές του κόμβου στο G. Το υποσύνολο U είναι το σύνολο των ακμών E. Θα δείξουμε ότι η τιμή του k είναι η αντίστοιχη με αυτή για το MIS.

Έστω ότι έχουμε τουλάχιστον k ανεξάρτητες κορυφές, δηλαδή κανένα ζευγάρι κορυφών δεν έχει κοινές ακμές. Οπότε και τα σύνολα που παράγονται από αυτές τις κορυφές, θα είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους και τουλάχιστον k σε αριθμό.

Αντίστροφα, έστω ότι έχουμε τουλάχιστον k ανεξάρτητα υποσύνολα στο U. Τότε οι κορυφές που αντιστοιχούν σε αυτά τα υποσύνολα δεν θα έχουν καμία κοινή ακμή. Άρα θα έχουμε τουλάχιστον k ανεξάρτητες κορυφές.

Αρά το πρόβλημα είναι NP-πλήρες.