Surveymetodik
Föreläsning 12

Måns Magnusson

Avd. Statistik, LiU

Översikt

1. Klusterurval
   - Tvåstegs (eller flerstegs) klusterurval

2. Urval med olika inklusionssannolikheter
   - Vikter vid klusterurval

Subsection 1

Tvåstegs (eller flerstegs) klusterurval

Tvåstegs klusterurval

- Första steget dras kluster/primära urvalsenheter (ex. skolor)
- I andra steget dras sekundära urvalsenehter (ex. elever)

Tvåstegs klusterurval

- Första steget dras kluster/primära urvalsenheter (ex. skolor)
- I andra steget dras sekundära urvalsenehter (ex. elever)

- Det går att ha ytterligare steg om det finns behov
- Det kan vara olika urvalsförfarande i de olika stegen (ex. stratifierat urval och/eller OSU)
  (brukar kallas **komplexa surveyer**)

Notation

N = antal psus (skolor) i populationen

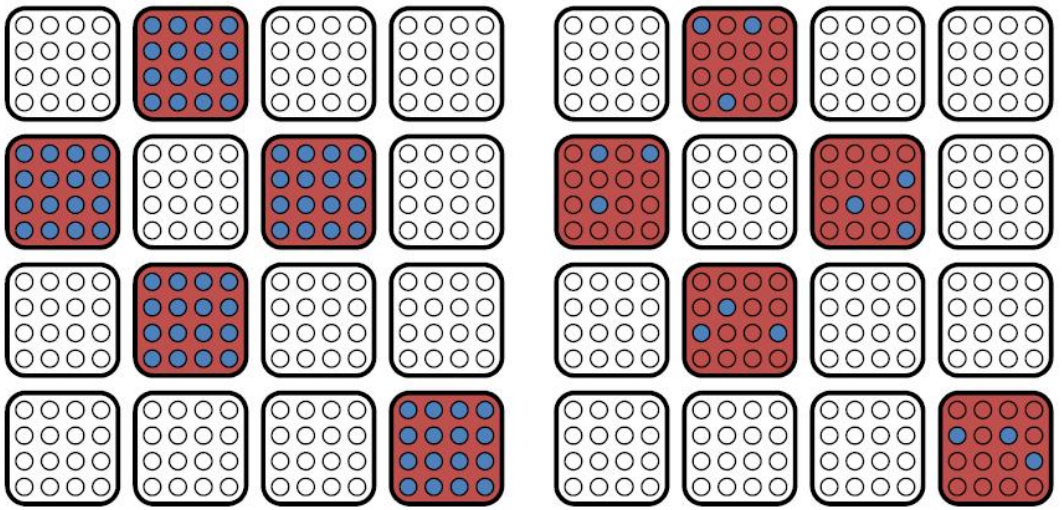
n = antal psus (skolor) i urvalet

M_i = antal ssus (elever) i skola i

m_i = antal ssus (elever) i psu (skola) i i vårt urval

M_0 = antal ssus (elever) i populationen

Tvåstegs klusterurval - Exempel



Figur : Skillnad mellan enstegs och tvåstegs klusterurval. Källa: ESS (2013)

Exempel: BETSI

Byggnaders energianvändning, tekniska status och inomhusmiljö (BETSI) Boverket (2009)

Boverket

- **Syfte:** Kartlägga det svenska byggnadsbeståndet
- **Målpopulation:** Byggnader med taxeringsvärde på minst 50 tkr och med minst 50 m^2 samt individer i småbostadshus eller lägenhet
- **Urval:**
  Flerstegsurval
  - Steg I: Stratifierat klusterurval av kommuner (pps/πps)
  - Steg II: Stratifierat klusterurval av värderings/taxeringsenhet (OSU och pps/πps)
  - Steg III: Klusterurval av byggnad (OSU)
  - Steg IV: Lägenhet (OSU)
- **Bortfall:** 21-35 % (beroende på byggnad)
- **Datainsamlingsmetod:** Besiktningar och pappersenkäter
- **Periodicitet**: Ett tillfälle (?)

Estimation vid tvåstegs klusterurval

- Vid enstegs klusterurval är

$$\hat{t}_{unb} = N\bar{t} = N\frac{1}{n}\sum_{i \in S} t_i$$

- Vid tvåstegs klusterurval är t_i inte känd, utan måste först skattas

Estimation vid tvåstegs klusterurval

- Vid enstegs klusterurval är

$$\hat{t}_{unb} = N\bar{t} = N\frac{1}{n}\sum_{i \in S} t_i$$

- Vid tvåstegs klusterurval är t_i inte känd, utan måste först skattas
- Vi kan i princip välja vilket skattninsgmetod vi vill (unbiased, kvot- eller regressionsskattning)

Estimation vid tvåstegs klusterurval

- Vid enstegs klusterurval är

$$\hat{t}_{unb} = N\bar{t} = N\frac{1}{n}\sum_{i\in S} t_i$$

- Vid tvåstegs klusterurval är t_i inte känd, utan måste först skattas
- Vi kan i princip välja vilket skattninsgmetod vi vill (unbiased, kvot- eller regressionsskattning)
- Vi skattar med den vanliga väntevärdesriktiga estimatorn

$$\hat{t}_i = M_i\bar{y}_i = M_i\sum_{j\in\mathcal{S}_i}\frac{y_{ij}}{m_i}$$

vilket ger $(*)$

$$\hat{t}_{unb} = N\bar{t} = \frac{N}{n}\sum_{i\in\mathcal{S}} M_i\bar{y}_i$$

Variansskattning vid tvåstegs klusterurval

- Vid enstegs klusterurval är

$$\hat{Var}(\hat{t}_{unb}) = N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{s_t^2}{n}$$

- Vid tvåstegs klusterurval måste vår osäkerhet i skattningen $\hat{t}_i$ tas i beaktande

Variansskattning vid tvåstegs klusterurval

- Vid enstegs klusterurval är

$$\hat{Var}(\hat{t}_{unb}) = N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{s_t^2}{n}$$

- Vid tvåstegs klusterurval måste vår osäkerhet i skattningen $\hat{t}_i$ tas i beaktande

- Detta ger följande variansskattning

$$Var(\hat{t}_{unb}) = N^2 \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{s_t^2}{n} + \frac{N}{n} \sum_{i \in \mathcal{S}} M_i^2 \left(1 - \frac{m_i}{M_i}\right) \frac{s_i^2}{m_i}$$

där

$$s_i^2 = \frac{1}{m_i - 1} \sum_{i \in \mathcal{S}} (y_{ij} - \bar{y}_i)$$

- Variansen består av två delar - **inom** psu:s och **mellan** psu:s

Variansskattning vid tvåstegs klusterurval II

- Precis som innan fungerar denna variansskattning bra om psu (ex. skolor) är ungefär lika stora
- Annars använder vi kvotskattning (se Lohr, 2009, s. 186)

Variansskattning vid tvåstegs klusterurval II

- Precis som innan fungerar denna variansskattning bra om psu (ex. skolor) är ungefär lika stora
- Annars använder vi kvotskattning (se Lohr, 2009, s. 186)

- Den andra delen av variansskattningen (inom **psu**) är ofta betydligt mindre än den första delen (mellan **psu**)
- Därför används ibland

$$Var_{WR}(\hat{t}_{unb}) = N^2 \frac{s_t^2}{n}$$

Variansskattning vid tvåstegs klusterurval II

- Precis som innan fungerar denna variansskattning bra om psu (ex. skolor) är ungefär lika stora
- Annars använder vi kvotskattning (se Lohr, 2009, s. 186)

- Den andra delen av variansskattningen (inom **psu**) är ofta betydligt mindre än den första delen (mellan **psu**)
- Därför används ibland

$$Var_{WR}(\hat{t}_{unb}) = N^2 \frac{s_t^2}{n}$$

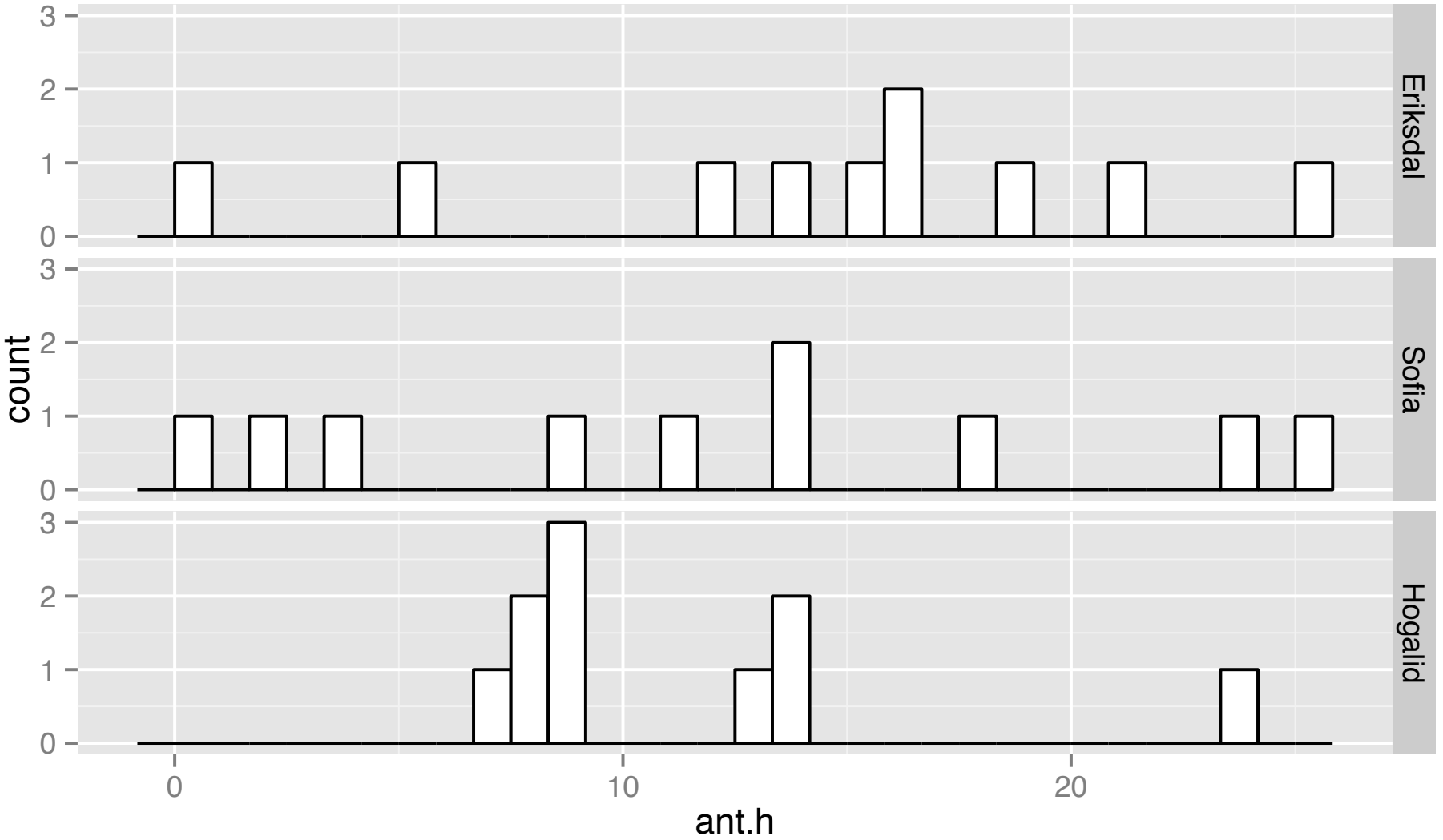
- Konfidensintervallen beräknar vi (som vanligt)

$$\hat{t}_{unb} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{t}_{unb})}$$

Exempel: IT-användning i skolan

- Vi vill undersöka IT-användningen i ett rektorsområde med 10 skolor.
- Syftet är att undersöka vid hur många lektioner datorer används i skolan i genomsnitt.
- Vi drar ett urval på 3 skolor och i varje skola drar vi 10 slumpvisa lärare.
- Vi vet att totalt arbetar 224 lärare i rektorsområdet.

Exempel: IT-användning i skolan II



Exempel: IT-användning i skolan III

Skola	m_i	M_i	$\bar{y}_i$	$\hat{t}_i$	s_i
Eriksdal	10	23	14.3	328.9	7.33
Sofia	10	19	12.1	229.9	8.66
Högalid	10	29	11.5	333.5	5.1

Section 2

Urval med olika inklusionssannolikheter

Introduktion till pps och πps

- Vid stratifiering såg vi att vi fick en lägre $Var(\hat{t})$ om vi allokerade urvalet efter varians (Neymannallokering)
- Urval med olika inklusionssannolikheter - en "kontinuerlig stratifiering" efter en variabel x

Introduktion till pps och πps

- Vid stratifiering såg vi att vi fick en lägre $Var(\hat{t})$ om vi allokerade urvalet efter varians (Neymannallokering)
- Urval med olika inklusionssannolikheter - en "kontinuerlig stratifiering" efter en variabel x

- **Probability proportional to size** (pps) vid urval med återläggning
- π **proportional to size** (πps) vid urval utan återläggning

Introduktion till pps och πps

- Vid stratifiering såg vi att vi fick en lägre $Var(\hat{t})$ om vi allokerade urvalet efter varians (Neymannallokering)
- Urval med olika inklusionssannolikheter - en "kontinuerlig stratifiering" efter en variabel x

- **Probability proportional to size** (pps) vid urval med återläggning
- π **proportional to size** (πps) vid urval utan återläggning

- Ofta används pps/πps med "storlek" som hjälpvariabel

Introduktion till pps och πps

- Fördelar med pps/πps
  - Med pps/πps får vi lägre $Var(\hat{t})$ om x_i är korrelerad med $Var(\hat{t}_i)$
  - pps/πps ger "självvägda" inklutionssannolikheter vid klusterurval - alla ssus (ex. elever) får samma inklusionssannolikhet

Introduktion till pps och πps

- Fördelar med pps/πps
  - Med pps/πps får vi lägre $Var(\hat{t})$ om x_i är korrelerad med $Var(\hat{t}_i)$
  - pps/πps ger "självvägda" inklutionssannolikheter vid klusterurval - alla ssus (ex. elever) får samma inklusionssannolikhet
- Nackdelar med pps/πps
  - Något mer komplicerad metod, särskilt πps

Introduktion till pps och πps

- Fördelar med pps/πps
  - Med pps/πps får vi lägre $Var(\hat{t})$ om x_i är korrelerad med $Var(\hat{t}_i)$
  - pps/πps ger "självvägda" inklutionssannolikheter vid klusterurval - alla ssus (ex. elever) får samma inklusionssannolikhet
- Nackdelar med pps/πps
  - Något mer komplicerad metod, särskilt πps
- pps-urval är enklare matematiskt (både att dra urvalet och estimation) men risken finns att vi får dubletter (vid mindre N)

Introduktion till pps och πps

- Fördelar med pps/πps
  - Med pps/πps får vi lägre $Var(\hat{t})$ om x_i är korrelerad med $Var(\hat{t}_i)$
  - pps/πps ger "självvägda" inklutionssannolikheter vid klusterurval - alla ssus (ex. elever) får samma inklusionssannolikhet
- Nackdelar med pps/πps
  - Något mer komplicerad metod, särskilt πps
- pps-urval är enklare matematiskt (både att dra urvalet och estimation) men risken finns att vi får dubletter (vid mindre N)
- Kan ske som som ett resultat av vanlig sampling
  (ex. slumpmässig telefonupprigning - måste beakta olika sannolikheter för olika antal telefonnummer)

Notation

$$\psi_i = \text{ sannolikhet för att dra kluster } i$$

$$\mathcal{R} = \text{Urvalsmängden (inklusive dubletter)}$$

$$\pi_i = P(\text{kluster } i \text{ ingår i urvalet}) = \text{inklusionssannolikhet för kluster } i$$

$$t_i = \text{ total i kluster } i$$

$$\hat{t}_\psi = \text{pps-skattning (Hansen-Hurwitz)}$$

$$\hat{t}_{HT} = \pi\text{ps-skattning (Horwitz-Thompson)}$$

pps-urval - teori

- **Probability proportional to size** (pps) drar kluser med återläggning - en observation/kluster kan förekomma flera gånger

pps-urval - teori

- **Probability proportional to size** (pps) drar kluser med återläggning - en observation/kluster kan förekomma flera gånger

- Vi byter därför ut vår indikatorvariabel Z mot en antalsvariabel Q
- Låt

$$Q_i = \text{antal gånger kluster } i \text{förekommer i urvalet}$$

$$Q \sim \text{Bin}(n, \psi_i)$$

vilket ger att

$$E(Q_i) = n\psi_i = \pi_i$$

pps-urval - teori

- **Probability proportional to size** (pps) drar kluser med återläggning - en observation/kluster kan förekomma flera gånger
- Vi byter därför ut vår indikatorvariabel Z mot en antalsvariabel Q
- Låt

$$Q_i = \text{antal gånger kluster } i \text{förekommer i urvalet}$$

$$Q \sim \text{Bin}(n, \psi_i)$$

vilket ger att

$$E(Q_i) = n\psi_i = \pi_i$$

- För att skatta totalen använder vi oss av

$$\hat{t}_\psi = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathcal{R}} \frac{t_i}{\psi_i}$$

- $\hat{t}_\psi$ är väntevärdesriktig $(*)$

- För att skatta variansen använder vi oss av

$$\hat{Var}(\hat{t}_\psi) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{i \in \mathcal{R}} \left(\frac{t_i}{\psi_i} - \hat{t}_\psi \right)^2}{(n-1)}$$

- Eftersom det är ett urval med återläggning finns ingen ändlighetskorrektion.

pps-urval - teori II

- För att skatta variansen använder vi oss av

$$\hat{Var}(\hat{t}_\psi) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\sum_{i \in \mathcal{R}} \left(\frac{t_i}{\psi_i} - \hat{t}_\psi \right)^2}{(n-1)}$$

- Eftersom det är ett urval med återläggning finns ingen ändlighetskorrektion.

- För att minimera $Var(\hat{t}_\psi)$ så vill vi välja ψ_i proportionellt mot t_i - men vi känner inte t_i ...

pps-urval - teori III

- Ett vanligt sätt att välja ψ_i är att välja kluster proportionellt mot klusterstorleken (därav namnet pps)

$$\psi_i = \frac{M_i}{M_0} \text{ och } \sum_i^N \psi_i = 1$$

- Vikter kan beräknas på följande sätt

$$w_i = \frac{1}{\pi_i} = \frac{1}{\psi_i n}$$

- Hur man drar urval (praktiskt) framgår i Lohr (2009, s. 225 ff.) (det är enkelt att göra i R med paketet `sampling`).

Exempel - pps-urval

- Vi vill återigen skatta antalet lektioner då datorer används i undersvisningen i ett givet rektorsområde med 10 skolor
- Vi vill nu dra ett pps-urval
- Denna gång undersöker vi samtliga lärare på skolan för en given vecka.

Exempel: IT-användning i skolan II

	school	teachers	t_i	phi	t.hat	sample.pps	sample.srs
1	1	34	167	0.1604	1041	0	1
2	2	17	76	0.0802	948	0	0
3	3	27	124	0.1274	974	0	0
4	4	13	65	0.0613	1060	1	0
5	5	20	104	0.0943	1102	1	1
6	6	14	70	0.0660	1060	1	0
7	7	22	121	0.1038	1166	0	0
8	8	20	86	0.0943	912	0	0
9	9	21	110	0.0991	1110	0	0
10	10	24	132	0.1132	1166	0	1

- Den sanna totalen i populationen är 1055.

PPS-urval - tvåstegs klusterurval

- Dra kluster med sannolikhet ψ_i (precis som vid enstegs klusterurval)
- Nu är t_i inte känd i varje urval eller kluster så t_i måste skattas
- Detta kan vi göra med vanligt OSU (eller vilken urvalsmetod som passar)
  - Det viktiga är dock att de olika klustertotalerna (t_i) är oberoende av varandra
  - Om vi drar samma kluster flera gånger måsta vi dra ett nytt OSU varje gång inom klustret

πps-urval och HT-estimatorn

- Mer komplicerat än pps då urvalet inte är oberoende
  - När det första elementet är draget ändras sannolikheten att dra för de övriga
- Det finns flera olika metoder för att dra urval på ett sådant sätt att π_i är proportionellt efter en given variabel
  (de flesta finns implementerade i R-paketet `sampling`)

πps-urval och HT-estimatorn

- Mer komplicerat än pps då urvalet inte är oberoende
  - När det första elementet är draget ändras sannolikheten att dra för de övriga
- Det finns flera olika metoder för att dra urval på ett sådant sätt att π_i är proportionellt efter en given variabel
  (de flesta finns implementerade i R-paketet `sampling`)
- Har vi dragit ett πps-urval (eller ett vanligt OSU) kan vi använda Horwitz-Thompson-estimatorn (HT)

$$\hat{t}_{HT} = \sum_{i \in \mathcal{S}} \frac{\hat{t}_i}{\pi_i}$$

πps-urval och HT-estimatorn II

- Det är enkelt att visa att HT-estimatorn är väntevärdesriktig $(*)$

πps-urval och HT-estimatorn II

- Det är enkelt att visa att HT-estimatorn är väntevärdesriktig $(*)$
- Variansen är mer komplicerad

$$Var(\hat{t}_{HT}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1-\pi_i}{\pi_i} t_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{k \neq i}^{N} \frac{\pi_{ik} - \pi_i \pi_k}{\pi_i \pi_k} t_i t_k$$

där π_{ik} är andra ordningens inklutionssannolikhet.

πps-urval och HT-estimatorn III

- Vid vanligt OSU är π_{ik} enklare att räkna ut

$$P(Z_i = 1 \text{ och } Z_k = 1) = \pi_{ik} = \frac{n}{N}\frac{n-1}{N-1}$$

- Men vid πps-urval blir alla π_{ik} en matris mellan urvalsobjekten
  - Denna kan vara otymplig
  - I flera fall kan det vara så att den inte finns tillgänglig vid estimation
- Då kan variansestimatorn för pps-urval (med återläggning) användas istället

$$V_{WR}(\hat{t}_{HT}) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i \in \mathcal{S}} \left(\frac{t_i}{\pi_i} - \frac{\hat{t}_{HT}}{n} \right)^2$$

Subsection 1

Vikter vid klusterurval

Vikter vid klusterurval

- För att beräkna inklutionssannolikheten behöver vi

$$\pi_{ij} = P(j\text{:te enheten i kluster } i \text{ inkluderas i urvalet}) =$$
$$P(j\text{:te enheten} \mid \text{kluster } i) \cdot P(\text{kluster } i)$$

eftersom

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

Vikter vid klusterurval

- För att beräkna inklutionssannolikheten behöver vi

$$\pi_{ij} = P(j\text{:te enheten i kluster } i \text{ inkluderas i urvalet}) =$$
$$P(j\text{:te enheten} \mid \text{kluster } i) \cdot P(\text{kluster } i)$$

eftersom

$$P(A \cap B) = P(A \mid B) \cdot P(B)$$

- Detta ger inklusionssannolikheterna

$$\pi_{ij} = P(j\text{:te enheten} \mid \text{kluster } i) \cdot P(\text{kluster } i) = \frac{m_i}{M_i} \cdot \frac{n}{N}$$

och vikterna

$$w_{ij} = \frac{1}{\pi_{ij}} = \frac{M_i N}{m_i n}$$

vid tvåstegsurval och

$$w_{ij} = \frac{1}{\pi_{ij}} = \frac{M_i N}{M_i n} = \frac{N}{n}$$

vid enstegsurval

Vikter vid klusterurval II

- Med vikterna får vi följande skattning av $\hat{t}_{unb}$

$$\hat{t}_{unb} = \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \in \mathcal{S}_i} w_{ij} y_{ij} = \sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \in \mathcal{S}_i} \frac{M_i N}{m_i n} y_{ij} = \frac{N}{n} \sum_{i \in \mathcal{S}} M_i \bar{y}_i$$

och för

$$\hat{\bar{y}}_r = \frac{\sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \in \mathcal{S}_i} w_{ij} y_{ij}}{\sum_{i \in \mathcal{S}} \sum_{j \in \mathcal{S}_i} w_{ij}} = \frac{\frac{N}{n} \sum_{i \in \mathcal{S}} M_i y_{ij}}{\frac{N}{n} \sum_{i \in \mathcal{S}} m_i \frac{M_i}{m_i}} = \frac{\sum_{i \in \mathcal{S}} M_i y_{ij}}{\sum_{i \in \mathcal{S}} M_i}$$

Referenser

Boverket, 2009. Statistiska urval och metoder i boverkets projekt betsi. Tech. rep., Boverket.

ESS, 2013. Cluster sampling and multi-stage sampling. URL `http://essedunet.nsd.uib.no/cms/topics/weight/2/6.html`

Lohr, S., 2009. Sampling: design and analysis, 2nd Edition. Thomson.