

Survey metodik

Föreläsning 3

Måns Magnusson

Avd. Statistik, LiU

1 Teori för urvalsundersökningar

- Indikatorvariabeln Z

Section 1

Teori för urvalsundersökningar

■ Olika inferensteorier för statistisk inferens för urvalsundersökningar

| | Design based | Model based | Bayesian |
|---------------------|--------------------|----------------------|-------------------------------|
| <i>Randomness</i> | Home-made | Given by nature | Subjective/Rationality axioms |
| <i>Main focus</i> | Population | Parameters | Population |
| <i>Parameters</i> | Population values | Unknown/unobservable | Do not exist, but useful |
| <i>Inference</i> | Frequency based | Frequency based | Probability-based |
| <i>Output</i> | Point-estimates/CI | Point-estimates/CI | Posterior distributions |
| <i>Possible use</i> | Not my problem! | Not my problem! | Interface with decisions |

Källa: Thorburn (2009) (med vissa förändringar)

- Vår estimator / skattningsmetod för $\bar{y}_{\mathcal{U}}$ är:

$$\hat{y}_{\mathcal{U}} = \bar{y}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathcal{S}} y_i$$

- **Designbaserat** förväntat värde:

$$E(\hat{y}_{\mathcal{U}}) = \sum_{i=k}^K P(\mathcal{S}_k) \hat{y}_{\mathcal{U},k}$$

- **Designbaserad** varians

$$Var(\hat{y}_{\mathcal{U}}) = \sum_{i=k}^K P(\mathcal{S}_k) [\hat{y}_{\mathcal{U},k} - E(\hat{y}_{\mathcal{U}})]^2$$

- Vi är ofta intresserade av att minimera det totala felet:

$$MSE(\hat{y}_{\mathcal{U}}) = E [(\hat{y}_{\mathcal{U},k} - \bar{y}_{\mathcal{U}})^2] = \sum_{k=1}^K P(\mathcal{S}_k) \cdot (\hat{y}_{\mathcal{U},k} - \bar{y}_{\mathcal{U}})^2$$

- Detta fel kan delas upp i två delar (*)

- Bias: $Bias(\hat{y}_{\mathcal{U}})^2 = (E(\hat{y}_{\mathcal{U}}) - \bar{y}_{\mathcal{U}})^2$
- Varians: $Var(\hat{y}_{\mathcal{U}})$
- Härledning finns i Lohr (2009, s. 31)

- Samma exempel som tidigare där $\bar{y}_{\mathcal{U}} = 17.2$ och $Var(y) = 98.886$ då $n=6$, $N = 15$ och $K = 5005$.

| | Obs.1 | Obs.2 | Obs.3 | Obs.4 | Obs.5 | Obs.6 | P_S | y_hat |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|-------|
| 1 | 29 | 21 | 23 | 3 | 22 | 30 | 0.0002 | 21.3 |
| 2 | 29 | 21 | 23 | 3 | 22 | 24 | 0.0002 | 20.3 |
| 3 | 29 | 21 | 23 | 3 | 22 | 6 | 0.0002 | 17.3 |
| 4 | 29 | 21 | 23 | 3 | 22 | 15 | 0.0002 | 18.8 |
| 5 | 29 | 21 | 23 | 3 | 22 | 2 | 0.0002 | 16.7 |
| 6 | 29 | 21 | 23 | 3 | 22 | 4 | 0.0002 | 17.0 |
| 7 | 29 | 21 | 23 | 3 | 22 | 10 | 0.0002 | 18.0 |

$$E(\hat{y}_{\mathcal{U}}) = \sum_{i=k}^K P(\mathcal{S}_k) \hat{y}_{\mathcal{U}} = 17.2$$

$$Var(\hat{y}_{\mathcal{U}}) = \sum_{i=k}^K P(\mathcal{S}_k) [\hat{y}_{\mathcal{U}} - E(\hat{y}_{\mathcal{U}})]^2 = 9.889(*)$$

- Vi vill att skattningarna ska vara **design-väntevärdesriktiga**
- Vi vill visa att:

$$\begin{aligned}E(\bar{y}_S) &= \bar{y}_U \\ \text{Var}(\bar{y}_S) &= \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{S_U^2}{n} \\ E(s^2) &= S_U^2\end{aligned}$$

- Vi gör detta genom att införa en egen slumpvariabel (som vi styr själva)

- Vi behöver introducera vår egen “hemmagjorda” slump:

$$Z_i = P(i \in \mathcal{S}) \sim \text{Bernoulli}(\pi_i)$$

$$Z = \{0, 1\}$$

Z_i brukar kallas **indikatorvariabel** och har följande egenskaper (*):

$$E(Z_i) = E(Z_i^2) = P(Z_i = 1) = \frac{n}{N}$$

$$\text{Var}(Z_i) = \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

$$E(Z_i Z_j) = \frac{n}{N} \frac{n-1}{N-1}$$

$$\text{Cov}(Z_i, Z_j) = -\frac{1}{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{n}{N}$$

- Med indikatorvariabeln kan vi visa att (*)

$$\begin{aligned}E(\bar{y}_S) &= \bar{y}_U \\ \text{Var}(\bar{y}_S) &= \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{S_U^2}{n} \\ E(s^2) &= S_U^2\end{aligned}$$

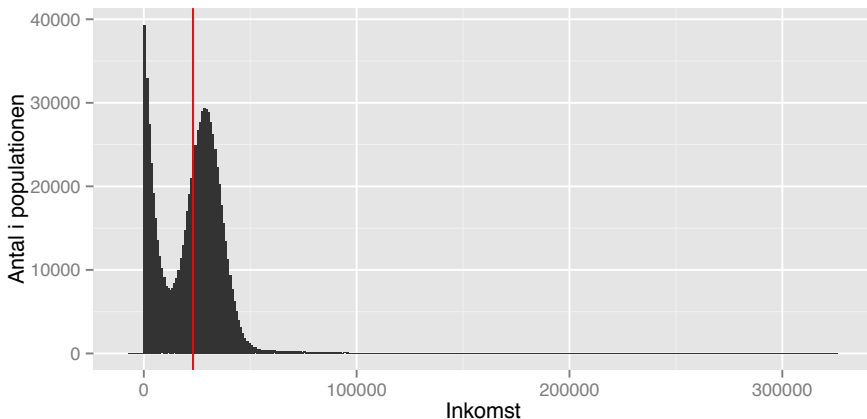
där

$$S_U^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_U)^2$$

- Härledningar finns också i Lohr (2009, s. 51-54)

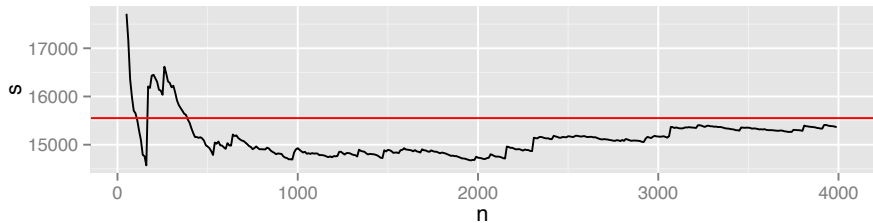
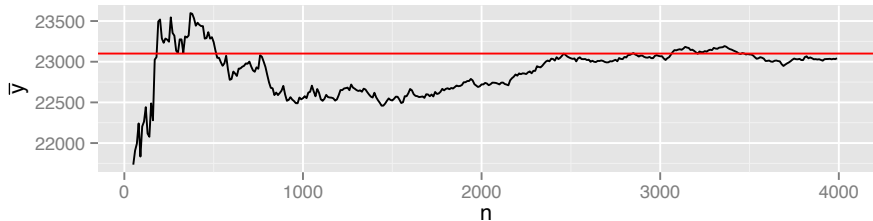
Exempel: Inkomst

- Vi har en befolkning som består av 815599 personer.

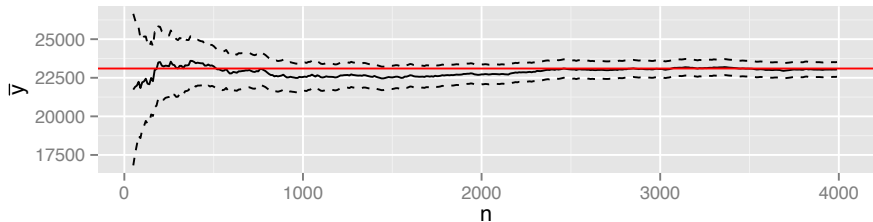
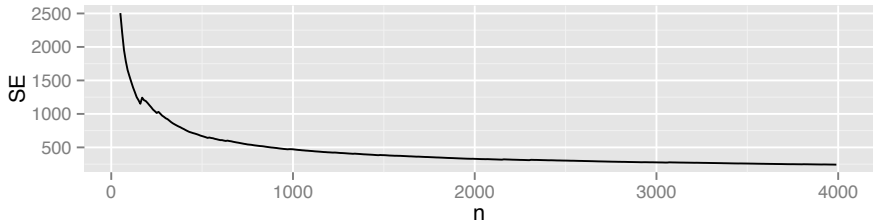


- Den 'sanna' genomsnittsinkomsten (\bar{y}_U) är 23100.33 och den 'sanna' standardavvikelsen (S_U) är 15552.189.

Exempel: Estimation av $\bar{y}_{\mathcal{U}}$ och $S_{\mathcal{U}}$



Exempel: Medelfelet av estimationen av $SE(\bar{y}_u)$ och KI



- Lohr, S., 2009. Sampling: design and analysis, 2nd Edition. Thomson.
- Thorburn, D., 2009. Bayesian methods in survey sampling, preliminary version, Workshop on Survey Sampling, August 23-27 2009, Kiev.