

Surveymetodik

Föreläsning 3

Måns Magnusson

Avd. Statistik, LiU

1 Teori för urvalsundersökningar

- Indikatorvariabeln Z

Section 1

Teori för urvalsundersökningar

■ Olika inferensteorier för statistisk inferens för urvalsundersökningar

	Design based	Model based	Bayesian
<i>Randomness</i>	Home-made	Given by nature	Subjective/Rationality axioms
<i>Main focus</i>	Population	Parameters	Population
<i>Parameters</i>	Population values	Unknown/unobservable	Do not exist, but useful
<i>Inference</i>	Frequency based	Frequency based	Probability-based
<i>Output</i>	Point-estimates/CI	Point-estimates/CI	Posterior distributions
<i>Possible use</i>	Not my problem!	Not my problem!	Interface with decisions

Källa: Thorburn (2009) (med vissa förändringar)

- Vår estimator / skattningsmetod för $\bar{y}_{\mathcal{U}}$ är:

$$\hat{y}_{\mathcal{U}} = \bar{y}_{\mathcal{S}} = \frac{1}{n} \sum_{i \in \mathcal{S}} y_i$$

- **Designbaserat** förväntat värde:

$$E(\hat{y}_{\mathcal{U}}) = \sum_{i=k}^K P(\mathcal{S}_k) \hat{y}_{\mathcal{U}}$$

- **Designbaserad** varians

$$\text{Var}(\hat{y}_{\mathcal{U}}) = \sum_{i=k}^K P(\mathcal{S}_k) [\hat{y}_{\mathcal{U}} - E(\hat{y}_{\mathcal{U}})]^2$$

- Vi är ofta intresserade av att minimera det totala felet:

$$MSE(\hat{y}_{\mathcal{U}}) = E [(\hat{y}_{\mathcal{U}} - \bar{y}_{\mathcal{U}})^2] = \sum_{k=1}^K P(\mathcal{S}_k) \cdot (\hat{y}_{\mathcal{U}} - \bar{y}_{\mathcal{U}})^2$$

- Detta fel kan delas upp i två delar (*)

- Bias: $Bias(\hat{y}_{\mathcal{U}})^2 = (E(\hat{y}_{\mathcal{U}}) - \bar{y}_{\mathcal{U}})^2$
- Varians: $Var(\hat{y}_{\mathcal{U}})$
- Härledning finns i Lohr (2009, s. 31)

- Samma eksempel som tidligere där $\bar{y}_{\mathcal{U}} = 17.2$ och $Var(y) = 98.886$ då $n=6$, $N=15$ och $K=5005$.

	Obs.1	Obs.2	Obs.3	Obs.4	Obs.5	Obs.6	P_S	y_hat
1	29	21	23	3	22	30	0.0002	21.3
2	29	21	23	3	22	24	0.0002	20.3
3	29	21	23	3	22	6	0.0002	17.3
4	29	21	23	3	22	15	0.0002	18.8
5	29	21	23	3	22	2	0.0002	16.7
6	29	21	23	3	22	4	0.0002	17.0
7	29	21	23	3	22	10	0.0002	18.0

$$E(\hat{y}_{\mathcal{U}}) = \sum_{i=k}^K P(\mathcal{S}_k) \hat{y}_{\mathcal{U}} = 17.2$$

$$Var(\hat{y}_{\mathcal{U}}) = \sum_{i=k}^K P(\mathcal{S}_k) [\hat{y}_{\mathcal{U}} - E(\hat{y}_{\mathcal{U}})]^2 = 9.889(*)$$

- Vi vill att skattningarna ska vara **design-väntevärdesriktiga**
- Vi vill visa att:

$$\begin{aligned}E(\bar{y}_S) &= \bar{y}_U \\ \text{Var}(\bar{y}_S) &= \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{S_U^2}{n} \\ E(s^2) &= S_U^2\end{aligned}$$

- Vi gör detta genom att införa en egen slumpvariabel (som vi styr själva)

- Vi behöver introducera vår egen “hemmagjorda” slump:

$$Z_i = P(i \in \mathcal{S}) \sim \text{Bernoulli}(\pi_i)$$

$$Z = \{0, 1\}$$

Z_i brukar kallas **indikatorvariabel** och har följande egenskaper (*):

$$E(Z_i) = E(Z_i^2) = P(Z_i = 1) = \frac{n}{N}$$

$$\text{Var}(Z_i) = \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right)$$

$$E(Z_i Z_j) = \frac{n}{N} \frac{n-1}{N-1}$$

$$\text{Cov}(Z_i, Z_j) = -\frac{1}{N-1} \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{n}{N}$$

- Med indikatorvariabeln kan vi visa att (*)

$$\begin{aligned}E(\bar{y}_S) &= \bar{y}_U \\ \text{Var}(\bar{y}_S) &= \left(1 - \frac{n}{N}\right) \frac{S_U^2}{n} \\ E(s^2) &= S_U^2\end{aligned}$$

där

$$S_U^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_U)^2$$

- Härledningar finns också i Lohr (2009, s. 51-54)

- Lohr, S., 2009. Sampling: design and analysis, 2nd Edition. Thomson.
- Thorburn, D., 2009. Bayesian methods in survey sampling, preliminary version, Workshop on Survey Sampling, August 23-27 2009, Kiev.