

RISE weltweit Erfahrungsbericht - Optical Eigenmodes an der Universität St Andrews

Peter Manshausen

19. September 2017

Inhalt

1 Allgemeiner Teil	2
1.1 Einleitung	2
1.2 Vorbereitung und Organisation	2
1.3 Schottland allgemein	3
1.4 St Andrews und Umgebung	3
1.5 Freizeitgestaltung	4
2 Fachlicher Teil	4
2.1 Einführung	4
2.2 Modellierung	5
2.3 Mein Projekt	6
2.4 Ergebnisse	8
2.4.1 Beispiel	8
2.5 Schlussfolgerung, offene Fragen und weitere Schritte	9
2.6 Persönliche Einordnung	9
3 Quellen, Literatur, Links	10

1 Allgemeiner Teil

1.1 Einleitung

Meine Bewerbung für das Projekt folgte einer Empfehlung eines Freundes aus meinem Wohnheim, der mich auf das Programm aufmerksam machte. Auch wenn ich noch nicht so recht wusste, was ich in den Sommerferien so vorhaben würde – zum Bewerbungstermin sind diese immerhin noch mehr als ein halbes Jahr entfernt – suchte ich mir drei Projekte heraus. Dieses spezielle in St Andrews interessierte mich besonders, weil die unterliegenden Konzepte (Elektrodynamik, Eigenbasen, Simulation) auch in meinem Studium gerade aktuell waren. So hoffte ich darauf, das Erlernte auch einmal anwenden zu können. Ich wurde nicht enttäuscht. Aber auch in anderer Hinsicht war die Zeit in Schottland sehr lohnend und ich kann das RISE-Programm wärmstens weiterempfehlen.

1.2 Vorbereitung und Organisation

Der wichtigste Punkt, um den man sich kümmern sollte, sobald man die Zusage vom DAAD erhalten hat, ist die Unterkunft. Die Uni vermietet prinzipiell nur bis einschließlich der letzten Augustwoche, da danach die Zimmer gewartet werden und dann die regulären Studenten zurückkehren. Fündig wird man meiner Erfahrung nach weniger über einschlägige Websites, die dem deutschen *WG gesucht* vergleichbar wären, sondern eher über Facebookgruppen, insbesondere *Find Accommodation for Next Year*. Ausserdem kann man es über die *Stipnetz St Andrews* Gruppe versuchen – dort war ich erfolgreich. Preislich muss man sich auf Mieten ab 400£ einstellen, wenn man in der Stadt selbst wohnen will,

Preise bis 550£ sind die Regel. Billiger wird es, wenn man in Dundee oder einem der umliegenden Dörfer bleibt, dann muss man jedoch täglich den Weg mit dem Bus auf sich nehmen.

1.3 Schottland allgemein

Ich kann nur dringend empfehlen, sich vor oder nach dem Praktikum noch etwas Zeit zu nehmen, um den Rest Schottlands zu erkunden. Während Ziele wie Loch Ness, Fort William oder Glasgow auf der Karte nah aussehen, hat man mit Bus und Bahn von St Andrews aus kaum eine Chance, übers Wochenende weiter wegzufahren. Schon ins 50 km entfernte Edinburgh braucht man zwei Stunden. Ich hatte vor dem Praktikum noch eine Woche Zeit und war je drei Tage auf dem West Highland Way wandern und auf dem Edinburgh Fringe Festival. Beides ist sehr zu empfehlen und das Fringe Festival sollte man auf jeden Fall terminmässig auf dem Schirm haben. So viel Auswahl an Musicals, Theaterstücken, Comedy-Auftritten und Konzerten bekommt man sonst nirgends, allein hier könnte man eine ganze Woche verbringen. Für mehrtägige Wandertouren durch die tolle Highland-Landschaft ist zu empfehlen, sich früh (>2 Wochen) um Unterkünfte auf dem Weg zu bemühen, Juli und August sind Hochsaison. Andererseits ist es auch sehr reizvoll, ein Zelt mitzunehmen, denn in Schottland gilt Jedermannsrecht. Unbedingt mitnehmen sollte man dann wasserdichte Wanderschuhe und Jacke. Das britische Wetter wurde während meines Aufenthalts seinem Ruf definitiv gerecht, ich hätte statt der kurzen Hose besser einen Pullover mehr eingepackt.

1.4 St Andrews und Umgebung

St Andrews ist eine nette Kleinstadt am Meer voller (Golf-)Touristen und – während des Semesters – Studenten. Die (Ruine der) Kathedrale, die alten Universitätsgebäude wie St Salvator's College und die (Ruine der) Burg kann man gut auf einem ausgedehnten Spaziergang erkunden. Ausserdem lohnt es sich, einmal den idyllischen Lade Braes Walk entlangzulaufen, der an einem Bach entlang durch die Stadt geht. St Andrews ist natürlich besonders für den riesigen Golfplatz bekannt, auf dem man auch gut eine Runde joggen kann, wenn man kein Golf spielt. In der näheren Umgebung von St Andrews ist der Fife Coastal Path, ein Wanderweg, der immer an der Küste entlang geht. Es empfiehlt sich zum Beispiel an einem Wochenende von St Andrews Richtung Süden nach Crail oder bis Anstruther zu wandern, dort zu übernachten (in Anstruther gibt es ein Hostel) und dann am Sonntag mit dem Boot auf die Isle of May zu fahren. In die Highlands (bspw. den Cairngorms National Park) fährt man über Leuchars mit Bus und Bahn auch für eine Tageswanderung. Die anderen Praktikanten und ich haben so zum Beispiel Beinn Mheadhonach bei Blair Atholl erwandert. Die Uni prägt die Stadt natürlich ungemein und die alten College-Gebäude lohnen einen Besuch. Überrascht hat mich die starke Fokussierung der Forschungstätigkeiten der Physikalischen Fakultät: Geforscht wird hier insbesondere an Astronomie,

Photonik und Festkörperphysik. Andere grosse Forschungsthemen wie Teilchen- oder Umweltphysik scheinen schwach oder garnicht vertreten zu sein.

1.5 Freizeitgestaltung

In St Andrews selbst ist zwischen den Semestern nicht sonderlich viel los, da die allermeisten Studenten verreist sind und nur die übrigbleiben, die an ihren Abschlussarbeiten schreiben, also die meiste Zeit in der Bibliothek verbringen. Die meisten Einrichtungen bleiben jedoch offen, darunter die Anlagen des Hochschulsports und die Student Union Bar auf St Marys Pl. Für mich war das Angebot des Hochschulsports nicht sehr lohnend, weil man ohne Studenten- oder Bedienstetenstatus jeden Kurs bzw. jede Nutzung der Angebote wie Schwimmbad oder Krafraum einzeln bezahlen muss. Stattdessen habe ich mich bei Functional Fitness St Andrews angemeldet, einem privaten Fitnessstudio, wo es täglich Fitness-Kurse gibt, insbesondere zwischen 17:00 und 20:00. Besonders hilfreich fand ich die Excel-Tabelle mit Kontaktdaten der anderen RISE-Stipendiaten. Zusammen sind wir mehrfach abends in den Pub gegangen oder haben am Wochenende Ausflüge in die Umgebung gemacht.

2 Fachlicher Teil

2.1 Einführung

Mein Projekt in St Andrews stand unter dem Titel "Higher Order Optical Eigenmodes". Es war damit theoretisch-numerischer Natur. Grundlegend geht es darum, wie man die Ausbreitung von Licht in Medien beschreiben kann, in denen die Polarisation P der Konstituentenmoleküle nicht linear von der Feldstärke des elektromagnetischen Feldes abhängt. Stattdessen können wir schreiben

$$P = \epsilon_0(\chi^{(1)}\mathbf{E} + \chi^{(2)}\mathbf{E}\mathbf{E} + \chi^{(3)}\mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \mathcal{O}(\mathbf{E}^4)) \quad (1)$$

Für lineare Effekte (also wenn nur $\chi^{(1)}$ ungleich null) ist es möglich, eine Basis von Eigenfunktionen zu Operatoren wie Energiedichte, Intensität oder Strahlbreite zu finden. In dieser Basis nehmen die Operatoren analog zur Quantenmechanik Diagonalform an und man kann die entsprechenden Observablen mit einer bestimmten Überlagerung maximieren oder minimieren. Dr. Mazilus Gruppe ist es so beispielsweise gelungen, die natürliche Beugungsgrenze zu durchbrechen, also einen Strahl stärker zu fokussieren als durch die Beugungsgrenze vorhergesagt (vgl. Baumgartl, 2011). Ein ähnliches Verfahren soll auch für Interaktionen höherer Ordnung gefunden werden. Einer der einfachsten nichtlinearen Effekte ist das sogenannte Three Wave Mixing, bei dem zwei Lichtstrahlen interagieren und einen dritten erzeugen. Dies macht man sich beispielsweise im alltäglichen grünen Laserpointer zunutze, in dem zwei Infrarot-Wellenzüge einen Wellenzug doppelter Frequenz hervorbringen. Die Interaktion passiert aber nicht nur im Frequenz-, sondern

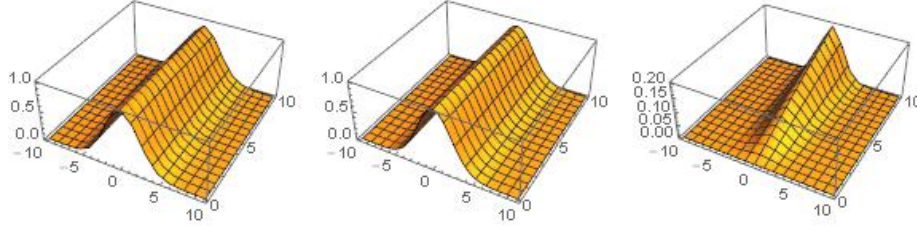


Abbildung 1: Ein Beispiel für Three Wave Mixing - man sieht die Felder links und in der Mitte, die relativ konstant bleiben und das dritte Feld, das ganz rechts durch die Interaktion entsteht. Man beachte die unterschiedlichen Größenordnungen der beiden ursprünglichen und des entstehenden Feldes (alle Einheiten beliebig).

auch im Ortsraum. Die Frage, der ich nachgegangen bin, ist, ob es Konfigurationen des räumlichen Feldinputs gibt, sodass dieser nach einer gewissen Ausbreitungsdistanz (der sog. Interaktionslänge) reproduziert wird. Dies wäre nahe dran an einer Eigenfunktion.

2.2 Modellierung

Für die Betrachtung des Three Wave Mixing wurde ein Modell eines zweidimensionalen optischen Kristalls in Mathematica beschrieben. Dieser Kristall ist also praktisch eine Ebene, deren eine Richtung die Ausbreitungsrichtung (longitudinal) und deren andere die Transversalrichtung ist, welche die Form des Strahls bestimmt. Dazu machte ich mich in der ersten Woche zunächst mit Mathematica vertraut und simulierte einfachere Versionen, zum Beispiel in einer Dimension. Verwendet wurde die Mathematica-Funktion `NDSolve` zur schrittweisen numerischen Approximation der Lösung der Differentialgleichungen (s. u.) Eine einfache Simulation des Three Wave Mixing zeigt Abb. 1: Licht breitet sich nach schräg rechts hinten aus und der Strahl hat dabei je nach x -Koordinate (um Null herum) eine unterschiedliche Intensität, die durch die Höhe (zwischen Null und Eins für die ersten beiden Felder) dargestellt wird. Das Verhalten der Felder wird beschrieben durch drei gekoppelte partielle Differentialgleichungen, die Manley-Rowe-Gleichungen (vgl. New, 2011). Diese können aus den grundlegenden Maxwell-Gleichungen der Elektrodynamik abgeleitet werden. Es ist

$$\frac{\partial E_1}{\partial z} = -\frac{i}{2k_1} \frac{\partial^2 E_1}{\partial x^2} - \frac{i\omega_1}{2cn_1} \chi^{(2)} E_3 E_2^* e^{-i\Delta k z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial E_2}{\partial z} = -\frac{i}{2k_2} \frac{\partial^2 E_2}{\partial x^2} - \frac{i\omega_2}{2cn_2} \chi^{(2)} E_3 E_1^* e^{-i\Delta k z} \quad (3)$$

$$\frac{\partial E_3}{\partial z} = -\frac{i}{2k_3} \frac{\partial^2 E_3}{\partial x^2} - \frac{i\omega_3}{2cn_3} \chi^{(2)} E_1 E_2 e^{i\Delta k z} \quad (4)$$

wobei E_i die Felder mit Frequenzen ω_i , Wellenzahlen k_i und Brechungsindizes n_i sind, z die Ausbreitungs- und x die Transversalrichtung und $\chi^{(2)}$ der Suszeptibilitätstensor zweiter Ordnung. Dieser gibt also die Stärke der Kopplung der Felder an. Für den Exponentialterm gilt $\Delta k = k_3 - k_2 - k_1$, die Frequenzen sind über $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$ verbunden. Ein wichtiger Test, um zu prüfen, ob das Computermodeill funktioniert, ist die Energieerhaltung, die man aus den Manley-Rowe-Gleichungen auch analytisch herleiten kann (umgekehrt nahmen Manley und Rowe die Energieerhaltung ursprünglich an, um die Relationen zu gewinnen). Abb. 2 zeigt einen Plot, in dem man ablesen kann, dass auch bei sich änderndem Verhältnis der Felder die Gesamtenergie erhalten bleibt.

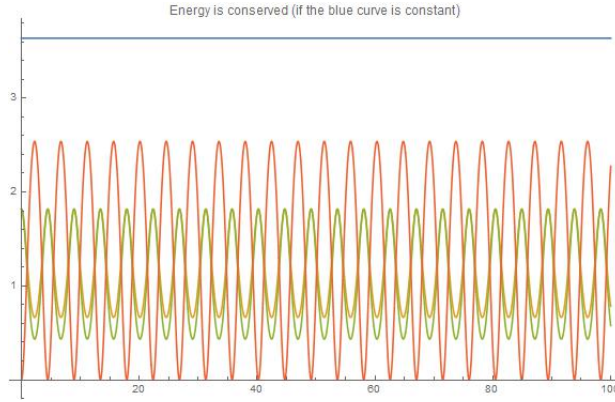


Abbildung 2: Energieerhaltung: Die blaue Linie oben zeigt den Verlauf der Gesamtenergie (konstant) während die Absolutbeträge der einzelnen Felder (restliche Kurven) periodisch variieren. Alle Einheiten beliebig.

2.3 Mein Projekt

Ein ganz ähnliches Modell hatte in dieser Gruppe schon ein Student namens Liam Gallagher für seine Masterarbeit genutzt und mit einer Basis aus – in x -Richtung – Hermite-Gauss-förmigen Strahlen den Input-Output-Tensor konstruiert. Ich habe diese Arbeit weitergeführt und verallgemeinert, indem statt reflektierender Randbedingungen ($E(0) = E(x_{max}) = 0$) periodische Randbedingungen zugelassen wurden ($E(0) = E(x_{max})$). Dazu wurde dann eine Basis aus Fouriermoden der Form

$$E_i(z) = \sum_{n=-N}^N a_{i,n}(z) \exp\left(n \frac{2\pi x}{x_{max}}\right)$$

verwendet. Dadurch wird die Frage nach der Form der Outputfunktion zur Frage nach der Grösse der Koeffizienten $a_{i,n}(z)$. Sie lautet nun, ob es Felder gibt, die

nach einer bestimmten Ausbreitungslänge wieder dieselben (oder ähnliche) Fourierkoeffizienten haben, wie am Anfang. Einsetzen in die Manley-Rowe-Relations (2)-(4) liefert zunächst

$$k_1 i \frac{\partial a_{1,n}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{n2\pi}{x_{max}} \right)^2 a_{1,n} - \frac{\chi^{(2)} \omega_1^2}{c^2} e^{-i\Delta k z} \sum_{m=-N}^N a_{2,m}^* a_{3,n+m} \quad (5)$$

$$k_2 i \frac{\partial a_{2,n}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{n2\pi}{x_{max}} \right)^2 a_{2,n} - \frac{\chi^{(2)} \omega_2^2}{c^2} e^{-i\Delta k z} \sum_{m=-N}^N a_{1,m}^* a_{3,n+m} \quad (6)$$

$$k_3 i \frac{\partial a_{3,n}}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{n2\pi}{x_{max}} \right)^2 a_{3,n} - \frac{\chi^{(2)} \omega_3^2}{c^2} e^{i\Delta k z} \sum_{m=-N}^N a_{1,m} a_{2,n-m}. \quad (7)$$

Dabei ist besonders eindrücklich, dass der Multiplikationsterm in einen Faltungsterm übergeht (die Summe am Ende der Gleichungen), wie vom Faltungstheorem vorhergesagt. An der Form der Gleichungen ist abzulesen, dass eine Symmetrie bezüglich der komplexen Phase der Koeffizienten besteht. Die Gleichungen sind invariant unter der Transformation

$$a_{1,n} \longrightarrow a_{1,n} \exp(i\phi_1)$$

$$a_{2,n} \longrightarrow a_{2,n} \exp(i\phi_2)$$

$$a_{3,n} \longrightarrow a_{3,n} \exp(i\phi_3)$$

$$\text{wobei } \phi_3 = \phi_1 + \phi_2.$$

Gesucht sind demnach nicht unbedingt Koeffizienten, die *genau* die anfänglichen reproduzieren, es sind jeweils unabhängige Phasen für Feld eins und zwei erlaubt, die aber zusammen diejenige von Feld drei ergeben müssen. Mit dieser Bedingung lässt sich eine Funktion f definieren, welche die relevante Abweichung misst:

$$f(z) = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_n (|a_{i,n}(z)| - |a_{i,n}(0)|)^2 + \left(\left| \sum_n a_{i,n}(z) a_{i,n}^*(0) \right| - \sum_n |a_{i,n}(z) a_{i,n}^*(0)| \right)^2 \right) + (\text{Im}(a_{1,1}(z) a_{2,1}(z) a_{3,1}^*(z)) - \text{Im}(a_{1,1}(0) a_{2,1}(0) a_{3,1}^*(0)))^2 \quad (8)$$

Dabei prüft der erste Term, der quadriert wird, ob die Absolutbeträge der Koeffizienten gleich sind, der zweite, ob innerhalb eines Feldes die Phase der Koeffizienten übereinstimmt und der dritte, ob die Phasen der Felder eins und zwei zusammen die Phase des dritten Feldes ergibt. Da alle Beiträge nichtnegativ sind, verschwindet die Funktion $f(z)$ dann und nur dann, wenn jeder Beitrag null ist.

2.4 Ergebnisse

Tatsächlich beobachtet man exakte Periodizität geringer Periodenlänge (auf der Skala der Periode des Absolutbetrags) genau für Konfigurationen, in denen die Felder des Inputs jeweils nur aus einer einzigen Fouriermode bestehen. In diesem Fall reproduzieren sich die Anfangsbedingungen bis auf die numerische Ungenauigkeit der Lösungsfunktion. Je mehr Fouriermoden hinzugefügt werden, desto grösser ist die Interaktionslänge, nach der man annähernde Nullstellen der Fehlerfunktion $f(z)$ findet. Dies ergibt insofern Sinn, als wir Periodizitäten für jeden einzelnen Koeffizienten erhalten, die Fehlerfunktion aber nur dann verschwindet, wenn *alle* Periodenlängen an einem Punkt zusammenfallen. In dieser vereinfachten Betrachtung wäre die Interaktionslänge einfach das kleinste Gemeinsame Vielfache der einzelnen Periodenlängen. Durch die Nichtlinearität ergeben sich jedoch noch zusätzliche (einhüllende) Schwingungen, die ebenfalls mit den anderen zusammenfallen müssen. Dies reproduziert sehr gut die Ergebnisse des Doktoranden in meiner Arbeitsgruppe, der sich dem Problem aus einer etwas anderen Richtung nähert (nämlich ohne den Input von vornherein in eine Basis zu zerlegen), die ihn auf Diopantische Gleichungen für die Periodenlänge geführt haben. Abb. 3 zeigt den Verlauf der Fehlerfunktion für die Fälle von je einer, zwei und drei Fouriermoden in den Feldern eins und zwei. Das dritte Feld ist am Anfang identisch null. Einen Einfluss auf die Interaktionslänge, so

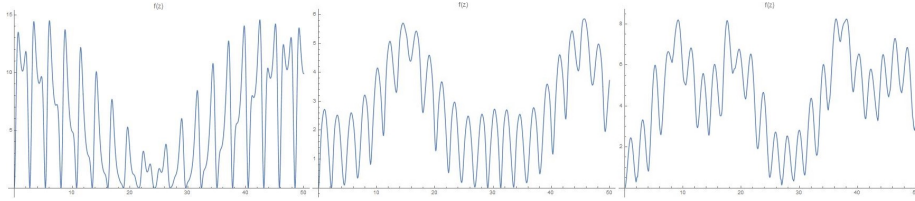


Abbildung 3: Fehlerfunktion: Von links nach rechts mit Input von einer, zwei und drei Fouriermoden, die gaussförmig verteilt sind. Alle Einheiten beliebig.

sie denn erkennbar ist, hat insbesondere der Wert der nichtlinearen Suszeptibilität $\chi^{(2)}$. So ist die Interaktionslänge ungefähr invers proportional zu $\chi^{(2)}$, was Sinn ergibt, wenn man sich vor Augen führt, dass dieser Wert die Stärke der Nichtlinearität und damit der Interaktion zwischen den Feldern wiedergibt.

2.4.1 Beispiel

Zur Illustration betrachten wir den folgenden Input: Moden in E_1 : $n = 4$ und 5 und E_2 : $n = 3$ und 4 , Länge des Kristalls in x -Rtg.: 10 , Länge des Kristalls in Propagationsrichtung z : 100 , Frequenzen $\omega_1 = \omega_2 = 5$, Brechungsindizes $n_1 = n_2 = 1,5$, $n_3 = 1,6$. Dies entspricht dem mittleren Bild in Abb. 3. Numerisch finden wir eine vielversprechende Nullstelle der Funktion bei $z = 31,3109$. Die Koeffizienten dort sind in der folgenden Tabelle aufgetragen.

Feld	Fouriermode n	Absolutbetrag	Input-Absolutbetrag
1	4	0.78	0.78
1	5	0.78	0.78
2	3	0.78	0.78
2	4	0.78	0.78
3	7	0.01	0.00
3	8	0.01	0.00
3	9	0.01	0.00

Der Absolutbetrag wird also gut reproduziert. Die Fehlerfunktion sorgt ebenfalls für eine Reproduktion der Phase, auf deren Darstellung ich hier jedoch verzichtet habe.

2.5 Schlussfolgerung, offene Fragen und weitere Schritte

Die Ergebnisse zeigen, dass der Ansatz des Zerlegens in Fouriermoden vielversprechend ist, eine grössere Zahl dieser das System jedoch chaotisch macht. Daher wäre es sinnvoll, die Untersuchung des Systems mit nur einer einzelnen komplexen Exponentialfunktion als Profil weiterzuführen. Hier zeigt sich gerade der Kern des Problems: Während Fourierentwicklung normalerweise erlaubt, jede Welle beziehungsweise jeden Koeffizienten einzeln anzuschauen und zu entwickeln, funktioniert dies hier nicht, da das Problem nichtlinear ist und die Wellen sich daher nicht einfach (additiv) überlagern, sondern gegenseitig beeinflussen. Mit einzelnen Moden könnte man zunächst überprüfen, welche Rolle die Systemparameter $\chi^{(2)}$, ω_i , Δk , n_i spielen und dann dazu übergehen, nicht eine Interaktionslänge zu suchen, nach der ein gegebener Input sich reproduziert, sondern bei gegebener Länge des Kristalls nach demjenigen Input suchen, der nach dieser Propagationsdistanz wiederkehrt. Das wäre dann noch ein Stück näher an einer echten Eigenfunktion.

2.6 Persönliche Einordnung

Das Projekt war eine sehr lohnenswerte Erfahrung, insbesondere, da mir überraschend viele Anwendungen des Erlernten aus den Kursen an der Uni begegnet sind. Bei manchen recht abstrakt-mathematischen Lerninhalten wie Faltungen oder Zahlentheorie hatte ich mich schon gefragt, warum das überhaupt wichtig ist. Diese Frage wurde im Laufe des Praktikums beantwortet. Ausserdem habe ich während des Praktikums den Umgang mit der Simulationssoftware Mathematica und dem Textverarbeitungssystem L^AT_EX gelernt. Der Austausch mit den anderen Mitgliedern des Teams war sehr hilfreich. Dabei hätte ich mir teilweise etwas nähere Betreuung gewünscht - gerade den Projektleiter Dr. Mazilu habe ich nur etwa wöchentlich getroffen, da er in der Zeit sehr beschäftigt mit einer Konferenz und der Veröffentlichung eines Papers war. Dies hat mich andererseits dazu gebracht, unabhängiger zu arbeiten und mit Problemen nicht auf die Hilfe anderer zu warten, sondern sie selbst zu lösen. Ausserdem konnte ich mich mit Fragen immer an Dr. Mazilus Promovenden Graeme wenden, dem ich sehr

dankbar bin. Insofern kann ich sagen, dass mich das Praktikum auf viele Arten weitergebracht hat und ich es nur herzlich weiterempfehlen kann. Für die Möglichkeit es durchzuführen möchte ich dem DAAD und Dr. Mazilu ganz herzlich danken.

3 Quellen, Literatur, Links

- Baumgartl, J. et al: Far Field subwavelength focusing using optical Eigenmodes, *Applied Physics Letters*, vol. 98, 2011
- New, G.: Introduction to Nonlinear Optics, Cambridge University Press, 2011
- Boyd, R.: Nonlinear Optics, Third Edition, Elsevier, 2009
- Link zu meinem GitHub-Account, wo die Mathematica-Notebooks gespeichert sind, die ich verwendet habe: <https://github.com/ManshaP/Internship-Optical-Eigenmodes>