## Содержание

# 1 Рубежный контроль 2

## 1.1 Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?

**Определение**.

События $A$ и $B$ называются несовместными, если их произведение пусто. В противном случае события $A$ и $B$ называются совместными.

**Определение**.

События $A$ и $B$ называются независимыми, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

**Как связаны**

Если события несовместные, то они не могут быть независимыми.

## 1.2 Сформулировать геометрическое определение вероятности.

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай, когда $|\Omega| = \infty$.

**Пусть**

1) $|\Omega| \subseteq R^n$;
2) $\mu(\Omega| < \infty$, где $\mu$ — некая мера. Если $n = 1$, то $\mu$ — это длина; если n = 2, то $\mu$ — площадь; если n = 3 — объём. Можно определить меры и при больших n;
3) Возможность принадлежности некоторого элементарного исхода случайного эксперимента событию $A \subseteq \Omega$ пропорциональна мере этого события и не зависит от формы события A и его расположения внутри $\Omega$.

Тогда **Определение**.

Вероятностью случайного события $A \subseteq \Omega$ называют число

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \tag{1}$$

## 1.3 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.

Для строгого аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события:

1) Данное выше определение события как произвольного подмножества множества $\Omega$ в случае бесконечного множества $\Omega$ приводит к противоречивой теории (см. парадокс Рассела);

2) Таким образом, необходимо в качестве события рассматривать не все возможные подмножества множества $\Omega$, а лишь некоторые из них;

3) Набор подмножеств множества $\Omega$, выбранных в качестве событий, должен обладать рядом свойств. Понятно, что если A и B — связанные со случайным экспериментом события и известно, что в результате эксперимента они произошли (или не произошли), то естественно знать, произошли ли события $A + b, A \cdot B, \dots$

Эти соображения приводят к следующему определению.

**Пусть**

1. $\Omega$ — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом; 2. $\beta \neq \varnothing$ — система (набор) подмножеств в множестве $\Omega$.

**Определение**.

$\beta$ называется сигма-алгеброй событий, если выполнены условия:

1) если $A \in \beta$, то $\overline{A} \in \beta$;
2) если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$, то $A_1 + \dots + A_n + \dots \in \beta$

**Свойства**

1) $\Omega \in \beta$;
2) $\varnothing \in \beta$;
3) если $A_1, \dots A_n, \dots \in \beta$, то $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots A_n \dots \in \beta$;
4) если $A_1, A_2 \in \beta$, то $A_1 \backslash A_2 \in \beta$

### 1.4 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.

**Пусть**

1) $\Omega$ — пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
2) $\beta$ — сигма-алгебра, заданная на $\Omega$.

**Определение**

Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция $P : \beta \to R$

1) $\forall A \in \beta => P(A) \geqslant 0$; (аксиома неотрицательности);
2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);
3) Если $A_1, \dots, A_n, \dots$ — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$ (расширенная аксиома сложения).

1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
2) $P(\varnothing) = 0$;
3) Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leqslant P(B)$;

4) $\forall A \in \beta : 0 \leqslant P(a) \leqslant 1$;

5) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где A, B $\in \beta$;

6) Для любого конечного набора событий $A_1, \dots, A_n$ верно

$$P(A_1+\dots+A_n) = +\sum_{1\leqslant i_1\leqslant n} P(A_{i_1}) - \sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant n} P(A_{i_1}, A_{i_2}) + \sum_{1\leqslant i_1\leqslant i_2\leqslant i_3\leqslant n} P(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}) - \dots \tag{2}$$

### 1.5 Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой?

**Аксиома сложения**

Сложение — для $\forall$ конечного набора попарно несовместных событий $A_1, \dots, A_n$ вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$.

**Расширенная Аксиома сложения**

Если $A_1, \dots, A_n, \dots$ — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$.

**Непрерывность**

Для любой неубывающей последовательности событий $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$ и события $A = \bigcup\limits_i A_i$ верно

$$P(A) = \lim_{i\to\infty} P(A_i). \tag{3}$$

**Связанность**

Из аксиомы сложения и непрерывности следует расширенная аксиома сложения.

### 1.6 Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.

**Пусть**

1) $A$ и $B$ — два события, связанные с одним случайным экспериментом;

2) дополнительно известно, что в результате произошло событие B и P(B) $>$ 0.

Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло B, называется число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0. \tag{4}$$

**Свойства**

1) P(A|B) $\subseteq$ 0;

2) $P(\Omega|B) = 1$;

3) $P(A_1 + \dots + A_n + \dots |B) = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \dots$.

### 1.7 Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

**Теорема**. Формула умножения вероятностей для двух событий

**Пусть**

1) A, B — события;

2) P(A) > 0.

Тогда P(AB) = P(A) P(B|A)

**Теорема** Формула умножения вероятностей для n событий

1) $A_1, \dots, A_n$ — события;

2) $P(A_1 \cdot \dots \cdot > 0)$.

Тогда

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1) \dots A_{n-1}). \tag{5}$$

### 1.8 Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?

Пусть  и  — два события, связанные с некоторым случайным экспериментом. Определение. События  и  называются независимыми, если () = () ().

Замечание. Разумеется, в качестве определения независимых событий логично было бы использовать условия ( | ) = () или ( | ) = () (6) Однако эти условия имеют смысл лишь тогда, когда () или () отлично от нуля. Условие же () = ()() «работает» всегда без ограничений.

### 1.9 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?

Определение. События 1, . . . ,  называется попарно независимыми, если   = ; ,   1, . . . ,   =  Определение. События 1, . . . ,  называются независимыми в совокупности, если 2, . . . ,   1 < 2 < . . . <  1 , . . . ,   = 1  · . . . ·   1 <- 2

### 1.10 Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?

Пусть $\Omega$ — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а $(\Omega, \ , \ )$ — вероятностное пространство этого случайного эксперимента. Определение. Говорят, что события 1, . . . , образуют полную группу событий, если 1. $() > 0, \ = 1, ;$ 2. $=$ при $=$ ; 3. $1 + \ldots + \ = \Omega$. Да, верно.

### 1.11 Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.

Теорема. Формула полной вероятности. Пусть 1. 1, . . . , — полная группа событий; 2. — событие. Тогда (это выражение называется формулой полной вероятности): $() = ( \mid 1)(1) + \ldots + ( \mid )()$

### 1.12 Сформулировать теорему о формуле Байеса.

Теорема. Пусть 1. 1, . . . , — полная группа событий; 2. $() > 0$.

### 1.13 Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний.

Определение.

### 1.14 Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.

Определение. Множество $\Omega$ всех исходов данного случайного эксперимента называют пространством элементарных исходов. 1. Каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы; 2. В результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в $\Omega$ элементарных исходов.

### 1.15 Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности

Свойства вероятности: 1. Вероятность $() > 0$ (неотрицательна). 2. $(\Omega) = 1$. 3. Если , — несовместные события, то $( + ) = () + ()$ Доказательство:

### 1.16 Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.

1. Некоторый случайный эксперимент произведён раз; 2. При этом некоторое наблюдаемое в этом эксперименте событие произошло раз.

У статистического определения полным-полно недостатков: 1. Никакой эксперимент не может быть произведён бесконечное много раз; 2. С точки зрения современной математики статистическое определение является архаизмом, т. к. не даёт достаточно базы для дальнейшего построения теории.

### 1.17 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства.

Для строгого аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события: 1. Данное выше определение события как произвольного подмножества множества $\Omega$ в случае бесконечного множества $\Omega$ приводит к противоречивой теории (см. парадокс Рассела); 2. Таким образом, необходимо в качестве события рассматривать не все возможные подмножества множества $\Omega$, а лишь некоторые из них; 3. Набор подмножеств множества $\Omega$, выбранных в качестве событий, должен обладать рядом свойств. Понятно, что если  и  — связанные со случайным экспериментом события и известно, что в результате эксперимента они произошли (или не произошли), то естественно знать, произошли ли события + , · , -, . . . Эти соображения приводят к следующему определению. Пусть 1. $\Omega$ — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом; 2. = — система (набор) подмножеств в множестве $\Omega$. Определение. называется сигма-алгеброй событий, если выполнены условия: 1. Если , то ; 2. Если 1, . . . , , . . . , то 1 + . . . + + . . . Свойства: 1. $\Omega$ ; 2. ; 3. Если 1, . . . , , . . . , то 1 · . . . · . . . ; 4. Если , ; то r Доказательства:

### 1.18 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.

усть 1. $\Omega$ — пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента; 2. — сигма-алгебра, заданная на $\Omega$. Определение. Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция : → R 1. = () > 0 (аксиома неотрицательности); 2. ($\Omega$) = 1 (аксиома нормированности); 3. Если 1, . . . , , . . . — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: (1 + . . . + + . . .) = (1) + . . . + () + . . . (расширенная аксиома сложения).

Доказательства:

### 1.19 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.

Пусть 1. $\Omega$ — пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента; 2.  — сигма-алгебра, заданная на $\Omega$. Определение. Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция  :  $\to$ R 1.  = () > 0 (аксиома неотрицательности); 2. ($\Omega$) = 1 (аксиома нормированности); 3. Если 1, . . . , , . . . — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: (1 + . . . +  + . . .) = (1) + . . . + () + . . . (расширенная аксиома сложения).

Формулировка:

### 1.20 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.

Пусть 1.  и  — два события, связанные с одним случайным экспериментом; 2. Дополнительно известно, что в результате эксперимента произошло событие . Определение. Условной вероятностью осуществления события  при условии, что произошло , называется число

Теорема: Пусть 1. Зафиксировано событие , () = 0; 2. ( | ) рассматривается как функция события . Тогда ( | ) обладает всеми свойствами безусловной вероятности. Доказательство:

### 1.21 Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

### 1.22 Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.

Пусть  и  — два события, связанные с некоторым случайным экспериментом. Определение. События  и  называются независимыми, если () = () (). Теорема. . . . 1. Пусть () > 0. Утверждение « и  — независимы» равносильно ( | ) = (); 2. Пусть () > 0. Утверждение « и  — независимы» равносильно ( | ) = ().

### 1.23 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.

Определение. События 1, . . . , называется попарно независимыми, если $=$ ; , 1, . . . , $=$ Определение. События 1, . . . , называются независимыми в совокупности, если 2, . . . , $1 < 2 < \ldots <$ 1 , . . . , $= 1 \cdot \ldots \cdot$ Пример. (Бернштейна) Рассмотрим правильный тетраэдр, на одной грани которого «написано» 1, второй — 2, третьей — 3, четвёртой — 1, 2, 3. Этот тетраэдр один раз подбрасывают. Событие 1 заключается в том, что на нижней грани «написано» 1; также введём 2 для 2, 3 для 3. Давайте покажем, что события 1, 2, 3 попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности. 1. Докажем, что они независимы попарно. Т. к. (1) $=$ 1 2 , (2) $=$ 1 2 , то (12) $=$ (1) (2) $= \frac{1}{4}$ Событие 12 означает, что на нижней грани присутствуют и 1, и 2. Всё аналогично для (13) $=$ (1)(3) и (23) $=$ (2)(3). 2. Проверим равенство (123) $=$ (1) (2) (3), которое, казалось бы, должно равняться 1/8 . Но произведение событий 1, 2, 3 означает, что на нижней грани присутствуют и 1, и 2, и 3, вероятность чего равна 1/4 . И выходит, что $1/4 = 1/8$ . Следовательно, события 1, 2, 3 не являются независимыми в совокупности.

### 1.24 Доказать теорему о формуле полной вероятности.

Пусть $\Omega$ — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а ($\Omega$, , ) — вероятностное пространство этого случайного эксперимента. Определение. Говорят. что события 1, . . . , образуют полную группу событий, если 1. () $> 0$, $= 1$, ; 2. $=$ при $=$ ; 3. $1 + \ldots + = \Omega$. Теорема. Формула полной вероятности. Пусть 1. 1, . . . , — полная группа событий; 2. — событие. Тогда (это выражение называется формулой полной вероятности): () $=$ ( | 1)(1) $+ \ldots +$ ( | )() Доказательство:

### 1.25 Доказать теорему о формуле Байеса.

Теорема

### 1.26 Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли..