Содержание

1 Рубежный контроль 2 **3**

1.1 Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий? . . . 3

1.2 Сформулировать геометрическое определение вероятности. . . . 3

1.3 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства. . . . 3

1.4 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности. . . . 4

1.5 Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой? . . . 5

1.6 Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства. . . . 5

1.7 Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий. . . . 6

1.8 Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления? . . . 6

1.9 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой? . . . 6

1.10 Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми? . . . 7

1.11 Сформулировать теорему о формуле полной вероятности. . . . 7

1.12 Сформулировать теорему о формуле Байеса. . . . 7

1.13 Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний. . . . 8

1.14 Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из n испытаний а) ровно k успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от k1 до k2 успехов. . . . 8

1.15 Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример. . . . 8

1.16 Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности . . . 9

1.17 Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки. . . . 10

1.18 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства. . . 10

1.19 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события. . . . 11
1.20 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств. 12
1.21 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности. 13
1.22 Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий. 13
1.23 Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления. 14
1.24 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе. 15
1.25 Доказать теорему о формуле полной вероятности. 16
1.26 Доказать теорему о формуле Байеса. 16
1.27 Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли. 17

1 Рубежный контроль 2

1.1 Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?

Определение.

События A и B называются несовместными, если их произведение пусто. В противном случае события A и B называются совместными.

Определение.

События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Как связаны

Если события несовместные, то они не могут быть независимыми.

1.2 Сформулировать геометрическое определение вероятности.

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай, когда $|\Omega| = \infty$.

Пусть

1) $|\Omega| \subseteq R^n$;
2) $\mu(\Omega| < \infty$, где μ — некая мера. Если $n = 1$, то μ — это длина; если n = 2, то μ — площадь; если n = 3 — объём. Можно определить меры и при больших n;
3) Возможность принадлежности некоторого элементарного исхода случайного эксперимента событию $A \subseteq \Omega$ пропорциональна мере этого события и не зависит от формы события A и его расположения внутри Ω.

Тогда **Определение**.

Вероятностью случайного события $A \subseteq \Omega$ называют число

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \tag{1}$$

1.3 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.

Для строгого аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события:

1) Данное выше определение события как произвольного подмножества множества Ω в случае бесконечного множества Ω приводит к противоречивой теории (см. парадокс Рассела);
2) Таким образом, необходимо в качестве события рассматривать не все возможные подмножества множества Ω, а лишь **некоторые из них**;

3) Набор подмножеств множества Ω, выбранных в качестве событий, должен обладать рядом свойств. Понятно, что если A и B — связанные со случайным экспериментом события и известно, что в результате эксперимента они произошли (или не произошли), то естественно знать, произошли ли события $A + B, A \cdot B, \ldots$

Эти соображения приводят к следующему определению.

Пусть

1) Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом;
2) $\beta \neq \varnothing$ — система (набор) подмножеств в множестве Ω.

Определение.

β называется сигма-алгеброй событий, если выполнены условия:

1) если $A \in \beta$, то $\overline{A} \in \beta$;
2) если $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \beta$, то $A_1 + \ldots + A_n + \ldots \in \beta$

Свойства

1) $\Omega \in \beta$;
2) $\varnothing \in \beta$;
3) если $A_1, \ldots\ A_n, \ldots \in \beta$, то $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots\ A_n \ldots \in \beta$;
4) если $A_1, A_2 \in \beta$, то $A_1 \backslash A_2 \in \beta$

1.4 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.

Пусть

1) Ω — пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
2) β — сигма-алгебра, заданная на Ω.

Определение

Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция $P : \beta \to R$

Аксиомы

1) $\forall A \in \beta => P(A) \geqslant 0$; (аксиома неотрицательности);
2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);
3) Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$ (расширенная аксиома сложения).

Свойства

1) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;
2) $P(\varnothing) = 0$;

3) Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leqslant P(B)$;

4) $\forall A \in \beta : 0 \leqslant P(A) \leqslant 1$;

5) $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где A, B $\in \beta$;

6) Для любого конечного набора событий $A_1, \ldots, A_n$ верно

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = + \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant n} P(A_{i_1}, A_{i_2}) + \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant n} P(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}) - \ldots \quad (2)$$

1.5 Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой?

Аксиома сложения

Сложение — для $\forall$ конечного набора попарно несовместных событий $A_1, \ldots A_n$ вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n)$.

Расширенная Аксиома сложения

Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \ldots + P(A_n) + \ldots$.

Непрерывность

Для любой неубывающей последовательности событий $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n \subseteq \ldots$ и события $A = \bigcup\limits_i A_i$ верно

$$P(A) = \lim_{i \to \infty} P(A_i). \quad (3)$$

Связанность

Из аксиомы сложения и непрерывности следует расширенная аксиома сложения.

1.6 Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.

Пусть

1) A и B — два события, связанные с одним случайным экспериментом;

2) дополнительно известно, что в результате произошло событие B и P(B) $>$ 0.

Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло событие B, называется число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0. \quad (4)$$

Свойства

1) $\mathrm{P(A|B)} \geqslant 0$;

2) $P(\Omega|B) = 1$;

3) $P(A_1 + \ldots + A_n + \ldots |B) = P(A_1|B) + \ldots + P(A_n|B) + \ldots$.

1.7 Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

Теорема. Формула умножения вероятностей для двух событий

Пусть

1) A, B — события;

2) $\mathrm{P(A)} > 0$.

Тогда $\mathrm{P(AB) = P(A)\ P(B|A)}$

Теорема Формула умножения вероятностей для n событий

1) $A_1, \ldots, A_n$ — события;

2) $P(A_1 \cdot \ldots \cdot A_n > 0)$.

Тогда

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \ldots \cdot A_{n-1}). \quad (5)$$

1.8 Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?

Пусть

A и B — два события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

Определение

События A и B называется независимыми, если

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (6)$$

Замечание

Разумеется, в качестве определения независимых событий логично было бы использовать условия $\mathrm{P(A|B) = P(A)}$ или $\mathrm{P(B|A) = P(B)}$. Однако эти условия имеют смысл лишь тогда, когда P(A) или P(B) отличны от нуля. Условие же $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ «работает» всегда.

1.9 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?

Определение

События $A_1, \ldots A_n$ называется попарно независимыми, если

$$\forall\forall i \neq j; i, j \in \{1, \ldots, n\} P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (7)$$

Определение

События $A_1, \ldots, A_n$ называется попарно независимыми в совокупности, если

$$\forall k \in \{2, \ldots, n\} \forall \forall i_1 < i_2 < \cdots < i_k : P(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}) \tag{8}$$

Как связаны

Из совокупности следует попарность.

1.10 Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?

Пусть Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а (Ω, β, P) — вероятностное пространство этого случайного эксперимента.

Определение

События $H_1, \ldots, H_n \in \beta$ образуют полную группу событий, если

1) $P(H_i) > 0, i = 1, n$;
2) $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$;
3) $H_1 + \ldots + H_n = \Omega$.

События из полной группы могут быть независимыми?

Нет, не могут быть, так как они несовместные.

1.11 Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.

Теорема Формула полной вероятности

Пусть

1) $H_1, \ldots, H_n$ — полная группа событий
2) $A \in \beta$ — событие.

Тогда (это выражение называется формулой полной вероятности):

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n) \tag{9}$$

1.12 Сформулировать теорему о формуле Байеса.

Теорема

Пусть

1) $H_1, \ldots, H_n$ — полная группа событий;
2) $P(A) > 0$.

Тогда

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \ldots + P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n}. \tag{10}$$

1.13 Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний.

Определение.

Схемой испытаний Бернули называется серия из однотипных экспериментов указанного вида, в которой отдельные испытания независимы, то есть вероятность реализации успеха в n-ом испытанни не зависит от исходов первого, второго, ..., i-1-ого испытаний.

Теорема

Пусть проводится серия из n испытаний по схеме Бернули с вероятностью успеха p. Тогда $P_n(k)$ есть вероятность того, что в серии из n испытаний произойдет ровно k успехов:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \tag{11}$$

1.14 Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из n испытаний а) ровно k успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от k1 до k2 успехов.

1) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;
2) $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P_n(0) = 1 - C_0^i p^0 q^{n-0} = 1 - q^n$;
3) $P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = \sum\limits_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$

1.15 Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.

Определение.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют пространством элементарных исходов.

1) Каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;
2) В результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в элементарных исходов.

Пример

Из колоды в 36 карт извлекают одну карту.

$$\Omega = \{6_{\text{пик},\dots\ ,T_{\text{пик}},6_{\text{треф}},\dots,\dots,T_{\text{червей}}}\}, |\Omega| = 36. \tag{12}$$

Можно определить событие $A =$ извлечена карта красной масти, то есть

$\text{A} = \{6_{\text{бубей}}, \dots, T_{\text{бубей}}, 6_{\text{червей}}, \dots, T_{\text{червей}}\}$,$|\text{A}| = 18$. Если в результате эксперимента извлечена 6, то все событие A целиком наступило.

Пусть

1) Ω — пространство исходов некоторого случайного эксперимента ($|\Omega| = \text{N} < \infty$);
2) по условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной элементарный исход остальным (в таком случает говорят, что все элементарные исходы равновозможны);
3) существует событие $A \subseteq \Omega$, мощность $|\text{A}| = N_A$

Определение

Вероятностью осуществления события A называется число

$$P(A) = \frac{N_A}{N}. \tag{13}$$

1.16 Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности

1) Ω — пространство исходов некоторого случайного эксперимента ($|\Omega| = \text{N} < \infty$);
2) по условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной элементарный исход остальным (в таком случает говорят, что все элементарные исходы равновозможны);
3) существует событие $A \subseteq \Omega$, мощность $|\text{A}| = N_A$

Определение

Вероятностью осуществления события A называется число

$$P(A) = \frac{N_A}{N}. \tag{14}$$

Свойства вероятности:

1) Вероятность $\text{P(A)} > 0$ (неотрицательна);
2) $P(\Omega) = 1$;
3) если A, B — несовместные события, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Доказательство

1) Т.к. $N_A \geqslant, N > 0 => P(A) = \frac{N_A}{N} \geqslant 0$.
2) Принимая во внимание, что $N_\Omega = |\Omega| = N$, получается $P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$.
3) Т.к. Ω — конечно, A, B $\subseteq \Omega$, то получается, что A, B конечны. Существует формула $|A + B| = |A| + |B| - |AB|$; Т.к A и B — несовместные, то $\text{AB} = \varnothing$, из чего следует, что $N_{a+b} = N_a + B_b$. Таким образом,

$$P(A + B) = \frac{N_{a+b}}{N} = \frac{N_a + N_b}{N} = \frac{N_a}{N} + \frac{N_b}{N} = P(A) + P(B). \tag{15}$$

1.17 Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.

1) Некоторый случайный эксперимент произведен n раз;
2) при этом некоторые наблюдаемое в этом эксперименте событие А произошло nA раз.

Определение

Вероятностью осуществление события А называют эмпирический (то есть найденный экспериментальный путем) предел:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} = \frac{n_a}{n}. \tag{16}$$

У статического определения полным-полно недостатков:

1) никакой эксперимент не может быть произведен бесконечное много раз;
2) с точки современной математики статическое определение является архаизмом, так как не дает достаточно базы для дальнейшего построения теории.

1.18 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства.

Для строгого аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события:

1) Данное выше определение события как произвольного подмножества множества Ω в случае бесконечного множества Ω приводит к противоречивой теории (см. парадокс Рассела);
2) Таким образом, необходимо в качестве события рассматривать не все возможные подмножества множества Ω, а лишь **некоторые из них**;
3) Набор подмножеств множества Ω, выбранных в качестве событий, должен обладать рядом свойств. Понятно, что если A и B — связанные со случайным экспериментом события и известно, что в результате эксперимента они произошли (или не произошли), то естественно знать, произошли ли события $A + B, A \cdot B, \ldots$

Эти соображения приводят к следующему определению.

Пусть

1) Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом;
2) $\beta \neq \varnothing$ — система (набор) подмножеств в множестве Ω.

Определение.

β называется сигма-алгеброй событий, если выполнены условия:

1) если $A \in \beta$, то $\overline{A} \in \beta$;

2) если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$, то $A_1 + \dots + A_n + \dots \in \beta$

Свойства

1) $\Omega \in \beta$;
2) $\varnothing \in \beta$;
3) если $A_1, \dots A_n, \dots \in \beta$, то $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \dots \in \beta$;
4) если $A_1, A_2 \in \beta$, то $A_1 \backslash A_2 \in \beta$

Доказательства

1) По определению $\beta \neq \varnothing \Rightarrow \exists A \subseteq Q : A \in \beta$; из определения сигма-алгебры (аксиома 1) $\exists (A + \overline{A}) \in \beta$; т.к $A + \overline{A} = \Omega$, то $\Omega \in \beta$.
2) Т.к. $\Omega \in \beta$, то, по аксиоме 1, $\overline{\Omega} \in \beta$, а $\overline{\Omega} = \varnothing \Rightarrow \varnothing \in \beta$.
3) Из существования событий $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$ по аксиоме 1 следует, что $\exists \overline{A_1}, \dots, \overline{A_n}, \dots, \in \beta$. По аксиоме 2 следует существование объединения $\exists \overline{A_1} + \dots + \overline{A_n} + \dots + \in \beta$, и из аксиомы 1 — существование дополнение этого объединения: $\overline{\overline{A_1} \cdot \dots \cdot \overline{A_n} \dots}, \in \beta \Rightarrow^{\text{Де-Морган}}$ $\overline{\overline{A_1}} \cdot \dots \cdot \overline{\overline{A_n}} \cdot \dots \in \beta$, что тривиально преобразуется в $A_1 \cdot \dots A_n \cdot \dots \in \beta$.
4) Из свойств операций над множествами можно заключить, что A B $= A \cdot \overline{B}$. По аксиоме 1, из B $\in \beta$ => $\overline{B} \in \beta$. По следствию 3, $A, \overline{B} \in \beta$ => $A \cdot \overline{B} \in \beta$, что является утверждением $A \backslash B \in \beta$

1.19 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.

Пусть

1) Ω — пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
2) β — сигма-алгебра, заданная на Ω.

Определение

Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция $P : \beta \to R$

1) $\forall A \in \beta$ => $P(A) \geqslant 0$; (аксиома неотрицательности);
2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);
3) Если $A_1, \dots, A_n, \dots$ — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$ (расширенная аксиома сложения).

Свойства с доказательствами

1) По аксиоме 2 сигма-алгебры $\exists A + \overline{A} = \Omega$; по аксиоме вероятности 2

   $P(\Omega) = 1 = P(A + \overline{A})$;

   по аксиоме вероятности 3 ($A, \overline{A}$ несовместны),

$P(A+\overline{A}) = P(A) + P(\overline{A}) = 1 \Rightarrow P(\overline{A}) = 1 - P(A)$;

2) $P(\varnothing) = P(\overline{\Omega})$; по свойству 1 $P(\varnothing) = 1 - P(\Omega) =$ $\Omega = 1$ (по аксиоме 2) $= 0$;

3) $A \subseteq B \Rightarrow B = A + (B \backslash A)$

Тогда $P(B) = P(A+(B\backslash A)) =$ A, B \ A несовместны, используем аксиому 3 $= P(A) =$ $P(B\backslash A) \geqslant P(A) \Rightarrow^{P(B\backslash A \geqslant 0 \text{по акс. 1})} P(B) \geqslant P(A)$.

1.20 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.

Пусть

1) Ω — пространство элементарных исходов случайного эксперимента;

2) β — сигма-алгебра, заданная на Ω.

Определение

Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция $P : \beta \to R$

1) $\forall A \in \beta => P(A) \geqslant 0$; (аксиома неотрицательности);

2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);

3) Если $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \cdots + A_n + \ldots) = P(A_1) + \cdots + P(A_n) + \ldots$ (расширенная аксиома сложения).

Свойства с доказательствами

1) $\forall A, B : A + B = A + (B\backslash A)$, при этом $A \cdot (B\backslash A) = \varnothing$. В соответствии с аксиомой 3,

$$P(A+B) = P(A) + P(B\backslash A) \tag{17}$$

B = AB + (B \ A),

причем (AB)(B \ A) = $\varnothing$

По аксиоме 3, имеем $P(B) = P(AB) + P(B\backslash A) \Rightarrow P(B\backslash A) = P(B) - P(AB)$. Подставим результат 17 и получим

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB), A, B \in \beta \tag{18}$$

2) Для любого конечного набора событий $A_1, \ldots, A_n$ верно

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = + \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant n} P(A_{i_1}, A_{i_2}) + \sum_{1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant i_3 \leqslant n} P(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}) - \ldots \tag{19}$$

1.21 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.

Пусть

1) A и B — два события, связанные с одним случайным экспериментом;
2) дополнительно известно, что в результате произошло событие B и P(B) > 0.

Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло B, называется число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0. \tag{20}$$

Свойства

1) $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} => P(A|B) \geqslant 0.$
2) $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$
3) $P(A_1 + \dots + A_n + \dots |B) =$
$= \frac{P((A_1+\dots+A_n+\dots)B)}{P(B)} =$
$= \frac{1}{P(B)} \cdot P(A_1B + A_2B + \cdot + A_nB + \dots) = A_i, A_j$ несовместны,
$i \neq j; A_iB \subseteq A_i, A_jB \subseteq A_j \Rightarrow (A_iB) \bigcap (A_jB) = \varnothing$, и тогда по аксиоме вероятности 3
$= \frac{1}{P(B)} \cdot [P(A_1B) + \dots + P(A_nB) + \dots] =$ (ряд) $\frac{P(A_1B)}{P(B)} + \dots + \frac{P(A_nB)}{P(B)} + \dots = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \dots .$

1.22 Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

Теорема. Формула умножения вероятностей для двух событий

Пусть

1) A, B — события;
2) P(A) > 0.

Тогда P(AB) = P(A) P(B|A)

Доказательство.

Т.к. P(A) > 0, то определена условная вероятность

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \tag{21}$$

из чего напрямую следует

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \tag{22}$$

Теорема

Формула умножения вероятностей для n событий

Пусть

1) $A_1, \dots A_n$ — события;
2) $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) > 0$.

Тогда

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) \tag{23}$$

Доказательство

1) Обозначив $k = \overline{1, n-1}$, имеем $A_1 \cdot \dots \cdot A_k \supseteq A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}$. По свойству 3 вероятности $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_k) \geqslant P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) > 0$. Следовательно, все условные вероятности, входящие в первую часть доказываемой формулы, определены, и можно задавать условные вероятности по типу $P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1})$, и, следовательно, можно пользоваться формулой умножения вероятностей для двух событий.
2) Последовательно применим формулу умножения вероятностей для двух событий $(P(A_{mf}B_{mf}) = P(A_{mf})P(B_{mf}|A_{mf}))$:
$P(\underbrace{A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}}_{A_{mf_1}} \cdot \underbrace{A_n}_{B_{mf_1}}) =$
$\overbrace{P(\underbrace{A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2}}_{A_{mf_2}} \cdot \underbrace{A_{n-1}}_{B_{mf_2}})}^{A_{mf1}} \cdot P(\overbrace{A_n}^{B_{mf_1}} | \overbrace{A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}}^{A_{mf_1}}) =$
$\overbrace{P(\underbrace{A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-3} \cdot A_{n-2}}_{A_{mf_3}} \cdot \underbrace{A_{n-1}}_{B_{mf_3}})}^{A_{mf_2}} \cdot P(\overbrace{A_{n-1}}^{B_{mf_2}} | \overbrace{A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2}}^{A_{mf_2}}) \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) =$
$= \dots =$
$= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})$

1.23 Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.

Пусть A и B — два события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

Определение

События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$.

Теорема

1) Пусть P(B) > 0. Утверждение «A и B — независимы» равносильно P(A|B) = P(A);
2) Пусть P(A) > 0. Утверждение «A и B — независимы» равносильно P(B|A) = P(B);

Доказательство

1) Сначала докажем, что если A и B — независимые, то P(A|B) = P(A). По определению независимых событий, P(AB) = P(A)P(B). По определению условной вероятности,

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \tag{24}$$

Теперь докажем обратное Пусть $P = (A|B) = P(A)$.

Докажем, что $P(AB) = P(A)P(B)$

$$P(AB) \overset{\text{по формуле умножения вероятностей}}{=} P(B) \cdot \overset{=P(A)}{P(A|B)} = P(B)P(A) \tag{25}$$

2) Доказательство второго пункта теоремы аналогично.

1.24 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.

Определение

События $A_1, \ldots A_n$ называется попарно независимыми, если

$$\forall \forall i \neq j; i, j \in \{1, \ldots, n\} P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \tag{26}$$

Определение

События $A_1, \ldots A_n$ называется попарно независимыми в совокупности, если

$$\forall k \in \{2, \ldots, n\} \forall \forall i_1 < i_2 < \cdots < i_k : P(A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \ldots \cdot P(A_{i_k}) \tag{27}$$

Пример. (Бернштейна)

Рассмотрим правильный тетраэдр, на одной грани которого «написано» 1, второй — 2, третьей — 3, четвёртой — 1, 2, 3.

Этот тетраэдр один раз подбрасывают.

Событие A_1 заключается в том, что на нижней грани «написано» 1; также введём A_2 для 2, A_3 для 3. Давайте покажем, что события A_1, A_2, A_3 попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

1) Докажем, что они независимы попарно. Т. к. $P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{2}$, то $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{4}$

   Событие A_1A_2 означает, что на нижней грани присутствуют и 1, и 2. Всё аналогично для $P(A1A3) = P(A_1)P(A_3)$ и $P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$.

2) Проверим равенство $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, которое, казалось бы, должно равняться $\frac{1}{8}$. Но произведение событий A_1, A_2, A_3 означает, что на нижней грани присутствуют и 1, и 2, и 3, вероятность чего равна $\frac{1}{4}$.

И выходит, что $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$.

Следовательно, события A_1, A_2, A_3 не являются независимыми в совокупности.

1.25 Доказать теорему о формуле полной вероятности.

Пусть Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а (Ω, β, P) — вероятностное пространство этого случайного эксперимента.

Определение. Говорят, что события $H_1, ..., H_n \in \beta$ образуют полную группу событий, если:

1) $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$;
2) $H_i H_j = \varnothing$, при $i \neq j$;
3) $H_1 + ... + H_n = \Omega$.

Теорема. Формула полной вероятности. Пусть

1) $H_1, ..., H_n$ — полная группа событий;
2) $A \in \beta$ — событие.

Тогда (это выражение называется формулой полной вероятности):

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n) \tag{28}$$

Доказательство

1) $A = A\Omega \overset{\Omega = H_1 + ... + H_n}{=} A \cdot (H_1 + ... + H_n) = AH_1 + ... + AH_n$.

   Принимая $i \neq j : H_i \neq \varnothing$, но $(AH_i) \subseteq H_i, (AH_j) \subseteq H_j \implies (AH_i)(AH_j) = \varnothing$, т. е. AH_i попарно не пересекаются.

2) Тогда

$$P(A) = P(AH_1 + ... + AH_n) \overset{AH_i \text{ попарно не пересекаются}}{=}$$
$$= P(AH_1) + ... + P(AH_n) \overset{\text{т. к. } P(H_i)>0, \text{то } P(AH_i) = P(H_i)P(A|H_i)}{=}$$
$$= P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n)$$

1.26 Доказать теорему о формуле Байеса.

Теорема. Пусть

1) $H_1, ..., H_n$ — полная группа событий;
2) $P(A) > 0$.

Тогда

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n} \tag{29}$$

Доказательство.

$$P(H_i|A) \overset{\text{по опр. условной вероятности}}{=}$$

$$= \frac{P(AH_i)}{P(A)} \overset{\text{по ф-ле умножения в числителе, полной вер-ти в знаменателе}}{=}$$

$$= P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + ... + P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n}$$

1.27 Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли.

Теорема. Пусть проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p. Тогда $P_n(k)$ есть вероятность того, что в серии испытаний произойдет ровно k успехов:

$$P_n(k) = C_k^k p^k q^{n-k} \tag{30}$$

Доказательство

1) Результат проведения серии из n экспериментов запишем с использованием кортежа $(x_1, ..., x_n)$, где

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ если в испытаниях имел место успех;} \\ 0, \text{ если в испытании имела место неудача;} \end{cases} \tag{31}$$

2) Пусть

$$A = \{ \text{ в серии из } n \text{ испытаний произошло ровно } k \text{ успехов } \} \tag{32}$$

Тогда A состоит из кортежей, в которых будет ровно k единиц из $n - k$ нулей.

В событии A будет столько элементарных исходов, сколькими способами можно расставить k единиц по n позициям. Каждая такая расстановка однозначно определяется номерами позиций, в которых будут записаны единицы. В остальные позиции буду записаны нули.

Выбрать k позиций из имеющихся n можно C_n^k способами. Вероятность каждого отдельного исхода равна произведению вероятностей каждого отдельного x_i, и тогда общая вероятность исхода будет равна $p^k q^{n-k}$.

Все испытания независимы; следовательно, все кортежи из A равновероятны, и их C_k^n штук, что означает

$$P_n(k) = C_k^k p^k q^{n-k} \tag{33}$$