

## Содержание

<b>1 Рубежный контроль 2</b>	<b>3</b>
1.1 Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий? . . . . .	3
1.2 Сформулировать геометрическое определение вероятности. . . . .	3
1.3 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства. . . . .	3
1.4 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности. . . . .	4
1.5 Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой? .	5
1.6 Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства. . . .	5
1.7 Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий. . . . .	6
1.8 Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления? . . . . .	6
1.9 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой? . . . . .	7
1.10 Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми? . . . . .	7
1.11 Сформулировать теорему о формуле полной вероятности. . . . .	7
1.12 Сформулировать теорему о формуле Байеса. . . . .	8
1.13 Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно $k$ успехов в серии из $n$ испытаний. . . . .	8
1.14 Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из $n$ испытаний а) ровно $k$ успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от $k_1$ до $k_2$ успехов. . . . .	8
1.15 Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример. . . . .	8
1.16 Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности . . . . .	9
1.17 Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки. . . . .	10

1.18 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства. . . . .	10
1.19 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события. . . . .	11
1.20 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств. . . . .	12
1.21 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности. . . . .	13
1.22 Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий. . . . .	13
1.23 Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления. . . . .	15
1.24 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе. . . .	15
1.25 Доказать теорему о формуле полной вероятности. . . . .	16
1.26 Доказать теорему о формуле Байеса. . . . .	17
1.27 Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно $k$ успехов в серии из $n$ испытаний по схеме Бернулли. . . . .	17

## 1 Рубежный контроль 2

### 1.1 Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?

**Определение.**

События  $A$  и  $B$  называются несовместными, если их произведение пусто. В противном случае события  $A$  и  $B$  называются совместными.

**Определение.**

События  $A$  и  $B$  называются независимыми, если  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ .

**Как связаны**

Если события несовместные, то они не могут быть независимыми.

### 1.2 Сформулировать геометрическое определение вероятности.

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай, когда  $|\Omega| = \infty$ .

**Пусть**

- 1)  $|\Omega| \subseteq R^n$ ;
- 2)  $\mu(\Omega) < \infty$ , где  $\mu$  — некая мера. Если  $n = 1$ , то  $\mu$  — это длина; если  $n = 2$ , то  $\mu$  — площадь; если  $n = 3$  — объём. Можно определить меры и при больших  $n$ ;
- 3) Возможность принадлежности некоторого элементарного исхода случайного эксперимента событию  $A \subseteq \Omega$  пропорциональна мере этого события и не зависит от формы события  $A$  и его расположения внутри  $\Omega$ .

Тогда **Определение.**

Вероятностью случайного события  $A \subseteq \Omega$  называют число

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \quad (1)$$

### 1.3 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.

Для строгого аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события:

- 1) Данное выше определение события как произвольного подмножества множества  $\Omega$  в случае бесконечного множества  $\Omega$  приводит к противоречивой теории (см. парадокс Рассела);

- 2) Таким образом, необходимо в качестве события рассматривать не все возможные подмножества множества  $\Omega$ , а лишь **некоторые из них**;
- 3) Набор подмножеств множества  $\Omega$ , выбранных в качестве событий, должен обладать рядом свойств. Понятно, что если  $A$  и  $B$  — связанные со случайным экспериментом события и известно, что в результате эксперимента они произошли (или не произошли), то естественно знать, произошли ли события  $A + B, A \cdot B, \dots$

Эти соображения приводят к следующему определению.

**Пусть**

- 1)  $\Omega$  — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом;
- 2)  $\beta \neq \emptyset$  — система (набор) подмножеств в множестве  $\Omega$ .

**Определение.**

$\beta$  называется сигма-алгеброй событий, если выполнены условия:

- 1) если  $A \in \beta$ , то  $\bar{A} \in \beta$ ;
- 2) если  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$ , то  $A_1 + \dots + A_n + \dots \in \beta$

**Свойства**

- 1)  $\Omega \in \beta$ ;
- 2)  $\emptyset \in \beta$ ;
- 3) если  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$ , то  $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \beta$ ;
- 4) если  $A_1, A_2 \in \beta$ , то  $A_1 \setminus A_2 \in \beta$

#### 1.4 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.

**Пусть**

- 1)  $\Omega$  — пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
- 2)  $\beta$  — сигма-алгебра, заданная на  $\Omega$ .

**Определение**

Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция  $P : \beta \rightarrow R$

**Аксиомы**

- 1)  $\forall A \in \beta \Rightarrow P(A) \geq 0$ ; (аксиома неотрицательности);
- 2)  $P(\Omega) = 1$  (аксиома нормированности);
- 3) Если  $A_1, \dots, A_n, \dots$  — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности:  
 $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$  (расширенная аксиома сложения).

**Свойства**

- 1)  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ;
- 2)  $P(\emptyset) = 0$ ;
- 3) Если  $A \subseteq B$ , то  $P(A) \leq P(B)$ ;
- 4)  $\forall A \in \beta : 0 \leq P(A) \leq 1$ ;
- 5)  $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ , где  $A, B \in \beta$ ;
- 6) Для любого конечного набора событий  $A_1, \dots, A_n$  верно

$$P(A_1 + \dots + A_n) = + \sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}) - \dots \quad (2)$$

**1.5 Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой?**

#### **Аксиома сложения**

Сложение — для  $\forall$  конечного набора попарно несовместных событий  $A_1, \dots, A_n$  вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей каждого из них по отдельности:  $P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$ .

#### **Расширенная Аксиома сложения**

Если  $A_1, \dots, A_n, \dots$  — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности:  $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$ .

#### **Непрерывность**

Для любой неубывающей последовательности событий  $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$  и события  $A = \bigcup_i A_i$  верно

$$P(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i). \quad (3)$$

#### **Связанность**

Из аксиомы сложения и непрерывности следует расширенная аксиома сложения.

**1.6 Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.**

#### **Пусть**

- 1)  $A$  и  $B$  — два события, связанные с одним случайным экспериментом;
- 2) дополнительно известно, что в результате произошло событие  $B$  и  $P(B) > 0$ .

Условной вероятностью осуществления события  $A$  при условии, что произошло событие  $B$ , называется число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0. \quad (4)$$

### Свойства

- 1)  $P(A|B) \geq 0$ ;
- 2)  $P(\Omega|B) = 1$ ;
- 3)  $P(A_1 + \dots + A_n + \dots | B) = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \dots$

### 1.7 Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

**Теорема.** Формула умножения вероятностей для двух событий

**Пусть**

- 1)  $A, B$  — события;
- 2)  $P(A) > 0$ .

Тогда  $P(AB) = P(A) P(B|A)$

**Теорема** Формула умножения вероятностей для  $n$  событий

- 1)  $A_1, \dots, A_n$  — события;
- 2)  $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) > 0$ .

Тогда

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}). \quad (5)$$

### 1.8 Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?

**Пусть**

$A$  и  $B$  — два события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

**Определение**

События  $A$  и  $B$  называется независимыми, если

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (6)$$

**Замечание**

Разумеется, в качестве определения независимых событий логично было бы использовать условия  $P(A|B) = P(A)$  или  $P(B|A) = P(B)$ . Однако эти условия имеют смысл лишь тогда, когда  $P(A)$  или  $P(B)$  отличны от нуля. Условие же  $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$  «работает» всегда.

**1.9 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?**

**Определение**

События  $A_1, \dots, A_n$  называется попарно независимыми, если

$$\forall i \neq j; i, j \in \{1, \dots, n\} P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (7)$$

**Определение**

События  $A_1, \dots, A_n$  называется попарно независимыми в совокупности, если

$$\forall k \in \{2, \dots, n\} \forall i_1 < i_2 < \dots < i_k : P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}) \quad (8)$$

**Как связаны**

Из совокупности следует попарность.

**1.10 Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?**

Пусть  $\Omega$  — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а  $(\Omega, \beta, P)$  — вероятностное пространство этого случайного эксперимента.

**Определение**

События  $H_1, \dots, H_n \in \beta$  образуют полную группу событий, если

- 1)  $P(H_i) > 0, i = 1, n;$
- 2)  $H_i H_j = \emptyset$  при  $i \neq j;$
- 3)  $H_1 + \dots + H_n = \Omega.$

**События из полной группы могут быть независимыми?**

Нет, не могут быть, так как они несовместные.

**1.11 Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.**

**Теорема** Формула полной вероятности

**Пусть**

- 1)  $H_1, \dots, H_n$  — полная группа событий
- 2)  $A \in \beta$  — событие.

Тогда (это выражение называется формулой полной вероятности):

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n) \quad (9)$$

### 1.12 Сформулировать теорему о формуле Байеса.

#### Теорема

Пусть

- 1)  $H_1, \dots, H_n$  — полная группа событий;
- 2)  $P(A) > 0$ .

Тогда

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

### 1.13 Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно $k$ успехов в серии из $n$ испытаний.

#### Определение.

Схемой испытаний Бернулли называется серия из однотипных экспериментов указанного вида, в которой отдельные испытания независимы, то есть вероятность реализации успеха в  $n$ -ом испытании не зависит от исходов первого, второго,  $\dots$ ,  $i$ -1-ого испытаний.

#### Теорема

Пусть проводится серия из  $n$  испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха  $p$ . Тогда  $P_n(k)$  есть вероятность того, что в серии из  $n$  испытаний произойдет ровно  $k$  успехов:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (11)$$

### 1.14 Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из $n$ испытаний а) ровно $k$ успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от $k_1$ до $k_2$ успехов.

- 1)  $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ ;
- 2)  $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P_n(0) = 1 - C_n^0 p^0 q^{n-0} = 1 - q^n$ ;
- 3)  $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$

### 1.15 Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.

#### Определение.



Множество  $\Omega$  всех исходов данного случайного эксперимента называют пространством элементарных исходов.

- 1) Каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;
- 2) В результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в элементарных исходов.

### Пример

Из колоды в 36 карт извлекают одну карту.

$$\Omega = \{6_{\text{пик}}, \dots, T_{\text{пик}}, 6_{\text{треф}}, \dots, T_{\text{червей}}\}, |\Omega| = 36. \quad (12)$$

Можно определить событие  $A$  = извлечена карта красной масти, то есть  $A = \{6_{\text{бубей}}, \dots, T_{\text{бубей}}, 6_{\text{червей}}, \dots, T_{\text{червей}}\}$ ,  $|A| = 18$ . Если в результате эксперимента извлечена 6, то все событие  $A$  целиком наступило.

### Пусть

- 1)  $\Omega$  — пространство исходов некоторого случайного эксперимента ( $|\Omega| = N < \infty$ );
- 2) по условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной элементарный исход остальным (в таком случае говорят, что все элементарные исходы равновозможны);
- 3) существует событие  $A \subseteq \Omega$ , мощность  $|A| = N_A$

### Определение

Вероятностью осуществления события  $A$  называется число

$$P(A) = \frac{N_A}{N}. \quad (13)$$

## 1.16 Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности

- 1)  $\Omega$  — пространство исходов некоторого случайного эксперимента ( $|\Omega| = N < \infty$ );
- 2) по условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной элементарный исход остальным (в таком случае говорят, что все элементарные исходы равновозможны);
- 3) существует событие  $A \subseteq \Omega$ , мощность  $|A| = N_A$

### Определение

Вероятностью осуществления события  $A$  называется число

$$P(A) = \frac{N_A}{N}. \quad (14)$$

Свойства вероятности:

- 1) Вероятность  $P(A) > 0$  (неотрицательна);
- 2)  $P(\Omega) = 1$ ;
- 3) если  $A, B$  — несовместные события, то  $P(A + B) = P(A) + P(B)$ .

#### Доказательство

- 1) Т.к.  $N_A \geqslant, N > 0 \Rightarrow P(A) = \frac{N_A}{N} \geqslant 0$ .
- 2) Принимая во внимание, что  $N_\Omega = |\Omega| = N$ , получается  $P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$ .
- 3) Т.к.  $\Omega$  — конечно,  $A, B \subseteq \Omega$ , то получается, что  $A, B$  конечны. Существует формула  $|A + B| = |A| + |B| - |AB|$ ; Т.к.  $A$  и  $B$  — несовместные, то  $AB = \emptyset$ , из чего следует, что  $N_{a+b} = N_a + N_b$ . Таким образом,

$$P(A + B) = \frac{N_{a+b}}{N} = \frac{N_a + N_b}{N} = \frac{N_a}{N} + \frac{N_b}{N} = P(A) + P(B). \quad (15)$$

#### 1.17 Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.

- 1) Некоторый случайный эксперимент произведен  $n$  раз;
- 2) при этом некоторое наблюдаемое в этом эксперименте событие  $A$  произошло  $n_A$  раз.

#### Определение

Вероятностью осуществления события  $A$  называют эмпирический (то есть найденный экспериментальным путем) предел:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}. \quad (16)$$

У статического определения полным-полно недостатков:

- 1) никакой эксперимент не может быть произведен бесконечное много раз;
- 2) с точки современной математики статическое определение является архаизмом, так как не дает достаточно базы для дальнейшего построения теории.

#### 1.18 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства.

Для строгого аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события:

- 1) Данное выше определение события как произвольного подмножества множества  $\Omega$  в случае бесконечного множества  $\Omega$  приводит к противоречивой теории (см. парадокс Рассела);
- 2) Таким образом, необходимо в качестве события рассматривать не все возможные подмножества множества  $\Omega$ , а лишь **некоторые из них**;

- 3) Набор подмножеств множества  $\Omega$ , выбранных в качестве событий, должен обладать рядом свойств. Понятно, что если  $A$  и  $B$  — связанные со случайным экспериментом события и известно, что в результате эксперимента они произошли (или не произошли), то естественно знать, произошли ли события  $A + B, A \cdot B, \dots$

Эти соображения приводят к следующему определению.

**Пусть**

- 1)  $\Omega$  — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом;
- 2)  $\beta \neq \emptyset$  — система (набор) подмножеств в множестве  $\Omega$ .

**Определение.**

$\beta$  называется сигма-алгеброй событий, если выполнены условия:

- 1) если  $A \in \beta$ , то  $\bar{A} \in \beta$ ;
- 2) если  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$ , то  $A_1 + \dots + A_n + \dots \in \beta$

**Свойства**

- 1)  $\Omega \in \beta$ ;
- 2)  $\emptyset \in \beta$ ;
- 3) если  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$ , то  $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \beta$ ;
- 4) если  $A_1, A_2 \in \beta$ , то  $A_1 \setminus A_2 \in \beta$

**Доказательства**

- 1) По определению  $\beta \neq \emptyset \Rightarrow \exists A \subseteq \Omega : A \in \beta$ ; из определения сигма-алгебры (аксиома 1)  $\exists (A + \bar{A}) \in \beta$ ; т.к.  $A + \bar{A} = \Omega$ , то  $\Omega \in \beta$ .
- 2) Т.к.  $\Omega \in \beta$ , то, по аксиоме 1,  $\bar{\Omega} \in \beta$ , а  $\bar{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \beta$ .
- 3) Из существования событий  $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$  по аксиоме 1 следует, что  $\exists \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, \dots \in \beta$ , и из аксиомы 1 — существование дополнение этого объединения:  $\overline{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, \dots} \in \beta \Rightarrow$  Де-Морган  $\bar{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, \dots} \in \beta$ , что тривиально преобразуется в  $A_1 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \beta$ .

**1.19 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.**

**Пусть**

- 1)  $\Omega$  — пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
- 2)  $\beta$  — сигма-алгебра, заданная на  $\Omega$ .

**Определение**

Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция  $P : \beta \rightarrow R$

- 1)  $\forall A \in \beta \Rightarrow P(A) \geq 0$ ; (аксиома неотрицательности);

- 2)  $P(\Omega) = 1$  (аксиома нормированности);
- 3) Если  $A_1, \dots, A_n, \dots$  — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности:  
 $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$  (расширенная аксиома сложения).

#### Свойства с доказательствами

- 1) По аксиоме 2 сигма-алгебры  $\exists A + \bar{A} = \Omega$ ; по аксиоме вероятности 2  
 $P(\Omega) = 1 = P(A + \bar{A})$ ;  
 по аксиоме вероятности 3 ( $A, \bar{A}$  несовместны),  
 $P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ ;
- 2)  $P(\emptyset) = P(\bar{\Omega})$ ; по свойству 1  $P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = 1 - 1 = 0$  (по аксиоме 2);
- 3)  $A \subseteq B \Rightarrow B = A + (B \setminus A)$  Тогда  $P(B) = P(A + (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A)$  (так как  $A, B \setminus A$  несовместны, используем аксиому 3)  $P(B) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A) \Rightarrow P(B \setminus A) \geq 0$  по акс. 1)  $P(B) \geq P(A)$ .

**1.20 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.**

Пусть

- 1)  $\Omega$  — пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
- 2)  $\beta$  — сигма-алгебра, заданная на  $\Omega$ .

#### Определение

Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция  $P : \beta \rightarrow R$

- 1)  $\forall A \in \beta \Rightarrow P(A) \geq 0$ ; (аксиома неотрицательности);
- 2)  $P(\Omega) = 1$  (аксиома нормированности);
- 3) Если  $A_1, \dots, A_n, \dots$  — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности:  
 $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$  (расширенная аксиома сложения).

#### Свойства с доказательствами

- 1)  $\forall A, B : A + B = A + (B \setminus A)$ , при этом  $A \cdot (B \setminus A) = \emptyset$ . В соответствии с аксиомой 3,

$$P(A + B) = P(A) + P(B \setminus A) \quad (17)$$

$$B = AB + (B \setminus A),$$

$$\text{причем } (AB)(B \setminus A) = \emptyset$$

По аксиоме 3, имеем  $P(B) = P(AB) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$ . Подставим результат 17 и получим

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB), A, B \in \beta \quad (18)$$

2) Для любого конечного набора событий  $A_1, \dots, A_n$  верно

$$P(A_1 + \dots + A_n) = + \sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}) - \dots \quad (19)$$

**1.21 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.**

**Пусть**

- 1)  $A$  и  $B$  — два события, связанные с одним случайным экспериментом;
- 2) дополнительно известно, что в результате произошло событие  $B$  и  $P(B) > 0$ .

Условной вероятностью осуществления события  $A$  при условии, что произошло  $B$ , называется число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0. \quad (20)$$

**Свойства**

- 1)  $P(A_1 + \dots + A_n + \dots | B) = \frac{P((A_1 + \dots + A_n + \dots)B)}{P(B)}$   
 $= \frac{1}{P(B)} \cdot P(A_1B + A_2B + \dots + A_nB + \dots) = A_i, A_j$  несовместны,  
 $i \neq j; A_iB \subseteq A_i, A_jB \subseteq A_j \Rightarrow (A_iB) \cap (A_jB) = \emptyset$ , и тогда по аксиоме вероятности 3  
 $= \frac{1}{P(B)} \cdot [P(A_1B) + \dots + P(A_nB) + \dots] = (\text{ряд}) \frac{P(A_1B)}{P(B)} + \dots + \frac{P(A_nB)}{P(B)} + \dots =$   
 $P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \dots$
- 2) Для любого конечного набора событий  $A_1, \dots, A_n$  верно

$$P(A_1 + \dots + A_n) = + \sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}) - \dots \quad (21)$$

**1.22 Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.**

**Теорема.** Формула умножения вероятностей для двух событий

**Пусть**

- 1)  $A, B$  — события;
- 2)  $P(A) > 0$ .

Тогда  $P(AB) = P(A) P(B|A)$

**Доказательство.**

Т.к.  $P(A) > 0$ , то определена условная вероятность

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (22)$$

из чего напрямую следует

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad (23)$$

**Теорема**

Формула умножения вероятностей для  $n$  событий

Пусть

- 1)  $A_1, \dots, A_n$  — события;
- 2)  $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) > 0$ .

Тогда

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) \quad (24)$$

**Доказательство**

- 1) Обозначив  $k = \overline{1, n-1}$ , имеем  $A_1 \cdot \dots \cdot A_k \supseteq A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}$ . По свойству 3 вероятности  $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_k) \geq P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) > 0$ . Следовательно, все условные вероятности, входящие в первую часть доказываемой формулы, определены, и можно задавать условные вероятности по типу  $P(A_n|A_1A_2 \cdot \dots \cdot A_{n-1})$ , и, следовательно, можно пользоваться формулой умножения вероятностей для двух событий.
- 2) Последовательно применим формулу умножения вероятностей для двух событий  $(P(A_{mf}B_{mf}) = P(A_{mf})P(B_{mf}|A_{mf}))$  :

$$\begin{aligned} P(\underbrace{A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}}_{A_{mf_1}} \cdot \underbrace{A_n}_{B_{mf_1}}) &= \\ P(\underbrace{A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2}}_{A_{mf_2}} \cdot \underbrace{A_{n-1}}_{B_{mf_2}} \cdot \underbrace{A_n}_{B_{mf_1}} | \underbrace{A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}}_{A_{mf_1}}) &= \\ P(\underbrace{A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-3} \cdot A_{n-2} \cdot A_{n-1}}_{A_{mf_3}} \cdot \underbrace{A_n}_{B_{mf_2}} | \underbrace{A_{n-1}}_{B_{mf_1}} | \underbrace{A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2}}_{A_{mf_2}}) \cdot P(A_n | A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) &= \\ = \dots = & \\ = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) & \end{aligned}$$

**1.23 Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.**

Пусть  $A$  и  $B$  — два события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

**Определение**

События  $A$  и  $B$  называются независимыми, если  $P(AB) = P(A)P(B)$ .

**Теорема**

- 1) Пусть  $P(B) > 0$ . Утверждение « $A$  и  $B$  — независимы» равносильно  $P(A|B) = P(A)$ ;
- 2) Пусть  $P(A) > 0$ . Утверждение « $A$  и  $B$  — независимы» равносильно  $P(B|A) = P(B)$ ;

**Доказательство**

- 1) Сначала докажем, что если  $A$  и  $B$  — независимые, то  $P(A|B) = P(A)$ . По определению независимых событий,  $P(AB) = P(A)P(B)$ . По определению условной вероятности,

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \quad (25)$$

Теперь докажем обратное Пусть  $P(A|B) = P(A)$ .

Докажем, что  $P(AB) = P(A)P(B)$

$$P(AB) \stackrel{\text{по формуле умножения вероятностей}}{=} P(B) \cdot \overset{=P(A)}{P(A|B)} = P(B)P(A) \quad (26)$$

- 2) Доказательство второго пункта теоремы аналогично.

**1.24 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.**

**Определение**

События  $A_1, \dots, A_n$  называется попарно независимыми, если

$$\forall i \neq j; i, j \in \{1, \dots, n\} P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (27)$$

**Определение**

События  $A_1, \dots, A_n$  называется попарно независимыми в совокупности, если

$$\forall k \in \{2, \dots, n\} \forall i_1 < i_2 < \dots < i_k : P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}) \quad (28)$$

**Пример. (Бернштейна)**

Рассмотрим правильный тетраэдр, на одной грани которого «написано» 1, второй — 2, третьей — 3, четвёртой — 1, 2, 3.

Этот тетраэдр один раз подбрасывают.

Событие  $A_1$  заключается в том, что на нижней грани «написано» 1; также введём  $A_2$  для 2,  $A_3$  для 3. Давайте покажем, что события  $A_1, A_2, A_3$  попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

- 1) Докажем, что они независимы попарно. Т. к.  $P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{2}$ , то  $P(A_1A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{4}$

Событие  $A_1A_2$  означает, что на нижней грани присутствуют и 1, и 2. Всё аналогично для  $P(A_1A_3) = P(A_1)P(A_3)$  и  $P(A_2A_3) = P(A_2)P(A_3)$ .

- 2) Проверим равенство  $P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$ , которое, казалось бы, должно равняться  $\frac{1}{8}$ . Но произведение событий  $A_1, A_2, A_3$  означает, что на нижней грани присутствуют и 1, и 2, и 3, вероятность чего равна  $\frac{1}{4}$ .

И выходит, что  $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$ .

Следовательно, события  $A_1, A_2, A_3$  не являются независимыми в совокупности.

### 1.25 Доказать теорему о формуле полной вероятности.

Пусть  $\Omega$  — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а  $(\Omega, \beta, P)$  — вероятностное пространство этого случайного эксперимента.

**Определение.** Говорят, что события  $H_1, \dots, H_n \in \beta$  образуют полную группу событий, если:

- 1)  $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$ ;
- 2)  $H_i H_j = \emptyset$ , при  $i \neq j$ ;
- 3)  $H_1 + \dots + H_n = \Omega$ .

**Теорема.** Формула полной вероятности. Пусть

- 1)  $H_1, \dots, H_n$  — полная группа событий;
- 2)  $A \in \beta$  — событие.

Тогда (это выражение называется формулой полной вероятности):

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n) \quad (29)$$

### Доказательство

- 1)  $A = A\Omega \stackrel{\Omega=H_1+\dots+H_n}{=} A \cdot (H_1 + \dots + H_n) = AH_1 + \dots + AH_n$ .

Принимая  $i \neq j : H_i \neq \emptyset$ , но  $(AH_i) \subseteq H_i, (AH_j) \subseteq H_j \implies (AH_i)(AH_j) = \emptyset$ , т. е.  $AH_i$  попарно не пересекаются.



2) Тогда

$$\begin{aligned}
 P(A) &= AH_1 + \dots + AH_n \quad \text{\textit{AH}_i \text{ попарно не пересекаются}} \\
 &= P(AH_1) + \dots + P(AH_n) \quad \text{\textit{т. к. } P(H_i) > 0, \text{ то } P(AH_i) = P(H_i)P(A|H_i)} \\
 &= P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)
 \end{aligned}$$

### 1.26 Доказать теорему о формуле Байеса.

**Теорема.** Пусть

- 1)  $H_1, \dots, H_n$  — полная группа событий;
- 2)  $P(A) > 0$ .

Тогда

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n} \quad (30)$$

**Доказательство.**

$$\begin{aligned}
 P(H_i|A) &\stackrel{\text{\textit{по опр. условной вероятности}}}{=} \\
 &= \frac{P(AH_i)}{P(A)} \stackrel{\text{\textit{по ф-ле умножения в числителе, полной вер-ти в знаменателе}}}{=} \\
 &= P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n}
 \end{aligned}$$

### 1.27 Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно $k$ успехов в серии из $n$ испытаний по схеме Бернулли.

**Теорема.** Пусть проводится серия из  $n$  испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха  $p$ . Тогда  $P_n(k)$  есть вероятность того, что в серии испытаний произойдет ровно  $k$  успехов:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (31)$$

**Доказательство**

- 1) Результат проведения серии из  $n$  экспериментов запишем с использованием кортежа  $(x_1, \dots, x_n)$ , где

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в испытаниях имел место успех;} \\ 0, & \text{если в испытании имела место неудача;} \end{cases} \quad (32)$$

- 2) Пусть

$$A = \{ \text{в серии из } n \text{ испытаний произошло ровно } k \text{ успехов} \} \quad (33)$$

Тогда  $A$  состоит из кортежей, в которых будет ровно  $k$  единиц из  $n - k$  нулей.

В событии  $A$  будет столько элементарных исходов, сколькими способами можно расставить  $k$  единиц по  $n$  позициям. Каждая такая расстановка однозначно определяется номерами позиций, в которых будут записаны единицы. В остальные позиции будут записаны нули.

Выбрать  $k$  позиций из имеющихся  $n$  можно  $C_n^k$  способами. Вероятность каждого отдельного исхода равна произведению вероятностей каждого отдельного  $x_i$ , и тогда общая вероятность исхода будет равна  $p^k q^{n-k}$ .

Все испытания независимы; следовательно, все кортежи из  $A$  равновероятны, и их  $C_k^n$  штук, что означает

$$P_n(k) = C_k^n p^k q^{n-k} \quad (34)$$