Содержание

1 Рубежный контроль 2

1.1 Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?

Определение. События и называются несовместными, если их произведение пусто . В противном случае события и называются совместными. Определение. События и называются независимыми, если $() = () ()$.

1.2 Сформулировать геометрическое определение вероятности.

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай, когда $|\Omega| =$. Пусть 1. Ω R ; 2. $(\Omega) <$, где — некая мера. Если $= 1$, то — это длина; если $= 2$, то — площадь; если $= 3$ — объём. Можно определить меры и при больших ; 3. Возможность принадлежности некоторого элементарного исхода случайного эксперимента событию   пропорциональна мере этого события и не зависит от формы события и его расположения внутри Ω. Тогда Определение. Вероятностью случайного события Ω называют число $= ()/ (\Omega)$

1.3 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.

Для строгого аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события: 1. Данное выше определение события как произвольного подмножества множества Ω в случае бесконечного множества Ω приводит к противоречивой теории (см. парадокс Рассела); 2. Таким образом, необходимо в качестве события рассматривать не все возможные подмножества множества Ω, а лишь некоторые из них; 3. Набор подмножеств множества Ω, выбранных в качестве событий, должен обладать рядом свойств. Понятно, что если и — связанные со случайным экспериментом события и известно, что в результате эксперимента они произошли (или не произошли), то естественно знать, произошли ли события + , · , , . . . Эти соображения приводят к следующему определению. Пусть 1. Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом; 2. = — система (набор) подмножеств в множестве Ω. Определение. называется сигма-алгеброй событий, если выполнены условия: 1. Если   , то - ; 2. Если 1, . . . , , . . . , то 1 + . . . + + ...

1.4 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.

Пусть 1. Ω — пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента; 2. — сигма-алгебра, заданная на Ω. Определение. Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция : $\to$ R 1. $= () >= 0$ (аксиома неотрицательности); 2. $(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности); 3. Если 1, . . . , , . . . — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: $(1 + \ldots + \ + \ldots) = (1) + \ldots + () + \ldots$ (расширенная аксиома сложения).

1.5 Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой?

Сложение – Для любого конечного набора попарно несовместных событий 1, . . . , , вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности. Расширенная – Если 1, . . . , , . . . — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: $(1 + \ldots + \ + \ldots) = (1) + \ldots + () + \ldots$ (расширенная аксиома сложения). Непрерывность –

1.6 Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.

Пусть 1. и — два события, связанные с одним случайным экспериментом; 2. Дополнительно известно, что в результате эксперимента произошло событие Условной вероятностью осуществления события при условии, что произошло , называется число

Свойства идентичны свойствам обычной (безусловной) вероятности.

1.7 Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

Теорема. Формула умножения вероятностей для двух событий Пусть 1. , — события; 2. $() > 0$. Тогда $() = () (|)$

1.8 Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?

Пусть и — два события, связанные с некоторым случайным экспериментом. Определение. События и называются независимыми, если $() = () ()$.

Замечание. Разумеется, в качестве определения независимых событий логично было бы использовать условия $(|) = ()$ или $(|) = ()$ (6) Однако эти условия имеют смысл лишь тогда, когда () или () отлично от нуля. Условие же $() = ()()$ «работает» всегда без ограничений.

1.9 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?

Определение. События 1, . . . , называется попарно независимыми, если = ; , 1, . . . , = Определение. События 1, . . . , называются независимыми в совокупности, если 2, . . . , 1 < 2 < . . . < 1 , . . . , = 1 · . . . · 1 <- 2

1.10 Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?

Пусть Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а (Ω, ,) — вероятностное пространство этого случайного эксперимента. Определение. Говорят, что события 1, . . . , образуют полную группу событий, если 1. () > 0, = 1, ; 2. = при = ; 3. 1 + . . . + = Ω. Да, верно.

1.11 Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.

Теорема. Формула полной вероятности. Пусть 1. 1, . . . , — полная группа событий; 2. — событие. Тогда (это выражение называется формулой полной вероятности): () = (| 1)(1) + . . . + (|)()

1.12 Сформулировать теорему о формуле Байеса.

Теорема. Пусть 1. 1, . . . , — полная группа событий; 2. () > 0.

1.13 Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний.

Определение.

1.14 Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.

Определение. Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют пространством элементарных исходов. 1. Каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы; 2. В результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в Ω элементарных исходов.

1.15 Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности

Свойства вероятности: 1. Вероятность () > 0 (неотрицательна). 2. $(\Omega) = 1$. 3. Если , — несовместные события, то (+) = () + () Доказательство:

1.16 Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.

1. Некоторый случайный эксперимент произведён раз; 2. При этом некоторое наблюдаемое в этом эксперименте событие произошло раз.

У статистического определения полным-полно недостатков: 1. Никакой эксперимент не может быть произведён бесконечное много раз; 2. С точки зрения современной математики статистическое определение является архаизмом, т. к. не даёт достаточно базы для дальнейшего построения теории.

1.17 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства.

Для строгого аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события: 1. Данное выше определение события как произвольного подмножества множества Ω в случае бесконечного множества Ω приводит к противоречивой теории (см. парадокс Рассела); 2. Таким образом, необходимо в качестве события рассматривать не все возможные подмножества множества Ω, а лишь некоторые из них; 3. Набор подмножеств множества Ω, выбранных в качестве событий, должен обладать рядом свойств. Понятно, что если и — связанные со случайным экспериментом события и известно, что в результате эксперимента они произошли (или не произошли), то естественно знать, произошли ли события + , · , -, . . . Эти соображения приводят к следующему определению. Пусть 1. Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом; 2. = — система (набор) подмножеств в множестве Ω. Определение. называется сигма-алгеброй событий, если выполнены условия: 1. Если , то ; 2. Если 1, . . . , , . . . , то 1 + . . . + + . . . Свойства: 1. Ω ; 2. ; 3. Если 1, . . . , , . . . , то 1 · . . . · . . . ; 4. Если , ; то r Доказательства:

1.18 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.

усть 1. Ω — пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента; 2. — сигма-алгебра, заданная на Ω. Определение. Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция : → R 1. = () > 0 (аксиома неотрицательности); 2. (Ω) = 1 (аксиома нормированности); 3. Если 1, . . . , , . . . — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: (1 + . . . + + . . .) = (1) + . . . + () + . . . (расширенная аксиома сложения).

Доказательства:

1.19 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.

Пусть 1. Ω — пространство элементарных исходов некоторого случайного эксперимента; 2. — сигма-алгебра, заданная на Ω. Определение. Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция : → R 1. = () > 0 (аксиома неотрицательности); 2. (Ω) = 1 (аксиома нормированности); 3. Если 1, . . . , , . . . — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: (1 + . . . + + . . .) = (1) + . . . + () + . . . (расширенная аксиома сложения).

Формулировка:

1.20 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.

Пусть 1. и — два события, связанные с одним случайным экспериментом; 2. Дополнительно известно, что в результате эксперимента произошло событие . Определение. Условной вероятностью осуществления события при условии, что произошло , называется число

Теорема: Пусть 1. Зафиксировано событие , () = 0; 2. (|) рассматривается как функция события . Тогда (|) обладает всеми свойствами безусловной вероятности. Доказательство:

1.21 Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

1.22 Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.

Пусть и — два события, связанные с некоторым случайным экспериментом. Определение. События и называются независимыми, если () = () (). Теорема. . . . 1. Пусть () >

0. Утверждение « и — независимы» равносильно (|) = (); 2. Пусть () > 0. Утверждение « и — независимы» равносильно (|) = ().

1.23 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.

Определение. События 1, . . . , называется попарно независимыми, если = ; , 1, . . . , = Определение. События 1, . . . , называются независимыми в совокупности, если 2, . . . , 1 < 2 < . . . < 1 , . . . , = 1 · . . . · Пример. (Бернштейна) Рассмотрим правильный тетраэдр, на одной грани которого «написано» 1, второй — 2, третьей — 3, четвёртой — 1, 2, 3. Этот тетраэдр один раз подбрасывают. Событие 1 заключается в том, что на нижней грани «написано» 1; также введём 2 для 2, 3 для 3. Давайте покажем, что события 1, 2, 3 попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности. 1. Докажем, что они независимы попарно. Т. к. (1) = 1 2 , (2) = 1 2 , то (12) = (1) (2) = $\frac{1}{4}$ Событие 12 означает, что на нижней грани присутствуют и 1, и 2. Всё аналогично для (13) = (1)(3) и (23) = (2)(3). 2. Проверим равенство (123) = (1) (2) (3), которое, казалось бы, должно равняться 1/8 . Но произведение событий 1, 2, 3 означает, что на нижней грани присутствуют и 1, и 2, и 3, вероятность чего равна 1/4 . И выходит, что 1/4 = 1/8 . Следовательно, события 1, 2, 3 не являются независимыми в совокупности.

1.24 Доказать теорему о формуле полной вероятности.

Пусть Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а (Ω, ,) — вероятностное пространство этого случайного эксперимента. Определение. Говорят. что события 1, . . . , образуют полную группу событий, если 1. () > 0, = 1, ; 2. = при = ; 3. 1 + . . . + = Ω. Теорема. Формула полной вероятности. Пусть 1. 1, . . . , — полная группа событий; 2. — событие. Тогда (это выражение называется формулой полной вероятности): () = (| 1)(1) + . . . + (|)() Доказательство:

1.25 Доказать теорему о формуле Байеса.

Теорема

1.26 Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли..