

Содержание

1 Рубежный контроль 2	3
1.1 Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?	3
1.2 Сформулировать геометрическое определение вероятности.	3
1.3 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.	3
1.4 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.	4
1.5 Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой?	5
1.6 Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.	5
1.7 Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.	6
1.8 Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?	6
1.9 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?	6
1.10 Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?	7
1.11 Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.	7
1.12 Сформулировать теорему о формуле Байеса.	7
1.13 Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний.	8
1.14 Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из n испытаний а) ровно k успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от k_1 до k_2 успехов.	8
1.15 Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.	8
1.16 Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности	9
1.17 Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.	10
1.18 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства. .	10

1.19	Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события. . . .	11
1.20	Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.	12
1.21	Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.	13
1.22	Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.	13
1.23	Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.	14
1.24	Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.	15
1.25	Доказать теорему о формуле полной вероятности.	16
1.26	Доказать теорему о формуле Байеса.	16
1.27	Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли.	17

1 Рубежный контроль 2

1.1 Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?

Определение.

События A и B называются несовместными, если их произведение пусто. В противном случае события A и B называются совместными.

Определение.

События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Как связаны

Если события несовместные, то они не могут быть независимыми.

1.2 Сформулировать геометрическое определение вероятности.

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай, когда $|\Omega| = \infty$.

Пусть

- 1) $|\Omega| \subseteq R^n$;
- 2) $\mu(\Omega) < \infty$, где μ — некая мера. Если $n = 1$, то μ — это длина; если $n = 2$, то μ — площадь; если $n = 3$ — объём. Можно определить меры и при больших n ;
- 3) Возможность принадлежности некоторого элементарного исхода случайного эксперимента событию $A \subseteq \Omega$ пропорциональна мере этого события и не зависит от формы события A и его расположения внутри Ω .

Тогда **Определение.**

Вероятностью случайного события $A \subseteq \Omega$ называют число

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \quad (1)$$

1.3 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.

Для строгого аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события:

- 1) Данное выше определение события как произвольного подмножества множества Ω в случае бесконечного множества Ω приводит к противоречивой теории (см. парадокс Рассела);
- 2) Таким образом, необходимо в качестве события рассматривать не все возможные подмножества множества Ω , а лишь **некоторые из них**;

- 3) Набор подмножеств множества Ω , выбранных в качестве событий, должен обладать рядом свойств. Понятно, что если A и B — связанные со случайным экспериментом события и известно, что в результате эксперимента они произошли (или не произошли), то естественно знать, произошли ли события $A + B, A \cdot B, \dots$

Эти соображения приводят к следующему определению.

Пусть

- 1) Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом;
- 2) $\beta \neq \emptyset$ — система (набор) подмножеств в множестве Ω .

Определение.

β называется сигма-алгеброй событий, если выполнены условия:

- 1) если $A \in \beta$, то $\bar{A} \in \beta$;
- 2) если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$, то $A_1 + \dots + A_n + \dots \in \beta$

Свойства

- 1) $\Omega \in \beta$;
- 2) $\emptyset \in \beta$;
- 3) если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$, то $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \beta$;
- 4) если $A_1, A_2 \in \beta$, то $A_1 \setminus A_2 \in \beta$

1.4 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.

Пусть

- 1) Ω — пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
- 2) β — сигма-алгебра, заданная на Ω .

Определение

Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция $P : \beta \rightarrow R$

Аксиомы

- 1) $\forall A \in \beta \Rightarrow P(A) \geq 0$; (аксиома неотрицательности);
- 2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);
- 3) Если A_1, \dots, A_n, \dots — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$ (расширенная аксиома сложения).

Свойства

- 1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- 2) $P(\emptyset) = 0$;

- 3) Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$;
- 4) $\forall A \in \beta : 0 \leq P(A) \leq 1$;
- 5) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где $A, B \in \beta$;
- 6) Для любого конечного набора событий A_1, \dots, A_n верно

$$P(A_1 + \dots + A_n) = + \sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}) - \dots \quad (2)$$

1.5 Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой?

Аксиома сложения

Сложение — для \forall конечного набора попарно несовместных событий A_1, \dots, A_n вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$.

Расширенная Аксиома сложения

Если A_1, \dots, A_n, \dots — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$.

Непрерывность

Для любой неубывающей последовательности событий $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$ и события $A = \bigcup_i A_i$ верно

$$P(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i). \quad (3)$$

Связанность

Из аксиомы сложения и непрерывности следует расширенная аксиома сложения.

1.6 Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.

Пусть

- 1) A и B — два события, связанные с одним случайным экспериментом;
- 2) дополнительно известно, что в результате произошло событие B и $P(B) > 0$.

Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло событие B , называется число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0. \quad (4)$$

Свойства

- 1) $P(A|B) \geq 0$;
- 2) $P(\Omega|B) = 1$;
- 3) $P(A_1 + \dots + A_n + \dots | B) = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \dots$

1.7 Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

Теорема. Формула умножения вероятностей для двух событий

Пусть

- 1) A, B — события;
- 2) $P(A) > 0$.

Тогда $P(AB) = P(A) P(B|A)$

Теорема Формула умножения вероятностей для n событий

- 1) A_1, \dots, A_n — события;
- 2) $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_n) > 0$.

Тогда

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}). \quad (5)$$

1.8 Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?

Пусть

A и B — два события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

Определение

События A и B называется независимыми, если

$$P(AB) = P(A)P(B). \quad (6)$$

Замечание

Разумеется, в качестве определения независимых событий логично было бы использовать условия $P(A|B) = P(A)$ или $P(B|A) = P(B)$. Однако эти условия имеют смысл лишь тогда, когда $P(A)$ или $P(B)$ отличны от нуля. Условие же $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$ «работает» всегда.

1.9 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?

Определение

События A_1, \dots, A_n называется попарно независимыми, если

$$\forall i \neq j; i, j \in \{1, \dots, n\} P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (7)$$

Определение

События A_1, \dots, A_n называется попарно независимыми в совокупности, если

$$\forall k \in \{2, \dots, n\} \forall i_1 < i_2 < \dots < i_k : P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}) \quad (8)$$

Как связаны

Из совокупности следует попарность.

1.10 Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?

Пусть Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а (Ω, β, P) — вероятностное пространство этого случайного эксперимента.

Определение

События $H_1, \dots, H_n \in \beta$ образуют полную группу событий, если

- 1) $P(H_i) > 0, i = 1, n$;
- 2) $H_i H_j = \emptyset$ при $i \neq j$;
- 3) $H_1 + \dots + H_n = \Omega$.

События из полной группы могут быть независимыми?

Нет, не могут быть, так как они несовместные.

1.11 Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.

Теорема Формула полной вероятности

Пусть

- 1) H_1, \dots, H_n — полная группа событий
- 2) $A \in \beta$ — событие.

Тогда (это выражение называется формулой полной вероятности):

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n) \quad (9)$$

1.12 Сформулировать теорему о формуле Байеса.

Теорема

Пусть

- 1) H_1, \dots, H_n — полная группа событий;
- 2) $P(A) > 0$.

Тогда

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n}. \quad (10)$$

1.13 Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний.

Определение.

Схемой испытаний Бернулли называется серия из однотипных экспериментов указанного вида, в которой отдельные испытания независимы, то есть вероятность реализации успеха в n -ом испытании не зависит от исходов первого, второго, \dots , $i-1$ -ого испытаний.

Теорема

Пусть проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p . Тогда $P_n(k)$ есть вероятность того, что в серии из n испытаний произойдет ровно k успехов:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (11)$$

1.14 Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из n испытаний а) ровно k успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от k_1 до k_2 успехов.

- 1) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;
- 2) $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P_n(0) = 1 - C_0^i p^0 q^{n-0} = 1 - q^n$;
- 3) $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$

1.15 Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.

Определение.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют пространством элементарных исходов.

- 1) Каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;
- 2) В результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в элементарных исходов.

Пример

Из колоды в 36 карт извлекают одну карту.

$$\Omega = \{6_{\text{пик}}, \dots, T_{\text{пик}}, 6_{\text{треф}}, \dots, T_{\text{червей}}\}, |\Omega| = 36. \quad (12)$$

Можно определить событие A = извлечена карта красной масти, то есть $A = \{6_{\text{бубей}}, \dots, T_{\text{бубей}}, 6_{\text{черв}}\}$
 $|A| = 18$. Если в результате эксперимента извлечена 6, то все событие A целиком наступило.

Пусть

- 1) Ω — пространство исходов некоторого случайного эксперимента ($|\Omega| = N < \infty$);
- 2) по условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной элементарный исход остальным (в таком случае говорят, что все элементарные исходы равновозможны);
- 3) существует событие $A \subseteq \Omega$, мощность $|A| = N_A$

Определение

Вероятностью осуществления события A называется число

$$P(A) = \frac{N_A}{N}. \quad (13)$$

1.16 Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности

- 1) Ω — пространство исходов некоторого случайного эксперимента ($|\Omega| = N < \infty$);
- 2) по условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной элементарный исход остальным (в таком случае говорят, что все элементарные исходы равновозможны);
- 3) существует событие $A \subseteq \Omega$, мощность $|A| = N_A$

Определение

Вероятностью осуществления события A называется число

$$P(A) = \frac{N_A}{N}. \quad (14)$$

Свойства вероятности:

- 1) Вероятность $P(A) > 0$ (неотрицательна);
- 2) $P(\Omega) = 1$;
- 3) если A, B — несовместные события, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Доказательство

- 1) Т.к. $N_A \geq 0, N > 0 \Rightarrow P(A) = \frac{N_A}{N} \geq 0$.
- 2) Принимая во внимание, что $N_\Omega = |\Omega| = N$, получается $P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$.
- 3) Т.к. Ω — конечно, $A, B \subseteq \Omega$, то получается, что A, B конечны. Существует формула $|A + B| = |A| + |B| - |AB|$; Т.к. A и B — несовместные, то $AB = \emptyset$, из чего следует, что $N_{a+b} = N_a + N_b$. Таким образом,

$$P(A + B) = \frac{N_{a+b}}{N} = \frac{N_a + N_b}{N} = \frac{N_a}{N} + \frac{N_b}{N} = P(A) + P(B). \quad (15)$$

1.17 Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.

- 1) Некоторый случайный эксперимент произведен n раз;
- 2) при этом некоторое наблюдаемое в этом эксперименте событие A произошло n_A раз.

Определение

Вероятностью осуществления события A называют эмпирический (то есть найденный экспериментальным путем) предел:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}. \quad (16)$$

У статического определения полным-полно недостатков:

- 1) никакой эксперимент не может быть произведен бесконечное много раз;
- 2) с точки современной математики статическое определение является архаизмом, так как не дает достаточно базы для дальнейшего построения теории.

1.18 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства.

Для строгого аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события:

- 1) Данное выше определение события как произвольного подмножества множества Ω в случае бесконечного множества Ω приводит к противоречивой теории (см. парадокс Рассела);
- 2) Таким образом, необходимо в качестве события рассматривать не все возможные подмножества множества Ω , а лишь **некоторые из них**;
- 3) Набор подмножеств множества Ω , выбранных в качестве событий, должен обладать рядом свойств. Понятно, что если A и B — связанные со случайным экспериментом события и известно, что в результате эксперимента они произошли (или не произошли), то естественно знать, произошли ли события $A + B, A \cdot B, \dots$

Эти соображения приводят к следующему определению.

Пусть

- 1) Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом;
- 2) $\beta \neq \emptyset$ — система (набор) подмножеств в множестве Ω .

Определение.

β называется сигма-алгеброй событий, если выполнены условия:

- 1) если $A \in \beta$, то $\bar{A} \in \beta$;

2) если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$, то $A_1 + \dots + A_n + \dots \in \beta$

Свойства

- 1) $\Omega \in \beta$;
- 2) $\emptyset \in \beta$;
- 3) если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$, то $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \beta$;
- 4) если $A_1, A_2 \in \beta$, то $A_1 \setminus A_2 \in \beta$

Доказательства

- 1) По определению $\beta \neq \emptyset \Rightarrow \exists A \subseteq Q : A \in \beta$; из определения сигма-алгебры (аксиома 1) $\exists(A + \bar{A}) \in \beta$; т.к. $A + \bar{A} = \Omega$, то $\Omega \in \beta$.
- 2) Т.к. $\Omega \in \beta$, то, по аксиоме 1, $\bar{\Omega} \in \beta$, а $\bar{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \beta$.
- 3) Из существования событий $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$ по аксиоме 1 следует, что $\exists \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, \dots \in \beta$. По аксиоме 2 следует существование объединения $\exists \bar{A}_1 + \dots + \bar{A}_n + \dots \in \beta$, и из аксиомы 1 — существование дополнения этого объединения: $\overline{\bar{A}_1 \cdot \dots \cdot \bar{A}_n \cdot \dots} \in \beta \Rightarrow_{\text{Де-Морган}} \overline{\bar{A}_1} \cdot \dots \cdot \overline{\bar{A}_n} \cdot \dots \in \beta$, что тривиально преобразуется в $A_1 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \beta$.
- 4) Из свойств операций над множествами можно заключить, что $A \setminus B = A \cdot \bar{B}$. По аксиоме 1, из $B \in \beta \Rightarrow \bar{B} \in \beta$. По следствию 3, $A, \bar{B} \in \beta \Rightarrow A \cdot \bar{B} \in \beta$, что является утверждением $A \setminus B \in \beta$

1.19 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.

Пусть

- 1) Ω — пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
- 2) β — сигма-алгебра, заданная на Ω .

Определение

Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция $P : \beta \rightarrow R$

- 1) $\forall A \in \beta \Rightarrow P(A) \geq 0$; (аксиома неотрицательности);
- 2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);
- 3) Если A_1, \dots, A_n, \dots — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$ (расширенная аксиома сложения).

Свойства с доказательствами

- 1) По аксиоме 2 сигма-алгебры $\exists A + \bar{A} = \Omega$; по аксиоме вероятности 2 $P(\Omega) = 1 = P(A + \bar{A})$;
по аксиоме вероятности 3 (A, \bar{A} несовместны),

$$P(A + \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = 1 \Rightarrow P(\bar{A}) = 1 - P(A);$$

$$2) P(\emptyset) = P(\bar{\Omega}); \text{ по свойству 1 } P(\emptyset) = 1 - P(\Omega) = \left(\Omega = 1 \text{ (по аксиоме 2)} \right) = 0;$$

$$3) A \subseteq B \Rightarrow B = A + (B \setminus A)$$

$$\text{Тогда } P(B) = P(A + (B \setminus A)) = \left(A, B \setminus A \text{ несовместны, используем аксиому 3} \right) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A) \Rightarrow^{P(B \setminus A) \geq 0 \text{ по акс. 1}} P(B) \geq P(A).$$

1.20 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.

Пусть

- 1) Ω — пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
- 2) β — сигма-алгебра, заданная на Ω .

Определение

Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция $P : \beta \rightarrow R$

- 1) $\forall A \in \beta \Rightarrow P(A) \geq 0$; (аксиома неотрицательности);
- 2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);
- 3) Если A_1, \dots, A_n, \dots — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$ (расширенная аксиома сложения).

Свойства с доказательствами

- 1) $\forall A, B : A + B = A + (B \setminus A)$, при этом $A \cdot (B \setminus A) = \emptyset$. В соответствии с аксиомой 3,

$$P(A + B) = P(A) + P(B \setminus A) \quad (17)$$

$$B = AB + (B \setminus A),$$

$$\text{причем } (AB)(B \setminus A) = \emptyset$$

По аксиоме 3, имеем $P(B) = P(AB) + P(B \setminus A) \Rightarrow P(B \setminus A) = P(B) - P(AB)$. Подставим результат 17 и получим

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB), A, B \in \beta \quad (18)$$

- 2) Для любого конечного набора событий A_1, \dots, A_n верно

$$P(A_1 + \dots + A_n) = + \sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}) - \dots \quad (19)$$

1.21 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.

Пусть

- 1) A и B — два события, связанные с одним случайным экспериментом;
- 2) дополнительно известно, что в результате произошло событие B и $P(B) > 0$.

Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло B , называется число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0. \quad (20)$$

Свойства

- 1) $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \Rightarrow P(A|B) \geq 0$.
- 2) $P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.
- 3) $P(A_1 + \dots + A_n + \dots | B) =$
 $= \frac{P((A_1 + \dots + A_n + \dots)B)}{P(B)} =$
 $= \frac{1}{P(B)} \cdot P(A_1B + A_2B + \dots + A_nB + \dots) = A_i, A_j \text{ несовместны,}$
 $i \neq j; A_iB \subseteq A_i, A_jB \subseteq A_j \Rightarrow (A_iB) \cap (A_jB) = \emptyset$, и тогда по аксиоме вероятности 3
 $= \frac{1}{P(B)} \cdot [P(A_1B) + \dots + P(A_nB) + \dots] = (\text{ряд}) \frac{P(A_1B)}{P(B)} + \dots + \frac{P(A_nB)}{P(B)} + \dots = P(A_1|B) +$
 $\dots + P(A_n|B) + \dots$

1.22 Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

Теорема. Формула умножения вероятностей для двух событий

Пусть

- 1) A, B — события;
- 2) $P(A) > 0$.

Тогда $P(AB) = P(A) P(B|A)$

Доказательство.

Т.к. $P(A) > 0$, то определена условная вероятность

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (21)$$

из чего напрямую следует

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad (22)$$

Теорема

Формула умножения вероятностей для n событий

Пусть

- 1) A_1, \dots, A_n — события;
- 2) $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) > 0$.

Тогда

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) \quad (23)$$

Доказательство

- 1) Обозначив $k = \overline{1, n-1}$, имеем $A_1 \cdot \dots \cdot A_k \supseteq A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}$. По свойству 3 вероятности $P(A_1 \cdot \dots \cdot A_k) \geq P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) > 0$. Следовательно, все условные вероятности, входящие в первую часть доказываемой формулы, определены, и можно задавать условные вероятности по типу $P(A_n|A_1A_2 \dots A_{n-1})$, и, следовательно, можно пользоваться формулой умножения вероятностей для двух событий.
- 2) Последовательно применим формулу умножения вероятностей для двух событий ($P(A_{mf}B_{mf}) = P(A_{mf})P(B_{mf}|A_{mf})$):
$$\begin{aligned}
 &P(\underbrace{A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}}_{A_{mf1}} \cdot \underbrace{A_n}_{B_{mf1}}) = \\
 &\underbrace{P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2} \cdot A_{n-1})}_{A_{mf2}} \cdot P(\underbrace{A_n}_{B_{mf1}} | \underbrace{A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}}_{A_{mf1}}) = \\
 &\underbrace{P(A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-3} \cdot A_{n-2} \cdot A_{n-1})}_{A_{mf3}} \cdot P(\underbrace{A_{n-1}}_{B_{mf2}} | \underbrace{A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-2}}_{A_{mf2}}) \cdot P(A_n|A_1 \cdot \dots \cdot A_{n-1}) = \\
 &= \dots = \\
 &= P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1})
 \end{aligned}$$

1.23 Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.

Пусть A и B — два события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

Определение

События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A)P(B)$.

Теорема

- 1) Пусть $P(B) > 0$. Утверждение « A и B — независимы» равносильно $P(A|B) = P(A)$;
- 2) Пусть $P(A) > 0$. Утверждение « A и B — независимы» равносильно $P(B|A) = P(B)$;

Доказательство

- 1) Сначала докажем, что если A и B — независимые, то $P(A|B) = P(A)$. По определению независимых событий, $P(AB) = P(A)P(B)$. По определению условной вероятности,

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(B)} = P(A) \quad (24)$$

Теперь докажем обратное Пусть $P(A|B) = P(A)$.

Докажем, что $P(AB) = P(A)P(B)$

$$P(AB) \stackrel{\text{по формуле умножения вероятностей}}{=} P(B) \cdot \overset{=P(A)}{P(A|B)} = P(B)P(A) \quad (25)$$

- 2) Доказательство второго пункта теоремы аналогично.

1.24 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.

Определение

События A_1, \dots, A_n называется попарно независимыми, если

$$\forall i \neq j; i, j \in \{1, \dots, n\} P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (26)$$

Определение

События A_1, \dots, A_n называется попарно независимыми в совокупности, если

$$\forall k \in \{2, \dots, n\} \forall i_1 < i_2 < \dots < i_k : P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}) \quad (27)$$

Пример. (Бернштейна)

Рассмотрим правильный тетраэдр, на одной грани которого «написано» 1, второй — 2, третьей — 3, четвёртой — 1, 2, 3.

Этот тетраэдр один раз подбрасывают.

Событие A_1 заключается в том, что на нижней грани «написано» 1; также введём A_2 для 2, A_3 для 3. Давайте покажем, что события A_1, A_2, A_3 попарно независимы, но не являются независимыми в совокупности.

- 1) Докажем, что они независимы попарно. Т. к. $P(A_1) = \frac{1}{2}, P(A_2) = \frac{1}{2}$, то $P(A_1 A_2) = P(A_1)P(A_2) = \frac{1}{4}$

Событие $A_1 A_2$ означает, что на нижней грани присутствуют и 1, и 2. Всё аналогично для $P(A_1 A_3) = P(A_1)P(A_3)$ и $P(A_2 A_3) = P(A_2)P(A_3)$.

- 2) Проверим равенство $P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$, которое, казалось бы, должно равняться $\frac{1}{8}$. Но произведение событий A_1, A_2, A_3 означает, что на нижней грани присутствуют и 1, и 2, и 3, вероятность чего равна $\frac{1}{4}$.

И выходит, что $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}$.

Следовательно, события A_1, A_2, A_3 не являются независимыми в совокупности.

1.25 Доказать теорему о формуле полной вероятности.

Пусть Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а (Ω, β, P) — вероятностное пространство этого случайного эксперимента.

Определение. Говорят, что события $H_1, \dots, H_n \in \beta$ образуют полную группу событий, если:

- 1) $P(H_i) > 0, i = \overline{1, n}$;
- 2) $H_i H_j = \emptyset$, при $i \neq j$;
- 3) $H_1 + \dots + H_n = \Omega$.

Теорема. Формула полной вероятности. Пусть

- 1) H_1, \dots, H_n — полная группа событий;
- 2) $A \in \beta$ — событие.

Тогда (это выражение называется формулой полной вероятности):

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n) \quad (28)$$

Доказательство

- 1) $A = A\Omega \stackrel{\Omega=H_1+\dots+H_n}{=} A \cdot (H_1 + \dots + H_n) = AH_1 + \dots + AH_n$.

Принимая $i \neq j : H_i \neq \emptyset$, но $(AH_i) \subseteq H_i, (AH_j) \subseteq H_j \implies (AH_i)(AH_j) = \emptyset$, т. е. AH_i попарно не пересекаются.

- 2) Тогда

$$\begin{aligned} P(A) &= P(AH_1 + \dots + AH_n) \stackrel{AH_i \text{ попарно не пересекаются}}{=} \\ &= P(AH_1) + \dots + P(AH_n) \stackrel{\text{т. к. } P(H_i) > 0, \text{ то } P(AH_i) = P(H_i)P(A|H_i)}{=} \\ &= P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n) \end{aligned}$$

1.26 Доказать теорему о формуле Байеса.

Теорема. Пусть

- 1) H_1, \dots, H_n — полная группа событий;
- 2) $P(A) > 0$.

Тогда

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n} \quad (29)$$

Доказательство.

$$\begin{aligned}
P(H_i|A) &\stackrel{\text{по опр. условной вероятности}}{=} \\
&= \frac{P(AH_i)}{P(A)} \stackrel{\text{по ф-ле умножения в числителе, полной вер-ти в знаменателе}}{=} \\
&= P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n}
\end{aligned}$$

1.27 Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли.

Теорема. Пусть проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p . Тогда $P_n(k)$ есть вероятность того, что в серии испытаний произойдет ровно k успехов:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (30)$$

Доказательство

- 1) Результат проведения серии из n экспериментов запишем с использованием кортежа (x_1, \dots, x_n) , где

$$x_i = \begin{cases} 1, & \text{если в испытаниях имел место успех;} \\ 0, & \text{если в испытании имела место неудача;} \end{cases} \quad (31)$$

- 2) Пусть

$$A = \{ \text{в серии из } n \text{ испытаний произошло ровно } k \text{ успехов} \} \quad (32)$$

Тогда A состоит из кортежей, в которых будет ровно k единиц из $n - k$ нулей.

В событии A будет столько элементарных исходов, сколькими способами можно расставить k единиц по n позициям. Каждая такая расстановка однозначно определяется номерами позиций, в которых будут записаны единицы. В остальные позиции будут записаны нули.

Выбрать k позиций из имеющихся n можно C_n^k способами. Вероятность каждого отдельного исхода равна произведению вероятностей каждого отдельного x_i , и тогда общая вероятность исхода будет равна $p^k q^{n-k}$.

Все испытания независимы; следовательно, все кортежи из A равновероятны, и их C_k^n штук, что означает

$$P_n(k) = C_k^n p^k q^{n-k} \quad (33)$$