

Содержание

1 Рубежный контроль 2	3
1.1 Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?	3
1.2 Сформулировать геометрическое определение вероятности.	3
1.3 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.	3
1.4 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.	4
1.5 Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой? .	5
1.6 Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства. . . .	5
1.7 Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.	6
1.8 Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?	6
1.9 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?	6
1.10 Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?	7
1.11 Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.	7
1.12 Сформулировать теорему о формуле Байеса.	7
1.13 Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний.	8
1.14 Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из n испытаний а) ровно k успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от k_1 до k_2 успехов.	8
1.15 Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.	8
1.16 Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности	9
1.17 Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.	10

1.18	Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства.	10
1.19	Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.	11
1.20	Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.	12
1.21	Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.	12
1.22	Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.	12
1.23	Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.	12
1.24	Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе. . . .	12
1.25	Доказать теорему о формуле полной вероятности.	12
1.26	Доказать теорему о формуле Байеса.	12
1.27	Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли.	12

1 Рубежный контроль 2

1.1 Сформулировать определение несовместных событий. Как связаны свойства несовместности и независимости событий?

Определение.

События A и B называются несовместными, если их произведение пусто. В противном случае события A и B называются совместными.

Определение.

События A и B называются независимыми, если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Как связаны

Если события несовместные, то они не могут быть независимыми.

1.2 Сформулировать геометрическое определение вероятности.

Геометрическое определение вероятности является обобщением классического определения на случай, когда $|\Omega| = \infty$.

Пусть

- 1) $|\Omega| \subseteq R^n$;
- 2) $\mu(\Omega) < \infty$, где μ — некая мера. Если $n = 1$, то μ — это длина; если $n = 2$, то μ — площадь; если $n = 3$ — объём. Можно определить меры и при больших n ;
- 3) Возможность принадлежности некоторого элементарного исхода случайного эксперимента событию $A \subseteq \Omega$ пропорциональна мере этого события и не зависит от формы события A и его расположения внутри Ω .

Тогда **Определение.**

Вероятностью случайного события $A \subseteq \Omega$ называют число

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} \quad (1)$$

1.3 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Сформулировать ее основные свойства.

Для строгого аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события:

- 1) Данное выше определение события как произвольного подмножества множества Ω в случае бесконечного множества Ω приводит к противоречивой теории (см. парадокс Рассела);

- 2) Таким образом, необходимо в качестве события рассматривать не все возможные подмножества множества Ω , а лишь некоторые из них;
- 3) Набор подмножеств множества Ω , выбранных в качестве событий, должен обладать рядом свойств. Понятно, что если A и B — связанные со случайным экспериментом события и известно, что в результате эксперимента они произошли (или не произошли), то естественно знать, произошли ли события $A + B, A \cdot B, \dots$

Эти соображения приводят к следующему определению.

Пусть

1. Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом; 2. $\beta \neq \emptyset$ — система (набор) подмножеств в множестве Ω .

Определение.

β называется сигма-алгеброй событий, если выполнены условия:

- 1) если $A \in \beta$, то $\bar{A} \in \beta$;
- 2) если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$, то $A_1 + \dots + A_n + \dots \in \beta$

Свойства

- 1) $\Omega \in \beta$;
- 2) $\emptyset \in \beta$;
- 3) если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$, то $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \beta$;
- 4) если $A_1, A_2 \in \beta$, то $A_1 \setminus A_2 \in \beta$

1.4 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать основные свойства вероятности.

Пусть

- 1) Ω — пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
- 2) β — сигма-алгебра, заданная на Ω .

Определение

Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция $P : \beta \rightarrow R$

- 1) $\forall A \in \beta \Rightarrow P(A) \geq 0$; (аксиома неотрицательности);
- 2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);
- 3) Если A_1, \dots, A_n, \dots — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности:

$$P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots \quad (\text{расширенная аксиома сложения}).$$

- 1) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;
- 2) $P(\emptyset) = 0$;
- 3) Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$;

- 4) $\forall A \in \beta : 0 \leq P(A) \leq 1$;
- 5) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$, где $A, B \in \beta$;
- 6) Для любого конечного набора событий A_1, \dots, A_n верно

$$P(A_1 + \dots + A_n) = + \sum_{1 \leq i_1 \leq n} P(A_{i_1}) - \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}) + \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq i_3 \leq n} P(A_{i_1}, A_{i_2}, A_{i_3}) - \dots \quad (2)$$

1.5 Записать аксиому сложения вероятностей, расширенную аксиому сложения вероятностей и аксиому непрерывности вероятности. Как они связаны между собой?

Аксиома сложения

Сложение — для \forall конечного набора попарно несовместных событий A_1, \dots, A_n вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \dots + A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$.

Расширенная Аксиома сложения

Если A_1, \dots, A_n, \dots — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности: $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$.

Непрерывность

Для любой неубывающей последовательности событий $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n \subseteq \dots$ и события $A = \bigcup_i A_i$ верно

$$P(A) = \lim_{i \rightarrow \infty} P(A_i). \quad (3)$$

Связанность

Из аксиомы сложения и непрерывности следует расширенная аксиома сложения.

1.6 Сформулировать определение условной вероятности и ее основные свойства.

Пусть

- 1) A и B — два события, связанные с одним случайным экспериментом;
- 2) дополнительно известно, что в результате произошло событие B и $P(B) > 0$.

Условной вероятностью осуществления события A при условии, что произошло B , называется число

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}, P(B) \neq 0. \quad (4)$$

Свойства

- 1) $P(A|B) \subseteq 0$;
- 2) $P(\Omega|B) = 1$;
- 3) $P(A_1 + \dots + A_n + \dots | B) = P(A_1|B) + \dots + P(A_n|B) + \dots$.

1.7 Сформулировать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

Теорема. Формула умножения вероятностей для двух событий

Пусть

- 1) A, B — события;
- 2) $P(A) > 0$.

Тогда $P(AB) = P(A) P(B|A)$

Теорема Формула умножения вероятностей для n событий

- 1) A_1, \dots, A_n — события;
- 2) $P(A_1 \dots A_n) > 0$.

Тогда

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \dots A_{n-1}). \quad (5)$$

1.8 Сформулировать определение пары независимых событий. Как независимость двух событий связана с условными вероятностями их осуществления?

Пусть

A и B — два события, связанные с некоторым случайным экспериментом.

Определение

События A и B называется независимыми, если $P(AB) = P(A) P(B)$.

Замечание

Разумеется, в качестве определения независимых событий логично было бы использовать условия $P(A|B) = P(A)$ или $P(B|A) = P(B)$. Однако эти условия имеют смысл лишь тогда, когда $P(A)$ или $P(B)$ отличны от нуля. Условие же $P(AB) = P(A)P(B)$ работает всегда.

1.9 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Как эти свойства связаны между собой?

Определение

События A_1, \dots, A_n называется попарно независимыми, если

$$\forall i \neq j; i, j \in \{1, \dots, n\} P(A_i A_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (6)$$

Определение

События A_1, \dots, A_n называется попарно независимыми в совокупности, если

$$\forall k \in \{2, \dots, n\} \forall i_1 < i_2 < \dots < i_k : P(A_{i_1}, \dots, A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k}) \quad (7)$$

1.10 Сформулировать определение полной группы событий. Верно ли, что некоторые события из полной группы могут быть независимыми?

Пусть Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом, а (Ω, β, P) — вероятностное пространство этого случайного эксперимента.

Определение

События $H_1, \dots, H_n \in \beta$ образуют полную группу событий, если

- 1) $P(H_i) > 0, i = 1, n;$
- 2) $H_i H_j = \emptyset, i \neq j;$
- 3) $H_1 + \dots + H_n = \Omega.$

События из полной группы могут быть независимыми?

Нет, не могут быть, так как они несовместные.

1.11 Сформулировать теорему о формуле полной вероятности.

Теорема Формула полной вероятности

Пусть

- 1) H_1, \dots, H_n — полная группа событий
- 2) $A \in \beta$ — событие.

Тогда (это выражение называется формулой полной вероятности):

$$P(A) = P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n) \quad (8)$$

1.12 Сформулировать теорему о формуле Байеса.

Теорема

Пусть

- 1) H_1, \dots, H_n — полная группа событий;
- 2) $P(A) > 0.$

Тогда

$$P(H_i|A) = \frac{P(A|H_i)P(H_i)}{P(A|H_1)P(H_1) + \dots + P(A|H_n)P(H_n)}, i = \overline{1, n}. \quad (9)$$

1.13 Дать определение схемы испытаний Бернулли. Записать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний.

Определение.

Схемой испытаний Бернулли называется серия из однотипных экспериментов указанного вида, в которой отдельные испытания независимы, то есть вероятность реализации успеха в n -ом испытании не зависит от исходов первого, второго, \dots , i -1-ого испытаний.

Теорема

Пусть проводится серия из n испытаний по схеме Бернулли с вероятностью успеха p . Тогда $P_n(k)$ есть вероятность того, что в серии из n испытаний произойдет ровно k успехов:

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \quad (10)$$

1.14 Записать формулы для вычисления вероятности осуществления в серии из n испытаний а) ровно k успехов, б) хотя бы одного успеха, в) от k_1 до k_2 успехов.

- 1) $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$;
- 2) $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P_n(0) = 1 - C_n^0 p^0 q^{n-0} = 1 - q^n$;
- 3) $P_n(k_1 \leq k \leq k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} C_n^i p^i q^{n-i}$

1.15 Сформулировать определение элементарного исхода случайного эксперимента и пространства элементарных исходов. Сформулировать классическое определение вероятности. Привести пример.

Определение.

Множество Ω всех исходов данного случайного эксперимента называют пространством элементарных исходов.

- 1) Каждый элементарный исход является «неделимым», т. е. он не может быть разбит на более «мелкие» исходы;
- 2) В результате каждого эксперимента обязательно имеет место ровно один из входящих в элементарных исходов.

Пример

Из колоды в 36 карт извлекают одну карту.

$$\Omega = \{6_{\text{пик}}, \dots, T_{\text{пик}}, 6_{\text{треф}}, \dots, T_{\text{червей}}\}, |\Omega| = 36. \quad (11)$$

Можно определить событие A = извлечена карта красной масти, то есть $A = \{6_{\text{бубей}}, \dots, T_{\text{бубей}}, 6_{\text{червей}}, \dots, T_{\text{червей}}\}$, $|A| = 18$. Если в результате эксперимента извлечена 6, то все событие A целиком наступило.

Пусть

- 1) Ω — пространство исходов некоторого случайного эксперимента ($|\Omega| = N < \infty$);
- 2) по условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной элементарный исход остальным (в таком случае говорят, что все элементарные исходы равновозможны);
- 3) существует событие $A \subseteq \Omega$, мощность $|A| = N_A$

Определение

Вероятностью осуществления события A называется число

$$P(A) = \frac{N_A}{N}. \quad (12)$$

1.16 Сформулировать классическое определение вероятности. Опираясь на него, доказать основные свойства вероятности

- 1) Ω — пространство исходов некоторого случайного эксперимента ($|\Omega| = N < \infty$);
- 2) по условиям эксперимента нет оснований предпочесть тот или иной элементарный исход остальным (в таком случае говорят, что все элементарные исходы равновозможны);
- 3) существует событие $A \subseteq \Omega$, мощность $|A| = N_A$

Определение

Вероятностью осуществления события A называется число

$$P(A) = \frac{N_A}{N}. \quad (13)$$

Свойства вероятности:

- 1) Вероятность $P(A) > 0$ (неотрицательна);
- 2) $P(\Omega) = 1$;
- 3) если A, B — несовместные события, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

Доказательство

- 1) Т.к. $N_A \geqslant, N > 0 \Rightarrow P(A) = \frac{N_A}{N} \geqslant 0$.
- 2) Принимая во внимание, что $N_\Omega = |\Omega| = N$, получается $P(\Omega) = \frac{N_\Omega}{N} = \frac{N}{N} = 1$.
- 3) Т.к. Ω — конечно, $A, B \subseteq \Omega$, то получается, что A, B конечны. Существует формула $|A + B| = |A| + |B| - |AB|$; Т.к A и B — несовместные, то $AB = \emptyset$, из чего следует, что $N_{a+b} = N_a + N_b$. Таким образом,

$$P(A + B) = \frac{N_{a+b}}{N} = \frac{N_a + N_b}{N} = \frac{N_a}{N} + \frac{N_b}{N} = P(A) + P(B). \quad (14)$$

1.17 Сформулировать статистическое определение вероятности. Указать его основные недостатки.

- 1) Некоторый случайный эксперимент произведен n раз;
- 2) при этом некоторое наблюдаемое в этом эксперименте событие A произошло n_A раз.

Определение

Вероятностью осуществления события A называют эмпирический (то есть найденный экспериментальным путем) предел:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n}. \quad (15)$$

У статического определения полным-полно недостатков:

- 1) никакой эксперимент не может быть произведен бесконечное много раз;
- 2) с точки современной математики статическое определение является архаизмом, так как не дает достаточно базы для дальнейшего построения теории.

1.18 Сформулировать определение сигма-алгебры событий. Доказать ее основные свойства.

Для строгого аксиоматического определения вероятности необходимо уточнить понятие события:

- 1) Данное выше определение события как произвольного подмножества множества Ω в случае бесконечного множества Ω приводит к противоречивой теории (см. парадокс Рассела);
- 2) Таким образом, необходимо в качестве события рассматривать не все возможные подмножества множества Ω , а лишь некоторые из них;
- 3) Набор подмножеств множества Ω , выбранных в качестве событий, должен обладать рядом свойств. Понятно, что если A и B — связанные со случайным экспериментом события и известно, что в результате эксперимента они произошли (или не произошли), то естественно знать, произошли ли события $A + B, A \cdot B, \dots$

Эти соображения приводят к следующему определению.

Пусть

1. Ω — пространство элементарных исходов, связанных с некоторым случайным экспериментом; 2. $\beta \neq \emptyset$ — система (набор) подмножеств в множестве Ω .

Определение.

β называется сигма-алгеброй событий, если выполнены условия:

- 1) если $A \in \beta$, то $\bar{A} \in \beta$;
- 2) если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$, то $A_1 + \dots + A_n + \dots \in \beta$

Свойства

- 1) $\Omega \in \beta$;
- 2) $\emptyset \in \beta$;
- 3) если $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$, то $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \beta$;
- 4) если $A_1, A_2 \in \beta$, то $A_1 \setminus A_2 \in \beta$

Доказательства

- 1) По определению $\beta \neq \emptyset \Rightarrow \exists A \subseteq Q : A \in \beta$; из определения сигма-алгебры (аксиома 1) $\exists (A + \bar{A}) \in \beta$; т.к. $A + \bar{A} = \Omega$, то $\Omega \in \beta$.
- 2) Т.к. $\Omega \in \beta$, то, по аксиоме 1, $\bar{\Omega} \in \beta$, а $\bar{\Omega} = \emptyset \Rightarrow \emptyset \in \beta$.
- 3) ИЗ существования событий $A_1, \dots, A_n, \dots \in \beta$ по аксиоме 1 следует, что $\exists \bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, \dots, \in \beta$, и из аксиомы 1 — существование дополнение этого объединения: $\overline{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, \dots} \in \beta \Rightarrow$ Де-Морган $\bar{\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n, \dots} \in \beta$, что тривиально преобразуется в $A_1 \cdot \dots \cdot A_n \cdot \dots \in \beta$.

1.19 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Доказать свойства вероятности для дополнения события, для невозможного события, для следствия события.

Пусть

- 1) Ω — пространство элементарных исходов случайного эксперимента;
- 2) β — сигма-алгебра, заданная на Ω .

Определение

Вероятностью (вероятностной мерой) называется функция $P : \beta \rightarrow R$

- 1) $\forall A \in \beta \Rightarrow P(A) \geq 0$; (аксиома неотрицательности);
- 2) $P(\Omega) = 1$ (аксиома нормированности);
- 3) Если A_1, \dots, A_n, \dots — попарно несовместные события, то вероятность осуществления их суммы равна сумме вероятностей осуществления каждого из них по отдельности:
 $P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots$ (расширенная аксиома сложения).
- 1) По аксиоме $2P(\bar{A}) = 1 - P(A)$;

2) $P(\emptyset) = 0$;

3) Если $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$;

1.20 Сформулировать аксиоматическое определение вероятности. Сформулировать свойства вероятности для суммы двух событий и для суммы произвольного числа событий. Доказать первое из этих свойств.

1.21 Сформулировать определение условной вероятности. Доказать, что она удовлетворяет трем основным свойствам безусловной вероятности.

1.22 Доказать теоремы о формулах умножения вероятностей для двух событий и для произвольного числа событий.

1.23 Сформулировать определение пары независимых событий. Сформулировать и доказать теорему о связи независимости двух событий с условными вероятностями их осуществления.

1.24 Сформулировать определение попарно независимых событий и событий, независимых в совокупности. Показать на примере, что из первого не следует второе.

1.25 Доказать теорему о формуле полной вероятности.

1.26 Доказать теорему о формуле Байеса.

Теорема

1.27 Доказать формулу для вычисления вероятности осуществления ровно k успехов в серии из n испытаний по схеме Бернулли..