## Содержание

# 1 Рубежный контроль 3

## 1.1 Сформулировать определения случайной величины и функции распределения вероятностей случайной величины. Записать основные свойства функции распределения.

Случайной величиной естественно называть числовую величину, значение которой зависит от того, какой именно **элементарный исход** произошел в результате эксперимента со случайным исходом. Множество всех значений, которые случайная величина может принимать, называют **множеством возможных значений** этой **случайной величины.**

**Определение**

Пусть (Ω, $\beta$, P) — вероятностное пространство некоторого случайного эксперимента.

Случайной величиной называется функция $X : \Omega \to R$ такая, что $\forall x \in \Re$ множество $\{\omega : X(\omega) < x\} \in \beta$ (т. е. для любого x множество $\{\omega : X(\omega) < x\}$ является событием).

**Определение**

Функцией распределения вероятностной случайной величины X называется отображение $F_X : R \to R$, определяется правилом $F_X(x) = P\{X < x\}$

**Свойства**

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$;
2. $0 \leq F(x) \leq 1$;
3. $F(x_1) \leq F(x_2)$, при $x_1 \leq x_2$ ($F_x$ — не убывающая функция);
4. $P\{a \leq X < b\} = F_X(b) - F_X(a)$;
5. $\lim\limits_{x \to x_0-} F_x(x) = F_X(x_0)$ — функция распределения непрерывна слева в каждой точке $x_0$.

## 1.2 Сформулировать определение дискретной случайной величины; понятие ряда распределения.Сформулировать определение непрерывной случайной величины и функции плотности распределения вероятностей.

**Определение**: Дискретная

Случайная величина называется дискретной, если множество ее возможных значений конечно или счетно.

Пусть X — дискретная случайная величина, принимающая значения из конечного множества $(x_1, ..., x_n)$. Закон распределения такой случайной величины можно задать таблицей $P(x)$:

Таблица 1

| X | $x_1$ | $x_2$ | $\dots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| P | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ |

При этом $p_i = P\{X = x_i\}, i = \overline{1,n}, \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

**Определения**

Таблицу 1 называется рядом распределения дискретной случайной величины.

**Определение**

Случайной величиной X называется непрерывной, если $\exists f : \Re \to \Re : \forall x \in \Re$ значение $F_X(x)$ можно представить в виде:

$$F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt \tag{1}$$

При этом $f_X$ называется функцией плотностью распределения случайной величины X.

Для большинства представляющих практический интерес непрерывных случайных величин функция плотности $f_X$ является непрерывной или кусочно-непрерывной. Это означает, что функция распределения $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$ непрерывной функцией (это обстоятельство и объясняет термин «непрерывная» случайная величина).

Если известна плотность $f_X$, то понятно, как найти функцию распределения: $F_X(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$ Обратно, в соответствии с теоремой о производной интеграла с переменным верхним пределом: $f_X(x) = F_X^{'}(x)$ для всех точек $x \in R$, в которых $f_X$ непрерывна (т. е. почти для всех x).

### 1.3 Сформулировать определение непрерывной случайной величины. Записать основные свойства функции плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины.

**Свойства**

1. f(x) $\geq 0$, $x \in \Re$;
2. $P\{x_1 \lessapprox X < x_2\} = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$;
3. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ — условие нормировки;
4. $P\{x_0 \leq X < x_0 + \Delta x\} \approx f(x_0)\Delta x$, где $\Delta x$ — мало, а f — непрерывна а точке $x_0$;
5. Если X — непрерывна СВ, то для $\forall$ наперед заданной точке $x_0$ $P\{X = x_0\} = 0$.

### 1.4 Сформулировать определения случайного вектора и его функции распределения вероятностей. Записать свойства функции распределения двумерного случайного вектора.

Пусть

1) $(\Omega, \beta, P)$ — вероятностное пространство некоторого случайного эксперимента.
2) $X_\omega = X_1(\omega), ..., X_n(\omega)$ — СВ, заданные на этом вероятностном пространстве.

**Определение**

n - мерным случайным вектором называется кортеж $\overrightarrow{X} = (X_1, \ldots, X_n)$.

**Определение**

Функцией распределения случайная вектора

$\overrightarrow{X} = (x_1, \ldots x_n)$ называется отображение $F : \Re^n \to \Re$, определенной правилом $F(x_1, \ldots, x_n) = P\{X_1 < x_1 \ \ldots, X_n < x_n\}$.

**Свойства**

1. $0 \leq F(x_1, x_2) \leq 1$
2. - при фиксированном $x_2$ функция $F(x_1, x_2)$, как функция переменная $x_1$ является неубывающей
   - аналогично $x_1$
3. $\lim\limits_{x_1 \to -\infty, x_2 = const} F_x(x_1, x_2) = 0, \lim\limits_{x_2 \to -\infty, x_1 = const} F_x(x_1, x_2) = 0;$
4. $\lim\limits_{x_2 \to +\infty, x_1 \to +\infty} F(x_1, x_2) = 1$
5. $\lim\limits_{x_2 \to +\infty, x_1 = const} F(x_1, x_2) = F_{X_1}(x_1), \lim\limits_{x_1 \to +\infty, x_2 = const} F(x_1, x_2) = F_{X_2}(x_2)$
6. Вероятность того, что реализация попадёт в похожую на прямоугольник область

   $D = \{(x, y) : x \in [a_1, b_1), y \in [a_2, b_2)\}$:

   $P\{a_1 \leq X_1 \ < b_1, a_2 \leq X_2 < b_2\} = F(a_1, a_2) + F(b_1, b_2) - F(a_1, b_2) - F(b_1, a_2)$
7. При фиксированном $x_2$ функция $F(x_1, x_2)$ как функция переменной $x_1$ является непрерывной слева во векторе. Аналогично $x_1$

### 1.5 Сформулировать определение дискретного случайного вектора; понятие таблицы распределения двумерного случайного вектора. Сформулировать определения непрерывного случайного вектора и его функции плотности распределения вероятностей.

**Определение**

Случайный вектор $\overrightarrow{X} = (X_1, \ldots, X_n)$ называется дискертным, если каждая из случайных величин $X_i, i = \overline{1, n}$ является дискретной.

**Таблица распределения**

Рассмотрим случай n=2

Пусть:

1. (X, Y) - двумерный вектор — дискретный;
2. будем считать, что X и Y принимают конечное множество значений.

$X \in \{x_1, \dots, x_m\}, Y \in \{y_1, \dots, y_n\}$

Это означает, что случайны вектор (X, Y) может принимать значения $(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$. Закон распределения такого вектора часто задают таблицей:

Таблица 2 – $p_{ij} = P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\} = P\{\{X = x_i\} \cdot \{Y = y_j\}\} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$, при этом достаточно выполняется условие нормировки $\sum_m^{i=1} \sum_n^{j=1} p_{ij} = 1$;

| $XY$ | $y_1$ | $\dots$ | $y_j$ | $\dots$ | $y_n$ | $P_X$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | $p_{11}$ | $\dots$ | $p_{1j}$ | $\dots$ | $p_{1n}$ | $p_{x1}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $x_i$ | $p_{i1}$ | $\dots$ | $p_{ij}$ | $\dots$ | $p_{in}$ | $p_{xi}$ |
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |
| $x_m$ | $p_{m1}$ | $\dots$ | $p_{mj}$ | $\dots$ | $p_{mn}$ | $p_{xm}$ |
| $P_y$ | $p_{y1}$ | $\dots$ | $p_{yj}$ | $\dots$ | $p_{yn}$ | 1 |

**Определение**

Случайный вектор $(X_1, \dots X_n)$ называется непрерывным, если его функцию распределения можно представить в виде:

$$F_X(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} dt_1 \int_{-\infty}^{x_2} dt_2 \cdots \int_{-\infty}^{xn} f_X(t_1, \dots, t_n) dt_n. \tag{2}$$

При том функция $f_X$ называется функцией плотности распределения вероятностей случайного вектора $(X_1, \dots X_n)$, а $F_X$ — функция распределения плотности вектора $(X_1, \dots X_n)$.

С использованием теоремы о производной интеграла с переменным верхним пределом получаем, что если $(x_1^0, ..., x_n^0)$ — точка непрерывности функции $F_X$, то $f_X(x_1^0, ..., x_n^0) = \frac{\delta^n F_X(x_1^0, ..., x_n^0)}{\delta x_1 \delta x_2 .... \delta x_n}\Bigg|_{(x_1^0, ..., x_n^0)}$

Для n = 2: $f_X(x_1^0, x_2^0) = \frac{\delta^2 F_X(x_1^0, x_2^0)}{\delta x_1 \delta x_2}\Bigg|_{(x_1^0, x_2^0)}$

Получается, что из функции плотности можно получить функцию распределения случайного вектора, и наоборот, из функции распределения можно получить функцию плотности. Таком образом, функция плотности, как и функция распределения случайного вектора, содержит всю информацию о его законе распределения. Поэтому задавать закон распределения случайного вектора можно как с использованием функции плотности, так и с использованием функции распределения.

### 1.6 Сформулировать определения непрерывного случайного вектора и его функции плотности распределения вероятностей. Записать основные свойства функции плотности распределения двумерных случайных векторов.

**Свойства** для n = 2

1. $f(x_1, x_2) \geq 0$;
2. $P\{a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2\} = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \int_{a_2}^{b_2} f(x_1, x_2) dx_2$;
3. $\iint\limits_{R_1^2} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1$ — условия нормировки;
4. $P\{x_1 \leq X_1 < x_1 + \Delta x_1, x_2 \leq X_2 < x_2 + \Delta x_2\} \approx f(x_1, x_2)\Delta x_1 \Delta x_2$, если $(x_1, x_2)$ - точка непрерывности функции f;
5. Если $(X_1, X_2)$ — непр. случайные вектор, то для $\forall$ наперед заданного $(x_1^0, x_2^0), P\{(X_1, X_2 = (x_1^0, x_2^0))\} = 0$;
6. $P\{(X_1, X_2) \in \text{Đ}\} = \iint\limits_{\text{Đ}} f(x_1, x_2) dx_1 dx_2$;
7. $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_2 = f_{x_1}(x_1)$,
   $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2) dx_1 = f_{x_2}(x_2)$.

### 1.7 Сформулировать определение независимых случайных величин. Сформулировать свойства независимых случайных величин. Сформулировать определение попарно независимых случайных величин и случайных величин, независимых в совокупности.

**Определение**

Случайный величины X и Y называются независимыми, если $F(x, y) = F_X(x)F_Y(y)$, где F — совместная функция распределения случайных величин X и Y.

$F_X, F_Y$ — маргинальная функция распределения случайных величин X и Y.

**Свойства**

1. Случайные величины X и Y незав. $\Leftrightarrow$ для $\forall x \in \Re, \forall y \in \Re$ события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ независимы.
2. Случайные величины X, Y независимы $\Leftrightarrow \forall\forall x_1, x_2 \in \Re\ \forall\forall y_1, y_2 \in \Re$ события $\{x_1 \leq X < x_2\}$ и $\{y_1 \leq Y < y_2\}$ независимы.
3. Случайные величины X и Y независимы $\Leftrightarrow \forall M_1$ и $\forall M_2$ события $\{X \in M_1\}$ и $\{Y \in M_2\}$ независимы, где $M_1, M_2$ — промежутки или обозначения промежутков в $\Re$
4. Если

1 X и Y дискретная случайная величина;

2 $X \in \{x_1, \ldots, x_n\}$, $Y \in \{y_1, \ldots, y_n\}$;

3 $P\{(X, Y) = (x_i, y_j)\} = p_{ij}$, $P\{X = x_i\} = p_{xi}, P\{Y = y_i\} = p_{yi}$, $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$,

то X, Y независимы $\Leftrightarrow$ $p_{ij} = p_{xi} p_{y_i}$ $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$

5. Если X, Y непрерывные случайные величины, то X, Y независимы $\Leftrightarrow$ $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$, где f — совм. плотность распределения случайного вектора X и Y $f_X, f_Y$ — маргинальные плотности.

**Определение**

Случайный величины $X_1, \ldots, X_n$ заданные на одном и том же вероятностном пространстве, называют **независимыми в совокупности**, если $F(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots F_{X_n}(x_n)$, где F — совместная функция распределения случайных величин $X_i, \forall i = \overline{1, n}$.

**Определение**

Случайный величины $X_1, \ldots, X_n$, заданные на одном и том же вероятностном пространстве, называют **независимыми в попарно**, если $X_i$ и $X_j$ независимы для $\forall i, j = \overline{1, n}, i \neq j$.

### 1.8 Понятие условного распределения. Доказать формулу для вычисления условного ряда распределения одной компоненты двумерного дискретного случайного вектора при условии, что другая компонента приняла определенное значение. Записать формулу для вычисления условной плотности распределения одной компоненты двумерного непрерывного случайного вектора при условии, что другая компонента приняла определенное значение.

**Нет вопроса**

### 1.9 Сформулировать определение независимых случайных величин. Сформулировать критерий независимости двух случайных величин в терминах условных распределений.

**Этого вопроса нет**

**Теорема.** ***Критерии независимости случайных величин в терминах условных распределений.***

1. *Пусть* $(X, Y)$ — *двумерный случайный вектор. Тогда следующие условия эквивалентны:*
   - $X, Y$ — *независимые.*
   - $F_X(x \,|\, Y = y) \equiv F_X(x)$ *для всех* $y$, *в которых определена* $F_X(x \,|\, Y = y)$.
   - $F_Y(y \,|\, X = x) \equiv F_Y(y)$ *для всех* $x$, *в которых определена* $F_Y(y \,|\, X = x)$.
2. *Если* $(X, Y)$ — *непрерывный случайный вектор, то следующие условия эквивалентны. (для условной плотности)*
   - $X, Y$ — *независимые.*
   - $f_X(x \,|\, Y = y) \equiv f_X(x)$ *для всех* $y$, *в которых определена* $f_X(x|Y = y)$.
   - $f_Y(y \,|\, X = x) \equiv f_Y(y)$ *для всех* $x$, *в которых определена* $f_Y(y|X = x)$.
3. *Если* $(X, Y)$ — *дискретный случайный вектор, то следующие утверждения эквиваленты.*
   - $X, Y$ — *независимые.*
   - $P\{X = x_i \,|\, Y = y_j\} \equiv P\{X = x_i\}$ *для всех* $j = \overline{1;\, n}$.
   - $P\{Y = y_j \,|\, X = x_i\} \equiv P\{Y = y_j\}$ *для всех* $i = \overline{1;\, m}$.

   *(здесь* $X \in \{x_1, \ldots, x_m\}$, $Y \in \{y_1, \ldots, y_n\}$*).*

## 1.10 Понятие функции случайной величины. Указать способ построения ряда распределения функции дискретной случайной величины. Сформулировать теорему о плотности распределения функции от непрерывной случайной величины.

Пусть

1) X — некоторая случайная величина;

2) $\phi : R \to R$ — некоторая известная функция.

Тогда $\phi(X) = Y$ — некоторая случайная величина.

**Случай дискретной случайной величины**

Пусть X — дискретная случайная величина, имеющая ряд распределения

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $\ldots$ | $x_n$ |
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\ldots$ | $p_n$ |

Тогда Y $= \phi(X)$ — тоже дискретная случайная величина. При этом Y принимает значения $\phi(x_1), \ldots \phi(x_n)$. Поэтому ряд распределения Y будет выглядеть вот так

| $Y$ | $\phi(x_1)$ | $\phi(x_2)$ | $\dots$ | $\phi(x_n)$ |
|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $\dots$ | $p_n$ |

Если в этой таблице некоторые из значений совпадают, то соответствующие столбцы нужно объединить, приписав этому значению суммарную вероятность.

**Теорема**

Пусть

1) X — непрерывная случайная величина;
2) $\phi : R \to R$;
3) $\phi$ монотонна и непрерывна дифференцируема;
4) $\psi$ — функция, обратная к $\phi$
5) Y $= \phi(X)$

Тогда

1) Y — непрерывная случайная величина;
2) $f_Y(y) = f_X(\psi(y))|\psi^{‘}(y)|$

### 1.11 Понятие скалярной функции случайного векторного аргумента. Доказать формулу для нахождения значения функции распределения случайной величины Y, функционально зависящей от случайных величин X1 и X2 .

Рассмотрим на *вероятностном пространстве* ($\Omega$, $\beta$, P) двуменрный *случайны вектор* $\overrightarrow{X} = (X_1; X_2)$ и числовую функцию $y = \phi(x_1, x_2)$ числовых аргументов $x_1, x_2$

**Определение**. Случайную величину

$$Y = \phi(X_1, X_2) = \phi(X_1(\omega), X_2(\omega)) \tag{3}$$

называют **функцией (скалярной) от двумерной случайной величины (двумерного случайного вектора)** $(X_1; X_2)$.

**Теорема**

В том случае, когда $(X_1; X_2)$ — *двумерная непрерывная случайная величина с плотностью распределения* $p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$, функцию распределения случайной величины $Y = \phi(X_1, X_2)$ можно найти по формуле

$$F_Y(y) = \iint\limits_{\phi(x_1,x_2)<y} p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)dx_1dx_2, \tag{4}$$

где область интегрирования состоит из всех значения $x_1, x_2$ для которых $\phi(x_1, x_2) < y$

**Доказательство**

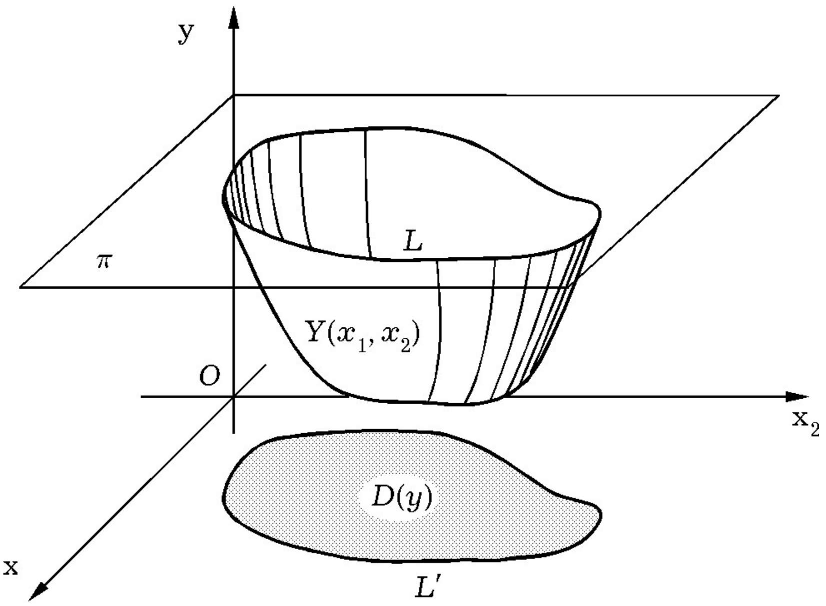


Рисунок 1 – Функция распределения

Поясним геометрически вывод формулы 4. Пусть поверхность, определенная функцией $y = \phi(x_1, x_2)$, имеет вид "чаши"(см. рис. 1) и y — произвольное значение случайной величины $Y = \phi(X_1, X_2)$. Проведем плоскость $\pi$, проходящую через точку $(0, 0, y)$ и ортогональную оси $Oy$. Обозначим через L линию пересечения плоскости $\pi$ и поверхности $y = \phi(x_1; x_2)$; $L^{`}$ — ее проекцию на плоскость $x_1Ox_2$; $D(y)$ — ту част плоскости $x_1Ox_2$, попадание в которую случайного вектора $(X_1; X_2)$ ведет к реализации *события* $\{Y < y\}$. Поскольку $Y = \phi(X_1, X_2)$, то

$$D(y) = \{\{x_1; x_2\} : \phi(x_1, x_2) < y\} = \{\phi(x_1, x_2) < y\}. \tag{5}$$

События $\{Y < y\}$ и $\{(X_1; X_2) \in D(y)\}$ совпадают, и в соответствии со свойство 6 *двумерной плотности распределения*

$$P\{Y < y\} = P\{(X_1; X_2) \in D(y)\} = \iint\limits_{\phi(x_1,x_2)<y} p_{X_1,X_2}(x_1, x_2)dx_1dx_2, . \tag{6}$$

Учитывая равенство $P\{Y < y\} = F_Y(y)$, приходим к формуле 4.

### 1.12 Сформулировать и доказать теорему о формуле свертки.

Когда $X_1, X_2$ являются *независимыми случайными величинами, то есть их двумерная плотность распределения*

$$p_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2) \tag{7}$$

(мы ограничиваемся, здесь только случаем непрерывных случайных величин), а случайная величина Y является их суммой: $Y = X_1 + X_2$

Тогда $Y = Y(X_1, X_2)$, где $Y(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ и согласно формуле 4, находим:

$$\begin{aligned} F_Y(y) = \iint\limits_{x_1+x_2<y} p_{X_1,X_2}(x_1,x_2)dx_1dx_2 = \iint\limits_{x_1+x_2<y} p_{X_1}(x_1)p_{X_2}(x_2)dx_1dx_2 = \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{X_1}(x_1)dx_1 \int\limits_{-\infty}^{y-x_1} p_{X_2}(x_2)dx_2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F_{X_2}(y-x_1)p_{x_1}(x_1)dx_1. \end{aligned} \tag{8}$$

Дифференцируя последнюю формулу по y под знаком интеграла, получаем (с учетом преобразования $x_1 = x$) выражение для *плотности* $p_y(y)$ распределения суммы $X_1, X_2$ :

$$p_Y(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{X_2}(y-x)p_{X_1}(x)dx \tag{9}$$

### 1.13 Сформулировать определение математического ожидания случайной величины (дискретный и непрерывный случаи). Записать формулы для вычисления математического ожидания функции от случайной величины. Сформулировать свойства математического ожидания. Механический смысл математического ожидания.

I X — дискретный случайный вектор

**Определение**

Мат. ожидание (среднее значение) случайного вектора X M[X] = $\Sigma_i x_i p_i$, где $p_i = P\{X = x_i\}$

**Замечание**

- При этом, если *множество возможных значений* случайной величины X счетно, предполагается, что

$$\Sigma_i^{+\infty}|x_i|p_i < +\infty \tag{10}$$

  то есть ряд, определяющий мат. ожидание, сходится абсолютно, в противном случае, мат. ожидание случ. величины X не существует.
- механический смысл M[X]— центр масс.

II X — непрерывная случайная величина f(x) — плотности распределения.

**Определение**

$$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)dx \tag{11}$$

- $$M[X] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |x| \cdot f(x) dx < +\infty \tag{12}$$

  т.е. несобственный интеграл, определяющий мат. ожидание, сходится абсолютно. Если инт. расходится M[X] не существует.
- бесконечный стержень Масса (1 кг) распр. вдоль стержня вдоль по закону f(x) M[X] = m — координаты центра масс стержня.

**Формула для вычисления мат. ожидания функции от случайной величины**

X случайная величина $\phi \Re \to \Re$

$M[\phi(X)] = \Sigma_i \phi(x_i) p_i$, если X — дискретная сл. вел.

$M[\phi(X)] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) \cdot f(x) dx$, если X — непрерывная случайная величина, f(x) — плотность.

**Свойства математического ожидания**

1) Если $P\{X = x_0\} = 1$, то $M[X] = x_0$;
2) $M[aX + b] = a \cdot MX + b$;
3) $M[X_1 + X_2] = MX_1 + MX_2$;
4) Если $X_1, X_2$ — независимы, то $M[X_1 X_2] = (MX_1)(MX_2)$.

### 1.14 Сформулировать определение дисперсии случайной величины. Записать формулы для вычисления дисперсии в дискретном и непрерывном случае. Сформулировать свойства дисперсии. Механический смысл дисперсии.

**Дисперсией** случайной величины $X$ называют число

$$D[X] = M[(X - m)^2], \tag{13}$$

где $m = MX$.

**В случае дискретной случайной величины**

$$D[X] = \sum_i (x_i - m)^2 p_i, \tag{14}$$

где $p_i = P\{X = x_i\}$.

**В случае непрерывной случайной величины**

$$D[X] = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - m)^2 f(x)\, dx \tag{15}$$

**Свойства дисперсии**

1) $DX \geqslant 0$;
2) Если $P\{X = x_0\} = 1$, то $DX = 0$;
3) $D[aX + b] = a^2 DX$;
4) $D[X] = M[X^2] - (MX)^2$;
5) Если $X_1, X_2$ — независимы, то $D[X_1 + X_2] = DX_1 + DX_2$.

**Механический смысл**

Дисперсия случайной величины характеризует разброс значений этой случай ной величины относительно математического ожидания. Чем больше дисперсия, тем больше разброс значений.

С точки зрения механики дисперсия — момент инерции вероятностной массы относительно математического ожидания.

### 1.15 Сформулировать определения начального и центрального моментов случайной величины. Математическое ожидание и дисперсия как моменты. Сформулировать определение квантили и медианы случайной величины.

Пусть $X$ — случайная величина.

**Моментом $k$-ого порядка ($k$-ым случайным моментом)** случайной величины $X$ называется число

$$m_k = M[X^k] \tag{16}$$

**Центральным моментом $k$-ого порядка** случайной величины $X$ называется число

$$\mathring{m}_k = M[(X - m)^k], \tag{17}$$

где $m = MX$.

**Мат. ожидание и дисперсия как моменты**

**Мат. ожидание** — $m_1 = MX$.

**Дисперсия** — $\mathring{m}_2 = DX$.

**Определение квантили и медианы**

Пусть

1) $X$ — случайная величина;
2) $\alpha \in (0, 1)$.

**Квантилью** уровня $\alpha$ ($\alpha$-квантилью) случайной величины $X$ называется $q_\alpha$ такое, что

$$P\{X < q_\alpha\} \leqslant \alpha, P\{X > q_\alpha\} \leqslant 1 - \alpha. \tag{18}$$

**Медианой** случайной величины $X$ называют ее квантиль уровня $1/2$.

### 1.16 Сформулировать определение ковариации случайных величин. Записать формулы для вычисления ковариации в дискретном и непрерывном случаях. Сформулировать свойства ковариации.

**Ковариация** — характеристика случайного вектора.

Пусть $(X, Y)$ — двумерный случайный вектор.

**Ковариацией** случайных величин $X$ и $Y$ называется число

$$cov(X, Y) = M[(X - m_X)(Y - m_Y)], \tag{19}$$

где $m_X = MX, m_Y = MY$.

**В случае дискретного случайного вектора**

$$cov(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i - m_X)(y_j - m_Y)p_{ij}, \tag{20}$$

где $p_{ij} = P\{(X < Y) = (x_i, y_j)\}$.

**В случае непрерывного случайного вектора**

$$cov(X, Y) = \iint\limits_{R^2} (x - m_X)(y - m_Y) f(x, y)\, dx\, dy, \tag{21}$$

где $f$ — совместная плотность величин $X$ и $Y$.

**Свойства ковариации**

1) $D(X + Y) = DX + DY + 2cov(X, Y)$;
2) $cov(X, X) = DX$;
3) Если $X, Y$ — независимые, то $cov(X, Y) = 0$;
4) $cov(a_1X + b_1, a_2Y + b_2) = a_1a_2cov(X, Y)$;
5) $|cov(X, Y)| \leqslant \sqrt{DX \cdot DY}$, причем $|cov(X, Y)| = \sqrt{DX \cdot DY} \iff \exists\exists a, b \in \Re, Y = aX + b$ (т. е. $X$ и $Y$ связаны линейной зависимостью);
6) $cov(X, Y) = M[XY] - (MX)(MY)$.