ISSN 1000-0054 清华大学学报(自然科学版) 2019年 第59卷 第1期 10/10
CN 11-2223/N J Tsinghua Univ (Sci & Technol), 2019, Vol. 59, No. 1 73-84

模糊实物期权框架下初创企业估值

郑 征, 朱武祥

(清华大学 经济管理学院, 北京 100084)

摘 要: 为量化描述初创企业估值不确定性, 该文赋予关键参数区间变化, 推导出基于模糊理论的现金流折现模型和复合实物期权定价模型。研究表明: 模糊实物期权是对现金流折现模型的改进, 通过获得企业价值变化范围, 使得估值结果更加合理; 对模糊参数的敏感性分析表明, 初创企业价值不确定性与模糊性负相关, 最小取值与左宽度正相关, 最大取值与右宽度正相关; 分析不同情形下初创企业价值状态, 可提高投资决策的准确性。通过案例分析, 进一步验证了模糊实物期权在初创企业多阶段价值评估中的有效性。

关键词: 模糊理论; 实物期权; 初创企业; 价值评估

中图分类号: TF224.9 文献标志码: A

文章编号: 1000-0054(2019)01-0073-12

DOI: 10.16511/j.cnki.qhdxxb.2018.22.051

Start-ups valuation predicted by fuzzy real options theory

ZHENG Zheng, ZHU Wuxiang

(School of Economy and Management, Tsinghua University, Beijing 100084, China)

Abstract: Key parameter interval changes are used to quantify start-ups uncertainty and to deduce the discounted cash flow (DCF) and a compound real options model based on fuzzy theory. This research shows that the fuzzy real option method improves the DCF by giving the range of values with a fuzzy uncertainty to make more reasonable valuations. The fuzzy parameter sensitivity analysis shows that the start-ups uncertainty negatively correlates with the probability, the minimum value positively correlates with the left width, and the maximum value positively correlates with the right width. Analyses of the start-ups values for different situations can improve the investment decision accuracy. A case study further verifies the effectiveness of the fuzzy real options method in multi-stage investments for start-ups.

Key words: fuzzy theory; real options; start-ups; valuation

与成熟企业相比, 科技型初创企业具有经营历史短、无形资产占比高、技术更迭速度快等特点。初创企业在新品开发、市场需求、销售收入、行业竞争、未来生存发展等方面具有很高的不可预测性, 其估值具有不同于成熟企业的特点, 使用传统现金流折现(discounted cash flow, DCF)模型, 难以准确对其定价估值。

采用实物期权定价方法可量化资产价值变动的随机性, 较好反映初创企业未来价值增长潜力。然而, 由于假设条件严格、估值参数常为固定值, 现行的实物期权定价模型不能体现初创企业真实价值, 在实际应用中, 受诸多不确定因素的影响, 价值变动呈现非随机性特点, 定价估值参数在一定区间内变化, 并非是一个固定数值。

模糊理论可以表示一定范围的变化, 在处理非随机不确定性方面具有天然优势。将模糊理论引入实物期权, 赋予关键参数区间变化, 可把估值参数限定在合理的数值区间内, 使评估结果更加符合客观情况。为此, 进入21世纪以来, 国外一些学者开始尝试通过放松完全市场的部分假设条件, 引入更多的现实因素, 建立模糊实物期权定价模型, 以提升估值方法的实用性。

模糊实物期权用隶属函数量化描述实物期权估值中的模糊参数, 获得相应的价值区间。此方法可有效弥补实物期权固定估值的不足, 提高初创企业价值评估的准确性。现有研究主要采用三角模糊数和梯形模糊数进行分析。三角模糊数是将模糊参数从变量转化为区间的一种方法, 由一个核心值和左右调整值构成。梯形模糊数由两个核心值和左右调整值构成, 当两个核心值相同时, 梯形模糊数即为三角模糊数。实物期权定价模型更适宜求得一个确定数, 并针对该确定数进行调整, 因此应选用三角模糊数。

收稿日期: 2018-05-30

作者简介: 郑征(1989—), 女, 博士研究生。

通信作者: 朱武祥, 教授, E-mail: zhuwx@sem.tsinghua.edu.cn

本文将三角模糊数引入企业估值，针对现金流折现模型和实物期权方法的不足，提出适合初创企业价值评估的模糊复合实物期权定价模型。首先，本文运用模糊方法拓展企业估值理论，将现金流和折现率界定为模糊数，构建三角模糊数下企业现金流折现模型。将复合实物期权作为研究对象，分析模糊参数选取的可行性，推导出连续时间和离散时间下 n 阶段模糊复合实物期权定价模型。然后，对模糊参数进行敏感性分析，讨论在不同置信水平、左宽度和右宽度下，净现值(net present value，NPV)和实物期权价值的变化，判断模糊程度和取值范围对初创企业价值的影响。最后，构建模糊实物期权框架下初创企业估值模型，提出投资决策判断标准，讨论不同情形下的决策依据，并通过算例来描述初创企业估值过程，验证模糊方法的可行性；实践调研新三板挂牌企业，进行案例分析，验证本文方法的适用性。

1 模糊实物期权理论发展与概念界定

1.1 模糊期权理论研究

1.1.1 模糊实物期权的理论与应用研究

实物期权理论源于 Black 等[1]对金融期权的开创性研究。Myers[2]首次提出实物期权概念，认为企业价值是现有经营性资产与未来增长机会的现值之和。现有经营性资产是指企业主营业务直接产生的现金流，可用 NPV 表示；未来增长机会是指企业未来增长机会带来的价值增值，本质是一个实物资产的看涨期权，可运用期权定价理论加以评估[3]。

实物期权用概率描述参数随机性，来量化初创企业未来增长机会价值，但忽略了参数模糊性所带来的估值变化。Zadeh[4]创立了模糊集合理论，用隶属函数刻画元素对集合隶属程度的过度性，提供了对模糊现象进行定量处理和分析运算的方法。Buckley[5]首先将模糊数学理论应用于金融领域，对模糊现值等概念进行了数学表达。

近 20 年来，大量学者用模糊理论评价期权定价过程中各种主观不确定性问题，理论研究成果丰富。Carlsson 等[6]首次将模糊理论引入实物期权估值，假设企业标的资产和执行价格为梯形模糊数，建立了模糊 Black-Scholes(BS)期权定价模型。Yoshida[7]将模糊理论应用于二叉树，推导出资产价格为三角模糊数的期权定价模型。Wu[8-9]运用模糊理论对 BS 模型的价值区间与置信度进行了研究，认为模糊理论下的期权价值更符合实际，并将无风险利率、波动率、资产价格这 3 个变量设为模糊数，构建了考虑红利支付的模糊 BS 模型。Xu 等[10]提出模糊环境下跳跃扩散期权定价模型，该模型具有跳跃随机性和模糊性。Wang 等[11]将 Geske 模型中的利率和波动率模糊化处理，提出两阶段模糊复合期权定价模型。Tavakkolnia[12]将不同阶段波动率设为随机模糊数，推导出复合二叉树实物期权定价模型。

实物期权定价主要运用 BS 和二叉树模型，这两个模型均由标的资产价值、执行价格、波动率、无风险利率、持有期限这 5 个参数构成。现有学者针对参数模糊性开展研究，将不同参数设为不同类型的模糊数，验证了模糊期权理论技术层面的可行性。Bi 等[13]将现金流、投资成本和无风险利率设为模糊数，对 BS 定价模型进行改进，建立了模糊实物期权评价模型，验证了实物期权理论在 BOT(build-operate-transfer)项目投资决策中的适用性。Pushkar 等[14]将 BS 期权定价模型中标的资产和执行价格设为梯形模糊数，运用模糊实物期权方法估计信息技术(IT)项目的价值。Wang 等[15]将标的资产和波动率设为三角模糊数，寻找模糊估值边界，对土地开发 PPP(public-private partnership)项目进行了案例研究。Biancardi 等[16]将波动率设为三角模糊数，运用模糊复合实物期权对研发项目估值。De Andrés-Sánchez[17]将标的资产、无风险利率、波动率设为模糊数，运用模糊 BS 对西班牙股票期权进行了实证研究，证明模糊实物期权估值更符合实际交易价格。

21 世纪以来，随着科技型初创企业的大量涌现，一些学者提出模糊理论较传统方法能更为准确地评估企业价值，并应用案例进行验证。Zmeškal[18]认为企业价值是一个欧式看涨期权，考虑到未来发展的不确定性，应采用模糊实物期权方法进行评估。Yao 等[19]将 DCF 模型中的现金流拓展为模糊数，获得了模糊环境下的企业价值。Wang 等[20]认为企业研发价值源于未来信息的不确定性，应在实物期权中引入模糊理论，实现正确估值。Semercioglu 等[21]运用模糊二叉树，估计多阶段新品研发项目价值，为不确定环境下柔性管理提供了决策依据。

中国学者从 2005 年开始进行模糊实物期权理论相关研究，起初主要是通过文献翻译，将发达国家有关定价理论、估值模型等方面的研究成

果导入中国，自身理论创新很少。随着国外模糊实物期权定价理论的不断完善，应用案例不断增多，近年来，国内学者加强了模糊实物期权理论研究力度，已具备应用模糊实物期权方法的基础条件。赵振武等[22]采用梯形模糊数表示标的资产和投资成本，应用模糊实物期权方法分析了投资决策。张维功等[23]提出了基于BS模型的模糊实物期权定价模型，将非线性三角模糊数引入连续时间实物期权评估，描述参数的不确定性。张茂军等[24]运用三角直觉模糊数表示上涨和下降因子，构建了模糊二叉树模型。李双兵等[25]结合实物期权理论和梯形模糊数，构建了一个分阶段的高新技术企业风险投资模糊实物期权定价模型，并通过算例验证了该模型的可行性。赵昕等[26]将无风险利率、波动率等参数假定为灰色模糊数，构建了跳跃扩散BS定价模型。

1.1.2　研究评述

现有研究大都将BS或二叉树模型中若干个参数设为模糊数，推导出模糊期权定价模型，并用案例进行验证，主要存在3方面问题：1）在模糊数应用中，企业价值＝NPV＋实物期权价值，现有研究仅强调实物期权参数的模糊性，而忽略了DCF模型中参数模糊性对企业价值的影响，有必要运用模糊理论对DCF模型进行调整，保证估值结果的一致性和准确性。2）研究对象多局限于简单实物期权，较少涉及多阶段复合实物期权的参数变化，而初创企业发展是一个多阶段的动态过程，在每个阶段面临着不同的不确定性，模糊参数设定也随之改变，有必要采用敏感性分析方法，从动态发展角度分析模糊参数变化对企业价值的影响，进而分析实物期权价值的变化规律。3）现有文献大都直接给出模糊参数选择结果，缺少对选择过程进行定性分析，而模糊参数选取与理论模型假设和案例实际状况有关，有必要研究模糊参数选取的可行性，并用真实案例进行验证。此外，对于含有多重不确定性的复杂期权定价问题，如何建立模糊实物期权定价模型并求解，是值得研究的前沿课题。

基于此，本文将构建模糊实物期权框架下初创企业估值模型，在分析模糊参数选取可行性的基础上，拓展理论模型，运用敏感性分析方法证明模糊参数变化对企业价值影响的方向，并用实践调研的新三板企业案例进行验证。

1.2　模糊数概念界定

Zadeh将实数域上的一个具有特殊性质的模糊集定义为模糊数。模糊数是研究和处理模糊现象的一种数学方法，其核心是通过隶属函数打破普通集合论中元素对集合的绝对隶属关系，考虑$x\in A$与$x\notin A$之间的状况。本文将运用3个模糊数概念构建初创企业估值模型，定义如下[4]：

1）隶属函数。$\widetilde{A}$为论域X的一个模糊子集，若对每个$x\in X$，均存在隶属度$\mu_{\widetilde{A}}(x)$与之对应，则$\mu_{\widetilde{A}}(x)$为$\widetilde{A}$的隶属函数。$\mu_{\widetilde{A}}(x)\in[0,1]$；当$\mu_{\widetilde{A}}(x)=0$，元素$x$不是$A$的隶属关系；当$\mu_{\widetilde{A}}(x)=1$，元素$x$在$A$中绝对隶属。

2）模糊数。运用模糊子集理论，将模糊数$\widetilde{A}$定义为有界、正规、凸和连续隶属函数的实线模糊集。三角模糊数$\widetilde{A}=(c,\alpha,\beta)$，具体形式为

$$\mu_{\widetilde{A}}(x)=\begin{cases}1-\dfrac{c-x}{\alpha}, & c-\alpha\leqslant x\leqslant c;\\ 1-\dfrac{x-c}{\beta}, & c\leqslant x\leqslant c+\beta;\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中：c是核心值；α是左宽度，$c-\alpha$是三角模糊数的下界，是对c最保守的估计值；β是右宽度，$c+\beta$是三角模糊数的上界，是对c最乐观的估计值。

3）γ截集。模糊子集通过隶属函数来定义，选取实数$\gamma\in[0,1]$，当$\widetilde{A}(x)\geqslant\gamma$，便算作$x\in\widetilde{A}$；否则，便算作$x\notin\widetilde{A}$。这样得到一个普通子集，记作$(A)_\gamma=\{x:x\in X,\widetilde{A}(x)\geqslant\gamma\}$，$(A)_\gamma$即为模糊数$\widetilde{A}$的$\gamma$截集，$\gamma$为置信水平。在三角模糊数中，

$$(\widetilde{A})_\gamma=[c-(1-\gamma)\alpha,\ c+(1-\gamma)\beta].$$

$\widetilde{A}_\gamma^-$和$\widetilde{A}_\gamma^+$分别表示γ截集的左右端点：

$$\widetilde{A}_\gamma^-=\min\{(\widetilde{A})_\gamma\},\ \widetilde{A}_\gamma^+=\max\{(\widetilde{A})_\gamma\}.$$

模糊数$\widetilde{A}$取γ截集所形成的区间范围为$(\widetilde{A})_\gamma=[\widetilde{A}_\gamma^-,\widetilde{A}_\gamma^+]$。在$\gamma$从1到0的下降过程中，$(\widetilde{A})_\gamma$范围不断扩大，参数模糊性增强。

2　运用模糊理论构建企业估值模型

本文将通过5个步骤开展基于模糊实物期权理论的初创企业估值研究：1）DCF参数确定与NPV计算。基于初创企业的现有经营性资产，估测DCF模型的4个参数，计算模糊NPV。2）模糊实物期权参数确定与价值计算。基于初创企业的未来增长机会，估测期权定价的5个参数，计算模糊实物期权价值。3）模糊参数敏感性分析。讨论在不同γ、α和β下，NPV和实物期权价值的变化，判断模糊程

度和取值范围对企业价值影响的方向。4)企业估值与投资决策。根据公式“初创企业价值=模糊净现值+模糊实物期权价值”,获得模糊初创企业价值;设计两个步骤,判断不同情形下企业的投资决策;通过算例分析,验证决策实施的可行性。5)案例分析与可靠性检验。以新三板挂牌企业进行实证检验,阐明模糊实物期权在初创企业估值中的合理性。

2.1 模糊参数确定

传统DCF模型假设企业基于现有业务预测未来现金流,企业价值由经营有效期(n)经加权资本成本(weighted average cost of capital, WACC)折现后的企业自由现金流(free cash flow of firm, FCFF)构成,用净现值(NPV)表现。DCF通常采用两阶段模型进行估值:明确预测阶段和永续增长阶段。

$$\mathrm{NPV}=\sum_{t=1}^{n}\frac{\mathrm{FCFF}_t}{(1+\mathrm{WACC})^t}+\frac{\mathrm{FCFF}_{n+1}}{(1+\mathrm{WACC})^n\cdot(\mathrm{WACC}-g)}.$$

式中:FCFF_t 为企业在第 t 年的自由流金流,WACC为加权资本成本,g 为永续增长率,n 为企业经营有效期。g 和 n 可依据行业平均水平自行确定,是确定数;FCFF和WACC具有较大不确定性,可设为模糊数。

FCFF是企业将创造的利润进行再投资后剩余的可供企业自由支配的现金流,是计算NPV的主要指标。初创企业成立时间短,盈利模式不清晰,缺少历史经营数据作为估值依据,只能通过对企业管理团队、研发实力、创新能力所产生的未来收益潜力进行判断,预期未来现金流。该判断受主观因素制约,具有较强的主观不确定性,可以用模糊数予以修正。

WACC是由股权资本成本和债务资本成本加权平均获得,$\mathrm{WACC}=R_{\mathrm{d}}\left(\frac{D}{V}\right)+R_{\mathrm{s}}\left(\frac{E}{V}\right)$。$D$ 是企业股权价值,E 是企业债权价值,V 是企业价值,$V=D+E$。R_{d} 是债务资本成本率,债务利息可以抵税。$R_{\mathrm{d}}=R_{\mathrm{b}}(1-T)$。其中:$R_{\mathrm{b}}$ 是企业借债利率,T 是企业所得税税率。R_{s} 是股权资本成本率,采用资本资产定价模型(capital asset pricing model, CAPM)估计。$R_{\mathrm{s}}=R_{\mathrm{f}}+\beta(R_{\mathrm{m}}-R_{\mathrm{f}})$。其中:$R_{\mathrm{f}}$ 是无风险利率,R_{m} 是市场平均收益率,$\beta=\mathrm{Cov}(R_{\mathrm{i}},R_{\mathrm{m}})/\mathrm{Var}(R_{\mathrm{m}})$,即企业收益率与市场收益率的协方差,与市场收益率方差的比值。β 系数的测算与企业收益率 R_{i} 有关,而初创企业难以在公开市场进行实时交易,无法获得连续价格,β 参数估计中存在主观不确定性,可运用模糊理论进行调整。

2.2 基于模糊数的企业自由现金流折现模型

根据模糊集定义,以三角模糊集为基础,本文将现金流FCFF和折现率WACC设为模糊数:

$$(\widetilde{\mathrm{FCFF}_t})_\gamma=[(\widetilde{\mathrm{FCFF}_t})_\gamma^-,(\widetilde{\mathrm{FCFF}_t})_\gamma^+],$$

$$(\widetilde{\mathrm{WACC}})_\gamma=[(\widetilde{\mathrm{WACC}})_\gamma^-,(\widetilde{\mathrm{WACC}})_\gamma^+].$$

相应的 γ 截集为:

$$(\widetilde{\mathrm{FCFF}_t})_\gamma=[\mathrm{FCFF}_t-(1-\gamma)\alpha_{\mathrm{FCFF}},\ \mathrm{FCFF}_t+(1-\gamma)\beta_{\mathrm{FCFF}}],$$

$$(\widetilde{\mathrm{WACC}})_\gamma=[\mathrm{WACC}-(1-\gamma)\alpha_{\mathrm{WACC}},\ \mathrm{WACC}+(1-\gamma)\beta_{\mathrm{WACC}}].$$

将模糊参数代入DCF模型,获得基于三角模糊数的企业现金流折现模型,

$$(\widetilde{\mathrm{NPV}_k})_\gamma=[(\widetilde{\mathrm{NPV}})_\gamma^-,(\widetilde{\mathrm{NPV}})_\gamma^+].\tag{1}$$

其中:

$$(\widetilde{\mathrm{NPV}_k})_\gamma^-=\sum_{t=1}^{n}\frac{(\widetilde{\mathrm{FCFF}_t})_\gamma^-}{(1+(\widetilde{\mathrm{WACC}})_\gamma^+)^t}+\frac{(\widetilde{\mathrm{FCFF}_{n+1}})_\gamma^-}{(1+(\widetilde{\mathrm{WACC}})_\gamma^+)^n((\widetilde{\mathrm{WACC}})_\gamma^+-g)},$$

$$(\widetilde{\mathrm{NPV}_k})_\gamma^+=\sum_{t=1}^{n}\frac{(\widetilde{\mathrm{FCFF}_t})_\gamma^+}{(1+(\widetilde{\mathrm{WACC}})_\gamma^-)^t}+\frac{(\widetilde{\mathrm{FCFF}_{n+1}})_\gamma^+}{(1+(\widetilde{\mathrm{WACC}})_\gamma^-)^n((\widetilde{\mathrm{WACC}})_\gamma^--g)}.$$

其中:$[(\widetilde{\mathrm{FCFF}_t})_\gamma^-,(\widetilde{\mathrm{FCFF}_t})_\gamma^+]$表示初创企业基于现有经营性资产产生的未来现金流可能取值范围,$[(\widetilde{\mathrm{WACC}})_\gamma^-,(\widetilde{\mathrm{WACC}})_\gamma^+]$表示折现率可能取值范围。$[(\widetilde{\mathrm{NPV}_k})_\gamma^-,(\widetilde{\mathrm{NPV}_k})_\gamma^+]$表示考虑模糊参数初创企业第 k 阶段($k=1,\cdots,n$)净现值可能值范围,其中$(\widetilde{\mathrm{NPV}_k})_\gamma^-$ 表示对企业未来现金流保守估计和对折现率乐观估计下NPV的最小值;$(\widetilde{\mathrm{NPV}_k})_\gamma^+$ 表示对企业未来现金流乐观估计和对折现率保守估计下NPV的最大值。

初创企业成长过程中,关键参数会发生变化并产生新的不确定性,需要对 γ、α 和 β 这3个模糊参数进行调整,重新计算初创企业模糊NPV。与传统DCF模型相比,基于模糊理论的DCF模型赋予参数区间变化,考虑了关键参数在不同状态下初创企

业价值变化范围，使得估值结果更加合理。

3 模糊实物期权定价模型构建

实物期权定价模型主要有连续时间下的 BS 模型和离散时间下的二叉树模型。当离散时间间隔趋向无穷小时，可从二叉树模型推导出 BS 模型。这两类实物期权定价模型对参数进行了严格的假设，由于假设过于理想化，模型得出的理论价格与实际价值之间存在一定的差距。于是，研究者们进行了两方面的改进：1）将更多的参数设为随机变量，例如执行价格、波动率；2）在现有随机过程中加入跳跃项、价值损漏项，对随机过程进行修正。

以上修正均运用随机性来刻画不确定性，但对于随机性无法解决的不确定性问题，模糊理论提供了有力的工具。本文同时考虑实物期权定价的随机性和模糊性，在分析模糊参数设定可行性基础上，运用三角模糊数对复合实物期权定价模型进行改进，并对模糊参数进行敏感性分析。

3.1 模糊参数设定可行性分析

在两类实物期权定价模型中，期权价值均由 5 个参数构成，在不同的情况下，每个参数对实物期权价值的影响不同。本文通过分析假设条件，阐明实物期权定价模型中模糊参数设定的可行性和必要性。5 个参数模糊性分析如下：

1）标的资产价格 V，是初创企业未来现金流现值。实物期权假设标的资产价格随机游走，而初创企业价值变化具有模糊性：企业经营时间较短，财务数据的信息含量有限；企业流动性较差，交易价格受多方面因素影响，未来价格难以估计。

2）执行价格 I，是标的资产的投资成本。实物期权假设执行价格为固定值，无交易费用和税收，也不支付红利。然而，初创企业需要支付交易费用和税收，费用和税率受行业和政策影响；初创企业也会分红，但分红金额和时机难以事先确定。可见，执行价格存在模糊性。

3）波动率 σ，是标的资产收益率的标准差。实物期权假设波动率保持不变，而初创企业的投资者少、成交量低，价格变动受多种主观不确定因素影响；同时，初创企业技术先进、盈利模式新颖，收益率变化难以估计。因此，波动率具有模糊性。

4）存续期限 τ，是距期权到期日的时间。实物期权假设存续期限为常数，而初创企业在每个阶段的存续期限具有模糊性，这既与行业、政策、市场等外部不确定因素有关，也与技术、产品、团队等内部不确定因素有关，难以精确估量。

5）无风险利率 r，通常是相应期限国债到期收益率。实物期权假设短期无风险利率为常数，并对所有期限相同。中国国债利率由人民银行制定，与宏观经济和货币政策有关，难以精确估计；初创企业在每阶段存续期限不同，无风险利率存在模糊性。

综上所述，初创企业实物期权定价模型的 5 个参数均可设为模糊数，因此本文将通过全参数设计，推导出多阶段模糊复合实物期权定价模型。

3.2 模糊复合实物期权定价模型

初创企业发展需经历多个阶段，每个阶段不确定来源各不相同，模糊参数也发生变化。为准确评估不同阶段企业未来增长机会的价值，本文在单期实物期权基础上进行拓展，推导出 n 阶段模糊复合实物期权定价模型，帮助投资者科学地设定模糊参数，获得合理的实物期权价值区间。

复合实物期权是内嵌了期权的期权，n 阶段复合期权有 n 个到期日和 n 个执行价格。如果投资者在 t_0 时刻购买复合实物期权 C_n，则在第 1 个到期日 t_1，期权持有者有权以执行价格 I_1 购买看涨期权 C_1，C_1 赋予持有者在 t_2 时刻以执行价格 I_2 购买看涨期权 C_2 的权利。以此类推，在 t_{n-1} 时刻，期权 C_{n-1} 持有者有权购买执行价格为 I_n 的看涨期权 C_n。

本文将 5 个参数设定为三角模糊数，代入期权定价公式，求得模糊环境下 n 期复合实物期权定价模型（式(2)和(3)）。

3.2.1 连续时间下模糊复合实物期权定价模型

连续时间下 n 阶段实物期权定价模型可通过复制证券组合推导：构造一个无风险套利组合，使组合收益率等于无风险利率，由此推导出偏微分方程，与边界条件联立，求得复合实物期权定价解析解。

在 n 阶段复合模糊实物期权定价模型中，假设 5 个参数均是三角模糊数，将相应的 γ 截集代入实物期权定价模型，求得模糊复合实物期权价值 $\widetilde{C}$，

$$(\widetilde{C}_k)_\gamma = \left[(\widetilde{C}_k)^-_\gamma,\ (\widetilde{C}_k)^+_\gamma\right]. \tag{2}$$

其中：

$$(\widetilde{C}_k)^-_\gamma = \widetilde{V}^-_\gamma \cdot N_{n-k+1}\Big((\widetilde{a}_k)^-_\gamma,\ (\widetilde{a_{k+1}})^-_\gamma,\ \cdots,\ (\widetilde{a}_n)^-_\gamma;\ (\widetilde{\boldsymbol{F}_k^{n-k+1}})^-_\gamma\Big) - \sum_{m=k}^{n} (\widetilde{I}_m)^+_\gamma \cdot \mathrm{e}^{-\widetilde{r}^-_\gamma \widetilde{\tau}^-_{m\gamma}} \cdot N_{m-k+1}\Big((\widetilde{b}_k)^-_\gamma,$$

$$\cdots,\ (\widetilde{b_m})_\gamma^-;\ (\widetilde{\boldsymbol{F}_k^{n-k+1}})_\gamma^-\big),$$

$$(\widetilde{C_k})_\gamma^+ = \hat{V}_\gamma^+ \cdot N_{n-k+1}\big((\widetilde{a_k})_\gamma^+,\ (\widetilde{a_{k+1}})_\gamma^+,$$

$$\cdots,\ (\widetilde{a_n})_\gamma^+;\ (\widetilde{\boldsymbol{F}_k^{n-k+1}})_\gamma^+\big) -$$

$$\sum_{m=k}^{n} (\widetilde{I_m})_\gamma^- \cdot \mathrm{e}^{-\tilde{r}_\gamma^+ \tilde{\tau}_{m\gamma}^+} N_{m-k+1}((\widetilde{b_k})_\gamma^+,$$

$$\cdots,\ (\widetilde{b_m})_\gamma^+;\ (\widetilde{\boldsymbol{F}_k^{n-k+1}})_\gamma^+);$$

$$(\widetilde{a_k})_\gamma^- = (\widetilde{b_k})_\gamma^- + \tilde{\sigma}_\gamma^- \sqrt{\tilde{\tau}_\gamma^-},$$

$$(\widetilde{b_k})_\gamma^- = \frac{\ln\left(\dfrac{\hat{V}_\gamma^-}{(\widetilde{V_k}^*)_\gamma^-}\right) + \left(\tilde{r}_\gamma^- - \dfrac{1}{2}\tilde{\sigma}_\gamma^{-2}\right)\tilde{\tau}_\gamma^-}{\tilde{\sigma}_\gamma^- \cdot \sqrt{\tilde{\tau}_\gamma^-}},$$

$$(\widetilde{a_k})_\gamma^+ = (\widetilde{b_k})_\gamma^+ + \tilde{\sigma}_\gamma^+ \sqrt{\tilde{\tau}_\gamma^+},$$

$$(\widetilde{b_k})_\gamma^+ = \frac{\ln\left(\dfrac{\hat{V}_\gamma^+}{(\widetilde{V_k})^{*+}_\gamma}\right) + \left(\tilde{r}_\gamma^+ - \dfrac{1}{2}\tilde{\sigma}_\gamma^{+2}\right)\tilde{\tau}_\gamma^+}{\tilde{\sigma}_\gamma^+ \cdot \sqrt{\tilde{\tau}_\gamma^+}}.$$

其中:$[(\widetilde{I_m})_\gamma^-,\ (\widetilde{I_m})_\gamma^+]$表示第 m 阶段投资成本可能取值范围,$[\tilde{\tau}_\gamma^-,\ \tilde{\tau}_\gamma^+]$表示期权持有期限的可能取值范围,$[\tilde{\sigma}_\gamma^-,\ \tilde{\sigma}_\gamma^+]$表示波动率可能取值范围,$[(\widetilde{V_k}^*)_\gamma^-,\ (\widetilde{V_k}^*)_\gamma^+]$表示 $C_{k+1}(v, t_k)=I_k$ 的解值范围,$N_n(a_1, \cdots, a_n;\ \boldsymbol{F}^n)$表示 n 维变量累计正态分布函数,$[(\widetilde{a_k})_\gamma^-,\ (\widetilde{a_k})_\gamma^+]$表示积分上限可能取值范围,$[(\widetilde{\boldsymbol{F}_k^n})_\gamma^-,\ (\widetilde{\boldsymbol{F}_k^n})_\gamma^+]$为相关系数矩阵可能取值范围。

3.2.2 离散时间下模糊复合实物期权定价模型

离散时间下二叉树期权定价模型把存续期限 τ 分为若干时间段 Δt,假设在每一个 Δt,标的资产 V 有上升或下降两种可能,上涨因子为 u,下降因子为 d,风险中性概率为 p。通过企业资产和负债构成的投资组合复制实物期权,求得期权定价模型。将模糊参数的 γ 截集代入二叉树定价模型,求得 n 阶段糊实物期权价值 $\widetilde{C_n}$,

$$(\widetilde{C_n})_\gamma = [(\widetilde{C_n})_\gamma^-,\ (\widetilde{C_n})_\gamma^+]. \tag{3}$$

其中:

$$(\widetilde{C_n})_\gamma^- = \mathrm{e}^{-rn\Delta t}\Bigg[\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)(\tilde{p}_{j\gamma}^-)^j(1-\tilde{p}_{j\gamma}^-)^{n-j} \cdot$$
$$\max(0,\ (\tilde{u}_{j\gamma}^-)^j(\tilde{d}_{j\gamma}^-)^{n-j}\hat{V}_\gamma^- - \tilde{I}_\gamma^+)\Bigg],$$

$$(\widetilde{C_n})_\gamma^+ = \mathrm{e}^{-rn\Delta t}\Bigg[\sum_{j=0}^{n}\left(\frac{n!}{j!(n-j)!}\right)(\tilde{p}_{j\gamma}^+)^j(1-\tilde{p}_{j\gamma}^+)^{n-j} \cdot$$
$$\max(0,\ (\tilde{u}_{j\gamma}^+)^j(\tilde{d}_{j\gamma}^+)^{n-j}\hat{V}_\gamma^+ - \tilde{I}_\gamma^-)\Bigg];$$

$$\tilde{p}_{j\gamma}^- = \frac{\mathrm{e}^{r\tau_j} - \tilde{d}_{j\gamma}^-}{\tilde{u}_{j\gamma}^- - \tilde{d}_{j\gamma}^-}, \quad \tilde{p}_{j\gamma}^+ = \frac{\mathrm{e}^{r\tau_j} - \tilde{d}_{j\gamma}^+}{\tilde{u}_{j\gamma}^+ - \tilde{d}_{j\gamma}^+};$$

$$\tilde{u}_{j\gamma}^- = \mathrm{e}^{\tilde{\sigma}_\gamma^-\sqrt{\tau_j}}, \quad \tilde{u}_{j\gamma}^+ = \mathrm{e}^{\tilde{\sigma}_\gamma^+\sqrt{\tau_j}};$$

$$\tilde{d}_{j\gamma}^- = \mathrm{e}^{-\tilde{\sigma}_\gamma^-\sqrt{\tau_j}}, \quad \tilde{d}_{j\gamma}^+ = \mathrm{e}^{-\tilde{\sigma}_\gamma^+\sqrt{\tau_j}}.$$

其中:$[\tilde{u}_{j\gamma}^-,\ \tilde{u}_{j\gamma}^+]$表示第 j 阶段实物期权上涨因子取值范围,$[\tilde{d}_{j\gamma}^-,\ \tilde{d}_{j\gamma}^+]$表示第 j 阶段下降因子取值范围,$[\tilde{p}_{j\gamma}^-,\ \tilde{p}_{j\gamma}^+]$表示第 j 阶段风险中性概率取值范围。

在实际应用中,需根据企业具体情形,找出具有模糊性的关键参数,设定合理的模糊数形式,以便更加精确地估测出企业价值范围。

3.3 模糊参数敏感性分析

由式(1)—(3)可知,与传统模型相比,模糊数下的 DCF 模型和复合实物期权模型赋予关键参数区间变化。三角模糊数由 γ、α 和 β 这 3 个参数构成,3 个参数取值决定了模糊数的模糊程度和取值范围。本文运用敏感性分析方法,研究每个参数对 NPV 和实物期权价值影响的方向(见表 1),深度解析模糊理论下初创企业价值变化。

表 1 γ、α 和 β 对 NPV 和实物期权价值的敏感性分析

NPV 和期权价值	$\gamma\in(0, 1)$	$\alpha>0$	$\beta>0$
$(\widetilde{\mathrm{NPV}_k})_\gamma^-$	+	−	−
$(\widetilde{\mathrm{NPV}_k})_\gamma^+$	−	+	+
$(\widetilde{\mathrm{NPV}_k})_\gamma^+ - (\widetilde{\mathrm{NPV}_k})_\gamma^-$	−	+	+
$(\widetilde{C_k})_\gamma^-$	+	−	−
$(\widetilde{C_k})_\gamma^+$	−	+	+
$(\widetilde{C_k})_\gamma^+ - (\widetilde{C_k})_\gamma^-$	−	+	+

注:"+"表示模糊参数与企业价值正相关,"−"表示模糊参数与企业价值负相关。

3.3.1 γ 对 NPV 和实物期权的敏感性分析

置信水平 γ 是衡量参数模糊程度的重要指标,γ 取值决定了参数模糊性。γ 越大,参数模糊性越小,估值不确定性越小;γ 越小,参数模糊性越大,估值不确定性越大。由于 $\gamma\in[0, 1]$,首先讨论 $\gamma=0$ 和 $\gamma=1$ 两个极端情形下模糊实物期权价值,再对 $\gamma\in(0, 1)$模糊实物期权价值变化进行分析。

1) $\gamma=1$ 时,模糊数变为确定数。式(1)从模糊 DCF 变为 DCF,式(2)和(3)从模糊实物期权变为实物期权。由此可知,传统估值模型是模糊估值模型的特例。

2）$\gamma=0$ 时，定价参数的模糊性最大，参数变化区间达到最大。在式(1)中，模糊 NPV 区间范围最大；在式(2)和(3)中，模糊复合实物期权区间范围最大。

3）$\gamma\in(0,1)$时，NPV_k 和 C_k 的最小值是 γ 的增函数，其最大值是 γ 的减函数，其模糊范围是 γ 的减函数。

模糊 DCF 模型中，对式(1)求关于 γ 的偏导：

$$\partial(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^-_\gamma/\partial\gamma>0,\ \partial(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^+_\gamma/\partial\gamma<0.$$

模糊实物期权中，对式(2)和(3)求关于 γ 的偏导：

$$\partial(\widetilde{C}_k)^-_\gamma/\partial\gamma>0,\ \partial(\widetilde{C}_k)^+_\gamma/\partial\gamma<0.$$

由上式可知，$(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^-_\gamma$ 和$(\widetilde{C}_k)^-_\gamma$ 是关于 γ 的增函数，$(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^+_\gamma$ 和$(\widetilde{C}_k)^+_\gamma$ 是关于 γ 的减函数。这表明，随着 γ 值下降，参数模糊程度增加，$(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^-_\gamma$ 和$(\widetilde{C}_k)^-_\gamma$ 变得更小，$(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^+_\gamma$ 和$(\widetilde{C}_k)^+_\gamma$ 变得更大，模糊区间 $(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^+_\gamma-(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^-_\gamma$、$(\widetilde{C}_k)^+_\gamma-(\widetilde{C}_k)^-_\gamma$ 变大。

3.3.2 α 对 NPV 和实物期权的敏感性分析

左宽度 α 是衡量模糊数负向取值范围的重要参数。α 越大，参数负向延伸范围越大；α 越小，参数负向延伸范围越小。由于 $\alpha\geqslant0$，首先讨论 $\alpha=0$ 的极端情形，再对 $\alpha>0$ 时模糊实物期权价值变化进行分析。

1）$\alpha=0$ 时，初创企业估值与 α 无关。

2）$\alpha>0$ 时，NPV_k 和 C_k 的最小值是 α 的减函数，其最大值是 α 的增函数，其模糊范围是 α 的增函数。

模糊 DCF 模型中，对式(1)求关于 α 的偏导：

$$\partial(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^-_\gamma/\partial\alpha<0,\ \partial(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^+_\gamma/\partial\alpha>0.$$

模糊实物期权中，对式(2)和(3)求关于 α 的偏导：

$$\partial(\widetilde{C}_k)^-_\gamma/\partial\alpha<0,\ \partial(\widetilde{C}_k)^+_\gamma/\partial\alpha>0.$$

由上式可知，$(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^-_\gamma$ 和$(\widetilde{C}_k)^-_\gamma$ 是关于 α 的减函数，$(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^+_\gamma$ 和$(\widetilde{C}_k)^+_\gamma$ 是关于 α 的增函数。这表明，随着 α 值增加，$(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^-_\gamma$ 和$(\widetilde{C}_k)^-_\gamma$ 变得更小，$(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^+_\gamma$ 和$(\widetilde{C}_k)^+_\gamma$ 变得更大，企业价值模糊区间变大。

3.3.3 β 对 NPV 和实物期权的敏感性分析

右宽度 β 是衡量模糊数正向取值范围的重要参数。β 越大，参数正向延伸范围越大；β 越小，参数正向延伸范围越小。由于 $\beta\geqslant0$，首先讨论 $\beta=0$ 的极端情形，再对 $\beta>0$ 时模糊实物期权价值变化进行分析。

1）$\beta=0$ 时，初创企业估值与 β 无关。

2）$\beta>0$ 时，NPV_k 和 C_k 的最小值是 β 的减函数，其最大值是 β 的增函数，其模糊范围是 β 的增函数。

模糊 DCF 模型中，对式(1)求关于 β 偏导：

$$\partial(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^-_\gamma/\partial\beta<0,\ \partial(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^+_\gamma/\partial\beta>0.$$

模糊实物期权中，对式(2)和(3)求关于 β 的偏导：

$$\partial(\widetilde{C}_k)^-_\gamma/\partial\beta<0,\ \partial(\widetilde{C}_k)^+_\gamma/\partial\beta>0.$$

由上式可知，$(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^-_\gamma$ 和$(\widetilde{C}_k)^-_\gamma$ 是关于 β 的减函数，$(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^+_\gamma$ 和$(\widetilde{C}_k)^+_\gamma$ 是关于 β 的增函数。这表明，随着 β 值增加，$(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^-_\gamma$ 和$(\widetilde{C}_k)^-_\gamma$ 变得更小，$(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^+_\gamma$ 和$(\widetilde{C}_k)^+_\gamma$ 变得更大，企业价值模糊区间变大。

综上所述，$\gamma\in(0,1)$时，初创企业最小估值是 γ 的增函数，最大估值是 γ 的减函数，模糊范围是 γ 的减函数。$\alpha>0$，$\beta>0$ 时，最小估值是 α 和 β 的减函数，最大估值是 α 和 β 的增函数，模糊范围是 α 和 β 的增函数。

由此可知，γ 越小，初创企业价值不确定性越大，有更高上升空间也有更大下降可能性。此时，企业价值变化范围还与 α 和 β 有关：α 越大，$(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^-_\gamma$ 和 $(\widetilde{C}_k)^-_\gamma$ 越小；β 越大，$(\widehat{\mathrm{NPV}}_k)^+_\gamma$ 和 $(\widetilde{C}_k)^+_\gamma$ 越大。投资者可在不同阶段($k=1,\cdots,n$)，根据新获取的信息，对 NPV 和实物期权的模糊参数 γ、α 和 β 进行调整，可以获得更加合理的价值变动区间。

4 模糊实物期权下初创企业价值分析

在运用模糊理论构建企业估值模型后，本文进一步分析初创企业价值构造，判断决策情形，用算例和案例进行模型验证，旨在帮助投资者做出正确决策。

4.1 模糊实物期权框架下初创企业价值构造

4.1.1 基于实物期权的初创企业估值[3]

在实物期权分析框架下，初创企业价值＝NPV＋实物期权。其中：NPV 度量了企业的现有经营性资产的价值，实物期权度量了未来增长机会的价

值。投资的判断标准为

$$\mathrm{ENPV}_k = C_k + \mathrm{NPV}_k. \tag{4}$$

其中：ENPV_k 是第 k 阶段初创企业价值，C_k 是第 k 阶段复合实物期权价值，NPV_k 是第 k 阶段企业净现值。根据式(4)，可以投资标准为 $\mathrm{ENPV}_k>0$，主要包含两种情形：1) $\mathrm{NPV}_k>0$；2) $\mathrm{NPV}_k<0$，$C_k>|\mathrm{NPV}_k|$。

4.1.2 投资决策判断依据

本文进一步以三角模糊数为基础，构建模糊初创企业估值模型，

$$\widetilde{\mathrm{ENPV}}_k = \widetilde{C}_k + \widetilde{\mathrm{NPV}}_k. \tag{5}$$

其中：$\widetilde{\mathrm{ENPV}}_k$ 是在模糊实物期权框架下初创企业价值，其 γ 截集为 $[\mathrm{ENPV}_k^-, \mathrm{ENPV}_k^+]$。$\mathrm{ENPV}_k^-$ 是初创企业最小估值，ENPV_k^+ 是初创企业最大估值。$\widetilde{C}_k$ 是第 k 阶段复合模糊实物期权价值，可用式(2)或(3)估测，其 γ 截集为 $[C_k^-, C_k^+]$。C_k^- 是最小实物期权估值，C_k^+ 是最大实物期权估值。$\widetilde{\mathrm{NPV}}_k$ 是第 k 阶段模糊净现值，可用式(1)估测，其 γ 截集为 $[\mathrm{NPV}_k^-, \mathrm{NPV}_k^+]$。$\mathrm{NPV}_k^-$ 是企业最小净现值，NPV_k^+ 是企业最大净现值。

根据式(5)，初创企业价值由 $\widetilde{C}_k$ 和 $\widetilde{\mathrm{NPV}}_k$ 构成，投资决策判断标准为 $\widetilde{C}_k+\widetilde{\mathrm{NPV}}_k>0$。在模糊理论下，$[\mathrm{NPV}_k^-, \mathrm{NPV}_k^+]$ 和 $[C_k^-, C_k^+]$ 的不同组合，可产生多种企业价值状态。为此，本文设计两个步骤进行决策分析，帮助投资者通过最简捷的途径做出正确的投资决策。

步骤 1 对 NPV^-+C^- 符号进行判断。如果 $\mathrm{NPV}^-+C^->0$，做出可以投资决策；如果 $\mathrm{NPV}^-+C^-<0$，进入步骤 2。

步骤 2 对 NPV^-+C^+、NPV^++C^- 符号进行判断。如果 $\mathrm{NPV}^-+C^+>0$ 或 $\mathrm{NPV}^++C^->0$，通过以下两种情景分析，决定是否投资；否则，不投资。

情景 1 $\mathrm{NPV}^-+C^-<0$，$\mathrm{NPV}^-+C^+>0$。在这种情形下，NPV 谨慎估测，企业价值取决于实物期权价值。若对企业未来增长乐观估计，企业整体价值大于 0，值得投资；若对企业未来保守估计，企业整体价值小于 0，不值得投资。

情景 2 $\mathrm{NPV}^-+C^-<0$，$\mathrm{NPV}^++C^->0$。在这种情形下，实物期权谨慎估测，初创企业价值取决于 NPV 价值。若对现有资产乐观估计，企业整体价值大于 0，值得投资；若对现有资产保守估计，企业整体价值小于 0，不值得投资。

其他情形均是上述两种情形的推广，例如 $\mathrm{NPV}^++C^-<0$，$\mathrm{NPV}^-+C^+<0$，$\mathrm{NPV}^++C^+<0$，均可推导出 $\mathrm{NPV}^-+C^-<0$。因此，通过上述两个步骤，即可做出最终的投资决策。

由此可见，实物期权方法以传统 DCF 模型为基础，必须配合 NPV 指标才能加以使用。DCF 方法可以吸收实物期权方法的柔性管理思路，克服其自身的理论缺陷，与其优势互补。

4.2 算例分析

假设某初创企业经营主营业务 X，同时投入大量资金研发核心技术 Y。技术 Y 具有投资规模大、周期长、不确定性高等特点，预计在第 5 年可能产生巨大的价值。

在初创企业 NPV 价值构造中，FCFF＝OCF－CAPEX。其中：OCF 是主营业务 X 的生产和销售形成的现金流，CAPEX 是投入无形资产 Y 的资本性支出。初创企业 OCF 收入增长稳定，CAPEX 投入高且增幅大，致使 FCFF 下降、NPV 为负。CAPEX 支出在未来可能会转化为利润，为企业带来新的增长机会，这部分被 NPV 忽略的潜在价值可运用实物期权估量。

本文假设企业经营期限为 5 年，无风险利率为 4%，资本成本为 10%。主营业务 X 稳定，OCF 以 20% 增长，第 1 年 OCF 收入 1 万元，全部投入技术 Y 的研发，此后资本性支出 CAPEX 以增速 50%～80% 扩张。在期权定价模型中，技术 Y 的投资成本是 CAPEX，其可能值范围是 13.18～22.36 万元。技术 Y 市场价值的可能范围是 50～100 万元，技术 Y 波动率的可能值范围是 1.5～2.5，企业现金流见表 2。

表 2 某初创企业现金流

年份	OCF/万元	CAPEX^-/万元	CAPEX^+/万元	FCFF^-/万元	FCFF^+/万元
第 1 年	1	1	1	0	0
第 2 年	1.20	1.50	1.80	−0.60	−0.30
第 3 年	1.44	2.25	3.24	−1.80	−0.81
第 4 年	1.73	3.38	5.83	−4.10	−1.65
第 5 年	2.07	5.06	10.49	−8.42	−2.98

根据算例设计，$(\widetilde{I})_\gamma=[13.19, 22.37]$ 万元，$(\widetilde{V})_\gamma=[50, 100]$ 万元，$(\widetilde{\sigma})_\gamma=[1.5, 2.5]$，$\tau=5$，$r=4\%$，WACC＝10%。模糊实物期权框架下，初创企业估值分 3 个步骤：

1）基于主营业务 X，计算 $\widehat{NPV}$。由表 2 求得 $(\widehat{FCFF})_\gamma$。其中：$(\widehat{FCFF})_\gamma^- = OCF - CAPEX^+$，$(\widehat{FCFF})_\gamma^+ = OCF - CAPEX^-$。由式(1)求得初创企业模糊净现值 $\widehat{NPV}$，其模糊区间 $(\widehat{NPV})_\gamma = [-9.88, -3.83]$ 万元。

2）基于新技术 Y，计算模糊实物期权价值 $\tilde{C}$，$(\tilde{C})_\gamma^- = f(V^-, I^+, \sigma^-, \tau, r)$，$(\tilde{C})_\gamma^+ = f(V^+, I^-, \sigma^+, \tau, r)$。由式(2)，在 BS 模型中，模糊实物期权价值区间 $(\tilde{C})_\gamma = [31.68, 89.2]$ 万元。由式(3)，在二叉树模型中，模糊实物期权价值区间 $(\tilde{C})_\gamma = [42.98, 89.18]$ 万元。

3）获得模糊实物期权框架下初创企业价值。由式(5)，初创企业价值 $\widehat{ENPV}$ 是净现值 $\widehat{NPV}$ 与实物期权 $\tilde{C}$ 之和。在 BS 模型中，$\widehat{ENPV} = [21.8, 85.37]$ 万元；在二叉树模型中，$\widehat{ENPV} = [33.1, 85.35]$ 万元。投资决策判断依据 $ENPV^- = NPV^- + C^- > 0$，在两种实物期权定价方法下，均可做出可以投资的决策。

在算例中，初创企业核心技术 Y 在未来盈利具有较大不确定性，使用实物期权方法可从不确定性风险中挖掘和创造价值。为了进一步验证模糊实物期权理论在实务中的适用性，本文运用实践调研获得的真实案例进行实证检验。这是一家经历了多个发展阶段而最终成功上市的初创企业，笔者经历了企业在每个阶段的 NPV 和实物期权价值改变过程，并运用模糊实物期权理论做出了正确的投资决策。

4.3　案例分析

A 企业是一家高新技术初创企业，发展经历了两个重要阶段：新三板挂牌和转主板上市。2014 年 12 月，A 企业在新三板挂牌；2016 年 12 月，转主板首次公开募股（initial public offerings，IPO）；2017 年 12 月，股票招股说明书预披露。A 企业进行了两轮股权融资，B 创投均参与投资。2009 年 6 月，进行第一次股权融资；2016 年 6 月，转主板之前，进行第二轮股权融资。

A 企业首轮融资后获得在新三板上市机会，在第二轮融资后获得转主板 IPO 机会。该投资机会使得初创企业内在价值得到更大提升，但这点却被传统 DCF 估值方法忽略，因此本文运用模糊实物期权理论，量化评估未来增长机会价值，验证企业价值提升过程。

实物期权方法和 DCF 模型有各自的适用范围。本案例中，DCF 模型只考虑 A 企业主营业务资产现值，而忽视了企业资本性支出带来的未来增长机会价值。实物期权方法相对于 DCF 模型多了对未来增长机会的选择权，考虑了 A 企业通过上市和转板带来的价值增值，是对 DCF 模型的有益补充和完善。在对企业价值进行评价时，应先运用 DCF 模型计算现有资产价值，再用实物期权方法研判未来增长机会价值，即企业价值应由 NPV 和实物期权价值两方面构成，这样得到的估值更能反映企业实际情况。

4.3.1　模糊状态下 DCF 模型

DCF 模型中 FCFF 和 WACC 具有较大不确定性，设为模糊数，见式(1)。

以各项财务指标增长率为基准，预测未来各项财务指标，估算未来 FCFF，求得 $NPV_1 = -0.94$ 亿元，$NPV_2 = -3.06$ 亿元。运用新三板交易数据，估算折现率，$WACC_{2009} = 9.456\%$，$WACC_{2016} = 8.233\%$。永续增长率 $g = 3\%$，$I_1 = 2.76$ 亿元，$I_2 = 16.33$ 亿元。

三角模糊数中，$\gamma = 0.5$，$\alpha_{FCFF} = \beta_{FCFF} = 0.1$，$\alpha_{WACC} = \beta_{WACC} = 2\%$。

2009 年第一轮融资时，$(\widehat{NPV_1})_\gamma^- = -1.32$ 亿元，$(\widehat{NPV_1})_\gamma^+ = -0.43$ 亿元。NPV_1 取值：$[-1.32, -0.43]$ 亿元。

2016 年第二轮融资时，$(\widehat{NPV_2})_\gamma^- = -3.21$ 亿元，$(\widehat{NPV_2})_\gamma^+ = -2.83$ 亿元。NPV_2 取值：$[-3.21, -2.83]$ 亿元。

4.3.2　模糊实物期权定价模型构建

本案例，期权持有期限 τ、执行价格 I 在合约内规定，无风险利率 r 在存续期限内没有发生变化，为确定数。企业价值 V 和波动率 σ 是影响实物期权价值的关键参数，参数估计与投资者预期有关，具有模糊性。本文将 V 和 σ 设定为三角模糊数，通过模糊实物期权方法估测 A 企业价值。

假设 $\gamma = 0.5$，$\alpha_\sigma = \beta_\sigma = 0.2$，$\alpha_V = \beta_V = 10$。2009 年，第一次投资持有的实物期权价值 $\tilde{V}$ 和 $\tilde{\sigma}$ 的 γ 截集分别为：$(\tilde{\sigma})_\gamma = [1.3, 1.5]$，$(\widetilde{V_1})_\gamma = [73.478, 83.478]$ 亿元。由式(3)求得：$\widetilde{p_1}_\gamma^- = 0.021$，$\widetilde{p_1}_\gamma^+ = 0.036$，$\widetilde{u_1}_\gamma^- = 31.17$，$\widetilde{u_1}_\gamma^+ = 52.91$，$\widetilde{d_1}_\gamma^- = 0.018$，

$\tilde{d}_{1\gamma}^{+}=0.032$。

$$\tilde{C}_{1\gamma}^{-}=\mathrm{e}^{-r\tau_1}[\tilde{p}_{1\gamma}^{-}\cdot\max(0,\tilde{u}_{1\gamma}^{-}\tilde{V}_{1\gamma}^{-}-I_1)+(1-\tilde{p}_{1\gamma}^{-})\cdot\max(0,\tilde{d}_{1\gamma}^{-}\tilde{V}_{1\gamma}^{-}-I_1)]=41.54\text{ 亿元},$$

$$\tilde{C}_{1\gamma}^{+}=\mathrm{e}^{-r\tau_1}[\tilde{p}_{1\gamma}^{+}\cdot\max(0,\tilde{u}_{1\gamma}^{+}\tilde{V}_{1\gamma}^{+}-I_1)+(1-\tilde{p}_{1\gamma}^{+})\cdot\max(0,\tilde{d}_{1\gamma}^{+}\tilde{V}_{1\gamma}^{+}-I_1)]=137.45\text{ 亿元}.$$

C_1 的取值范围:[41.54,137.45]亿元。

2016年,第二次投资持有的实物期权价值 $\tilde{V}$ 和 $\tilde{\sigma}$ 的 γ 截集为:$(\tilde{\sigma})_\gamma=[1.3,1.5]$,$(\tilde{V}_2)_\gamma=[95.52,105.52]$ 亿元。由式(3)求得:$\tilde{p}_{2\gamma}^{-}=0.061$,$\tilde{p}_{2\gamma}^{+}=0.092$,$\tilde{u}_{2\gamma}^{-}=13.46$,$\tilde{u}_{2\gamma}^{+}=20.08$,$\tilde{d}_{2\gamma}^{-}=0.049$,$\tilde{d}_{2\gamma}^{+}=0.074$。

$$\tilde{C}_{2\gamma}^{-}=\mathrm{e}^{-r(\tau_1+\tau_2)}[\tilde{p}_{2\gamma}^{-}\cdot\max(0,\tilde{u}_{2\gamma}^{-}\tilde{V}_{2\gamma}^{-}-I_2)+(1-\tilde{p}_{2\gamma}^{-})\cdot\max(0,\tilde{d}_{2\gamma}^{-}\tilde{V}_{2\gamma}^{-}-I_2)]=51.67\text{ 亿元},$$

$$\tilde{C}_{2\gamma}^{+}=\mathrm{e}^{-r(\tau_1+\tau_2)}[\tilde{p}_{2\gamma}^{+}\cdot\max(0,\tilde{u}_{2\gamma}^{+}\tilde{V}_{2\gamma}^{+}-I_2)+(1-\tilde{p}_{2\gamma}^{+})\cdot\max(0,\tilde{d}_{2\gamma}^{+}\tilde{V}_{2\gamma}^{+}-I_2)]=130.17\text{ 亿元}.$$

C_2 的取值范围:[51.67,130.17]亿元。

4.3.3 基于模糊理论的投资决策

第一阶段初创企业估值范围:[40.22,137.02]亿元。其中:$V_1^-=\mathrm{NPV}_1^-+C_1^-=40.22$ 亿元,$V_1^+=\mathrm{NPV}_1^++C_1^+=137.02$ 亿元。

第二阶段初创企业估值范围:[48.46,127.34]亿元。其中:$V_2^-=\mathrm{NPV}_2^-+C_2^-=48.46$ 亿元,$V_2^+=\mathrm{NPV}_2^++C_2^+=127.34$ 亿元。

计算结果显示,在传统DCF模型下,A企业在两阶段NPV均小于0,B创投应做出不投资决策;但运用模糊实物期权方法后,$V_1^-=\mathrm{NPV}_1^-+C_1^->0$ 和 $V_2^-=\mathrm{NPV}_2^-+C_2^->0$,在 $\gamma\in[0,1]$ 始终成立(见表3),B创投仍可做出投资决策。

A企业增长已经历了两个阶段:第一阶段,新三板挂牌前,A企业通过专利技术获得进入行业的权利,此阶段企业亏损,具体表现为 $(\widetilde{\mathrm{NPV}}_1)_\gamma^+$、$(\widetilde{\mathrm{NPV}}_1)_\gamma^-$ 均为负值。第二阶段,转主板上市前,为进一步扩大技术研发和产品生产,A企业亏损进一步扩大,具体表现为 $(\widetilde{\mathrm{NPV}}_2)_\gamma^+$、$(\widetilde{\mathrm{NPV}}_2)_\gamma^-$ 负值区间进一步扩大。

这种增长方式与传统企业"导入期、成长期、成熟期和衰退期"的发展方式差异巨大,使对初创企业的投资具有很大的风险和高度的不确定性。对于处于第一、第二阶段的A企业,现有业务获利能力的价值占比较小,在很长一段时间内NPV为负数,A企业价值源于未来增长潜力,具体表现在实物期权价值占初创企业价值超过100%。待A企业进入第三阶段,市场规模跃过盈利点,未来增长机会变现为现有经营性资产,并不断积累带来丰厚盈利,占企业价值比重不断提升。

4.3.4 可靠性检验

进一步进行可靠性检验,分析不同 γ、α 和 β 下初创企业价值变化。

比较实物期权和模糊实物期权框架下初创企业估值,发现:在模糊实物期权框架下(表3中 $\gamma=0,0.25,0.5,0.75$),随着 γ 取值增加,参数模糊性降低,$(\widetilde{\mathrm{NPV}})_\gamma^-$、$\tilde{C}_\gamma^-$ 增加,$(\widetilde{\mathrm{NPV}})_\gamma^+$、$\tilde{C}_\gamma^+$ 减小,模糊区间 $(\widetilde{\mathrm{NPV}})_\gamma^+-(\widetilde{\mathrm{NPV}})_\gamma^-$、$\tilde{C}_\gamma^+-\tilde{C}_\gamma^-$ 减小,与理论分析一致(见表1)。在实物期权分析下(表3中 $\gamma=1$),$(\widetilde{\mathrm{NPV}})_\gamma^-=(\widetilde{\mathrm{NPV}})_\gamma^+$、$\tilde{C}_\gamma^-=\tilde{C}_\gamma^+$,模糊区间变为确定数,验证了实物期权是模糊实物期权的特殊形式。

表3 不同 γ 水平下模糊NPV和模糊实物期权价值

亿元

企业价值	γ				
	0	0.25	0.5	0.75	1
$(\widetilde{\mathrm{NPV}}_1)_\gamma^-$	−1.59	−1.49	−1.32	−1.14	−0.94
$(\widetilde{\mathrm{NPV}}_1)_\gamma^+$	0.23	−0.10	−0.43	−0.70	−0.94
$\tilde{C}_{1\gamma}^-$	22.87	30.07	41.54	58.55	77.35
$\tilde{C}_{1\gamma}^+$	251.11	185.53	137.45	94.10	77.35
$\tilde{V}_{1\gamma}^-$	21.28	28.58	40.22	57.41	76.49
$\tilde{V}_{1\gamma}^+$	251.34	185.43	137.02	93.40	76.49
$(\widetilde{\mathrm{NPV}}_2)_\gamma^-$	−3.32	−3.27	−3.21	−3.14	−3.06
$(\widetilde{\mathrm{NPV}}_2)_\gamma^+$	−2.44	−2.66	−2.83	−2.95	−3.06
$\tilde{C}_{2\gamma}^-$	36.53	46.41	51.67	72.82	94.43
$\tilde{C}_{2\gamma}^+$	238.39	187.58	137.45	129.45	94.43
$\tilde{V}_{2\gamma}^-$	33.21	43.14	48.46	69.68	91.37
$\tilde{V}_{2\gamma}^+$	235.95	184.92	127.34	126.50	91.37

进一步分析不同 α 和 β 下，模糊实物期权价值的变化。在既定置信水平 γ 下，α_V 取值增加，$\widetilde{C}_{1\gamma}^{-}$ 和 $\widetilde{C}_{2\gamma}^{-}$ 减小，模糊区间增加；β_V 取值增加，$\widetilde{C}_{1\gamma}^{+}$ 和 $\widetilde{C}_{2\gamma}^{+}$ 增加，模糊区间增加，与理论分析一致（见表1）。可见，案例研究进一步验证了实物期权是模糊实物期权的特例，模糊参数估值体现了初创企业估值的随机性与模糊性，与实物期权方法相比，估值结果更具实用性和参考性。

5　结　论

本文运用模糊实物期权理论分析初创企业估值，通过引入隶属函数，将估值中的模糊变量以数学形式描述出来，克服了实物期权框架下“唯一解”的不足。在可行性分析基础上，将 FCFF 和 WACC 两个参数界定为三角模糊数，构建模糊状态下企业现金流折现模型；将期权定价的 5 个参数设为三角模糊数，推导出基于模糊理论的 n 阶段模糊复合实物期权定价模型。

通过敏感性分析，证明了模糊实物期权理论下初创企业价值与模糊参数 γ、α 和 β 有关。α 取值越大，企业价值负向变化范围越大。β 取值越大，企业价值正向变化范围越大。γ 取值越大，参数的模糊性越低，初创企业不确定性越低，投资者对企业未来情况的把握程度越高。当 $\gamma=1$ 时，模糊数变为确定数，模糊实物期权模型变为传统定价模型。

案例研究表明，模糊实物期权理论修正了传统估值方法对初创企业的价值低估，可帮助投资者识别出具有增长潜力的初创企业，从而做出正确的投资决策。可靠性检验表明，模糊实物期权理论是对实物期权的改进和完善，通过设置不同水平的参数，实现了对模糊不确定性的灵活处理，提高了投资决策的科学性和有效性。

本研究表明：初创企业的发展具有高度的不确定性，使用传统现金流折现模型难以正确对其价值进行评估。模糊理论为探讨初创企业实物期权定价方法，提供了全新的观察视角和研究思路。将模糊数学应用于实物期权定价，可对传统估值方法进行修正和完善，并为初创企业估值建立有益的分析框架，使模糊环境下初创企业的估值具有可控性，在理论和实务中均具有重要意义。

参考文献　(References)

[1] BLACK F S, SCHOLES M S. The pricing of options and corporate liabilities [J]. Journal of Political Economy, 1973, 81(3): 637-654.

[2] MYERS S C. Determinants of corporate borrowing [J]. Journal of Financial Economics, 1977, 5(2): 147-175.

[3] 郑征，朱武祥. 运用复合实物期权方法研究初创企业的估值[J]. 投资研究，2017，36(4)：118-135.

ZHENG Z, ZHU W X. Application of compound real options method in the start-ups valuation [J]. Review of Investment Studies, 2017, 36(4): 118-135. (in Chinese)

[4] ZADEH L A. Fuzzy sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3): 338-353.

[5] BUCKLEY J J. The fuzzy mathematics of finance [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1987, 21(3): 257-273.

[6] CARLSSON C, FULLÉR R. A fuzzy approach to real option valuation [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2003, 139(2): 297-312.

[7] YOSHIDA Y. A discrete-time model of American put option in an uncertain environment [J]. European Journal of Operational Research, 2003, 151(1): 153-166.

[8] WU H C. Pricing European options based on the fuzzy pattern of Black-Scholes formula [J]. Computers & Operations Research, 2004, 31(7): 1069-1081.

[9] WU H C. Using fuzzy sets theory and Black-Scholes formula to generate pricing boundaries of European options [J]. Applied Mathematics and Computation, 2007, 185(1): 136-146.

[10] XU W J, PENG X L, XIAO W L. The fuzzy jump-diffusion model to pricing European vulnerable options [J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2013, 15(3): 317-325.

[11] WANG X D, HE J M, LI S W. Compound option pricing under fuzzy environment [J]. Journal of Applied Mathematics, 2014: 875319.

[12] TAVAKKOLNIA A. A binomial tree valuation approach for compound real options with fuzzy phase-specific volatility [C]// Proceedings of the 12th International Conference on Industrial Engineering. Tehran, Iran, 2016: 73-78.

[13] BI X, WANG X F. The application of fuzzy-real option theory in BOT project investment decision-making [C]// Proceedings of the 16th International Conference on Industrial Engineering and Engineering Management. Beijing, China, 2009: 289-293.

[14] PUSHKAR S, MISHRA A. IT project selection model using real option optimization with fuzzy set approach [M]// ARIWA E, EL-QAWASMEH. Digital enterprise and information systems. Berlin, Germany: Springer, 2011, 194: 116-128.

[15] WANG Q, KILGOUR D M, HIPEL K W. Facilitating risky project negotiation: An integrated approach using fuzzy real options, multicriteria analysis, and conflict analysis [J]. Information Sciences, 2015, 295: 544-557.

[16] BIANCARDI M, VILLANI G. Robust Monte Carlo method for R&D real options valuation [J]. Computational Economics, 2017, 49(3): 481-498.

[17] DE ANDRÉS-SÁNCHEZ J. An empirical assestment of fuzzy Black and Scholes pricing option model in Spanish stock option market [J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2017, 33(4): 2509-2521.

[18] ZMEŠKAL Z. Application of the fuzzy-stochastic methodology to appraising the firm value as a European call option [J]. European Journal of Operational Research, 2001, 135(2): 303-310.

[19] YAO J S, CHEN M S, LIN H W. Valuation by using a fuzzy discounted cash flow model [J]. Expert Systems with Applications, 2005, 28(2): 209-222.

[20] WANG J, HWANG W L. A fuzzy set approach for R&D portfolio selection using a real options valuation model [J]. Omega, 2007, 35(3): 247-257.

[21] SEMERCIOGLU N, TOLGA A Ç. A multi-stage new product development using fuzzy type-2 sets in a real option valuation [C]//Proceedings of 2015 IEEE International Conference on Fuzzy Systems. Istanbul, Turkey, 2015: 1-7.

[22] **赵振武, 唐万生. 模糊实物期权理论在风险投资项目价值评价中的应用** [J]. **北京理工大学学报(社会科学版)**, 2006, 8(1): 49-51.

ZHAO Z W, TANG W S. The application of fuzzy real option theory in the venture investment value evaluation [J]. Journal of Beijing Institute of Technology (Social Sciences Edition), 2006, 8(1): 49-51. (in Chinese)

[23] **张维功, 何建敏, 吕宏生. 基于** B-S **公式的模糊实物期权研究** [J]. **统计与决策**, 2009(3): 143-145.

ZHANG W G, HE J M, LÜ H S. Research on fuzzy real option based on B-S formula [J]. Statistics and Decision, 2009(3): 143-145. (in Chinese)

[24] **张茂军, 秦学志, 南江霞. 基于三角直觉模糊数的欧式期权二叉树定价模型** [J]. **系统工程理论与实践**, 2013, 33(1): 34-40.

ZHANG M J, QIN X Z, NAN J X. Binomial tree model of the European option pricing based on the triangular intuitionistic fuzzy numbers [J]. Systems Engineering: Theory & Practice, 2013, 33(1): 34-40. (in Chinese)

[25] **李双兵, 冀巨海. 高新技术企业风险投资价值评估: 基于模糊实物期权视角** [J]. **财会通讯**, 2016(5): 8-10.

LI S B, JI J H. Value evaluation of venture capital in hi-tech enterprises: Based on fuzzy real option perspective [J]. Communication of Finance and Accounting, 2016(5): 8-10. (in Chinese)

[26] **赵昕, 薛岳梅, 丁黎黎. 灰色模糊环境下基于跳扩散过程的脆弱期权定价模型** [J]. **系统工程**, 2017, 35(12): 35-42.

ZHAO X, XUE Y M, DING L L. Vulnerable option pricing model based on jump-diffusion process for grey ambiguity condition [J]. Systems Engineering, 2017, 35(12): 35-42. (in Chinese)

(责任编辑 李丽)