DOI:10.13546/j.cnki.tjyjc.2009.03.058

基于 B-S 公式的模糊实物期权研究

张维功[1,2]，何建敏[1]，吕宏生[2]

（1.东南大学 经管学院，南京 210096；2.阳光保险集团，北京 100020）

摘　要：传统的实物期权分析将项目的收益和成本等参数仅仅看成确定的值或随机的变量，不能很充分的描述这些参数的性质。文章通过构造非线性三角模糊数，将其引入到连续时间实物期权的评估中以描述参数的不确定性，并在战略投资决策中得到合适的应用。

关键词：实物期权；非线性三角模糊数；战略决策

中图分类号：F830.59　　文献标识码：A　　文章编号：1002-6487(2009)03-0143-03

本研究通过构造一个非线性三角模糊数来描述项目的收益和成本，进而构建基于连续时间的模糊实物期权模型。

1　非线性三角模糊数

三角模糊数因为其直观易于分析，在模糊数学上有着很大的应用，但其隶属函数与论域呈简单的线形关系也限制了它的应用范围，有必要引入新的模糊数，既保留三角模糊数的直观性，又改进隶属函数与论域呈简单的线形关系。Appadoo et al.给出了一种基于梯形的非线形模糊数[1,2]，但该模糊数只能用在单期的计算二项式期权定价，在多期时计算异常复杂。

假定非线性三角模糊集$\tilde{A}$，其中，$a<b<c$，$m,n\geqslant 0$，记为$M<a,b,c>$，其隶属函数为

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ 1-\left(\dfrac{b-x}{b-a}\right)^m, & a\leqslant x\leqslant b\\ 1-\left(\dfrac{b-x}{b-c}\right)^n, & b<x\leqslant c\\ 0, & x>c\end{cases}$$

讨论非线性三角模糊数$M<a,b,c>$的α-截集的性质：当$m=n=1$时，非线性三角模糊数$M<a,b,c>$退化为标准的三角模糊数；当$b-a=b-c$时，非线性三角模糊数$M<a,b,c>$是对称的；当$m\to+\infty, n\to+\infty$时，其α-截集与隶属度α无关；当$m\to 0, n\to 0$时，α-截集退化为一点b。

算例 1　令$\tilde{A}=M<a,b,c>=M<1,3,4>$，其隶属函数的形状见图 1。

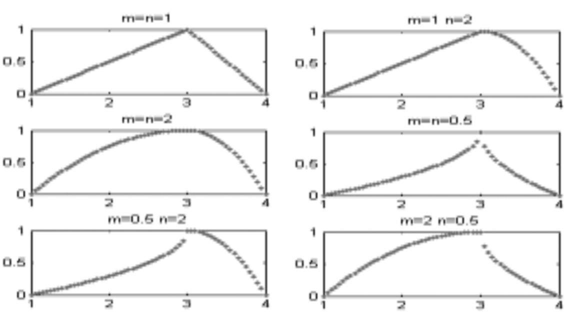

图 1　m，n 取不同值时隶属函数的形状

从图 1 可以看出，标准的三角模糊数是非线性三角模糊数的一个特例。

2　模糊数的概率均值和方差

在求解连续条件下的模糊实物期权前，需要引进模糊数的清晰数(Crisp)概率均值和方差。如果$\tilde{A}$和$\tilde{B}$都是非线性三角模糊数即$\tilde{A}=M<a_1,a_2,a_3>$，$\tilde{B}=M<b_1,b_2,b_3>$，则他们的α-截集分别为$\tilde{A}_\alpha=[\tilde{A}_\alpha^-,\tilde{A}_\alpha^+]$，$\tilde{B}_\alpha=[\tilde{B}_\alpha^-,\tilde{B}_\alpha^+]$，$\forall\alpha\in[0,1]$。由 Goetschel 和 Voxman 知，引进两个模糊数的排序(Ranking)方法[3]。

$$\tilde{A}\leqslant\tilde{B}\Rightarrow\int_0^1\alpha(\tilde{A}_\alpha^-+\tilde{A}_\alpha^+)d\alpha\leqslant\int_0^1\alpha(\tilde{B}_\alpha^-+\tilde{B}_\alpha^+)d\alpha \tag{1}$$

上式给出了不同隶属度下重要性的排序。Carlsson 和 Fuller[4]对模糊数-截集的清晰数均值给了如下定义

$$\overline{M}(\tilde{A})=\int_0^1\alpha(\tilde{A}_\alpha^-+\tilde{A}_\alpha^+)d\alpha=\frac{\int_0^1\dfrac{\alpha(\tilde{A}_\alpha^-+\tilde{A}_\alpha^+)}{2}d\alpha}{\int_0^1\alpha d\alpha}=\frac{\overline{M}(\tilde{A})^-+\overline{M}(\tilde{A})^+}{2} \tag{2}$$

$\overline{M}(\tilde{A})^-$可以重新表示如下

$$\overline{M}(\tilde{A})^-=\frac{\int_0^1\alpha\tilde{A}_\alpha^-d\alpha}{\int_0^1\alpha d\alpha}=\frac{\int_0^1 Poss[\tilde{A}\leqslant\tilde{A}_\alpha^-]\min[\tilde{A}_\alpha]d\alpha}{\int_0^1 Poss[\tilde{A}\leqslant\tilde{A}_\alpha^-]d\alpha} \tag{3}$$

其中 Poss 表示概率，$Poss[\tilde{A}\leqslant\tilde{A}_\alpha^-]=\sup\limits_{x\leqslant\tilde{A}_\alpha^-}\tilde{A}(x)=\alpha$。$\overline{M}(\tilde{A})^+$表示如下。

$$\overline{M}(\tilde{A})^+=\frac{\int_0^1\alpha\tilde{A}_\alpha^+d\alpha}{\int_0^1\alpha d\alpha}=\frac{\int_0^0 Poss[\tilde{A}\geqslant\tilde{A}_\alpha^+]\max\tilde{A}_\alpha]d\alpha}{\int_0^0 Poss[\tilde{A}\geqslant\tilde{A}_\alpha^+]d\alpha} \tag{4}$$

基金项目：国家自然科学基金资助项目(70371035)

其中 Poss 表示概率，$\mathrm{Poss}[\tilde{A}\geqslant\tilde{A}_{\alpha}^{+}]=\Pi(\tilde{A}_{\alpha}^{+},+\infty)=\sup\limits_{x\geqslant\tilde{A}_{\alpha^{+}}}\tilde{A}(x)=\alpha$。

所以，模糊数的清晰数（Crisp）概率均值的区间为 $M(\tilde{A})=[\overline{M}(\tilde{A})^{-},\overline{M}(\tilde{A})^{+}]$

根据 Carlsson 和 Fuller[4]对模糊数 α-截集的清晰数均值的定义，容易到得到

$\overline{M}(\tilde{A}+\tilde{B})=\overline{M}(\tilde{A})+\overline{M}(\tilde{B})\quad \overline{M}(\lambda\tilde{A})=\lambda\overline{M}(\tilde{A})$ 其中，λ 为实数。

若$\tilde{B}_{a}=[\tilde{A}_{\alpha}^{-}+x,\tilde{A}_{\alpha}^{+}+x]$，有$\overline{M}(\tilde{B})=\overline{M}(\tilde{A})+x$。模糊数的清晰数概率方差定义为

$$v(\tilde{A})==\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\alpha(\tilde{A}_{\alpha}^{+}-\tilde{A}_{\alpha}^{-})^{2}d\alpha$$

同理易证，$\tilde{V}(\lambda\tilde{A})=\lambda^{2}\tilde{V}(\tilde{A})$。如果$\tilde{B}_{\alpha}=[\tilde{A}_{\alpha}^{-}+x,\tilde{A}_{\alpha}^{+}+x]$，则有$\tilde{V}(\tilde{B})=\tilde{V}(\tilde{A})$。如果非线性三角模糊数$\tilde{A}$的 α-截集为

$$\tilde{A}_{\alpha}=[\tilde{A}_{\alpha}^{-},\tilde{A}_{\alpha}^{+}]=[a_{2}-(a_{2}-a_{1})(1-\alpha)^{\frac{1}{m}},a_{2}-(a_{2}-a_{3})(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}],\ \forall\alpha\in[0,1] \tag{5}$$

则清晰数均值的下界为

$$\overline{M}(\tilde{A})^{-}=2\int_{0}^{1}\alpha(\tilde{A}_{\alpha}^{-})^{2}d\alpha=2\int_{0}^{1}\alpha(a_{2}-(a_{2}-a_{1})(1-\alpha)^{\frac{1}{m}})d\alpha=a_{2}-\left[\frac{2m^{2}(a_{2}-a_{1})}{(1+m)(1+2m)}\right]$$

清晰数均值的上界为

$$\overline{M}(\tilde{A})^{+}=2\int_{0}^{1}\alpha(\tilde{A}_{\alpha}^{+})d\alpha=a_{2}-\left[\frac{2n^{2}(a_{2}-a_{3})}{(1+n)(1+2n)}\right]$$

所以，模糊数 α-截集的清晰数均值为

$$\overline{M}(\tilde{A})=\frac{\overline{M}(\tilde{A})^{-}+\overline{M}(\tilde{A})^{+}}{2}=a_{2}-\left[\frac{2n^{2}(a_{2}-a_{3})}{(1+n)(1+2n)}\right]-\left[\frac{2m^{2}(a_{2}-a_{1})}{(1+m)(1+2m)}\right]$$

显然，当$\tilde{A}$为对称模糊数时，即$(a_3-a_2)=(a_2-a_1)$和 m=n，得到$\overline{M}(\tilde{A})=a_2$。

当$\tilde{A}$为一般的三角模糊数时，$\overline{M}(\tilde{A})=\frac{4a_2+a_1+a_3}{12}$。模糊数的清晰数概率方差为

$$V(\tilde{A})=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\alpha(\tilde{A}_{\alpha}^{+}-\tilde{A}_{\alpha}^{-})^{2}d\alpha$$

$$=\left[\frac{n^{2}(a_{2}-a_{3})^{2}}{4(1+n)(1+2n)}\right]+\left[\frac{m^{2}(a_{2}-a_{1})^{2}}{4(1+m)(1+2m)}\right]-\left[\frac{m^{2}n^{2}(a_{2}-a_{1})(a_{2}-a_{3})}{(m+n+2mn)(m+n+mn)}\right]$$

当$\tilde{A}$为对称模糊数时，令$(a_3-a_2)=(a_2-a_1)=x$，m=n，则 $V(\tilde{A})=\frac{m^{2}x^{2}}{(1+m)(1+2m)}$

当$\tilde{A}$为对称三角模糊数时，即$(a_3-a_2)=(a_2-a_1)=x$，m=n=1，则 $V(\tilde{A})=\frac{x^{2}}{6}$

3 模糊建模方法

在用实物期权方法评估项目是否值得投资时，首先需要估计项目的预期收益和支出，利用非线性模糊数估计收益 S 和成本 X。

$\tilde{S}=M<s_1,s_2,s_3>\ \tilde{X}=M<x_1,x_2,x_3>$

根据 B-S 公式，模糊实物期权的价值可以描述为 Carlsson 和 Fuller[4]。

$$\mathrm{FROV}=\tilde{S}N(d_{1})-\tilde{X}e^{-r\tau}N(d_{2}) \tag{6}$$

其中：$d_{1}=\frac{\ln(\overline{M}(\tilde{S})/\overline{M}(\tilde{X}))+(r+\frac{1}{2}\sigma^{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$，$d_{2}=d_{1}-\sigma\sqrt{\tau}$，$\tau=T-t$

$\overline{M}(\tilde{S})$表示项目预期收益的概率均值，$\overline{M}(\tilde{X})$表示项目预期支出的概率均值，$\sigma(\tilde{S})$表示项目预期收益的概率方差。（6）式化为 α-截集的形式

$$\mathrm{FROV}(\alpha)=\tilde{S}(\alpha)N(d_{1})-\tilde{X}(\alpha)e^{-r\tau}N(d_{2})$$

$$=[(s_{2}-(s_{2}-s_{1})(1-\alpha)^{\frac{1}{m}})N(d_{1})-(x_{2}-(x_{2}-x_{3})(1-\alpha)^{\frac{1}{n}})e^{-r\tau}N(d_{2}),(s_{2}-(s_{2}-s_{3})(1-\alpha)^{\frac{1}{n}}N(d_{1})-(x_{2}-(x_{2}-x_{1})(1-\alpha)^{\frac{1}{m}})e^{-r\tau}N(d_{2})] \tag{7}$$

考虑无风险利率模糊变动时的期权模型。设模糊无风险利率$\bar{r}=M<r_1,r_2,r_3>$，其 α-截集的形式为$\tilde{r}(\alpha)=(\tilde{r}^{-}(\alpha),\tilde{r}^{+}(\alpha))=(r_{2}-(r_{2}-r_{1})(1-\alpha)^{\frac{1}{2}},r_{2}-(r_{2}-r_{3})(1-\alpha)^{\frac{1}{2}})$。

利用函数的单调性[5]，在（6）式中引入模糊无风险利率$\tilde{r}$。既然 e^{-x} 是减函数，则 $e^{-\tilde{r}\times 1_{\{\tau\}}}$的 α-截集为

$$(e^{-\tilde{r}\times 1_{\{\tau\}}})(\alpha)=\{e^{-x}:x\in(-\tilde{r}\times 1_{\{\tau\}})(\alpha)\}=\{e^{-x}:\tilde{r}^{-}(\alpha)\tau\leqslant x\leqslant\tilde{r}^{+}(\alpha)\tau\}$$
$$=[e^{-\tilde{r}+(\alpha)\tau},e^{-\tilde{r}-(\alpha)\tau}]$$

根据模糊数的运算法则，得到$\tilde{X}e_{\{\tau\}}^{-\tilde{r}\times 1}$的 α-截集

$$\tilde{X}e_{\{\tau\}}^{-\tilde{r}\times 1}(\alpha)=[\tilde{X}^{-}(\alpha)e^{-\tilde{r}+(\alpha)\tau},\tilde{X}^{+}(\alpha)e^{-\tilde{r}-(\alpha)\tau}]$$

则重新表示（6）式

$$\mathrm{FROV}=\tilde{S}N(d_{1})-\tilde{X}e_{\{\tau\}}^{-\tilde{r}\times 1}N(d_{2}) \tag{8}$$

其中：$d_{1}=\frac{\ln(\overline{M}(\tilde{S})/\overline{M}(\tilde{X}))+(\overline{M}(\tilde{r})+\frac{1}{2}\sigma^{2})\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}$，$d_{2}=d_{1}-\sigma\sqrt{\tau}$，$\tau=T-t$

4 实例应用

江苏某机床厂是机械工业部重点骨干企业，国家数控机床生产基地，是经国家对外贸易经济合作部批准有进出口自营权的大型企业。目前工厂面临着目标市场单一，产品单调，利润低薄等不利局面。鉴于该公司与行业内先进企业的差距越来越大，并有被边缘化的危险，公司决策层制定了 2007~2015 年的长期战略规划，欲向市场投放四类适用于汽车行业和高新行业的先进数控车床，以期改变面前产品市场单一、缺乏竞争力的尴尬局面。新产品的生产可与老产品共用原生产线，生产新产品的同时，将会适量压缩老产品。改造生产线共需资金投入 1000 万元左右，且新产品投产后，预计利润将提高两成（20%）。由于汽车行业和高新行业是该公司的陌生市场，存在产品认知度的问题，因此，计划择期进入目标市场，但最晚不能迟于 2008 年底（或 2009 年初）。显然，公司选择最佳时期向市场投放新产品的做法，使得公司拥有了一个期权，可通过实物期权理论进行分析。

下面利用最佳时期选择的模糊实物期权分析机床厂的战略决策，其模型描述如下

$$FROV_t=\max_{t=0,1,\cdots,N}(\tilde{S}_tN(d_1)-\tilde{X}e^{-\tilde{r}\times 1}_{\{\tau\}}N(d_2)) \qquad (9)$$

其中，$\tilde{X}$为初始投入成本；$\tilde{S}_t=\sum_{i=0}^{N}\frac{\tilde{f}_i}{(1+d)^i}-\sum_{i=0}^{t}\frac{\tilde{f}_i}{(1+d)^i}=\sum_{i=t+1}^{N}\frac{\tilde{f}_i}{(1+d)^i}$，$\tilde{f}_i$为第 i 期的现金流，且$\tilde{f}_i=\tilde{A}_i-\tilde{B}_i$，$\tilde{A}_i$为第 i 期的销售收益，$\tilde{B}_i$为第 i 期的成本；d 风险调整贴现率。

作为密集资本投入的机床行业，其销售收入和成本支出变化不大，令模糊数$\tilde{A}_i$和$\tilde{B}_i$的模糊参数 m=n=0.5，见图 2。

图 2 表明，与 m=n=1 时的隶属函数相比(参见图 1)，当 m=n=0.5 时，大于或者小于 A 的可能性更低，即等于 A 的更大。把它应用于描述机床行业的收支情况，揭示机床的销售收入和成本支出比较稳定。

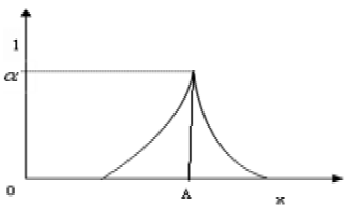

图 2 销售收入和成本支出的隶属函数

我们的目的是，使得公司在 1007 初至 2015 年底之间战略规划的总收益最大化，公司将在 2007、2008、2009 三个年度内择期把新产品投放目标市场，图 3 描述了投放时机与年度的关系。如果公司决定在 2007 年初就把新产品投放目标市场，表 1 给出了一些估计的数据(单位亿元)。

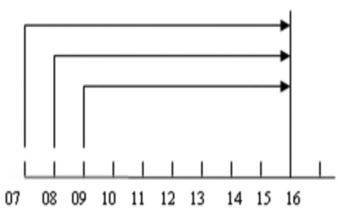

图 3 投放时机与年度的关系

由于某些原因，表 1 的数据与公司原估计的数据有些出入，但分析的思路是一致的。

表 1

年度	收益(模糊波动 3%)			成本(模糊波动 5%)		
				0.09	0.1	0.11
07	1.0185	1.05	1.0815	0.9500	1.0	1.0500
08	1.0670	1.10	1.1330	0.9880	1.04	1.0920
09	1.0961	1.13	1.1639	1.0070	1.06	1.1130
10	1.1446	1.18	1.2154	1.0165	1.07	1.1235
11	1.2028	1.24	1.2772	1.0450	1.10	1.1550
12	1.2416	1.28	1.3184	1.0640	1.12	1.1760
13	1.2610	1.30	1.3390	1.0925	1.15	1.2075
14	1.2319	1.27	1.3081	1.0830	1.14	1.1970
15	1.2125	1.25	1.2875	1.0830	1.14	1.1970
16	1.1834	1.22	1.2566	1.0735	1.13	1.1865
利率	2.75%	3%	3.25%		d=8.2%	波动率为 11%

折现到 2007 年初的公司模糊净现金流为

$FNPV_1$=(0.0869,0.7333,1.3797)-(0.09,0.1,0.11)=(-0.0031,0.6333,1.269)其中，模糊参数 m=n=0.5。

α-截集为[0.6333-0.6364(1-α)^2,0.6333+0.6364(1-α)^2]。当 α=0 时，模糊净现值的最大价值区间为[-0.0031,1.2697]；当 α=1 时，净现值为 0.6333。

计算模糊期权。根据公式(10)，$\tilde{S}_t=\sum_{i=1}^{N}\frac{\tilde{f}_i}{(1+d)^i}-\sum_{i=0}^{t}\frac{\tilde{f}_i}{(1+d)^i}=\sum_{i=t+1}^{N}\frac{\tilde{f}_i}{(1+d)^i}$，计算公司 2008 年初(2007 年末)的模糊净现金流

$FNPV_1$=(0.1281,0.7393,1.3506)其中，模糊参数 m=n=0.5，α-截集为[0.7393-0.6122(1-α)^2,0.7393+0.6122(1-α)^2]。

必须指出的是，$FNPV_1$并不是投放新产品所带来的收益，其中还包括老产品的利润。根据模糊数的计算法则，新产品的收益为

$FNPV_2=0.2\times FNPV_1$=(0.02562,0.14786,0.27012)

α-截集为[0.14786-0.1222(1-α)^2,0.14786+0.1222(1-α)^2]。

所以，当 α=0 时，模糊期权的最大价值区间为[-0.0603,0.1918]；当 α=1 时，期权值为 0.0695。因此，公司决定在 2007 年初就把新产品投放目标市场，当 α=0 时，其战略规划的模糊总收益最大区间为[-0.0634,1.4615]；当 α=1 时，净现值为 0.7028。

由于最大价值区间的左边界为负，所以，向市场投放新产品有一定的风险，但由于负值较小，且 α=1 时，净现值为 0.7028，因此，投放新产品的策略还是可取的。

由于战略规划的总收益是个区间值(事实上，α=1 时，净现值也是区间 [0.7028,0.7028])，借鉴去模糊方法(Opricovic Tzeng,2003)，并能体现公司决策者的风险偏好，可采用计算公式 $BNP_t=DR_t+f\frac{(UR_t-DR_t)+(MR_t-DR_t)}{3}$，其中 f≥0 表示决策者是风险规避的，f=0 表示决策者是风险中性的，而 f≤0 意味着决策者是风险爱好的。

经过对比 2007 年、2008 年和 2009 年向市场投放新产品的战略规划的总收益，如果决策者是风险规避的和风险中性的，建议在 2008 年引入新产品；而当决策者是风险爱好的，则建议在 2007 年引入新产品。

5 结论

本文从连续时间的角度研究了模糊实物期权，用非线性三角模糊数来度量项目的预期收益和成本支出，在此基础上给出预期收益和成本的清晰数概率均值和方差并将模糊利率引入模糊 B-S 公式中，利用最佳时期选择的模糊实物期权理论，分析了南京某机床厂的战略规划。研究结果显示，最佳时期选择的模糊实物期权理论可以很好适用于公司的战略规划，指导决策者对未来发展的趋势做出判断。

参考文献：

[1]Appadoo S S, Bector C R and Chandra S. Binomial Option Pricing Model Using O(2,2) -Tr.T.F.N [J]. Management Science, 2005, 26(2).

[2]Appadoo S S. Pricing Financial Derivatives with Fuzzy Algebraic Models: a Theoretical and Computational Approach[D]. University of Manitoba, Winnipeg, Manitoba, 2006.

[3]Goetschel R, Voxman W. Elementary Fuzzy Calculus [J]. Fuzzy Sets and System, 1986(18).

[4]Carlsson C and Fuller R. On Oossiibilistic Mean Value and Variance of Fuzzy Numbers [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001 (112).

[5]Wu H C. European Option Pricing Under Fuzzy Environments[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2005 (20).

[6]Opricovic S, Tzeng G H. Defuzzification Within a Multicriteria Decision model [J]. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-based Systems, 2003(11).

(责任编辑/浩 天)