

## Analisi di un filtro crossover

Francesco Galasso, 0000979085; Emanuele Spataro, 0000977771

30 marzo, 21 aprile, 13 maggio 2022

### Abstract:

Lo scopo di questa serie di esperienze in laboratorio è stato quello di studiare il comportamento di un filtro crossover sottoposto a una tensione sinusoidale. È stata effettuata una misura dell'andamento della tensione sui rami del circuito in funzione della frequenza per verificare che fosse compatibile con l'andamento atteso e fare una stima della frequenza di crossover. Il valore ottenuto,  $\nu_0 = (4069 \pm 5) \text{ Hz}$ , è risultato in accordo con quello che ci si attendeva,  $\nu_a = (4020 \pm 50) \text{ Hz}$ . Inoltre sono state fatte misure dello sfasamento della tensione nei rami rispetto a quella generata, ottenendo così una seconda stima della frequenza di crossover,  $\nu_0 = (4488 \pm 12) \text{ Hz}$ . Questo valore è risultato essere in disaccordo con il valore atteso.

### Introduzione:

Il filtro crossover è un particolare circuito RLC con la caratteristica di ripartire il segnale in ingresso su due rami a seconda della frequenza della sorgente. Trova la sua principale applicazione nei sistemi di riproduzione audio, in cui si utilizzano due diversi altoparlanti, *woofer* e *tweeter*, progettati per la riproduzione, rispettivamente, di basse e alte frequenze. Tale circuito è costituito da un filtro passa basso e un filtro passa alto posti in parallelo; ai fini dell'analisi, ciascun altoparlante è stato sostituito con una resistenza. La frequenza di separazione del circuito è detta *frequenza di crossover* e si può dimostrare (si veda l'appendice) che è data dalla formula:

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_L\tau_C}} \quad (1)$$

dove  $\tau_L = \frac{L}{R}$  e  $\tau_C = RC$  indicano i tempi caratteristici rispettivamente del ramo del woofer e del tweeter ( $L$  è il valore dell'induttanza,  $C$  la capacità e  $R$  la resistenza totale su ciascun ramo). Fornendo in ingresso una tensione sinusoidale con ampiezza costante ci si attende di osservare, all'aumentare della frequenza in entrata, un andamento sinusoidale della tensione sulle resistenze di ciascun ramo con ampiezza decrescente sul ramo del woofer e crescente sul ramo del tweeter: si misurerà la stessa ampiezza per woofer e tweeter proprio in corrispondenza della frequenza di crossover. Si riportano di seguito le espressioni algebriche delle ampiezze attese ( $V_L$  per woofer e  $V_C$  per tweeter):

$$V_L = \frac{\rho}{\sqrt{1 + (2\pi\nu\tau_L)^2}} V_{in} \quad (2)$$

$$V_C = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi\nu\tau_C)^2}}} V_{in} \quad (3)$$

dove  $V_{in}$  è l'ampiezza della tensione sinusoidale in ingresso,  $\nu$  è la frequenza e  $\rho = \frac{R_C}{R_C + R_{LC}} \approx \frac{R_L}{R_L + R_{LC}}$ . Analogamente, misurando lo sfasamento della tensione di ciascun ramo rispetto alla tensione in entrata, ci si aspetta che decresca all'aumentare della frequenza e che, esattamente sulla frequenza di crossover, woofer e tweeter siano in controfase. Si riportano le formule usate per gli andamenti attesi dello sfasamento di tweeter ( $\phi_C$ ) e woofer ( $\phi_L$ ) rispetto alla sorgente:

$$\varphi_L = -\tan^{-1}(2\pi\nu\tau_L) \quad (4)$$

$$\varphi_C = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\pi\nu\tau_C}\right) \quad (5)$$

Dunque si è misurata la frequenza di crossover cercando il valore della frequenza per cui le tensioni su woofer e tweeter hanno la stessa ampiezza oppure hanno sfasamento opposto.

### Metodo sperimentale:

#### Apparato sperimentale:

Il circuito analizzato, schematizzato in Figura 1 è stato realizzato sulla breadboard di una delle schede di acquisizione dati NI ELVIS II del Dipartimento di Fisica dell'Università di Bologna: è composto da due rami messi in parallelo tra loro e sottoposti a una tensione sinusoidale generata con il *function generator* di ELVIS (con una resistenza interna dichiarata dal costruttore pari a  $R_G = 50 \Omega$ ). Sul ramo del woofer c'è una resistenza di  $R_L = (997.9 \pm 0.5) \Omega$ , un induttore con induttanza  $L = (48.9 \pm 0.5) \text{ mH}$  e una resistenza (interna all'induttore)  $R_{IL} = (127.14 \pm 0.16) \Omega$ . Sul ramo del tweeter, invece, c'è una resistenza di  $R_C = (999.9 \pm 0.5) \Omega$ , un condensatore con capacità  $C = (32.0 \pm 0.3) \text{ nF}$ , e un resistore aggiuntivo avente  $R_{IC} = (150.10 \pm 0.17) \Omega$ , per compensare la resistenza interna dell'induttore. I valori di  $L$ ,  $C$  e delle resistenze sono stati scelti (compatibilmente con la disponibilità del laboratorio) in modo da ottenere il massimo trasferimento di potenza, che è ciò che si cerca di ottenere progettando sistemi acustici: in particolare si è trovato (si veda l'appendice) che i valori ottimali delle componenti del circuito dovevano rispettare la condizione  $L = R^2 C$  [1].

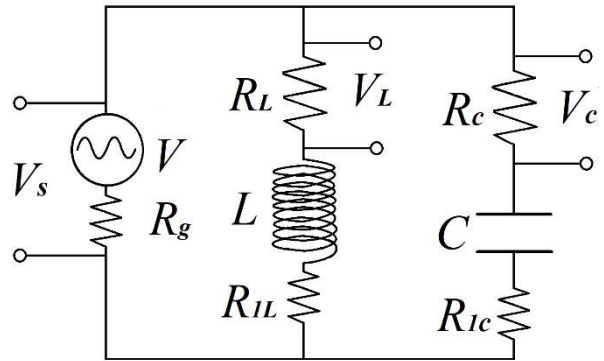


Figura 1: Schema del circuito studiato, distinguiamo il ramo con l'induttore, woofer, e il ramo con il condensatore, tweeter.

#### Svolgimento:

Prima di procedere con le misure dell'andamento del circuito da cui ricavare la frequenza di crossover, è stato monitorato il comportamento del filtro per tre diverse frequenze. Una volta verificato il corretto funzionamento, sono stati acquisiti dati relativi alla tensione in ingresso e alle tensioni ai capi di  $R_L$  e  $R_C$  al variare della frequenza in entrata (*frequency sweep*), per poter determinare la frequenza di crossover. La frequenza in ingresso è stata fatta variare tra  $1000 \text{ Hz}$  e  $15000 \text{ Hz}$  con incrementi di  $50 \text{ Hz}$  e, in seguito, in un range ristretto intorno alla frequenza di crossover ( $3700 \text{ Hz} - 4300 \text{ Hz}$  con incrementi di  $2 \text{ Hz}$ ). Per acquisire ampiezza e frequenza è stato usato il subVI "Extract Single Tone Information" del software LabView. Per ottenere i dati dell'andamento della fase sui rami del circuito in funzione della frequenza è stata seguita una procedura analoga. Gli errori sulle misure sono stati stimati acquisendo continuamente, ad una frequenza prossima alla frequenza di crossover attesa, i valori di ampiezza e fase: si è scelto di usare come incertezze la deviazione standard della distribuzione di ampiezza e fase in questa acquisizione. Tutte le acquisizioni sono state effettuate a una frequenza di campionamento di  $300 \text{ kHz}$  e con un numero di campioni pari a 500: in modo da avere molti punti per ciascun periodo dell'onda (per riuscire a determinare meglio forma e ampiezza dell'onda) e un elevato numero di periodi per ciascuna acquisizione.

## Risultati e discussione:

### Analisi preliminare:

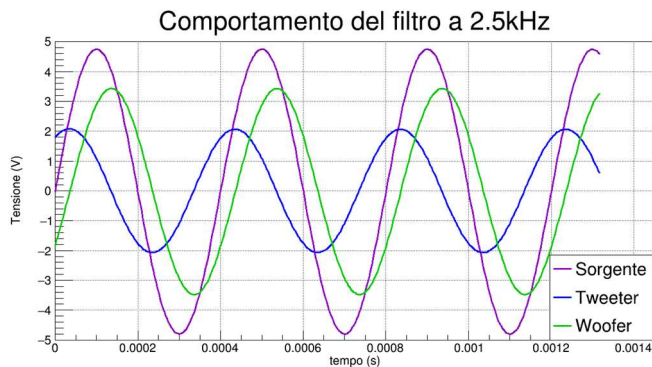


Figura 2: Circuito RLC crossover alimentato con una frequenza inferiore alla frequenza caratteristica

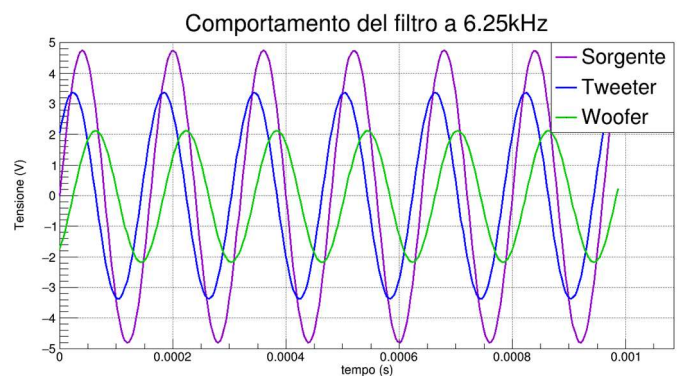


Figura 3: Circuito RLC crossover alimentato con una frequenza superiore alla frequenza caratteristica

Per assicurarsi che il circuito si comportasse nel modo atteso, è stato inizialmente misurato l'andamento della tensione in funzione del tempo ai capi della resistenza del woofer, della resistenza del tweeter e la tensione in ingresso (Figure 2, 3 e 4). Come atteso, si può osservare che alla frequenza di crossover sul woofer e tweeter si misura la stessa ampiezza; a una frequenza inferiore l'ampiezza della tensione sul ramo del woofer è maggiore di quella sul ramo del tweeter, mentre a frequenze più alte accade il contrario. L'ampiezza rilevata sulla sorgente, come previsto, è invece costante, ma non uguale al valore di 5 V impostato con il *function generator*, questo effetto è dovuto ad una piccola caduta di potenziale causata dalla resistenza interna del generatore di 50  $\Omega$ .

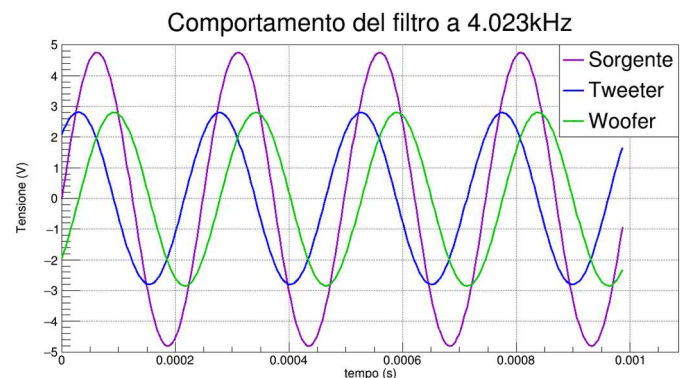


Figura 4: Circuito RLC crossover alimentato con sorgente sinusoidale alla frequenza caratteristica

### Analisi della tensione:

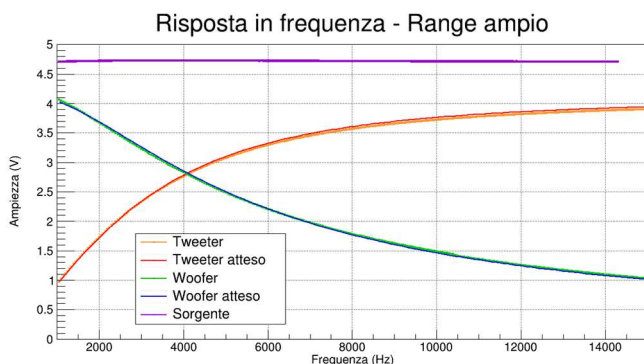


Figura 5: Ampiezza misurata in funzione della frequenza in ingresso confrontata con gli andamenti attesi

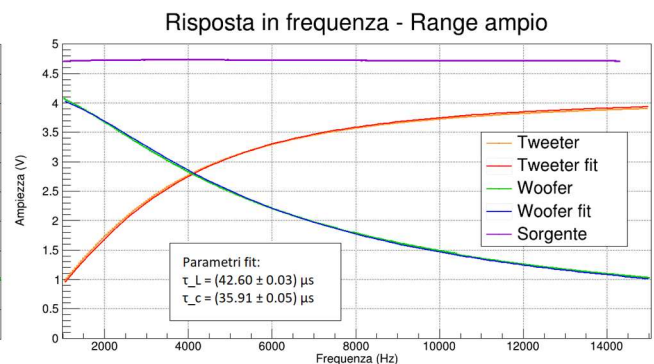


Figura 6: Ampiezza rilevata sui rami e fit delle funzioni attese tramite i parametri  $\tau_L$  e  $\tau_C$

In Figura 5 troviamo i dati che mostrano l'andamento dell'ampiezza del segnale misurato ai capi di  $R_L$ ,  $R_C$  e della sorgente in funzione della frequenza in ingresso, confrontati con le curve attese. In Figura 6 sono riportati gli stessi dati sperimentali e i relativi fit eseguiti con le due curve caratteristiche date dalle Eq. (2) e (3). Dai fit si è ottenuto il valore di  $\tau_C = (35.91 \pm 0.05) \mu s$ ,

$\tau_L = (42.60 \pm 0.03) \mu s$  ottenendo così una frequenza di crossover  $\nu_0 = (4069 \pm 5) Hz$ , in accordo con il valore atteso. I fit sono stati eseguiti considerando l'ampiezza  $V_{in}$  costante e pari al valor medio che i dati della sorgente assumono nel range in esame. Come incertezza per le misure dell'ampiezza abbiamo usato la semidispersione calcolata sui dati della sorgente  $\delta V = 11 mV$ . I valori di  $R^2$  associati ai due fit sono  $R_T^2 = 0.9988$  e  $R_w^2 = 0.9996$ , che evidenziano la validità del fit, mentre un calcolo del  $\tilde{\chi}^2$  ha messo in luce una probabile sottostima dell'incertezza.

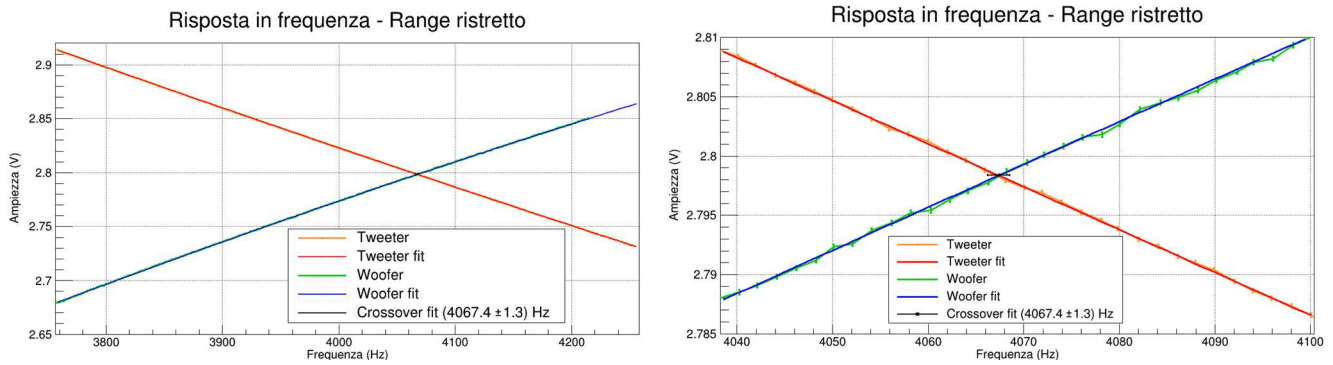


Figura 7: Ampiezze misurate sui due rami in un range ristretto intorno alla frequenza caratteristica del circuito con fit parabolici: a sinistra troviamo l'intero range ristretto a destra invece uno zoom del grafico e il punto di crossover estratto

Misurando l'ampiezza ai capi di  $R_L$  e di  $R_C$  in un intorno della frequenza caratteristica ed eseguendo due fit parabolici si è ottenuta come frequenza di crossover  $\nu_0 = (4067.4 \pm 1.3) Hz$  (Figura 7), dall'intersezione delle due curve, che risulta in accordo con il valore trovato nel range ampio e con il valore atteso. Ai dati sperimentali è stata associata un'incertezza sull'ampiezza pari a  $\delta V_T = 0.16 mV$  sul tweeter e  $\delta V_w = 0.2 mV$  sul woofer, ovvero due volte la deviazione standard ottenuta dall'analisi dei rumori di fondo presi sui due canali alla frequenza di crossover attesa. A questi due fit sono associati i valori di  $\tilde{\chi}^2 = 1.166$  per il tweeter mentre  $\tilde{\chi}^2 = 0.4581$  per il woofer, e i due coefficienti  $R_T^2 = 0.999996$  e  $R_w^2 = 0.999981$  che mostrano un ottimo accordo fra dati sperimentali e fit.

#### Analisi della fase:

Dalle Eq. (4) e (5) ci si aspetta che, alla frequenza di crossover, gli sfasamenti della tensione su woofer e tweeter risultino opposti e che, quindi, la frequenza di crossover sia uno zero della funzione somma degli sfasamenti. Dunque, sono stati effettuati i fit delle Eq. (4) e (5) sui dati relativi all'andamento della fase sui rami di woofer e tweeter, dai quali sono state estrapolate le stime dei parametri  $\tau_L$  e  $\tau_C$ , usate poi per trovare la frequenza di crossover  $\nu_0$ , con l'Eq. (1). I valori trovati (dati e fit delle funzioni) sono mostrati in Figura 8) sono  $\tau_L = (37.89 \pm 0.19) \mu s$ ,  $\tau_C = (32.72 \pm 0.13) \mu s$ ,  $\nu_0 = (4520 \pm 14) Hz$ .

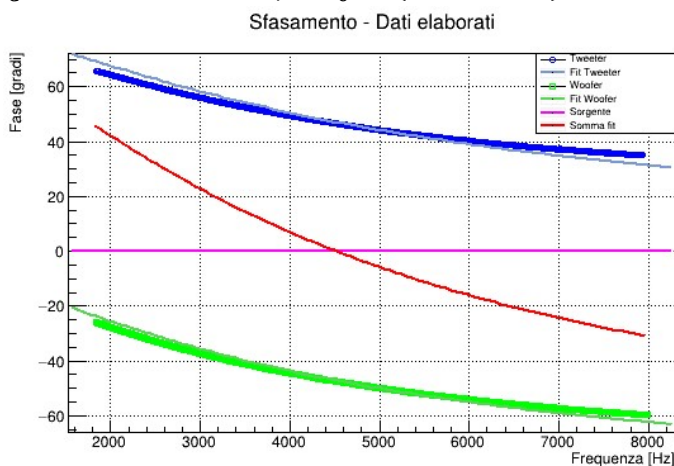
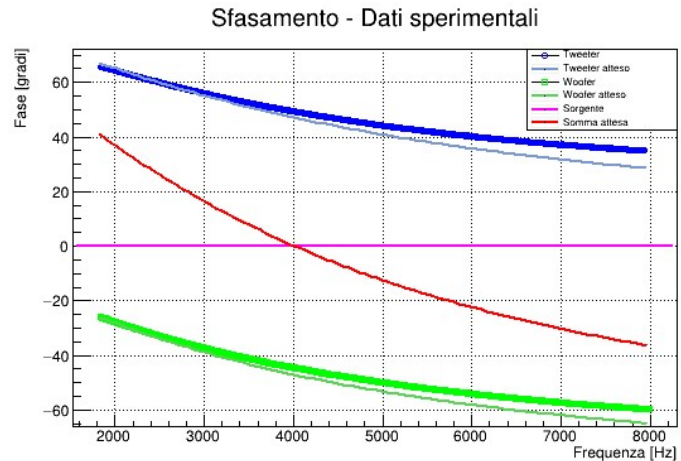


Figura 8: Sfasamento di woofer e tweeter e fit delle funzioni attese tramite i parametri  $\tau_L$  e  $\tau_C$ . È mostrata anche la somma delle funzioni ottenute dal fit



Figura 9: Sfasamenti di woofer e tweeter confrontati con gli andamenti attesi.



In Figura 9 è inoltre mostrato il confronto tra la fase misurata sui due rami confrontata con l'andamento previsto. Successivamente è stato acquisito anche l'andamento della somma degli sfasamenti sui due rami e si è effettuato sui dati ottenuti il fit della somma delle Eq. (4) e (5):

$$\varphi_{Sum} = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2\pi\nu\tau_C}\right) - \tan^{-1}(2\pi\nu\tau_L) \quad (6)$$

I valori trovati (dati e fit delle funzioni sono raffigurati in Figura 10) sono  $\tau_L = (18.10 \pm 0.07) \mu s$ ,  $\tau_C = (69.5 \pm 0.3) \mu s$ ,  $\nu_0 = (4488 \pm 12) Hz$ .

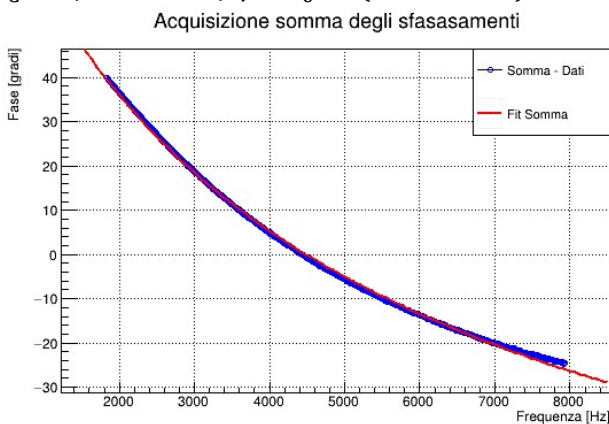


Figura 10: Somma degli sfasamenti di woofer e tweeter e fit della funzione somma attesa.

Nonostante il fatto che il fit sulla somma degli sfasamenti sia buono ( $R^2 = 0.9991$ ), è possibile osservare una notevole discrepanza tra comportamento atteso e quanto misurato in laboratorio, soprattutto per frequenze più alte di quella di crossover (Figura 9), sia sul ramo del woofer che su quello del tweeter, che ha portato ad una sovrastima della frequenza di crossover, che risulta quindi non compatibile con quella calcolata a partire dai valori delle componenti o con quella calcolata analizzando la tensione. Risultati analoghi sono stati ottenuti anche analizzando i dati su un range

ristretto intorno alla frequenza caratteristica e variando i parametri di acquisizione.

### Conclusioni:

L'esperienza ha confermato, almeno in parte, il comportamento atteso del filtro crossover realizzato in laboratorio, specialmente per quanto riguarda l'andamento della tensione in entrata. Infatti l'analisi dati ha messo in luce un comportamento compatibile con quello previsto dalle Eq. (2) e (3), portando a una stima della frequenza di crossover di  $\nu_0 = (4069 \pm 5) Hz$ , confrontabile con quella attesa  $\nu_a = (4020 \pm 50) Hz$ . D'altra parte l'analisi dello sfasamento della tensione ha mostrato un andamento non compatibile con ciò che ci si attendeva: la stima della frequenza di crossover ottenuta è stata  $\nu_0 = (4488 \pm 12) Hz$ , in disaccordo con la frequenza teorica. Non è stato possibile stabilire la causa di questa discrepanza così evidente.

### Bibliografia:

[1] R. Perfetti "Circuiti elettrici", Zanichelli, p. 512

### Appendice:

- L'analisi del comportamento atteso del filtro è stata effettuata con il formalismo dei fasori: in particolare si è applicata la legge di Kirchhoff per le maglie prima alla maglia con l'induttore e poi a quella con il condensatore ( $j$  è l'unità immaginaria,  $\omega = 2\pi\nu$  è la pulsazione).

$$\vec{V} = j\omega L \vec{I} + (R_{IL} + R_L) \vec{I} = (R_{IL} + j\omega L) \vec{I} + \vec{V}_L = \frac{R_{IL} + R_L}{R_{IL} + R_L + j\omega L} \vec{V} + \vec{V}_L$$

$$\vec{V}_L = \frac{R_L}{R_{IL} + R_L + j\omega L} \vec{V} = \frac{\rho}{1 + j\omega\tau_L} \vec{V}$$

Con  $\tau_L = \frac{L}{R_{IL} + R_L}$  e  $\rho = \frac{R_L}{R_L + R_{IL}}$ . Analogamente troviamo per la maglia con il condensatore.

$$\vec{V}_C = \frac{R_C}{R_{IC} + R_C + \frac{1}{j\omega C}} \vec{V} = \frac{\rho}{1 + \frac{1}{j\omega\tau_C}} \vec{V}$$

Con  $\tau_C = (R_C + R_{IC})C$  e  $\rho = \frac{R_C}{R_C + R_{IC}}$ . Calcolando modulo e argomento di queste espressioni è possibile ritrovare, rispettivamente, le Eq. (2) e (3), (4) e (5).

L'Eq. (1) si ricava dalle Eq. (2) e (3), cercando il valore di  $\nu$  per cui le due ampiezze sono uguali (quindi ponendo  $V_L = V_C$ ):

$$\frac{\rho}{\sqrt{1 + (2\pi\nu_0\tau_L)^2}} V = \frac{\rho}{\sqrt{1 + \frac{1}{(2\pi\nu_0\tau_C)^2}}} V$$

$$2\pi\nu_0\tau_L = \frac{1}{2\pi\nu_0\tau_C}$$

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\tau_L\tau_C}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

- Per ritrovare la condizione per massimizzare il trasferimento di potenza  $L = R^2C$  è necessario calcolare l'impedenza equivalente del circuito e imporre che sia uguale a  $R$ . (In questo caso  $R = R_{IC} + R_C \approx R_{IL} + R_L$ )

$$Z_{eq} = \left( \frac{1}{Z_L} + \frac{1}{Z_C} \right)^{-1} = \frac{(R + j\omega L) \left( R + \frac{1}{j\omega C} \right)}{2R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{R(1 - \omega^2 LC) + j\omega(R^2 C + L)}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega(2RC)}$$

$$Z_{eq} = R \frac{(1 - \omega^2 LC) + j\omega(RC + L/R)}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega(2RC)}$$

Quindi, per ottenere  $Z_{eq} = R$  per ogni valore di  $\omega$ , serve che  $RC + \frac{L}{R} = 2RC$ , cioè  $L = R^2C$ .

Si noti che per  $\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ , pulsazione di crossover,  $Z_{eq}$  è in ogni caso reale ( $\omega_0$  è pulsazione di risonanza).

$$\frac{(1 - \omega^2 LC) + j\omega \left( RC + \frac{L}{R} \right)}{(1 - \omega^2 LC) + j\omega(2RC)} = \frac{(1 - \omega^2 LC)^2 + 2RC(RC + \frac{L}{R}) + j\omega(1 - \omega^2 LC) \left( RC + \frac{L}{R} - 2RC \right)}{(1 - \omega^2 LC)^2 + \omega^2(2RC)^2}$$