# Seminarul 1

## Noţiuni de combinatorică

**1.** *Principiul fundamental de numărare:* numărul de perechi de obiecte în care primul obiect poate fi ales în $m$ moduri şi al doilea în $n$ moduri ($m, n \in \mathbb{N}$) este $m \cdot n$.
*Exemplu:* În câte moduri poate o persoană să îmbrace 2 cămăşi distincte şi 3 blugi diferiţi? R: $2 \cdot 3 = 6$.

**2.** *Aranjamente de $n$ luate câte $k$* ($k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k$): alegeri de $k$ obiecte distincte şi ordonate din $n$ obiecte distincte date.

$$\begin{aligned} A_n^k &= \text{“numărul de aranjamente de } n \text{ obiecte luate câte } k\text{”} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

*Exemplu:* Câte coduri cu 3 cifre distincte se pot forma folosind cifrele: 0, 1, 2, 3, 4? R: $A_5^3 = \frac{5!}{2!}$.

**3.** *Permutări de $n$* ($n \in \mathbb{N}$): aranjamente de $n$ luate câte $n$.

$$P_n = \text{“numărul de permutări de } n \text{ obiecte”} = A_n^n = n!.$$

*Observaţie:* Prin convenţie, $0! = 1$.
*Exemplu:* În câte moduri se pot aşeza 4 persoane pe o bancă? R: $P_4 = 4!$.

**4.** *Combinări de $n$ luate câte $k$* ($k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k$): alegeri de $k$ obiecte distincte şi neordonate din $n$ obiecte distincte date, i.e., alegeri de submulţimi de $k$ elemente ale unei mulţimi de $n$ elemente.

$$\begin{aligned} C_n^k &= \text{“numărul de combinări de } n \text{ elemente luate câte } k\text{”} \\ &= \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

*Exemplu:* Câte echipe de handbal se pot forma dintr-un grup de 9 persoane? R: $C_9^7 = C_9^2$.

**5.** *Numărul de funcţii* de la o mulţime $A$ cu $k$ elemente la o mulţime $B$ cu $n$ elemente este $n^k$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$).
*Observaţie:* O funcţie poate fi identificată cu $k$ alegeri de obiecte nu neapărat distincte (i.e., un obiect poate fi ales de mai multe ori), dar ordonate, din $n$ obiecte distincte date. Astfel, putem spune că *funcţiile* sunt *aranjamente cu repetiţii*.
*Exemplu:* În câte moduri se pot împărţi o portocală, un kiwi şi o banană la 4 copii? Un copil poate primi mai multe fructe, chiar toate.
R: Funcţiile $f : \{\text{“portocală”}, \text{“kiwi”}, \text{“banană”}\} \to \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ se pot construi în $4^3 = 64$ moduri.

**6.** *Permutări cu repetiţii:* Considerăm $n$ obiecte care pot fi împărţite în $k$ grupuri ($n, k \in \mathbb{N}^*, k \leq n$). Primul grup are $n_1$ obiecte identice, al 2-lea grup are $n_2$ obiecte identice, …, al $k$-lea grup are $n_k$ obiecte identice ($n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}, n_1 + \ldots + n_k = n$). Două obiecte alese arbitrar sunt distincte dacă şi numai dacă provin din grupuri diferite. Numărul de permutări ale acestor $n$ obiecte este

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

*Exemple:* 1) Într-o urnă sunt trei bile albe şi patru bile roşii. În câte moduri se pot aranja aceste bile într-un rând? R:$\frac{7!}{3!4!} = 35$.
2) Câte anagrame ale cuvântului “MISSISSIPPI” sunt posibile? R:$\frac{11!}{1!4!4!2!} = 34650$.

**7.** *Combinări cu repetiţii de $n$ luate câte $k$* ($n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$): alegeri de $k$ obiecte, nu neapărat distincte (i.e., un obiect poate fi ales de mai multe ori), neordonate, din $n$ obiecte distincte date (i.e., aranjamente cu repetiţii în care neglijăm ordinea). Numărul lor este

$$C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

*Exemplu:* 1) În câte moduri se pot împărţi 5 bile identice la 3 copii (C1, C2, C3)? (Un copil poate primi o bilă/mai multe bile/niciuna.) R: Exemple de distribuire a bilelor copiilor ("o" reprezintă o *bilă*):

| C1 | C2 | C3 |
|---|---|---|
| oo | | ooo |
| o | o | ooo |
| ooo | oo | |
| | | ooooo |

Identificăm configuraţiile mai sus cu şiruri de 5 biţi, unde 0 reprezină o bilă, 1 reprezintă separatorul dintre două grupuri de bile (unele grupuri pot fi vide) pe care le au doi copii succesivi:

0011000
0101000
0001001
1100000

Astfel, reformulăm întrebarea: în câte moduri se pot distribui 5 cifre egale cu 0 şi 2 cifre egale cu 1 pe 7 poziţii? R: $C_7^5 = C_7^2 = \frac{7!}{5!2!} = 21$.

2) O cofetărie are 7 sortimente de îngheţată. În câte moduri poate un client să îşi aleagă sortimentele pentru 3 cornete? (Fiecare cornet are câte un glob de îngheţată.) R: $\frac{9!}{3!6!} = 84$.

## Probleme

**1.** În câte moduri se pot aşeza pe un raft 5 culegeri de matematică, 3 culegeri de informatică şi 4 romane, ştiind că fiecare carte are un autor diferit, astfel încât:

a) cărţile de acelaşi tip să fie alăturate?

b) doar romanele să fie neapărat alăturate?

c) doar culegerile de matematică, respectiv de informatică, să fie neapărat alăturate?

**2.** 11 scaune sunt aşezate într-un rând.

(a) În câte moduri se pot aşeza 2 persoane pe aceste scaune?

(b) În câte dintre aceste moduri cele 2 persoane vor sta una lângă cealaltă?

(c) În câte dintre aceste moduri cele 2 persoane vor avea cel puțin 1 scaun între ele?

**3.** În câte moduri se pot aşeza în linie caracterele următoare: A, A, A, B, B, 0, 0, 0, 1? Dar în cerc?

**4.** În câte moduri se pot aşeza 5 persoane pe 12 scaune astfel încât între ele să existe cel puţin un scaun liber?

**5. a)** Câte soluţii $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ are ecuaţia $x_1 + \ldots + x_k = n$ $(k, n \in \mathbb{N}^*,\ n \geq k)$?

**b)** Câte soluţii $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ are ecuaţia $x_1 + \ldots + x_k = n$ $(k, n \in \mathbb{N}^*)$?

Fiecare soluţie $(x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ a ecuaţiei $x_1 + \ldots + x_k = n$ corespunde în mod unic unei soluţii $(y_1, \ldots, y_k) \in \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ a ecuaţiei $y_1 + \ldots + y_k = n + k$ şi vice versa, alegând $y_i = x_i + 1$, pentru $i \in \{1, \ldots, k\}$. Cf. a), există $C_{n+k-1}^{k-1}$ soluţii.

**6.** Câte coduri binare sunt formate din 10 cifre şi nu au două cifre alăturate egale cu 1?

**7.** a) Câte coduri cu 5 caractere conțin exact 3 cifre și 2 majuscule se pot tasta pe o tastatură engleză? Exemple: $01DD0$, $A21Z0$, $999XX$.

b) Câte coduri cu 5 caractere conțin exact 3 cifre distincte 2 câte 2 și 2 majuscule diferite se pot tasta pe o tastatură engleză? Exemplu: $A21Z0$.

**8.** 7 căluşari, $c_1, c_2, \ldots, c_7$, se aşează în cerc, într-o ordine aleatoare. Care este probabilitatea ca $c_1$ şi $c_7$ să fie vecini?