$$(\ln(f))' = \frac{f'}{f}\ ,\ \left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}\ ,\ \ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)\ \ \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$

Formule de l'intégration par parties : $\displaystyle\int_a^b u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x)u(x)\,dx$

Pour $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$; on a :

$$f'(x) = \frac{1 + \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{x + \sqrt{x^2+2}} \tag{1}$$
$$= \frac{\dfrac{2\sqrt{x^2+2} + 2x}{2\sqrt{x^2+2}}}{x + \sqrt{x^2+2}} \tag{2}$$
$$= \frac{2\left(\sqrt{x^2+2} + x\right)}{2\sqrt{x^2+2}\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)} \tag{3}$$
$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} \tag{4}$$

Par conséquent, pour $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx$ on en déduit que :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}\,dx = \int_0^1 f'(x)\,dx \tag{5}$$
$$= \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)\right]_0^1 \tag{6}$$
$$= \ln(1+\sqrt{3}) - \ln(\sqrt{2}) \tag{7}$$
$$I = \ln\left(\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right) = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right) \tag{8}$$

La moyenne de la fonction f définie sur $[0;1]$ par $x \mapsto \ln\left(x + \sqrt{x^2+2}\right)$ serait :

$$\frac{f(0)+f(1)}{2} = \frac{\ln\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{3})}{2} = \frac{\ln(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{2}$$

De plus :

En intégrant par parties $K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$ on a :

$$K = \left[x\sqrt{x^2+2}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}\,dx \tag{9}$$

$$K = \sqrt{3} - J \tag{10}$$

En posant $K = K$, on obtient des questions précédentes :

$$J + 2I = \sqrt{3} - J \tag{11}$$

$$2J + 2I = \sqrt{3} \tag{12}$$

$$J + I = \frac{\sqrt{3}}{2} \tag{13}$$

Comme $I = \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$, on peut conclure que :

$$J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$$

Donc $K = \sqrt{3} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\right)$