On sait que : $\forall n \in \mathbf{N},\ 0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$

Or $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ et $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Comme $\lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, on en déduit que d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx = \lim_{n\to\infty} I_n = 0$$