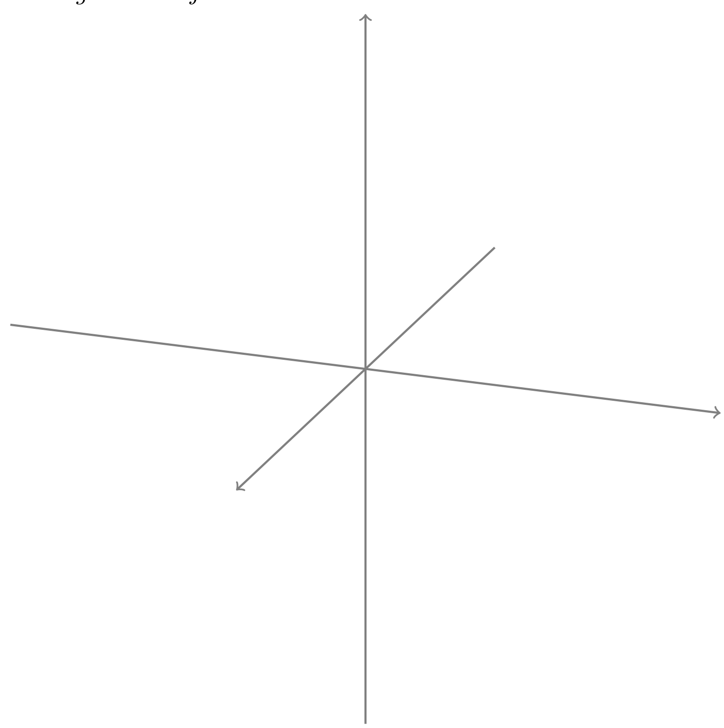
TAREA 9 AMD. PRODUCTO ESCALAR

MANUEL BERNAL HERNANDEZ, GRUPO 2.1

Ejercicio 1. *Para cada una de las rectas dadas, calcula un vector v_1 de la recta y dos vectores v_2 y v_3 perpendiculares a la recta de forma que la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ tenga orientación positiva, normalízalos, píntalos en unos ejes coordenados y dibuja un cuadrado de tamaño 4×4 centrado en el origen con lados paralelos a los vectores v_2 y v_3. Para hacer los dibujos usa los siguientes ejes coordenados:*



(1) *La recta r dada por* $\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$

(2) *La recta r dada por $x = 2\lambda, y = 0, z = -\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Solución

(1) La recta r dada por $\begin{cases} 2x + 2y - z = 0 \\ x - y + 3z = 0 \end{cases}$

```
r1=vector(RR,[2,2,-1])
r2=vector(RR,[1,-1,3])
v1 = r1.cross_product(r2)
v2 = r1
v3 = v1.cross_product(v2)
u1 = v1/v1.norm()
u2 = v2/v2.norm()
u3 = v3/v3.norm()
```

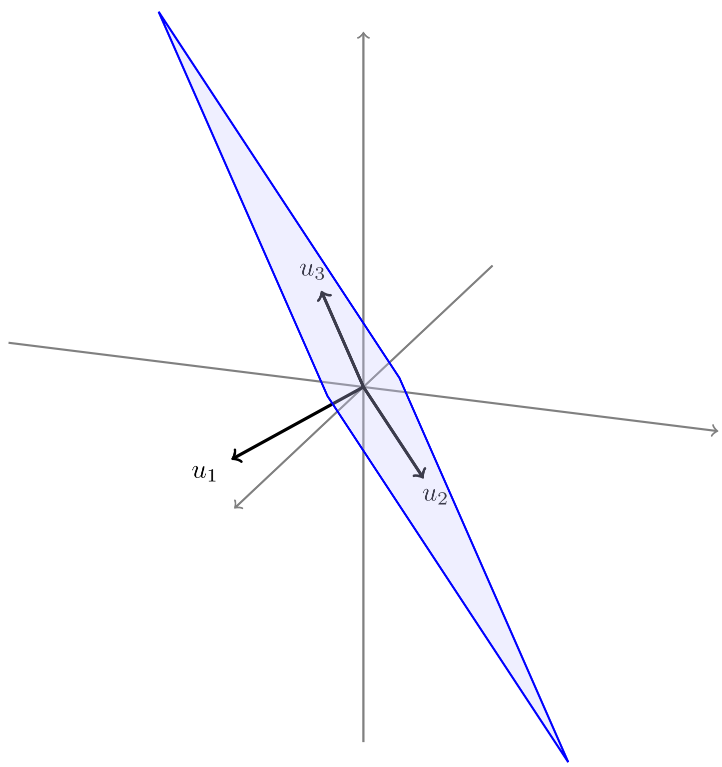
Para hallar el vector de la recta, hacemos el producto vectorial de los dos vectores que nos da su ecuación. Esto debido a que estos son perpendiculares entre sí y a la recta, por lo que el resultado del producto vectorial nos dará el resultado que buscamos.

Para hallar el primer vector perpendicular a la recta, simplemente cogemos uno de los dos vectores de las ecuaciones de la recta. El segundo y último vector perpendicular será el resultado de hacer el producto vectorial entre el vector perteneciente a la recta, y el vector perpendicular que acabamos de calcular.

Posteriormente, normalizamos los vectores dividiéndolos por su norma. Estos vectores forman la base B que nos pide el enunciado, cuya orientación efectivamente es positiva porque su determinante es 1.00000000000000.

```
A = -2*u2 + -2*u3
B = -2*u2 + +2*u3
C = +2*u2 + +2*u3
D = +2*u2 + -2*u3
```

Ahora, dibujamos el cuadrado en el eje de coordenadas, expresando cada uno de sus puntos como combinación lineal de u_1 y u_2 para que sus lados sean paralelos a sus respectivos vectores:



(2) La recta r dada por $x = 2\lambda, y = 0, z = -\lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

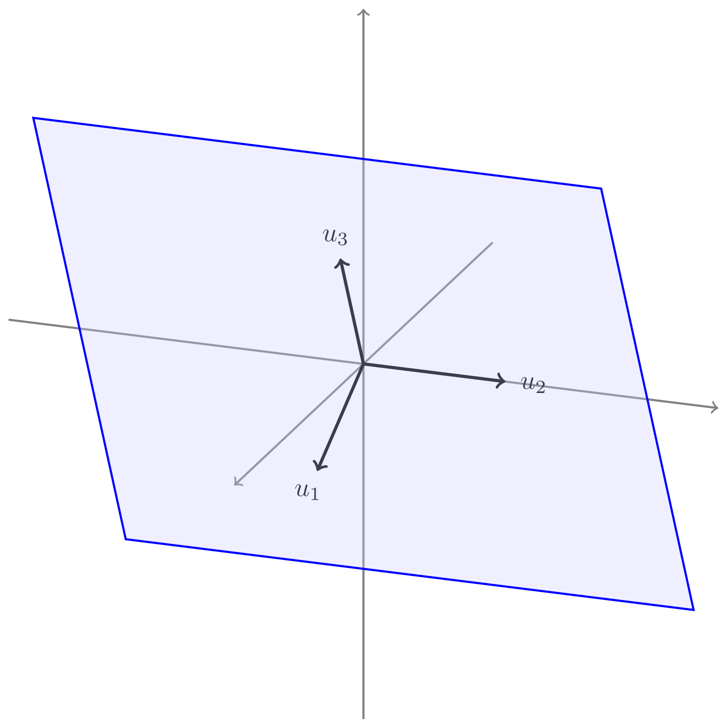
```
v1=vector(RR,[2,0,-1])
v2=vector(RR,[0,2,0])
v3 = v1.cross_product(v2)
u1 = v1/v1.norm()
u2 = v2/v2.norm()
u3 = v3/v3.norm()
```

Como esta recta nos la dan en forma paramétrica, un vector perteneciente a la recta tendrá las componentes de los coeficientes de λ en cada coordenada. Para los vectores perpendiculares, simplemente intercambiamos el primer y segundo elementos del otro vector, ponemos el segundo en negativo para que el determinante sea positivo, y ponemos 0 en la tercera coordinada. El otro vector perpendicular será el producto vectorial de estos dos vectores.

Posteriormente, normalizamos los vectores dividiéndolos por su norma. Estos vectores forman la base B que nos pide el enunciado, cuya orientación efectivamente es positiva porque su determinante es 1.00000000000000.

```
A = -2*u2 + -2*u3
B = -2*u2 + +2*u3
C = +2*u2 + +2*u3
D = +2*u2 + -2*u3
```

Ahora, dibujamos el cuadrado en el eje de coordenadas, expresando cada uno de sus puntos como combinación lineal de u_1 y u_2 para que sus lados sean paralelos a sus respectivos vectores:



Ejercicio 2. *Dado el espacio $W = N(H) \leq \mathbb{R}^5$, donde*

H=matrix(QQ,[[-1,-1,1,0,2],[2,0,1,1,0]])

$$H = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calcula una base de W y obtén una base ortonormal a partir de ella utilizando el método de Gram-Schmidt.

Solución:

Comenzamos calculando la base de W. Como nos dan el espacio en su forma implícita, trasponemos H, la ampliamos mediante la identidad y reducimos:

```
H=matrix(QQ,[[-1,-1,1,0,2],[2,0,1,1,0]])
HT1 = block_matrix([[H.T,1]])
HT1R = copy(HT1.echelon_form())
HT1R.subdivide(2,2)
B = HT1R.subdivision(1,1).T
```

$$\left[\begin{array}{cc|ccccc} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

De este modo, si trasponemos lo que queda a la derecha de los ceros, nos queda una base de W. Podemos comprobarlo reduciéndola y viendo que es linealmente independiente:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para que la base sea ortgonal, aplicamos Gram-Schmidt en los vectores que componen las columnas de B:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

```
v1 = B.column(0)
v2 = B.column(1)
v3 = B.column(2)
w1 = v1
w2 = v2 - ((v2*w1)/(w1*w1)) * w1
w3 = v3 - ((v3*w2)/(w2*w2)) * w2 - ((v3*w1)/(w1*w1)) * w1
```

$$w_1 = v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$w_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} \cdot w_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{21} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{2}{21} \\ \frac{10}{21} \end{bmatrix}$$

$$w_3 = v_3 - \frac{v_3 \cdot w_2}{w_2 \cdot w_2} \cdot w_2 - \frac{v_3 \cdot w_1}{w_1 \cdot w_1} \cdot w_1 = \begin{bmatrix} -\frac{9}{26} \\ \frac{7}{26} \\ 1 \\ -\frac{4}{13} \\ -\frac{7}{13} \end{bmatrix}$$

Posteriormente, normalizamos los vectores:

```
u1 = w1/w1.norm()
u2 = w2/w2.norm()
u3 = w3/w3.norm()
B2 = column_matrix([u1,u2,u3])
```

De este modo, finalmente nos queda una base ortonormal de W. Podemos comprobar que es una base reduciendo y viendo que es linealmente independiente:

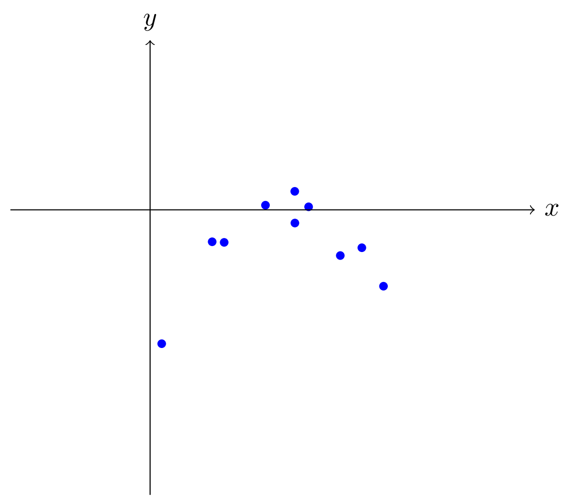
$$\begin{bmatrix} \frac{2}{21}\sqrt{21} & -\frac{1}{26}\sqrt{\frac{26}{21}} & -\frac{9}{41}\sqrt{\frac{41}{26}} \\ 0 & \frac{21}{26}\sqrt{\frac{26}{21}} & \frac{7}{41}\sqrt{\frac{41}{26}} \\ 0 & 0 & \frac{26}{41}\sqrt{\frac{41}{26}} \\ -\frac{4}{21}\sqrt{21} & \frac{1}{13}\sqrt{\frac{26}{21}} & -\frac{8}{41}\sqrt{\frac{41}{26}} \\ \frac{1}{21}\sqrt{21} & \frac{5}{13}\sqrt{\frac{26}{21}} & -\frac{14}{41}\sqrt{\frac{41}{26}} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 3. *Calcula la parábola que mejor se ajusta a los datos que se proporcionan a continuación:*

```
XY = matrix(RR,[[ 0.9791609077659043 ,  -0.430715356970999 ],
                [ 1.5250083079649113 ,  0.061165657369748695 ],
                [ 2.7989027102112827 ,  -0.5015548718775755 ],
                [ 1.912158417289881 ,  0.24440901271557722 ],
                [ 0.8205530309864537 ,  -0.42261180235811696 ],
                [ 1.914008178794904 ,  -0.17482280182386326 ],
                [ 3.0850261801730925 ,  -1.0104522969296543 ],
                [ 0.15356067616723457 ,  -1.7711019287922931 ],
                [ 2.0952887890653016 ,  0.03975209722972092 ],
                [ 2.514022662217597 ,  -0.6049726172196987 ]])
```

```
X = XY.column(0)
Y = XY.column(1)
```

La representación gráfica de estos puntos es:



Solución:

```
B = matrix([[1 for x in X],
          [x for x in X],
          [x^2 for x in X]]).T
C = (B.T*B)^-1*B.T*Y
```

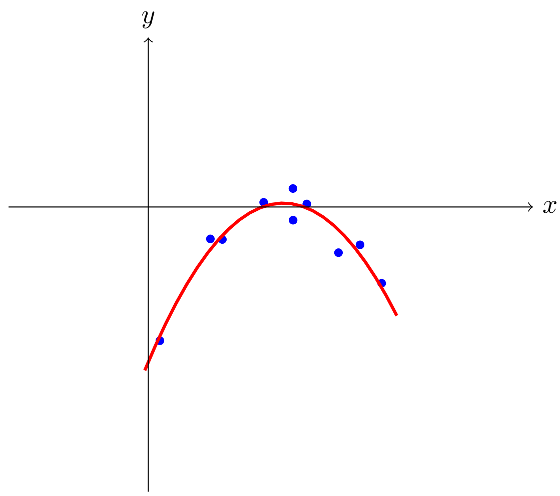
Queremos construír una solución de la forma $y = c_0 + c_1x + c_2x^2$. Para ello, construimos la matriz que tiene como columnas 1, x y x^2:

$$B = \begin{bmatrix} 1.00000000000000 & 0.979160907765904 & 0.958756083296950 \\ 1.00000000000000 & 1.52500830796491 & 2.32565033936200 \\ 1.00000000000000 & 2.79890271021128 & 7.83385638122806 \\ 1.00000000000000 & 1.91215841728988 & 3.65634981281254 \\ 1.00000000000000 & 0.820553030986454 & 0.673307276661056 \\ 1.00000000000000 & 1.91400817879490 & 3.66342730849378 \\ 1.00000000000000 & 3.08502618017309 & 9.51738653235338 \\ 1.00000000000000 & 0.153560676167235 & 0.0235808812649383 \\ 1.00000000000000 & 2.09528878906530 & 4.39023510958274 \\ 1.00000000000000 & 2.51402266221760 & 6.32030994614365 \end{bmatrix}$$

Si creamos la matriz incógnita C con la columna de variables c_0, c_1 y c_2, nos queda un sistema de ecuaciones tal que $BC = Y$, al cual le podemos aplicar mínimos cuadrados, quedándonos que $C = (B^TB)^{-1}B^TY$. Así, conseguimos la matriz C:

$$C = (-2.05294994019640, 2.35942774111745, -0.661378998099877)$$

De este modo, y finalmente, representamos gráficamente la solución:



y
x