

TAREA 3. ÁLGEBRA Y MATEMÁTICA DISCRETA

MANUEL BERNAL HERNÁNDEZ, GRUPO 2.1

Ejercicio 1. *Calcula los valores de n enteros que cumplen simultáneamente las siguientes tres relaciones:*

$$15n - 1 \equiv 9 \pmod{125}$$

$$n \equiv 18 \pmod{64}$$

$$37n \equiv 58 \pmod{100}$$

Solución:

```
A = column_matrix(ZZ, [15, 125])
B = matrix(ZZ, [[1, 0], [0, 1]])
AB = block_matrix([ [A, B] ])
ABr = AB.echelon_form()
```

```
C = column_matrix(ZZ, [-25, 64])
D = matrix(ZZ, [[1, 0], [0, 1]])
CD = block_matrix([ [C, D] ])
CDr = CD.echelon_form()
CDr2 = CDr[:, 1:3]
CDr2t = CDr2.T
Pol.<t> = ZZ[]
E = column_matrix(Pol, [16, t])
D = CDr2t * E
```

Simplificamos la ecuación y se queda

$$15n = 10 \pmod{125}$$

Para eliminar el 15 hay que comprobar que sea invertible en modulo 125, es decir que su maximo comun divisor sea 1.

$$\left(\begin{array}{c|cc} 15 & 1 & 0 \\ 125 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 5 & 17 & -2 \\ 0 & 25 & -3 \end{array} \right)$$

Observamos que el maximo comun divisor es 5, por lo que dividimos ambas partes de la ecuacion entre 5.

$$\frac{15n}{5} = \frac{10 \pmod{125}}{5} \rightarrow 3n = 2 \pmod{25} \rightarrow n = 2 * 3^{-1} \pmod{25} \rightarrow n = 2 * 17 \pmod{25} \rightarrow n = 9 \pmod{25}$$

En la tercera ecuación

$$37n = 58 \pmod{100}$$

Simplificamos y despejamos

$$n = 58 * 37^{-1} \pmod{100} \rightarrow n = 58 * 73 \pmod{100} \rightarrow n = 46 \pmod{100}$$

Ahora igualamos las ecuaciones 2 a 2.

Igualando la primera y la segunda ecuacion nos da

$$\begin{aligned}
 n &= 9 \pmod{25} = 18 \pmod{64} \\
 n &= 9 + 25x_1 \\
 n &= 18 + 64x_2 \\
 -25x_1 + 64x_2 &= 34 - 18 = 16
 \end{aligned}$$

Reducimos por filas

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -25 & 1 & 0 & 0 \\ 64 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc} 1 & 23 & 9 \\ 0 & 64 & 25 \end{array} \right)$$

Eso es igual a

$$\left(\begin{array}{cc} 23 & 64 \\ 9 & 25 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} 16 \\ t \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{c} 64t + 368 \\ 25t + 144 \end{array} \right) = 64$$

Sustituimos

$$\begin{aligned}
 n &= 34 + 25(64 * t + 368) = 1600 * t + 9234 \\
 n &= 18 + 64(25 * t + 144) = 1600 * t + 9234
 \end{aligned}$$

El resultado final es

$$n = 9234 \pmod{1600} = 1234 \pmod{1600}$$