

TAREA 4. INVERSAS LATERALES

MANUEL BERNAL HERNÁNDEZ, GRUPO 2.1

Ejercicio 1. *Calcula todas las inversas laterales por la izquierda de la matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

definida sobre el cuerpo de los números racionales.

*¿Existe alguna inversa por la izquierda de B que tenga la forma $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \end{pmatrix}$?*

Solución:

```
B = matrix(QQ, [[4,-1,2],[1,-1,-2],[2,-1,0],[-1,0,-2],[0,0,1]])
B1 = block_matrix([[B,1]])
B1R = B1.echelon_form()
B1R2 = copy(B1R)
B1R2.subdivide(3,3)
A = B1R2.subdivision(0,1)
H = B1R2.subdivision(1,1)
Pol.<a1,a2,b1,b2,c1,c2> = QQ[]
C = matrix(Pol, [[a1,a2],[b1,b2],[c1,c2]])
Sol = A + C*H
```

```
D = Sol[0,:]
E = matrix(QQ, [[1, 1, -2, 0, 0]])
a1 = 1
a2 = 1
F = matrix(Pol, [[a1,a2],[b1,b2],[c1,c2]])
Sol2 = A + F*H
```

Ampliamos la matriz con la matriz identidad a la derecha y reducimos por filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 4 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

Para tener una inversa por la izquierda hay que hacer que todas las columnas sean pivote. Entonces tendremos una matriz reducida con la siguiente estructura:

$$\left[\begin{array}{c|c} I & A \\ \hline 0 & H \end{array} \right]$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

El teorema fundamental de la reducción por filas nos dice que

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$H \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A vemos que es una posible inversa por la izquierda, pero hay muchas, cualquiera que podamos poner de la forma $A + CH$ con C cualquier matriz de parámetros libres cumplirá que

$$(A + CH)B = AB + CHB = I + C0 = I.$$

Como A tiene tamaño 3×5 y H tiene tamaño 2×5 el tamaño de la matriz C debe ser 3×2 .

$$\begin{aligned} \text{Solucion} = A + CH &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & -a_1 - a_2 & 2a_1 - a_2 - 1 & 2a_1 - 2 \\ b_1 & b_2 & -b_1 - b_2 - 1 & 2b_1 - b_2 - 2 & 2b_1 - 4 \\ c_1 & c_2 & -c_1 - c_2 & 2c_1 - c_2 & 2c_1 + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde los a_i, b_i, c_i son 6 parámetros libres en \mathbb{Q} .

Para encontrar una inversa por la izquierda de B con la forma requerida, necesitamos encontrar valores para los parámetros libres en la solución general de inversas por la izquierda que satisfagan la condición dada. La primera fila de la solución general es:

$$(a_1 \quad a_2 \quad -a_1 - a_2 \quad 2a_1 - a_2 - 1 \quad 2a_1 - 2)$$

Si queremos que esta fila sea igual a

$$(1 \quad 1 \quad -2 \quad 0 \quad 0)$$

entonces necesitamos resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= 1 \\ -a_1 - a_2 &= -2 \\ 2a_1 - a_2 - 1 &= 0 \\ 2a_2 - 2 &= 0 \end{aligned}$$

La solución a este sistema de ecuaciones es $a_1=1$ y $a_2=1$. Por lo tanto, existe una inversa por la izquierda de B que tiene la forma requerida. Específicamente, la inversa por la izquierda es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & -b_1 - b_2 - 1 & 2b_1 - b_2 - 2 & 2b_1 - 4 \\ c_1 & c_2 & -c_1 - c_2 & 2c_1 - c_2 & 2c_1 + 1 \end{pmatrix}$$

donde b_1, b_2, c_1 y c_2 son 4 parámetros libres en \mathbb{Q} .