PRÁCTICA 1. ÁLGEBRA Y MATEMÁTICA DISCRETA

ESCRIBE TU NOMBRE Y GRUPO

Ejercicio 1. *Introduce las siguientes matrices sobre el cuerpo de los números racionales* $\mathbb{Q}$ *usando un* `sageblock`*:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{3} \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

De los siguientes productos, determina cuales se pueden hacer y cuales no. En el caso de los que se puedan hacer, calcúlalos usando `sage` *y pon el resultado en el archivo de la práctica.*

$$AB, A^tB, AB^t, A^tB^t, BA, B^tA, BA^t, B^tA^t$$

Solución:

```
A = matrix(QQ, [ [1, 1/2, -1], [2, 0, 1/3] ])
B = matrix(QQ, [ [-1, 2, 0], [1/2, 0, -1/3], [2, 0, -1] ])
```

$$AB = \begin{pmatrix} -\frac{11}{4} & 2 & \frac{5}{6} \\ -\frac{4}{3} & 4 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$AB^t = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{6} & 3 \\ -2 & \frac{8}{9} & \frac{11}{3} \end{pmatrix}$$

La operación A^tB no se puede realizar

Ejercicio 2. *Vamos a construir la matriz*

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_1 & \beta_1 \end{array}\right)$$

suponiendo que tenemos definida en `sage` *la matriz*

```
A = matrix(QQ,[[1,1/2,0,2,1,2],[0,0,1,3,-1,0]])
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

y las variables $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ *son variables libres que operan con los números racionales sobre los que está definida la matriz* A*. Aunque hay varias formas de hacerlo, en este ejercicio te pedimos que lo hagas siguiendo los pasos que se te indican:*

Vamos a construir la matriz por bloques utilizando `block_matrix`*. Para ello nos damos cuenta de que los dos bloques de arriba (el rojo y el azul) están juntos en la matriz* A*.*

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_1 & \beta_1 \end{array}\right)$$

Utilizaremos `subdivide` *para partir la matriz* A *que nos han dado en las dos partes (la roja y la azul) que llamaremos respectivamente* `A1` *y* `A2` *y que sacaremos una vez subdividida la matriz* A *usando* `subdivision`*.*

Para construir el bloque verde, que llamaremos `B1` *vamos a construir una matriz indicando únicamente su dimensión para que nos la llene con ceros y asignaremos* 1 *a las dos posiciones que tienen este valor.*

Para construir la parte amarilla, que llamaremos `B2` *vamos a construir el anillo de polinomios con variables* $\alpha_0, \alpha_1, \beta_0, \beta_1$ *sobre el cuerpo* $\mathbb{Q}$ *y construiremos la matriz* `B2` *sobre este anillo de polinomios.*

Finalmente, uniremos las cuatro matrices que hemos construido usando `block_matrix`*.*

Solución:

```
A = matrix(QQ, [[1,1/2,0,2,1,2], [0,0,1,3,-1,0]])
A.subdivide([], 4)
A1 = A.subdivision(0, 0)
A2 = A.subdivision(0, 1)
B = matrix(QQ, 2, 4)
B[0,1] = 1
B[1,3] = 1
P.<alpha0, alpha1, beta0, beta1> = QQ[]
B2 = matrix(P, [ [alpha0, beta0], [alpha1, beta1] ])
M = block_matrix([ [A1, A2], [B, B2] ])
```

Las submatrices que me piden son

$$A1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, A2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B2 = \begin{pmatrix} \alpha_0 & \beta_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix}$$

La matriz resultante es

$$M = \left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & \alpha_0 & \beta_0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha_1 & \beta_1 \end{array}\right)$$

Ejercicio 3. *Construye la matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 & 1 \\ 10 & 7 & -1 & 0 \\ 26 & 14 & 17 & -8 \\ 1 & 3 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

sobre los números racionales. Amplíala con la matriz identidad usando `block_matrix` *y reduce la matriz ampliada por filas usando* `echelon_form`*. La parte que queda a la derecha de la matriz reducida es lo que se llama la matriz de paso. Llama P a esta matriz de paso y comprueba que si multiplicas P por A obtienes la matriz reducida por filas de la matriz A. En este caso, como la matriz reducida es la matriz identidad, la matriz de paso es la inversa de A. Comprueba que esto es cierto imprimiendo la matriz inversa de A usando* `$$\sage{A^-1}$$`*.*

Solución:

```
A = matrix(QQ, [[5, 4, -3, 1], [10, 7, -1, 0], [26, 14, 17, -8], [1, 3, -10, 4]])
A1 = block_matrix([[A, 1]])
R = A1.echelon_form()
P = R.subdivision(0, 1)
```

La matriz ampliada es

$$A1 = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -3 & 1 \\ 10 & 7 & -1 & 0 \\ 26 & 14 & 17 & -8 \\ 1 & 3 & -10 & 4 \end{pmatrix}$$

, La matriz reducida por filas es

$$R = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -8 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -16 & 16 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -35 & 39 & -8 & -7 \end{array}\right)$$

La matriz de paso es

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -3 \\ -8 & 1 & 1 & 4 \\ -16 & 16 & -3 & -2 \\ -35 & 39 & -8 & -7 \end{pmatrix}$$

Como se puede comprobar

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -3 \\ -8 & 1 & 1 & 4 \\ -16 & 16 & -3 & -2 \\ -35 & 39 & -8 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & -3 \\ -8 & 1 & 1 & 4 \\ -16 & 16 & -3 & -2 \\ -35 & 39 & -8 & -7 \end{pmatrix} = A^{-1}$$

Ejercicio 4. *Consideremos el sistema de ecuaciones sobre $\mathbb{Q}$ dado por*

$$3x_1 + 2x_2 - x_3 = 3$$
$$-x_1 + x_2 + 2x_3 = 1$$
$$x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 2a + 1$$

donde a es un parámetro libre.

(1) *Construye la matriz de los coeficientes sobre el anillo de los polinomios sobre $\mathbb{Q}$ con variable a, así como la matriz columna de los términos independientes sobre el mismo anillo de polinomios.*
(2) *Construye la matriz ampliada del sistema utilizando* `block_matrix`.
(3) *Determina para qué valores de a el sistema tiene solución mediante una reducción de matrices.*
(4) *Para el valor o valores en los cuales el sistema sea compatible (tenga solución) realiza la reducción completa de la matriz ampliada y determina todas las soluciones del sistema.*

Solución:

```
A = matrix(QQ, [ [3, 2, -1], [-1, 1, 2], [1, 4, 3] ])
P.<a> = QQ[]
B = matrix(P, [[3], [1], [2*a+1]])
AB = block_matrix([ [A, B] ])
C = AB.echelon_form()
C1 = C(a=2)
C2 = C1.echelon_form()
```

Hay que reducir la matriz ampliada del sistema y reducirla por filas

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 2a+1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2a-4 \end{array}\right)$$

Se deduce que el parámetro a tiene que valer 2 para que el sistema sea compatible. Sustituimos su valor y seguimos reduciendo.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & \frac{5}{3} & \frac{5}{3} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{6}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esto nos dice que $x_1 - x_3 = \frac{1}{5}$ y que $x_2 + x_3 = \frac{6}{5}$.
Tomando x_3 como parametro libre α tenemos que las soluciones son $x_1 = \alpha + \frac{1}{5}$, $x_2 = -\alpha + \frac{6}{5}$, $x_3 = \alpha$
Siendo α cualquier número racional.