PRIMER PARCIAL DE ÁLGEBRA Y MATEMÁTICA DISCRETA
FACULTAD DE INFORMÁTICA
VIERNES 3 DE NOVIEMBRE DE 2023 - 8:30 – 10:30

ESCRIBE TU NOMBRE Y GRUPO

Ejercicio 1 (1 punto). *Un distribuidor de equipos informáticos efectúa un pedido de entre* 1000 *a* 1500 *equipos a un fabricante. Este los envia en contenedores con capacidad para* 68 *equipos cada uno. El distribuidor los reparte a los diferentes puntos de venta en furgonetas con capacidad para* 20 *equipos. Sabiendo que todos los contenedores y las furgonetas estaban al máximo de su capacidad y que han quedando* 32 *equipos sin repartir en el almacén. ¿ Cuántos equipos pidió el distribuidor a la fábrica ?*

Solución:

Llamaremos x al número de contenedores e y al número de furgonetas utilizadas en el proceso. El número de equipos recibidos en los contenedores es $68x$ y los que han salido del almacén en las furgonetas es $20y$ por lo que tenemos

$$68x - 20y = 32$$

Para resolver esta ecuación diofántica procedemos del siguiente modo:

```
A = column_matrix(ZZ,[68,-20])
M = block_matrix([[A,1]])
R = copy(M.echelon_form())
R.subdivide([],1)
P = R.subdivision(0,1)
```

Tomamos la matriz $\begin{pmatrix} 68 \\ -20 \end{pmatrix}$ formada por los coeficientes de la ecuación y la ampliamos con la matriz identidad. Reducimos la matriz y sacamos la matriz de paso

$$\left(\begin{array}{r|rr} 68 & 1 & 0 \\ -20 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{r|rr} 4 & 3 & 10 \\ 0 & 5 & 17 \end{array}\right) \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 5 & 17 \end{pmatrix}$$

De ahí podemos ver que el máximo común divisor de los coeficientes es 4 que divide al término independiente que es 32 por lo que la ecuación tendrá solución. Para obtener las soluciones usamos las relaciones que nos da el teorema fundamental de la reducción por filas:

$$68 \cdot 3 + (-20) \cdot 10 = 4$$
$$68 \cdot 5 + (-20) \cdot 17 = 0$$

Multiplicando la primera relación por 8 y la segunda por un t cualquiera tenemos que

$$68 \cdot 3 \cdot 8 + (-20) \cdot 10 \cdot 8 = 32$$
$$68 \cdot 5 \cdot t + (-20) \cdot 17 \cdot t = 0$$

y de ahí, sumando obtenemos las soluciones

$$x = 24 + 5t \quad y = 80 + 17t$$

El número total de equipos distribidos es $68x = 68(24 + 5t) = 340t + 1632$. Entonces tenemos que

$$1000 < 340t + 1632 < 1500$$

o lo que es lo mismo

$$-632 = 1000 - 1632 < 340t < 1500 - 1632 = -132$$

y por lo tanto

$$-1.85882352941176 = -632/340 < t < -132/340 = -0.388235294117647$$

y por lo tanto $t = -1$ y $68x = 1632 - 340 = 1292$.

Ejercicio 2 (1 punto). *Sea $U = N(H)$ y $V = C(A)$. Determina unas ecuaciones implícitas del espacio $U + V$ sobre $\mathbb{Z}_{19}$, siendo*

```
A = matrix(Zmod(19),[[1,8,14,0,18],[2,9,15,16,4]]).T
H = matrix(Zmod(19),[[17,6,15,5,3],[13,6,12,4,0]])
```

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 8 & 9 \\ 14 & 15 \\ 0 & 16 \\ 18 & 4 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 17 & 6 & 15 & 5 & 3 \\ 13 & 6 & 12 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución:

Empecemos calculando las ecuaciones paramétricas del espacio U. Para ello reducimos la matriz H^T ampliada con la matriz identidad:

```
M = block_matrix([[H.T,1]])
R = copy(M.echelon_form())
R.subdivide(2,2)
B = R.subdivision(1,1).T
BA = block_matrix([[B,A]])
MM = block_matrix([[BA,1]])
RR = copy(MM.echelon_form())
RR.subdivide(4,5)
HH = RR.subdivision(1,1)
```

$$\left(\begin{array}{rr|rrrrr} 17 & 13 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & 12 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 5 & 17 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 11 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 16 & 0 \end{array}\right)$$

La base de U será $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 11 & 8 & 16 \\ 14 & 10 & 0 \end{pmatrix}$. Si juntamos esa matriz B con la A que genera el espacio V obtenemos un conjunto generador de $U + V$.

$$U + V = C\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & 15 \\ 11 & 8 & 16 & 0 & 16 \\ 14 & 10 & 0 & 18 & 4 \end{array}\right)$$

Ampliamos la matriz con la identidad y reducimos para obtener las ecuaciones implícitas

$$\left(\begin{array}{rrrrr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 8 & 9 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 14 & 15 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 8 & 16 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 14 & 10 & 0 & 18 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{rrrrr|rrrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 8 & 7 & 15 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 11 & 18 & 6 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 8 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 13 & 12 & 4 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 17 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

Las ecuaciones implícitas del espacio suma vendrán dadas por

$$U + V = N\begin{pmatrix} 1 & 17 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 3 (1 punto). *Resuelve la siguiente ecuación matricial determinado todas las matrices X (si existen) tales que $AX = B$ sobre el cuerpo $\mathbb{Z}_5$ siendo*

```
A = matrix(Zmod(5),[[2, 4, 1, 4, 1],
                    [4, 1, 1, 4, 1],
                    [1, 4, 0, 4, 1],
```

```
                          [3, 3, 1, 3, 2]])
B = matrix(Zmod(5),[[4,0],[0,4],[4,1],[3,1]])
```

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \\ 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Construimos la matriz ampliada del sistema y reducimos

```
AB = block_matrix([[A,B]])
R = AB.echelon_form()
R1 = R[:3,:]
R1.subdivide([],5)
```

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 2 & 4 & 1 & 4 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 & 2 & 3 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Eliminamos la fila de ceros

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Para poder completar el proceso tendremos que introducir dos filas con los pivotes que nos faltan y los parámetros libres que en este caso serán 4.

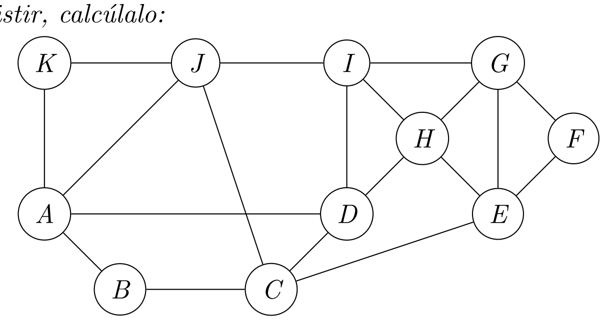
```
Pivotes = matrix(Zmod(5),[[0,0,0,1,0],[0,0,0,0,1]])
Pol2.<a,b,c,d> = PolynomialRing(Zmod(5))
Parametros = matrix(Pol2,[[a,b],[c,d]])
R2 = block_matrix([[R1],[block_matrix([[Pivotes,Parametros]])]])
R2.subdivide(3,5)
R3 = R2.echelon_form()
```

Construimos dicha matriz con los pivotes y los parámetros y reducimos para terminar de despejar los valores de X.

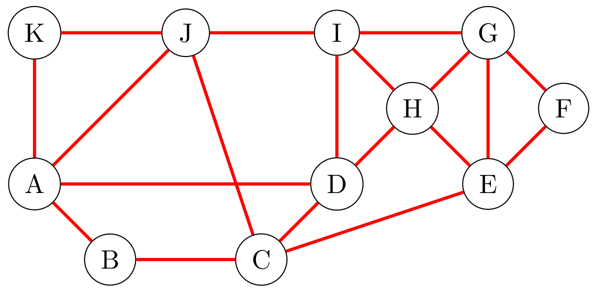
$$\left(\begin{array}{ccccc|cc} 1 & 0 & 0 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 4 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & d \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|rr} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3a+2c+1 & 3b+2d+4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2a+3c+2 & 2b+3d+3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2a+3c+4 & 2b+3d \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & c & d \end{array}\right)$$

y por lo tanto $X = \begin{pmatrix} 3a+2c+1 & 3b+2d+4 \\ 2a+3c+2 & 2b+3d+3 \\ 2a+3c+4 & 2b+3d \\ a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4 (1 punto)**.** *De termina si existe un circuito euleriano que empiece y termine en el vértice D en el siguiente grafo. En caso de existir, calcúlalo:*



Solución:



El ciclo queda

$$(D)--(H)--(G)--(E)--(C)--(B)--(A)--(K)$$
$$--(J)--(I)--(G)--(F)--(E)--(H)--(I)--(D)--(A)--(J)--(C)--(D)$$