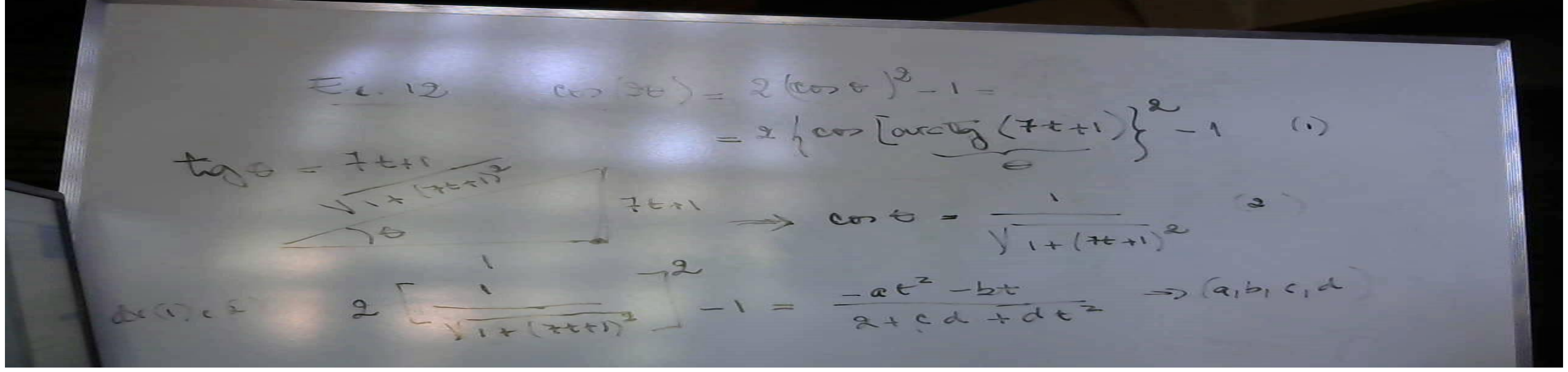


Lista 01 Cálculo 2 2020.2

Aplicações da Integral definida

Comprimento de Arco

Q 1 (a) Seja $y = f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a, b]$ cujo gráfico descreve o arco AB, em que $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$. Mostre que seu comprimento é dado por

$$\ell(f, a, b) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x.$$

(b) Seja $x = g(y)$ uma função contínua no intervalo $[c, d]$ cujo gráfico descreve o arco CD, em que $C(g(c), c)$ e $D(g(d), d)$. Mostre que seu comprimento é dado por

$$\ell(g, c, d) = \int_c^d \sqrt{1 + [g'(y)]^2}\,\mathrm{d}y.$$

Q 2 Em cada caso, dê a expressão em integral (não calcule) que determina o coprimento de arco indicado. Exiba o gráfico de tal arco de curva.

(a) $y = x^2$, $-2 \leq x \leq 4$;
(b) $y = 5 - x^2$, $-2 \leq x \leq 1$;
(c) $xy = 4$, $1 \leq x \leq 4$;
(d) $y = 2x - x^2$, $0 \leq x \leq 2$;
(e) $y = \ln(x)$, $1 \leq x \leq 4$;
(f) $y = 2^{-x}$, $-2 \leq x \leq 1$.

Q 3 Determine o comprimento do arco especificado em cada curva dada.

(a) $y = \ln(1 - x^2)$, $\dfrac{1}{4} \leq x \leq \dfrac{3}{4}$;

(b) $y = \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{1}{8x^2}$, $1 \leq x \leq 2$;

(c) $y = 1 - \ln(\operatorname{sen}(x))$, $\dfrac{\pi}{6} \leq x \leq \dfrac{\pi}{4}$;

(d) $(y - 1)^2 = (x + 1)^3$, $0 \leq x \leq 1$;

(e) $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$, $0 \leq x \leq 1$;

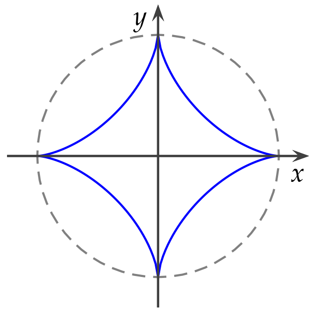
(f) $x = \dfrac{y^3}{3} + \dfrac{1}{4y}$, $1 \leq y \leq 3$;

(g) $y = \dfrac{(2 + x)^{3/2}}{3}$, $0 \leq x \leq 3$;

(h) $y = \dfrac{2(1 + x^2)^{3/2}}{3}$, $0 \leq x \leq 3$.

Q 4 Mostre que a cincunferência de raio r tem comprimento $2\pi r$.

Q 5 A curva dada pela equação $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ chama-se *astróide* ou *hipociclóide* de quatro cúspides em que a indica o raio do círculo que a circunscreve, como ilistra a figura. Determine o comprimento de arco da astróide quando $a = 1$.



Atenção: Veja que esse exercício implicará numa integral imprópria.

Saiba Mais: http://mathworld.wolfram.com/Astroid.html

Wolfram | Alpha

O Wolfram | Alpha é um mecanismo de conhecimento computacional desenvolvido por Stephen Wolfram e sua empresa Wolfram Research. Excelente ferramenta que se demonstra como uma verdadeira fonte dinâmica de conhecimento.

Acesse pelo endereço http://www.wolframalpha.com/ ou baixe seu aplicativo para iOS ou Android.

O comando "**arclength f(x), x=a..b**" determinará a integral $\int_a^b \sqrt{1+[y']^2}\,dx$, que é o comprimento de arco da curva $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ e, além disso, exibirá o gráfico da função destacando o arco indicado.

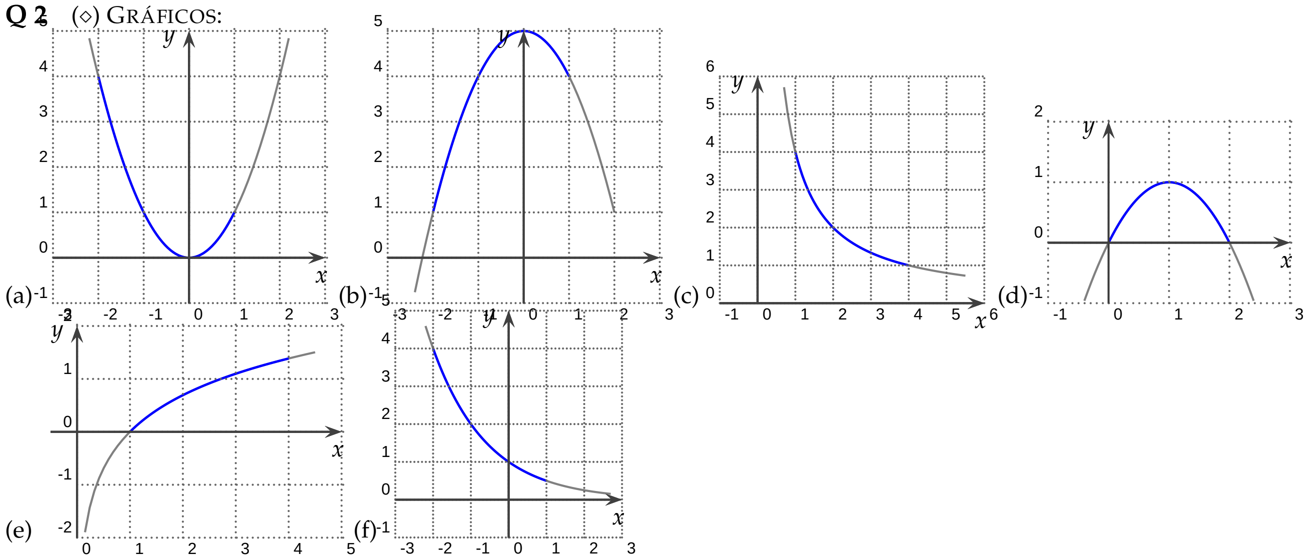
Nota: "comprimento de arco" em inglês é "arc length".

Respostas dos Exercícios

✉ Caso encontre alguma divegência entre a sua resposta e a digitada aqui, não entre em pânico. Veja se alghum ajuste algébrico encerra essa divergência. Ainda persistindo, confira suas contas com auxílio do WolframAlpha pelo endereço http://www.wolframalpha.com/ ou me consulte.
Identificando algum erro nas respostas apresentadas, ficarei muito grato com sua coleboração enviando seu comentário para didisurf@gmail.com ou, preferencialmente, me informe pessoalmente.

☺ **Q 1** Cadê o livro ou os apontamentos?

☺ **Q 2** (◇) GRÁFICOS:



(◇) EXPRESSÕES:
(a) $y' = 2x$, $\int_{-2}^{1} \sqrt{1+4x^2}\,dx$; (b) $y' = -2x$, $\int_{-2}^{1} \sqrt{1+4x^2}\,dx$; (c) $y' = \dfrac{-4}{x^2}$, $\int_{1}^{4} \dfrac{\sqrt{16+x^4}}{x^2}\,dx$; (d) $y' = 2-2x$, $\int_{0}^{2} \sqrt{5-8x+4x^2}\,dx$; (e) $y' = \dfrac{1}{x}$, $\int_{1}^{4} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}\,dx$; (f) $y' = -\ln(2)\cdot 2^{-x}$, $\int_{-2}^{1} \sqrt{1+\ln^2(2)\cdot 2^{-2x}}\,dx$.

☺ **Q 3** (a) $\ell = \ln\left(\dfrac{21}{5}\right) - \dfrac{1}{2}$; (b) $\ell = \dfrac{123}{32}$; (c) $\ell = \ln\left|\dfrac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{3}}\right|$ (d) $\ell = \dfrac{22\sqrt{22}-13\sqrt{13}}{27}$ (e) $\ell = \dfrac{e^2-1}{2e}$; (f) $\ell = \dfrac{53}{6}$; (g) $\ell = 9-2\sqrt{6}$; (h) $\ell = 21$

.

☺ **Q 4** Tome o arco de circunferência $y = \sqrt{r^2-x^2}$, $-r \leq x \leq r$, cuja derivada é $y' = \dfrac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$. Basta então calcular $2\cdot\int_{-r}^{r} \dfrac{1}{\sqrt{r^2-x^2}}\,dx$ que obterá $2\pi r$. (Para obter a primitiva use a substituição trigonométrica $x = r\cdot\mathrm{sen}(\theta)$.)

☺ **Q 5** Pondo $y = \sqrt{(1-\sqrt[3]{x^2})^3}$ basta calcular $4\int_0^1 \sqrt{1+[y']^2}\,dx$. Temos $y' = \dfrac{-\sqrt{1-\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}$ com $\sqrt{1+[y']^2} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Daí $\ell = 4\lim\limits_{A\to 0}\int_A^1 \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = 6$.
Se a for qualquer valor positivo, $\ell = 6a$. Comprove!

Sólido de revolução

Em cada um dos exercícios 1. a 6. considere a região R limitada pelas curvas de equações dadas. Aplicando o método dos discos circulares, calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo E dado.

1. $R:\ y = x^3,\ y = 0,\ x = 2;$
   $E:$ eixo x
2. $R:\ y = \ln x,\ y = 0,\ x = e^2;$
   $E:$ eixo y
3. $R:\ y = x^2,\ x + y = 2;$
   $E:$ eixo x
4. $R:\ y = x^2 - 2x, y = 4 - x^2;$
   $E:$ reta $y = 4$
5. $R: y = \cos x,\quad y = \operatorname{sen} x,\quad 0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2};$
   $E:$ reta $y = -1$
6. $R:\quad x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 1;$
   $E:$ eixo x

Em cada um dos exercícios 7. a 10. considere a região R limitada pelas curvas de equações dadas. Aplicando o método das cascas cilíndricas, calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo E dado.

7. $R:\ y = \dfrac{1}{4 - x^2},\ x = 0,\ x = 1,\ y = 0;$
   $E:$ eixo y
8. $R:\ y = x^2,\ x = y^2;$
   $E:$ reta $x = -2$
9. $R:\ x = y^2,\ x = 0,\ y = 1;$
   $E:$ reta $y = 2$
10. $R:\quad y = \ln x,\ y = 0,\ x = e^2;$
    $E:$ eixo x

Em cada um dos exercícios 11. a 14. considere a região R limitada pelas curvas de equações dadas. Calcule, por dois métodos distintos, o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo E dado.

11. $R:\ y = x^3,\ y = 0,\ x = 2;$
    $E:$ eixo y
12. $R:\ y = \dfrac{x}{2},\ y = \sqrt{x};$
    $E:$ eixo x
13. $R:\ xy = 4,\ x + y = 5;$
    $E:$ $y = 1$
14. $R:\ y = \ln x,\ y = \dfrac{x-1}{e-1};$
    $E:$ eixo x

15. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação da região R em torno do eixo x, pelo método que achar conveniente.

$$R: \begin{cases} y = \dfrac{x}{4} + 1, & \text{se} \quad -4 \leq x < 0 \\ y = \sqrt{1 - x^2}, & \text{se} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ y = 0, & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$$

RESPOSTAS

1) $\dfrac{128\pi}{7}$

2. $\dfrac{\pi\left(3e^4+1\right)}{2}$

3. $\dfrac{72\pi}{5}$

4. 45π

5. $\left(4\sqrt{2}-3\right)\pi$

6. $\dfrac{32\pi}{105}$

7. $\pi(\ln 4-\ln 3)$

8. $\dfrac{49\pi}{30}$

9. $\dfrac{5\pi}{6}$

10. $2\pi\ \left(e^2-1\right)$

11. $\dfrac{64\pi}{5}$

12. $\dfrac{8\pi}{3}$

13. $2\pi(8\ln 2-3)$

14. $\dfrac{\pi(2e-5)}{3}$

15. 2π