Ministério da Educação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná - Campus Curitiba
Departamento Acadêmico de Matemática

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Notas de aula

Professor: Altemir José Borges

Curitiba
Agosto de 2006

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Definição: Chama-se equação diferencial à equação que possui as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis livres.

Exemplos:

a) $\dfrac{dy}{dx} = 3x - 1$

b) $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 7\dfrac{dy}{dx} + 12y = 6e^{5x}$

c) $\left(\dfrac{d^2y}{dx^2}\right)^3 - 5\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^4 = \cos x$

d) $\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3xyz$

Classificação: A equação será chamada de ordinária se as variáveis dependentes forem função de uma única variável livre, caso contrário, serão chamadas de equações diferenciais parciais. As equações dos exemplos a, b e c anteriores são equações diferenciais ordinárias e a equação do exemplo d é uma equação diferencial parcial.

Ordem: Chama-se ordem de uma equação diferencial à ordem da derivada de maior ordem. As equações a) e d) são de primeira ordem, já os exemplos b) e c) são de segunda ordem.

Grau: Grau é o maior expoente da derivada de maior ordem. As equações a, b e d são de primeiro grau e o exemplo c é do terceiro grau.

Solução: É uma função que quando substituída na equação diferencial a transforma numa identidade. As soluções podem ser: solução geral, particular ou singular.

Chama-se solução geral à família de curvas integrais que verifica a equação diferencial e possui constantes arbitrárias.

Chama-se solução particular de uma equação diferencial à solução obtida a partir da solução geral impondo condições iniciais ou de contorno. Geralmente as condições iniciais serão dadas para o instante inicial, já as condições de contorno aparecem quando nas equações de ordem superior os valores da função e de suas derivadas são dadas em pontos distintos. Por exemplo: Resolver a equação diferencial ordinária (EDO) $5y'' + y' = -6x$, sujeita às condições iniciais y(0) =2 e y'(0) = 3, ou resolver a EDO $5y'' + y' = -6x$, sujeita às condições de contorno y(0)=2 e y'(1)=3.

Chama-se solução singular de uma equação diferencial à envoltória[1] da família de curvas integrais.

Teorema da existência: A equação $\dfrac{dy}{dx} = g(x, y)$ admite solução se:

- g(x,y) é contínua e unívoca em uma região D de pontos (x,y).
- $\partial g / \partial y$ existe e é contínua em todos os pontos de D.

[1] Envoltória de uma família de curvas é a uma curva tangente a todas as curvas da família.

Exercícios:

1. Mostre, por substituição, que as seguintes funções são soluções das equações diferenciais dadas:

a) $y = e^{2x}$, $y''-5y'+6y = 0$

b) $y = e^{3x}$, $y''-5y'+6y = 0$

c) $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$, $y''-5y'+6y = 0$

d) $y = Ax + Bx^2 - 3x\ln x$, $x^2y''-2xy'+2y = 3x$

e) $y = Ax + Bx\ln x + 2 + \ln x$, $x^2\dfrac{d^2y}{dx^2} - x\dfrac{dy}{dx} + y = \ln x$

2. Determine uma equação diferencial de menor ordem possível que não contenha constantes arbitrárias e que possua as seguintes soluções:

a) $y = Cx^2$

b) $y = C_1x^2 + C_2$

c) $y = A\,\mathrm{sen}\,2x + B\cos 2x$

d) $y = Ae^x + Be^{2x}$

e) $\ln\dfrac{x}{y} = 1 + Cy$

f) $x^3 = C\left(x^2 - y^2\right)$

g) $\cos ec(x+y) - \cot g(x+y) = x + C$

3. Encontre uma equação diferencial da família de circunferências de raio 5 e de centros sobre o eixo dos x.

4. Nas equações diferenciais a seguir, substitua $y = e^{rx}$ para determinar todos os valores de r para os quais $y = e^{rx}$ é uma solução da equação.

a) $3y' = 2y$

b) $4y'' = y$

c) $y''+y'-2y = 0$

d) $3y''+3y'-4y = 0$

e) $y''-4y'+8y = 0$

5. Nos exercícios seguintes, uma função y=g(x) é descrita por alguma propriedade geométrica de seu gráfico. Escreva uma equação diferencial da forma y’=f(x,y), tendo a função y=g(x) como solução:

a) A inclinação (declividade) do gráfico de g no ponto (x,y) é a soma de x e y.
b) A reta tangente ao gráfico de g no ponto (x,y) intercepta o eixo dos x em (x/2,0).
c) Cada reta normal ao gráfico de g passa pelo ponto (0,1).
d) A reta tangente ao gráfico de g em (x,y) passa pelo ponto (-y,x).

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 1ª ORDEM E 1º GRAU:

Neste estudo vamos dividir as equações de 1ª ordem e 1º grau, para um melhor entendimento, em alguns tipos.

1°TIPO: EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

A equação de 1ª ordem e 1º grau $\mathrm{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$ será de variáveis separáveis se:

- M e N forem funções de apenas uma variável ou constantes.
- M e N forem produtos de fatores de uma só variável.

Resolução:

Para resolvermos tal tipo de equação diferencial, como o próprio nome já diz, deveremos separar a variáveis, isto é, deveremos deixar o coeficiente da diferencial dx como sendo uma função exclusiva da variável x e o coeficiente da diferencial dy como sendo uma função exclusiva da variável y, e então integrarmos cada diferencial.

Exemplo:

Determine a solução geral da equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = 3y\cos x$

Solução:

Primeiramente devemos escrever a EDO na forma de uma diferencial.

$$dy = 3y\cos x dx$$

Vamos determinar um fator integrante[2] que separe as variáveis, que será:

$$FI = \frac{1}{y}$$

Multiplicando ambos os membros da equação pelo fator integrante, vem:

$$\frac{dy}{y} = 3\cos x dx$$

Integrando ambos os membros, teremos:

$$\int \frac{dy}{y} = \int 3\cos x dx$$

$$\ln y = 3senx + C$$

$$y = C_1 e^{3senx}$$

Resolva as seguintes equações diferenciais, por separação de variáveis.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 3x - 1$
2. $ydx - xdy = 0$
3. $xdx - \dfrac{\sqrt{4-x}}{y}dy = 0$
4. $tgx.\sec ydx - tgy.\sec xdy = 0$

[2] Fator integrante é um fator que quando multiplicado em ambos os membros da equação separará as variáveis ou transformará a equação num modelo conhecido.

5. $(x^2-1)\sqrt{1-y^2}\,dx - x^2dy = 0$
6. $(x-1)dy - ydx = 0$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1+y^2}{1+x^2}$
8. $\dfrac{dy}{dx} = \operatorname{sen} 5x$
9. $dx + e^{3x}dy = 0$
10. $(x+1)\dfrac{dy}{dx} = x+6$
11. $xy' = 4y$
12. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{x^2}$
13. $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{x^2y^2}{1+x}$
14. $\dfrac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$
15. $(4y + yx^2)dy - (2x + xy^2)dx = 0$
16. $2y(x+1)dy = xdx$
17. $y\ln x\dfrac{dx}{dy} = \left(\dfrac{y+1}{x}\right)^2$
18. $(e^{-y}+1)\operatorname{sen} x dx = (1+\cos x)dy$, com y(0)=0
19. $ydy = 4x(y^2+1)^{1/2}dx$, com y(0)=1
20. $\dfrac{dx}{dy} = 4(x^2+1)$, com $x(\pi/4) = 1$
21. $x^2y' = y - xy$, com y(-1)=-1
22. $(e^x + e^{-x})\dfrac{dy}{dx} = y^2$
23. $\dfrac{dp}{dt} = p - p^2$
24. $\dfrac{\text{dy}}{\text{dx}} = 1 + \text{x} + \text{y} + \text{xy}$
25. $\dfrac{\text{dy}}{\text{dx}} = \text{xy} + \text{x} - 2\text{y} - 2$, com $\text{y}(0) = 2$
26. $\cos y dx + (1+e^{-x})\operatorname{sen} y dy = 0$, com $y(0) = \pi/4$
27. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10}{x^2+1}$, com y(0)=0
28. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x+y)$ (Dica: Faça x+y=t)
29. $y' = (x+y+1)^2$ (Dica observe o ex. 28)

30. $y' = tg^2(x+y)$ (Dica observe o ex. 28)
31. $y' = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$ (Dica observe o ex. 28)
32. Encontre as soluções singulares da equação $x\sqrt{1-y^2}\,dx = dy$

RESPOSTAS

1. $\frac{3x^2}{2} - x - y = C$
2. $\frac{x}{y} = C$
3. $-24\sqrt{4-\mathrm{x}} + 2\sqrt{(4-\mathrm{x})^3} - 3\ln \mathrm{y} = \mathrm{C}$
4. $-\cos x + \cos y = C$
5. $x + \frac{1}{x} - \operatorname{arcsen} y = C$
6. $y = C(x-1)$
7. $y = \frac{x+C}{1-Cx}$
8. $y = -\frac{1}{5}\cos 5x + C$
9. $y = \frac{1}{3}e^{-3x} + C$
10. $y = x + 5\ln(x+1) + C$
11. $y = Cx^4$
12. $y^{-2} = 2x^{-1} + C$
13. $-3 + 3x\ln(x) = xy^3 + Cx$
14. $-3e^{-2y} = 2e^{3x} + C$
15. $2 + y^2 = C(4 + x^2)$
16. $y^2 = x - \ln(x+1) + C$
17. $\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} = \frac{y^2}{2} + 2y + \ln y + C$
18. $(1+\cos x)(1+e^y) = 4$
19. $\sqrt{y^2+1} = 2x^2 + \sqrt{2}$
20. $x = tg\left(4y - \frac{3\pi}{4}\right)$
21. $xy = e^{-\left(1+\frac{1}{x}\right)}$
22. $-y^{-1} = tg^{-1}(e^x) + C$
23. $\frac{p}{1-p} = Ce^t$
24. $\ln(1+\mathrm{y}) + \mathrm{x} + \frac{\mathrm{x}^2}{2} + \mathrm{C}$
25. $\mathrm{y} = 3\mathrm{e}^{\frac{x^2}{2} - 2x} - 1$
26. $(1+e^x)\sec y = 2\sqrt{2}$
27. $y = 10\,arctgx$
28. $\cos ec(x+y) - \cot(x+y) = x + C$
29. $y = -x - 1 + tg(x + C)$
30. $2y - 2x + \operatorname{sen} 2(x+y) = C$
31. $4(y - 2x + 3) = (x + C)^2$
32. y=1 ou y=-1

2° TIPO: EQUAÇÕES HOMOGÊNEAS

Definição: A função definida por z=f(x,y) será uma função homogênea de grau m se tivermos $f(\lambda x,\lambda y)= \lambda^m f(x,y)$.

Exemplos:

a) $f(x,y)=2x^3+5xy^2$ é homogênea de grau 3, pois $f(\lambda x,\lambda y)=2(\lambda x)^3+5\lambda x.(\lambda y)^2=\lambda^3 f(x,y)$.

b) $f(x,y)=ye^{x/y}$ é homogênea de grau 1, pois $f(\lambda x,\lambda y)=\lambda y e^{\lambda x/\lambda y}=\lambda f(x,y)$.

Definição: A equação M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 será chamada de equação diferencial homogênea se M e N forem funções homogêneas de mesmo grau.

Resolução:

Se Mdx + Ndy = 0 for uma equação diferencial homogênea, então ela poderá ser escrita da forma $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$, onde a mudança de variáveis $t=\frac{y}{x}$ irá separar as variáveis.

Exemplo:

Determine a solução de $(2x^2-3y^2)dx-6xydy=0$, sujeita à condição inicial y(1)=1/3.

Como as funções $M(x,y)=2x^2-3y^2$ e $N(x,y)=-6xy$ são funções homogêneas de grau 2, então a equação dada é homogênea.

Fazendo $t=\frac{y}{x}$, ou y=x.t **(1)** e diferenciando, teremos dy=x.dt+t.dx **(2).** Substituindo **(1)** e **(2)** na equação dada vem:

$$(2x^2-3(xt)^2)dx-6x.xt.(t.dx+x.dt)=0$$

$$x^2(2-3t^2)dx-6x^2.t(t.dx+x.dt)=0$$

$$(2-3t^2-6t^2)dx-6.tx.dt=0$$

$$(2-9t^2)dx-6.tx.dt=0$$

Separando as variáveis, resulta: $\frac{dx}{x}-\frac{6t.dt}{2-9t^2}=0$.

Integrando teremos $3\ln x+\ln(2-9t^2)=C$

Eliminando os logaritmos $x^3.(2-9t^2)=C$

Voltando para as variáveis x e y: $x^3.\left[2-9\left(\frac{y}{x}\right)^2\right]=C$

$$2x^3-9xy^2=C$$

Impondo a condição inicial y(1)=1/3, teremos a solução particular:

$$2x^3-9xy^2=1$$

Resolva as seguintes equações:

1) $(x^2-y^2)dx-2xydy=0$
2) $(2x-y)dx-(x+4y)dy=0$
3) $(x^2+y^2)dx-xydy=0$
4) $(x^2-3y^2)dx+2xydy=0$, com y=1 e x=2
5) $(x-y)dx+xdy=0$
6) $xdx+(y-2x)dy=0$
7) $(y^2+yx)dx-x^2dy=0$
8) $\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{y+x}$
9) $-ydx+(x+\sqrt{xy})dy=0$
10) $2x^2ydx=(3x^3+y^3)dy$
11) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}+\frac{x}{y}$
12) $y\frac{dx}{dy}=x+4ye^{-2x/y}$

13) $\left(y + x\cot g\dfrac{y}{x}\right)dx - xdy = 0$

14) $(x^2 + xy - y^2)dx + xydy = 0$

15) $xy^2\dfrac{dy}{dx} = y^3 - x^3 \quad , \quad y(1) = 2$

16) $2x^2\dfrac{dy}{dx} = 3xy + y^2 \quad , \quad y(1) = -2$

17) $(x + ye^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0 \quad , \quad y(1) = 0$

18) $(y^2 + 3xy)dx = (4x^2 + xy)dy \quad , \quad y(1) = 1$

19) $(x + \sqrt{xy})\dfrac{dy}{dx} + x - y = x^{-1/2}y^{3/2} \quad , \quad y(1) = 1$

20) $y^2dx + (x^2 + xy + y^2)dy = 0 \quad , \quad y(0) = 1$

21) $(x + \sqrt{y^2 - xy})\dfrac{dy}{dx} = y \quad , \quad y\left(\dfrac{1}{2}\right) = 1$

3° TIPO: EQUAÇÕES REDUTÍVEIS A HOMOGÊNEAS OU A EQUAÇÕES DE VARIÁVEIS SEPARÁVEIS

São as equações que mediante determinada troca de variáveis se transformam em equações homogêneas ou em equações de variáveis separáveis.

Exemplos:

Resolver as seguintes equações diferenciais:

a) $(x - 3y - 3)dx - (2x - 6y + 1)dy = 0$

Observemos que a equação acima não é de variáveis separáveis porque temos uma soma das variáveis x e y e também não é homogênea pela existência de termos independentes, portanto deveremos eliminar ou a soma ou o termo independente.

Analisando as somas das variáveis, vemos que 2x-6y é proporcional a x-3y, logo se fizermos x-3y=t as duas somas deixarão de existir. Assim:

$$x - 3y = t \quad (1)$$

Diferenciando (1), teremos: $dx - 3dy = dt$, ou

$$dx = dt + 3dy \quad (2)$$

Substituindo (1) e (2) na equação dada, teremos:

$$(t - 3)(dt + 3dy) - (2t + 1)dy = 0$$

Separando as variáveis:

$$\frac{t - 3}{t - 10}dt + dy = 0$$

Integrando:

$$t + 7\ln(t - 10) + y = C$$

Voltando para as variáveis x e y, teremos a solução geral:

$$x - 2y + 7\ln(x - 3y - 10) = C$$

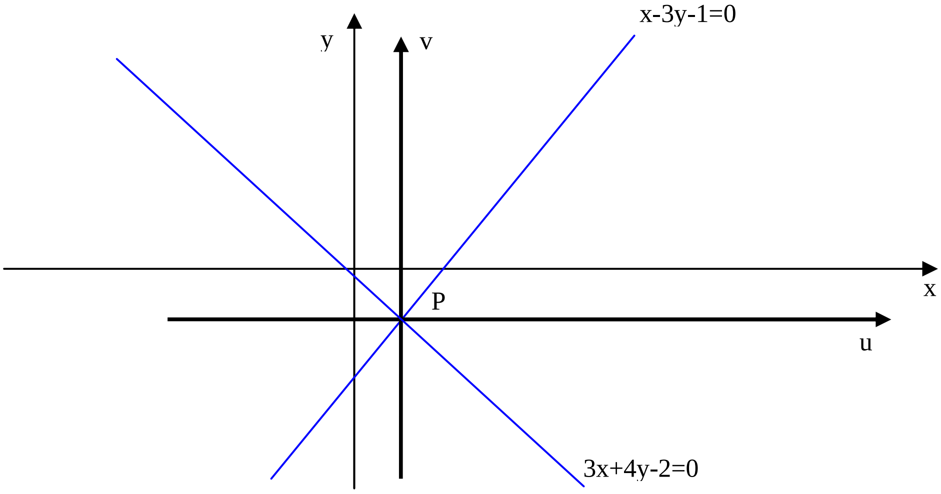
b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x - 3y - 1}{3x + 4y - 2}$

Escrevendo a equação diferencial na forma de uma diferencial, teremos:

$$(x-3y-1)dx-(3x+4y-2)dy=0$$

Observemos novamente que a equação acima não é de variáveis separáveis porque temos uma soma das variáveis x e y e também não é homogênea pela existência de termos independentes, portanto deveremos eliminar ou a soma ou o termo independente.

Como as somas x-3y e 3x+4y não são proporcionais, não é possível eliminar estas somas simultaneamente. Logo deveremos eliminar os termos independentes e transformar a equação em homogênea, que equivale a efetuar uma translação de eixos.



Determinando a solução do sistema de equações $\begin{cases} x-3y-1=0 \\ 3x+4y-2=0 \end{cases}$ obteremos as coordenadas do ponto P, que são $P\left(\frac{10}{13},-\frac{1}{13}\right)$. Logo a translação $\begin{cases} x=\frac{10}{13}+u \\ y=-\frac{1}{13}+v \end{cases}$ irá eliminar os termos independentes.

Substituindo as fórmulas de translação e suas respectivas diferenciais na equação diferencial teremos:

$$\left(\frac{10}{13}+u-3(-\frac{1}{13}+v)-1\right)du-\left(3(\frac{10}{13}+u)+4(-\frac{1}{13}+v)-2\right)dv=0$$

Reduzindo os termos semelhantes, vem:

$(u-3v)du-(3u+4v)dv=0$, que é homogênea, cuja solução é:

$$x^2-4y^2-6xy-2x+4y=C$$

Resolver as seguintes equações através de uma mudança adequada de variáveis:

22) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-3y-1}{3x+y-2}$

23) $(2x-3y)dx-(3x-y-1)dy=0$

24) $(x+2y-4)dx-(2x+y-5)dy=0$

25) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y+1}{6x-3y-1}$

26) $(2x+3y-1)dx+(2x+3y+2)dy=0$

27) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$

28) $(2x-y+4)dy+(x-2y+5)dx=0$

29) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x+2y+1}{2x+4y+3}$

30) $(x-4y-3)dx-(x-6y-5)dy=0$

31) $(3x-y+2)dx+(9x-3y+1)dy=0$

RESPOSTAS

1. $x^3-3xy^2=C$
2. $2x^2-2xy-4y^2=C$
3. $x^2=Ce^{y^2/x^2}$
4. $\frac{y}{x}=\sqrt{1-\frac{3x}{8}}$
5. $x\ln x+y=Cx$
6. $(x-y)\ln(x-y)=y+C(x-y)$
7. $x+y\ln x=Cy$
8. $\ln(x^2+y^2)+2tg^{-1}(y/x)=C$
9. $4x=y(\ln y-C)^2$
10. $y^9=C(x^3+y^3)^2$
11. $(y/x)^2=2\ln y+C$
12. $e^{2x/y}=8\ln y+C$
13. $x\cos(y/x)=C$
14. $y+x=Cx^2e^{y/x}$
15. $y^3+3x^3\ln x=8x^3$
16. $x^{3/2}+yx^{1/2}=\frac{y}{2}$
17. $\ln x=e^{y/x}-1$
18. $4x\ln y/x+x\ln x+y-x=0$
19. $3x^{3/2}\ln x+3x^{1/2}y+2y^{3/2}=5x^{3/2}$
20. $(x+y)\ln y+x=0$
21. $\ln y=-2(1-x/y)^{1/2}+\sqrt{2}$
22. $2x^2-6xy-y^2-2x+4y=C$
23. $2x^2-6xy+y^2+2y=C$
24. $(x-y-1)^3=C(x+y-3)$
25. $5x-15y+4\ln(10x-5y-3)=C$
26. $3x+3y=-9\ln(2x+3y-7)+C$
27. $3x+y+2\ln(-3x-3y+3)=C$
28. $(x+y-1)^3=C(x-y+3)$
29. $\ln(4x+8y+5)+8y-4x=C$
30. $(x-2y-1)^2=C(x-3y-2)$
31. $2x+6y+C=-\ln(6x-2y+1)$

4° TIPO: EQUAÇÕES EXATAS

Forma : A equação Mdx+Ndy=0 será uma equação diferencial exata , quando existir uma função f(x,y)=C tal que df=Mdx+Ndy = 0 ou se a relação $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ for verdadeira.

Resolução: Dada a equação diferencial exata Mdx+Ndy=0 **(1)** e seja z=f(x,y)=C sua solução, cuja diferencial dada por $dz=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$ **(2)**. Então, comparando **(1)** e **(2)** teremos: $\frac{\partial f}{\partial x}=M(x,y)$ **(3)** e $\frac{\partial f}{\partial y}=N(x,y)$ **(4).**

Para obtermos a sua solução z=f(x,y) deveremos integrar, por exemplo,a expressão **(3)**, em relação à variável x, da qual teremos $f(x,y)=\int M(x,y)dx+g(y)$ **(5)**.

Derivando parcialmente **(5)** em relação à y teremos: $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\int M(x,y)dx}{\partial y}+g'(y)$ **(6)**.

Igualando **(6)** e **(4)** resulta: $\dfrac{\partial \int M(x,y)dx}{\partial y} + g'(y) = N(x,y)$. Isolando g'(y) e integrando em relação a y acharemos $g(y) = \int \left(N(x,y) - \dfrac{\partial \int M(x,y)dx}{\partial y} \right) dy + C_1$ **(7)**. Substituindo **(7)** em **(5)** teremos a solução geral da equação exata, que é $f(x,y) = \int M(x,y)dx + \int \left(N(x,y) - \dfrac{\partial \int M(x,y)dx}{\partial y} \right) dy = C$.

Exemplo: Resolver a seguinte equação diferencial $(3x^2 + 2y)dx + (2x - 4y + 5)dy = 0$.

Inicialmente vamos verificar a que modelo esta equação pertence.

i. Ela não é de variáveis separáveis porque temos soma das variáveis x e y,
ii. Ela não é homogênea porque os coeficientes das diferenciais não são funções homogêneas,
iii. Para verificarmos se a equação é exata vamos utilizar a relação $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial (3x^2 + 2y)}{\partial y} = 2$$
$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial (2x - 4y + 5)}{\partial x} = 2$$

Como a condição $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ é verificada temos que a equação é exata.

A solução f(x,y)=C verifica $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx + \dfrac{\partial f}{\partial y}dy = 0$, assim comparando com a equação dada teremos $\dfrac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y$, que integrado parcialmente em relação a x resulta $f = x^3 + 2yx + g(y)$.

Comparando $\dfrac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ teremos $2x + g'(y) = 2x - 4y + 5$. Logo $g'(y) = -4y + 5$ que integrado nos fornece $g(y) = -2y^2 + 5y$. Daí a solução f(x,y)=C fica:

$$x^3 + 2yx - 2y^2 + 5y = C$$

Resolver as seguintes equações diferenciais:

1) $(x^2 - y^2)dx - 2xydy = 0$
2) $(2x - y + 1)dx - (x + 3y - 2)dy = 0$
3) $e^y dx + (xe^y - 2y)dy = 0$
4) $(x^3 + y^2)dx + (2xy + \cos y)dy = 0$
5) $[y\cos(xy) + \dfrac{y}{\sqrt{x}}]dx + [x\cos(xy) + 2\sqrt{x} + \dfrac{1}{y}]dy = 0$
6) $(2x - 1)dx + (3y + 7)dy = 0$
7) $(5x + 4y)dx + (4x - 8y^3)dy = 0$

8) $(2y^2x-3)dx+(2yx^2+4)dy=0$
9) $(3x^2y-4\ln x)dx+(x^3-\ln y)dy=0$
10) $(y^3-y^2 senx-x)dx+(3xy^2+2y\cos x)dy=0$
11) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2+ye^{xy}}{2y-xe^{xy}}$
12) $(4x^3y-15x^2-y)dx+(x^4+3y^2-x)dy=0$
13) $(x+y)^2dx+(2xy+x^2-1)dy=0 \quad , \quad y(1)=1$
14) $(4y+2x-5)dx+(6y+4x-1)dy=0 \quad , \quad y(-1)=2$
15) $\left(1-\dfrac{3}{x}+y\right)dx+\left(1-\dfrac{3}{y}+x\right)dy=0.$
16) $\left(x^2y^3-\dfrac{1}{1+9x^2}\right)\dfrac{dx}{dy}+x^3y^2=0$
17) $(tgx-senxseny)dx+\cos x\cos y dy=0$
18) $(1-2x^2-2y)\dfrac{dy}{dx}=4x^3+4xy$
19) $(y^2\cos x-3x^2y-2x)dx+(2ysenx-x^3+\ln y)dy=0 \quad , \quad y(0)=e$
20) $x\dfrac{dy}{dx}=2xe^x-y+6x^2$

5° TIPO: EQUAÇÕES REDUTÍVEIS A EXATAS

Na equação Mdx+Ndy=0, quando as derivadas parciais $\dfrac{\partial M}{\partial y}$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x}$ diferirem, muitas vezes pode-se determinar um fator integrante que irá transformar a equação dada numa equação exata.

Vejamos o exemplo:

Resolver a equação $(y-x^2)dx+2xdy=0$.

Primeiramente, é sempre importante verificar a que modelo esta equação pertence:

i. Ela não é de variáveis separáveis porque temos soma das variáveis.
ii. Ela não é homogênea porque os coeficientes das diferencias são polinômios que não têm os mesmos graus.
iii. Para verificarmos se a equação é exata vamos utilizar a relação $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$.

Como $\dfrac{\partial M}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N}{\partial x}$, pois $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial (y-x^2)}{\partial y}=1$ e $\dfrac{\partial N}{\partial x}=\dfrac{\partial (2x)}{\partial x}=2$ a equação também não é exata.

Agora vamos determinar um fator integrante, isto é, um fator que ao se multiplicar ambos os membros da equação a transforme em exata. Seja $\lambda(x,y)$ este fator integrante.

Impondo que $(y-x^2)\lambda(x,y)dx+2x\lambda(x,y)dy=0$ seja exata, teremos:

$$\frac{\partial\left[(y-x^2)\lambda(x,y)\right]}{\partial y}=\frac{\partial\left[2x\lambda(x,y)\right]}{\partial x}$$

$$1.\lambda(x,y) + (y - x^2)\frac{\partial\lambda(x,y)}{\partial y} = 2.\lambda(x,y) + 2x\frac{\partial\lambda(x,y)}{\partial x}$$

$$-\lambda(x,y) + (y - x^2)\frac{\partial\lambda(x,y)}{\partial y} = 2x\frac{\partial\lambda(x,y)}{\partial x}$$

A equação parcial acima admite infinitas soluções, dependendo da função λ. No entanto, necessitamos de somente um fator integrante e preferencialmente o mais simples. Assim, vamos impor a condição que o fator integrante seja uma função somente de x, isto é $\frac{\partial\lambda}{\partial y} = 0$, pois nos interessa neste exemplo anular o termo que possui as duas variáveis x e y. Logo, teremos:

$$-\lambda = 2x\frac{d\lambda}{dx}$$

Separando as variáveis e integrando teremos um fator integrante:

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Multiplicando ambos os membros da equação dada pelo fator integrante, resulta:

$$(y - x^2)\frac{1}{\sqrt{x}}dx + 2x\frac{1}{\sqrt{x}}dy = 0$$

$(y - x^2)\frac{1}{\sqrt{x}}dx + 2\sqrt{x}dy = 0$, que é exata e terá solução geral igual a:

$$2y\sqrt{x} - \frac{2x^{5/2}}{5} = C$$

Através do processo anterior podemos determinar os seguintes fatores integrantes para a equação M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 **(1)**:

i. Se $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$ então $e^{\int f(x)dx}$ é um fator integrante;

ii. Se $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = f(y)$ então $e^{\int f(y)dy}$ é um fator integrante;

iii. Se $Mx + Ny \neq 0$ e **(1)** é homogênea então $\dfrac{1}{Mx + Ny}$ é um fator integrante.

Resolva as seguintes equações diferenciais, mediante o uso de um fator integrante adequado:

21) $y^2dx + (xy+1)dy = 0$

22) $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$

23) $xdy - ydx = x^2e^xdx$

24) $y^2dy + ydx - xdy = 0$

25) $\frac{y}{x}dx + (y^3 + \ln x)dy = 0$

26) $(x + y)dx + x\ln xdy = 0$

27) $(2y - x^3)dx + xdy = 0$

28) $3x^2y^2dx + 4(x^3y - 3)dy = 0$

29) $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$

30) $(x^4 + y^4)dx - xy^3dy = 0$

RESPOSTAS

Equações exatas.

1. $\frac{x^3}{3} - xy^2 = c$
2. $2x^2 - 2xy + 2x + 4y - 3y^2 = c$
3. $xe^y - y^2 = c$
4. $\frac{x^4}{4} + xy^2 + seny = c$
5. $sen(xy) + 2y\sqrt{x} + \ln y = c$
6. $x^2 - x + \frac{3y^2}{2} + 7y = c$
7. $\frac{5x^2}{2} + 4xy - 2y^4 = c$
8. $x^2y^2 - 3x + 4y = c$
9. $.x^3y - 4x\ln x - y\ln y + y + 4x = C$
10. $xy^3 + y^2\cos x - \frac{1}{2}x^2 = c$
11. $2x + e^{xy} - y^2 = C$
12. $x^4y - 5x^3 - xy + y^3 = c$
13. $\frac{1}{3}x^3 + x^2y + xy^2 - y = 4/3$
14. $4xy + x^2 - 5x + 3y^2 - y = 8$
15. $x + y + xy - 3\ln xy = c$
16. $x^3y^3 - tg^{-1}3x = c$
17. $-\ln|\cos x| + \cos x\, seny = c$
18. $y - 2x^2y - y^2 - x^4 = c$
19. $y^2 senx - x^3y - x^2 + y\ln y - y = 0$
20. $xy - 2xe^x + 2e^x - 2x^3 = c$
21. $xy + \ln y = c$
22. $x + \frac{y^2}{x} = c$
23. $y = Cx + xe^x$
24. $y^2 + x = Cy$
25. $4y\ln x + y^4 = C$
26. $x + y\ln x + C = 0$
27. $x^2y - \frac{x^5}{5} = C$
28. $x^3y^4 - 4y^3 = C$
29. $3x^4 + 4x^3 + 6x^2y^2 = C$
30. $y^4 = 4x^4\ln x + Cx^4$

6° TIPO: **EQUAÇÕES LINEARES DE 1ª ORDEM**

Conceito: As equações da forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$ **(1)**, onde P e Q são funções de x ou constantes, são chamadas de equações lineares de 1ª ordem. Quando Q(x)=0 a equação será chamada de linear homogênea, devido a analogia com os sistemas de equações algébricas lineares homogêneos, ou seja, aqueles que possuem termo independente igual a zero.

Resolução:

1. **Método de Lagrange ou da substituição.**

A equação linear será resolvida através da substituição $y = z.t$ **(2)** que irá separar as variáveis**,** onde z=z(x) e t=t(x) são funções a determinar.

Derivando ambos os membros de **(2)** em relação à x e substituindo em **(1)**, teremos $\frac{dz}{dx}t + \frac{dt}{dx}z + P(x)zt = Q(x)$ **(3)**.

Fatorando t no primeiro membro **(3)** vem: $t\left(\frac{dz}{dx} + Pz\right) + \frac{dt}{dx}z = Q$ **(4)**, e impondo que $\frac{dz}{dx} + Pz = 0$, teremos: $z = e^{-\int Pdx}$, onde P=P(x) e Q=Q(x).

Voltando para **(4)** determinaremos $t = \int e^{\int Pdx}.Qdx + C$. Assim, resulta $y = e^{-\int Pdx}\left(\int e^{\int Pdx}.Qdx + C\right)$ que é a solução geral da equação linear.

2. Fator de integração

O fator $\lambda = e^{\int P(x)dx}$ transformará a equação **(1)** numa equação diferencial exata, isto é:

Escrevendo **(1)** com diferenciais, vem $dy + (Py - Q)dx = 0$. Quando multiplicada pelo fator integrante λ, resultará na equação exata $e^{\int Pdx}dy + \left(P.e^{\int Pdx}y - Q.e^{\int Pdx}\right)dx = 0$.

Resolva as seguintes equações diferenciais:

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = x - 2$
2. $\frac{dy}{dx} - ytgx = senx$
3. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} - \frac{\cot gx}{x} = 0$
4. $(x + seny - 1)dy - \cos ydx = 0$
5. $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} + y = arctgx$
6. $\frac{dy}{dx} = 5y$
7. $3\frac{dy}{dx} + 12y = 4$
8. $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$
9. $y' + 3x^2 y = x^2$
10. $x^2 y' + xy = 1$
11. $(x + 4y^2)dy + 2ydx = 0$
12. $xdy = (xsenx - y)dx$
13. $(1 + e^x)\frac{dy}{dx} + e^x y = 0$
14. $\cos x\frac{dy}{dx} + ysenx = 1$
15. $x\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$
16. $x^2\frac{dy}{dx} + x(x + 2)y = e^x$
17. $\cos^2 xsenxdy + (y\cos^3 x - 1)dx = 0$
18. $ydx + (xy + 2x - ye^y)dy = 0$ (dica escreva dx/dy)
19. $x\frac{dy}{dx} + (3x + 1)y = e^{-3x}$
20. $ydx - 4(x + y^6)dy = 0$
21. $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1 - e^{-2x}}{e^x + e^{-x}}$
22. $ydx + (x + 2xy^2 - 2y)dy = 0$
23. $\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}\theta} + \mathrm{r}\sec\theta = \cos\theta$
24. $(x + 2)^2\frac{dy}{dx} = 5 - 8y - 4xy$
25. $\frac{dy}{dx} + 5y = 20$, com y(0)=2
26. $L\frac{di}{dt} + Ri = E$, sendo L, R e E constantes, com $i(0)=i_o$
27. $y' + (tgx)y = \cos^2 x$, com y(0)=-1
28. $\frac{dT}{dt} = k(T - 50)$, com T(0)=200
29. $(x + 1)\frac{dy}{dx} + y = \ln x$, sendo y(1)=10
30. $x(x - 2)\frac{dy}{dx} + 2y = 0$, com y(3)=6
31. $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y - x}$, sendo y(5)=2
32. Encontre uma solução contínua satisfazendo $\frac{dy}{dx} + y = f(x)$, em que $f(x) = \begin{cases} 1, \text{se } 0 \le x \le 1 \\ 0, \text{se } x > 1 \end{cases}$ e a condição y(0)=0

RESPOSTAS

1) $y = x(x - 2\ln x + C)$

2) $y = \sec x(\frac{sen^2 x}{2} + C)$

3) $y = \frac{\ln(senx) + C}{x}$

4) $x = (tgy + \sec y)(2\sec y - 2tgy + y + C)$

5) $y = arctgx - 1 + Ce^{-arctgx}$

6) $y = ce^{5x}$

7) $y = \frac{1}{3} + ce^{-4x}$

8) $y = \frac{1}{4}e^{3x} + ce^{-x}$

9) $y = \frac{1}{3} + ce^{-x^3}$

10) $y = x^{-1}\ln x + cx^{-1}$

11) $x = -\frac{4}{5}y^2 + cy^{-1/2}$

12) $y = -\cos x + \frac{senx}{x} + \frac{c}{x}$

13) $y = \frac{c}{e^x + 1}$

14) $y = senx + c.\cos x$

15) $y = \frac{1}{7}x^3 - \frac{1}{5}x + cx^{-4}$

16) $y = \frac{1}{2x^2}e^x + \frac{c}{x^2}e^{-x}$

17) $y = \sec x + c.\cos ecx$

18) $x = \frac{1}{2}e^y - \frac{1}{2y}e^y + \frac{1}{4y^2}e^y + \frac{c}{y^2}e^{-y}$

19) $y = e^{-3x} + \frac{c}{x}e^{-3x}$

20) $x = 2y^6 + cy^4$

21) $y = e^{-x}\ln(e^x + e^{-x}) + ce^{-x}$

22) $x = \frac{1}{y} + \frac{c}{y}e^{-y^2}$

23) $(\sec\theta + tg\theta)r = \theta - \cos\theta + c$

24) $y = \frac{5}{3x + 6} + \frac{c}{(x+2)^4}$

25) $y = 4 - 2e^{-5x}$

26) $i(t) = E/R + (i_o - E/R)e^{-Rt/L}$

27) $y = senx.\cos x - \cos x$

28) $T(t) = 50 + 150e^{kt}$

29) $(x+1)y = x\ln x - x + 21$

30) $y = \frac{2x}{x - 2}$

31) $x = \frac{1}{2}y + \frac{8}{y}$

32) $y = \begin{cases} 1 - e^{-x}, \text{se } 0 \le x \le 1 \\ (e-1)e^{-x}, \text{se } x > 1 \end{cases}$

7° TIPO: EQUAÇÕES DE BERNOULLI

Conceito:

As equações da forma $\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$ **(1)** com $n \neq 1$, onde P e Q são funções de x ou constantes, são chamadas de equações de Bernoulli.

Resolução:

Para resolvermos a equação de Bernoulli iremos transformá-la numa equação linear multiplicando ambos os membros de (1) por y^{-n}, o que implicará em $y^{-n}\frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x)$ **(2).**

Em (2), chamando $y^{1-n} = t$, obteremos $\frac{1}{1-n} \cdot \frac{dt}{dx} + P(x).t = Q(x)$ que escrita como $\frac{dt}{dx} + (1-n).P(x).t = (1-n).Q(x)$ representa uma equação linear.

Como exemplo da equação de Bernoulli, podemos citar um modelo empírico usado para a determinação do peso de peixes, que é a equação de Von Bertalanffly,

$$\frac{dp}{dt} + \beta p = \alpha p^{2/3},$$

onde p é peso de cada peixe em função do tempo t, α é a constante de anabolismo, isto é, a taxa de síntese de massa por unidade de superfície do peixe e β é a constante de catabolismo, representando a taxa de diminuição da massa por unidade de massa.

Resolva as seguintes equações de Bernoulli:

1. $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x} = 3xy^2$
2. $\frac{dy}{dx} - 2xy = xy^3$
3. $\frac{dy}{dx} + xy = x^3 y^3$
4. $x\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{y^2}$
5. $\frac{dy}{dx} = y\left(xy^3 - 1\right)$
6. $x^2 \frac{dy}{dx} + y^2 = xy$
7. $x^2 \frac{dy}{dx} - 2xy = 3y^4$, com $y(1) = 1/2$
8. $x\frac{dy}{dx} + y = x^3 y^3$
9. $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{x} y + x\sqrt{y}$
10. $2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$
11. $\frac{dy}{dx} + \frac{2y}{x} = 2y^2$
12. $xdy = y(y^2 + 1)dx$
13. $(1 - x^2)\frac{dy}{dx} = xy + xy^2$

Respostas:

1. $y = \frac{-4x^2}{3x^4 + C}$
2. $y^2 = \frac{-2e^{2x^2}}{e^{2x^2} + C}$
3. $y = \left(x^2 + 1 + Ce^{x^2}\right)^{-1/2}$
4. $x^3 y^3 - x^3 = C$
5. $-x - \frac{1}{3} + \frac{1}{y^3} = Ce^{3x}$
6. $\frac{x}{y} - \ln x = C$

7. $y^{-3} = -\dfrac{9}{5x} + \dfrac{49}{5x^6}$
8. $-2x^3y^2 + Cx^2y^2 = 1$
9. $y = x^4\left(\dfrac{1}{2}\ln x + C\right)^2$
10. $\dfrac{y^2}{x} + \ln x = C$
11. $Cx^2y + 2xy = 1$
12. $\dfrac{x^2}{y^2} + x^2 = C$
13. $y = \dfrac{-1}{1 + C\sqrt{1 - x^2}}$

8° TIPO: EQUAÇÕES DE RICCATI

Conceito:

As equações da forma $\dfrac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^2 + R(x)$ **(1)**, onde P, Q e R são funções de x ou constantes, são chamadas de equações de Riccati.

Resolução:

Para sua resolução algébrica deveremos conhecer uma solução particular $y = y_o$ qualquer de (1), na qual a mudança de variáveis $y = z + y_o$ irá eliminar o termo independente R(x) transformando a equação de Riccati numa equação de Bernoulli.

Resolva as seguintes equações de Riccati, onde y_1 é uma solução conhecida para a equação:

1. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^2} = 3$, com $y_1 = x$
2. $(1 + x^3)\dfrac{dy}{dx} + 2xy^2 + x^2y + 1 = 0$, com $y_1 = -x$
3. $\dfrac{dy}{dx} + (2x - 1)y - xy^2 = x - 1$, com $y_1 = 1$
4. $\dfrac{dy}{dx} = -2 - y + y^2$, com $y_1 = 2$
5. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{4}{x^2} - \dfrac{1}{x}y + y^2$, com $y_1 = \dfrac{2}{x}$
6. $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x} + (1 + 2e^x)y + y^2$, com $y_1 = -e^x$
7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x}y^2 - 2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)y + x - 1$, com $y_1 = x$
8. $\dfrac{dy}{dx} + y^2 + 3y + 2 = 0$, sendo $y_1 = -1$

Respostas:

1. $\dfrac{x^4(y - x)}{y + 3x} = C$
2. $\dfrac{1 + x^3}{x + y} - x^2 = C$
3. $\dfrac{1}{y - 1} + x - 1 = Ce^{-x}$
4. $\dfrac{y - 2}{y + 1} = Ce^{3x}$

5. $\frac{x^4}{xy-2}+\frac{x^4}{4}=C$

6. $\frac{1}{y+e^x}+1=Ce^{-x}$

7. $\frac{x^2}{y-x}+\frac{x^2}{2}=C$

8. $\frac{1}{y+1}+1=Ce^x$

9° TIPO: SUBSTITUIÇÕES DIVERSAS

Tais equações não se enquadram diretamente em nenhum dos modelos anteriores, mas após a aplicação de uma determinada mudança de variáveis elas se transformarão numa equação diferencial conhecida.

Resolva as seguintes equações diferenciais, por uma substituição apropriada:

1) $y(1+2xy)dx+x(1-2xy)dy=0$

2) $2xy\frac{dy}{dx}+2y^2=3x-6$

3) $x\frac{dy}{dx}-y=\frac{x^3}{y}e^{y/x}$

4) $xe^{2y}\frac{dy}{dx}+e^{2y}=\frac{\ln x}{x}$

5) $ydx+(1+ye^x)dy=0$

6) $\frac{dy}{dx}-\frac{4}{x}y=2x^5e^{y/x^4}$

7) $2yy'+x^2+y^2+x=0$

8) $2x\cos ec2y\frac{dy}{dx}=2x-\ln(tgy)$

9) $x^4y^2\frac{dy}{dx}+x^3y^3=2x^3-3$

10) $\frac{dy}{dx}+1=e^{-(x+y)}\operatorname{sen}x$

11) $seny\frac{dy}{dx}=\cos x(2\cos y-sen^2x)$

12) $x.senydy+(x^3-2x^2\cos y+\cos y)dx=0$

13) $(2x^2+3y^2-7)dx-(3x^2+2y^2-8)dy=0$

14) $x^2(xdx+ydy)+y(xdy-ydx)=0$

15) $(x-2seny+3)dx+(2x-4seny-3)\cos ydy=0$

Respostas:

1. $x=Cye^{1/2xy}$
2. $x^2y^2=x^3-3x^2+C$
3. $x+y=x(C-x)e^{y/x}$
4. $x^2e^{2y}=2x\ln x-2x+C$
5. $e^{-x}=y\ln y+Cy$
6. $-e^{-y/x^4}=x^2+C$
7. $x^2+y^2=x-1+Ce^{-x}$
8. $\ln(tgy)=x+C/x$
9. $x^3y^3=2x^3-9\ln x+C$
10. $e^y=-e^{-x}\cos x-Ce^{-x}$
11. $\cos y=\frac{sen^2x-senx}{2}+\frac{1}{4}+Ce^{-senx}$
12. $2\cos y=x+Cxe^{-x^2}$
13. $(x^2-y^2-1)^5=C(x^2+y^2-3)$
14. $(x^2+y^2)(x+1)^2=Cx^2$
15. $8seny+4x+9\ln(4x-8seny+3)=C$

APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE 1ª ORDEM E 1º GRAU

1. Determine a equação das curvas que possuem a subnormal constante.
2. Determine a equação das curvas que possuem a subtangente constante.
3. Nos problemas a seguir determine as trajetórias ortogonais de cada família de curvas dadas:

a. $y = cx$

b. $y = cx^2$

c. $cx^2 + y^2 = 1$

d. $y = ce^{-x}$

e. $y^2 = cx^3$

f. $y = \dfrac{x}{1+cx}$

g. $2x^2 + y^2 = 4cx$

h. $r = 2c\cos\theta$

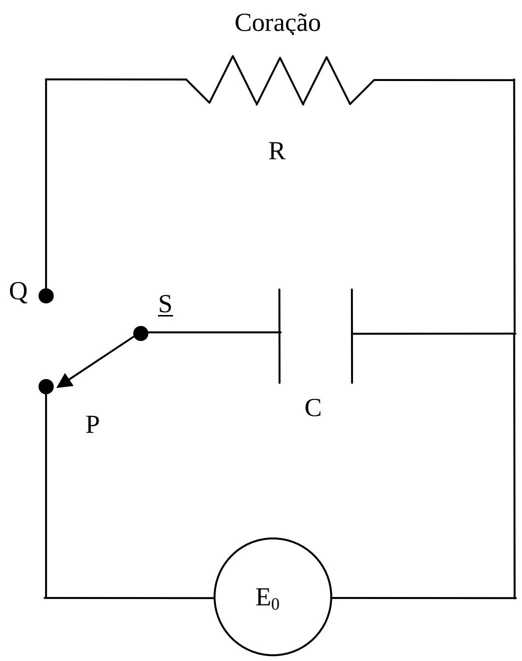
i. $r^2 = c\,\mathrm{sen}\,2\theta$

4. Encontre as curvas das trajetórias ortogonais de $x + y = ce^y$, que passam por P(0,5).
5. Um investidor aplica determinada quantia que triplica em 30 meses. Em quanto tempo essa quantia estará quadruplicada, supondo que o aumento é proporcional ao capital existente a cada instante?
6. Sabe-se que a população de uma certa comunidade cresce a uma taxa proporcional ao número de pessoas presentes em qualquer instante. Se a população duplicou em 5 anos, quando ela triplicará?
7. Suponha que a população da comunidade do problema 6 anterior seja 10.000 após 3 anos. Qual era a população inicial? Qual será a população em 10 anos?
8. A população de bactérias em uma cultura cresce a uma taxa proporcional ao número de bactérias presentes em qualquer tempo. Após 3 horas, observa-se que há 400 bactérias presentes. Após 10 horas existem 2000. Qual era o número inicial de bactérias ?
9. O isótopo radioativo de chumbo, Pb-209, decresce a uma taxa proporcional à quantidade presente em qualquer tempo. Sua meia-vida é 3,3 horas. Se 1 grama de chumbo está presente inicialmente, quanto tempo levará para 90% de chumbo desaparecer?
10. Quando um raio de luz vertical passa através de uma substância transparente, a taxa na qual sua intensidade I decresce é proporcional a I(t), em que t representa a espessura do meio (em metros). No mar a intensidade a 3 m abaixo da superfície é de 25% da intensidade inicial I_o do raio incidente. Qual é a intensidade do raio a 15m abaixo da superfície?
11. Segundo a Lei de Newton, a velocidade de resfriamento de um corpo no ar é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do ar. Se a temperatura do ar é 20^oC e o corpo se resfria em 20 minutos de 100^oC para 60^oC, dentro de quanto tempo sua temperatura descerá para 30^oC?
12. Um termômetro é retirado de uma sala, em que a temperatura é 70^oF, e colocado no lado fora onde a temperatura é 10^oF. Após 0,5 minuto o termômetro marcava 50^oF. Qual será a temperatura marcada pelo termômetro no instante t=1 minuto? Quanto levará para marcar 15^oF?
13. Um indivíduo é encontrado morto em seu escritório pela secretária que liga imediatamente para a polícia. Quando a polícia chega, 2 horas depois da chamada, examina o cadáver e o ambiente tirando os seguintes dados. A temperatura do escritório era de 20^oC, o cadáver inicialmente tinha uma temperatura de 35^oC. Uma hora depois medindo novamente a temperatura do corpo obteve 34.2^oC. O investigador, supondo que a temperatura de uma pessoa

viva é de 36.5^{o}C, prende a secretária. Por que?. No dia seguinte o advogado da secretária a liberta, alegando o que?

14. Em um depósito há 100*l* de uma solução aquosa que contém 10*kg* de sal. Joga-se água neste depósito com uma velocidade de 3*l/min* ao mesmo tempo em que, através de um orifício desse tanque, a mistura escoa com uma velocidade de 2*l/min*. A mistura se mantém homogênea por agitação. Que quantidade de sal haverá no tanque 1*h* depois de iniciada a operação
15. Inicialmente, 50 gramas de sal são dissolvidos em um tanque contendo 300 litros de água. Uma solução salina é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 3 litros por minuto e a solução bem misturada é então drenada na mesma taxa. Se a concentração da solução que entra é 2 gramas por litro, determine a quantidade de sal no tanque em qualquer instante. Quantas gramas de sal estão presentes após 50 minutos? E após um longo tempo?
16. Um tanque contém 500 litros de água pura. Uma solução salina contendo 2g de sal por litro é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 5 litros por minuto. A mistura é drenada à mesma taxa. Encontre a quantidade de gramas de sal no tanque em qualquer instante.
17. Suponha que um estudante infectado com um vírus da gripe retorne a uma faculdade isolada no campus onde se encontra 1000 estudantes. Presumindo que a taxa na qual o vírus se espalha é proporcional não somente à quantidade de alunos infectados, mas também à quantidade de alunos não infectados, determine o número de alunos infectados após 6 dias se ainda é observado que depois de 4 dias x(4)= 50.
18. Uma lancha se desloca numa lagoa com uma velocidade de 10m/s. Em dado instante seu motor é desligado, com isso a lancha sofre uma redução de velocidade proporcional à velocidade instantânea. Sabendo que ao final de 5 segundos sua velocidade é de 8m/s, qual será o tempo necessário para que a lancha adquira velocidade de 1m/s?
19. Um bote está sendo rebocado a uma velocidade de 12*nós*(6,17*m/s*). No instante em que o cabo do reboque é largado, um homem no bote começa a remar, no sentido do movimento com uma força de 10*N*. Sabendo que o peso do homem e do bote é 200*N* e que a resistência ao deslocamento, em *N*, é de 2.6*v*, sendo *v* a velocidade em *m/s*, achar a velocidade do bote no fim de 30 segundos.
20. Uma bateria de 12 volts é conectada a um circuito em série no qual a indutância é de 0.5 Henry e a resistência 10 ohms. Determine a corrente *i* se a corrente inicial é zero.
21. Achar a equação da curva que passa pelo ponto P(5,6), conhecendo-se a declividade de sua tangente num ponto qualquer $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y}$.
22. Achar a equação da curva cuja subtangente seja o dobro da abscissa do ponto de contato.
23. Achar a equação da curva cuja subtangente num ponto P(x,y) seja igual à ordenada de P.
24. Uma curva dada passa pelos pontos (0,0) e (3,9). Achar a sua equação sabendo que a mesma tem a propriedade de dividir o retângulo formado pelos eixos coordenados e pelas retas paralelas a estes, tomadas por um ponto P(x,y), em duas partes, sendo a área de uma dela o triplo da outra.
25. Achar a equação da família de curvas em que a subnormal, num ponto P(x,y) seja igual à abscissa desse ponto.

26. Um marca passo, como indicado na figura abaixo, consiste em uma bateria, um capacitor e o coração como resistor. Quando a chave S está em P, o capacitor C é carregado; quando S está em Q, o capacitor R descarregado, enviando um impulso elétrico ao coração. Durante esse tempo, a voltagem E aplicada ao coração é dada por $\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E$, $t_1 < t < t_2$, onde R e C são constantes. Determine E(t) se $E(t_1)=E_0$. (É claro que a chave é aberta e fechada periodicamente para simular o batimento cardíaco natural.)



27. Em março de 1987 a população mundial atingiu cinco bilhões, e estava crescendo à taxa de 380 mil pessoas por dia. Assumindo-se taxas de natalidade e mortalidade constantes, para quando se deve esperar uma população mundial de 10 bilhões de pessoas.
28. É um fato da física que os elementos radioativos se desintegram espontaneamente em um processo chamado decaimento radioativo. Os experimentos têm mostrado que a taxa de desintegração é proporcional à quantidade de elemento presente. Sabe-se que a meia-vida específica do carbono-14 radioativo está em torno de 5730 anos. Em 1988, o Vaticano autorizou o Museu Britânico a datar a relíquia de pano conhecida como o Sudário de Turim, possivelmente o sudário de Jesus de Nazaré. Este pano, que apareceu em 1356, contém o negativo da imagem de um corpo humano que se acreditava no mundo inteiro ser o de Jesus. O relatório do Museu mostrou que as fibras no pano continham entre 92 e 93% do carbono-14 original. Use esta informação para estimar a idade do sudário.
29. Ache uma curva do plano xy que passa pelo ponto P(0,3) e cuja reta tangente em um ponto qualquer tem inclinação $2x/y^2$.
30. Uma bala de massa $m=3.56 x 10^{-3} kg$ é disparada para cima com uma velocidade inicial v_o=988m/s, e torna-se mais lenta pela força da gravidade e uma força de resistência do ar de kv^2, sendo $k=7.3x10^{-6}$kg/m. Determine a altura máxima atingida pela bala.(Considere $g=9,8 m/s^2$)

31. Considere um compartimento que contém 3 litros de água salgada. Suponha que água, contendo 25 gramas de sal por litro, esteja sendo bombeada no compartimento a uma taxa de 2 litros por hora, e a mistura, que é homogeneizada continuamente é bombeada para fora do compartimento com a mesma taxa. Encontre a concentração de sal na mistura após 3 horas.
32. Em uma certa floresta tropical, “restos vegetais” (principalmente devido à vegetação morta) se acumulam no solo a uma taxa de 10 g/cm^2/ano. Ao mesmo tempo, entretanto, estes restos vegetais se decompõem a uma taxa de 80% ao ano. Determine a quantidade de restos vegetais, em g/cm^2, após 5 anos, sabendo-se que inicialmente esta quantidade era de 300g/cm^2.
33. Um assado pesando 5 libras, inicialmente a 50ºF, é posto num forno a 375ºF às 5 horas da tarde. Depois de 75 minutos a temperatura do assado é de 125ºF. Quando será a temperatura do assado de 150ºF (meio mal passado).
34. Uma pedra é solta a partir do repouso de uma altura h acima da superfície da Terra. Desprezando a resistência do ar, qual a velocidade com que atinge o solo?
35. Um tanque hemisférico tem raio do topo de 121.92cm e no instante t=0s está cheio de água. Neste momento um buraco circular com diâmetro de 2.54cm é aberto no fundo do tanque. Quanto demorará para que toda a água do tanque tenha escoado? (Dica: Use a equação de Torricelli $A(y)\dfrac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$ e g=9,8m/s^2 para chegar a $\pi(8y - y^2)\dfrac{dy}{dt} = -\pi\left(\dfrac{1}{24}\right)^2\sqrt{64y}$)
36. Um aterrissador lunar está em queda livre em direção à superfície da lua a uma velocidade de 1000mi/h. Seus foguetes retro propulsores, quando disparados no espaço livre, produzem uma desaceleração de 33000mi/h^2. A que altura da superfície lunar devem os foguetes retro propulsores ser ativados para assegurar um pouso suave (v=0) no impacto? (Considere g_{Lua}=13kmi/h^2 e r_{Lua}=1,08kmi)
37. Suponha que uma corda flexível de 4 pés de extensão começa com 3 pés de seu comprimento arrumados num monte bem junto à borda de uma mesa horizontal, com o resto pendurado (em repouso) para fora da mesa. No instante t=0 o monte começa a desenrolar e a corda começa gradualmente a cair para fora da mesa, sob a força da gravidade puxando a parte pendurada. Assumindo que as forças de atrito de quaisquer tipo sejam negligenciáveis, quanto tempo levará para toda a corda cair para fora da mesa? (Dica: $\omega g x = \dfrac{d(\omega x v)}{dt} = \omega(x\dfrac{dv}{dt} + v\dfrac{dx}{dt})$. Você chegará na integral imprópria $T = \left(\dfrac{2}{3g}\right)^{1/2}\displaystyle\int_0^{\operatorname{arccos} 1/8}(\sec u)^{4/3}du$, onde $\sec^2 u = x^3$ que deverá der resolvida pela Regra de Simpsom com 100 subintervalos ou por integração numérica.)

RESPOSTAS

1) $y^2 = 2Kx + C$

2) $\boldsymbol{y = e^{\frac{x}{K}+C}}$

3)

a) $x^2 + y^2 = C^2$

b) $2y^2 + x^2 = C$

f) $x^3 + y^3 = C$

g) $y^2 \ln y + x^2 = Cy^2$

c) $2\ln y = x + y^2 + C$

d) $y^2 = 2x + C$

e) $2x^2 + 3y^2 = C$

h) $r = C \operatorname{sen}\theta$

i) $r^2 = C\cos 2\theta$

4) $y = 2 - x + 3e^{-x}$
5) 37.8 meses
6) 7.9 anos
7). 6598; 26392
8). 200
9) 11 horas
10) $I(15)=0.00098I_o$
11) t = 60 minutos
12) $T(1)=36.67^{\circ}F$ em 3.06 minutos
13)
14) 3.91 kg de sal
15) A(50)=266.41 gramas
A(∞) = 600 gramas
16) $A(t) = 1000 - 1000e^{-t/100}$
17) 276 estuantes
18) 51,6 segundos
19) 3,9 m/s
20) $i(t) = 1.2 - 1.2e^{-20t}$
21) $3y^2 - 2x^2 = 58$
22) $y^2 = xC^2$
23) $y = x + C$
24) $y = \dfrac{x^3}{3}$ ou $y^3 = 243x$
25) $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$
26) $E(t) = E_0 e^{(-t+t_1)/RC}$
27) $t = \dfrac{\ln 2}{0{,}0278} \approx 25 \text{ anos} \rightarrow 2012$
28) De 600 a 689 anos
29) $y = \left(3x^2 + 27\right)^{1/3}$
30) 1298,23m
31) $75+(y_0-75).e^{-2}$
32) $17{,}76 g/cm^2$
33) t=105minutos → 6h45min
34) $v = \sqrt{2gh}$
35) t=2150s
36)25 milhas
37) t=0,541s

ENVOLTÓRIAS E SOLUÇÕES SINGULARES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Curvas integrais:
Família de curvas que representa a solução geral de uma equação diferencial.

Envolvida:
É cada uma das curvas integrais. Representa geometricamente uma solução particular da equação.

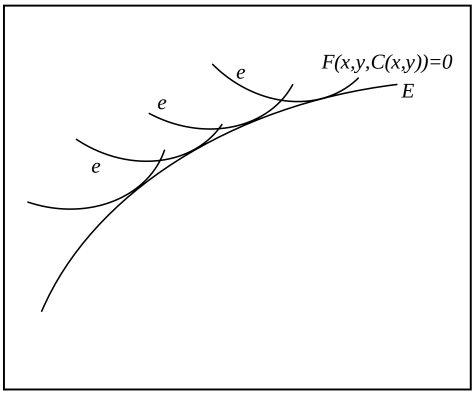
Envoltória:
É a curva tangente, em cada um dos seus pontos, a uma curva da família de curvas integrais. (*Cf.* PISKOUNOV N. *Cálculo diferencial e integral*. V II, Porto: Lopes da Silva, 1984, p. 43).

Equação da envoltória:
Seja a família de envolvidas cuja equação é dada por $y = f(x, C) \Leftrightarrow F(x, y, C) = 0$, onde C é um parâmetro com as seguintes características:
Nas envolvidas, C é uma constante;

Na envoltória $y = g(x)$, C é uma função de x e y, ou seja, $C=C(x,y)\neq constante$.

Um ponto $P(x,y)$ pertencente à envoltória também satisfaz a equação $F(x, y, C(x,y))=0$, pois pertence a certa curva da família.

Neste ponto $P(x,y)$, $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_e = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_E$, onde :



$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_e$ é a declividade da reta tangente à envolvida *e;*

$\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_E$ é a declividade da reta tangente à envoltória E

Derivando $F(x, y, C(x,y))=0$ em relação a x, vem: $\dfrac{\partial F}{\partial x}.\dfrac{\partial x}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial C}.\dfrac{\partial C}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial C}.\dfrac{\partial C}{\partial y}.\dfrac{\partial y}{\partial x}=0$ (1)

Nas envolvidas, como $C=$ *constante*, vem de (1): $\dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial y}.\dfrac{dy}{dx}=0 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \quad \dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$.

Na envoltória, como em qualquer ponto $P(x,y)$ $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_e = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_E$, vem de (1) que:

$$\frac{\partial F}{\partial C}.\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial C}.\frac{\partial C}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x}=0 \Rightarrow \frac{\partial F}{\partial C}\left(\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x}\right)=0.$$

Como $C = C(x,y) \neq$ constante, vem que $\dfrac{\partial F}{\partial C}=0$.

Daí, a equação da envoltória é dada resolvendo-se o seguinte sistema: $\begin{cases} \mathrm{F(x, y, C(x, y)) = 0} \\ \dfrac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{C}} = 0 \end{cases}$.

EXERCÍCIOS:

1) Dar a envoltória das seguintes famílias de curvas, onde α é o parâmetro. Represente num mesmo sistema cartesiano as curvas integrais e sua envoltória:

a) $y = 4\alpha^2.x+\dfrac{1}{\alpha}$ b) $x^2+y^2+2.(\alpha+2).y+\alpha^2=0$

02) Determinar a envoltória da família de retas que forma com os semi-eixos positivos um triângulo de área constante igual a 20.

Resposta:

1) a) $y^3 = 27x$ *b)* $x^2 + 4y = 0$ *2)* $x.y=10$

Solução singular de uma equação diferencial:

Conceito: A solução singular de uma equação diferencial é uma solução que satisfaz a equação, mas não é uma de suas soluções particulares.

Geometricamente, a solução singular é representada pela envoltória das curvas integrais, quando esta envoltória existe. Isto decorre do fato de que em cada ponto (x_0, y_0) da envoltória, o coeficiente angular da reta tangente à envoltória e à curva integral corresponde a $\frac{dy_0}{dx}$. Assim, os elementos x_0, y_0 e $\frac{dy_0}{dx}$ em cada ponto da envoltória satisfazem a equação diferencial $F(x,y, \frac{dy}{dx})=0$, uma vez que são sempre elementos de uma linha integral.

EXERCÍCIOS:

01) Encontre a solução singular da equação $x.\sqrt{1-y^2}dx = dy$. Represente geometricamente a solução geral e a singular num mesmo sistema cartesiano.

02) Obter a solução geral e singular das seguintes equações:

a) $y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 = 1$

b) $y - x.\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

c) $y = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x.\frac{dy}{dx} + \frac{x^2}{2}$

d) $y = x.\frac{dy}{dx} - ln\frac{dy}{dx}$

e) $y = y.(y')^2 + 2xy'$

Resposta:

01) $y = sen(\frac{x^2}{2} + C)$ e $y = \pm 1$

02) a) $(x-C)^2 + y^2 = 1$ e $y = \pm 1$

b) $y = Cx + C^2$ e $y = -\frac{x^2}{4}$

c) $y = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2$ e $y = \frac{x^2}{4}$

d) $y = Cx - lnC$ e $y = 1 + lnx$

e) $y^2 = 4C^2 - 4Cx$ e como solução singular o ponto P(0,0).

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS DE 1ª ORDEM E GRAU DIFERENTE DE 1:

EQUAÇÕES DE CLAIRAUT

Conceito: São as equações da forma $y = x\frac{dy}{dx} + f\left(\frac{dy}{dx}\right)$.

Resolução: Chamando $\frac{dy}{dx} = p$ a equação de Clairaut fica $y = xp + f(p)$.

Derivando a equação anterior em relação a x, teremos:

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{dp}{dx} + p.1 + f'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$\frac{dp}{dx}\left(x + f'(p)\right) = 0$$

Logo p=C e a solução geral será:

$$y = Cx + f(C)$$

Derivando a solução geral parcialmente em relação ao parâmetro C, teremos $x + f'(C) = 0$, que é a condição para obtermos a solução singular.

Resolva as seguintes equações e obtenha uma solução singular:

1. $y = xy' + 1 - \ln y'$
2. $y = x\frac{dy}{dx} - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$
3. $xy' - y = e^{y'}$
4. $y = xy' + \frac{1}{2}(y')^2$
5. $\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} + y = 0$
6. $y - xy' = 3(y')^2$
7. $x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$
8. $\frac{dy}{dx}\left(x\frac{dy}{dx} - y + 5\right) + 4 = 0$
9. $y = xy' - (y')^{-2}$
10. $y = x\frac{dy}{dx} + \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Aplicações:

11. Achar a curva, em que a soma dos segmentos determinados sobre os eixos cartesianos pela reta tangente seja igual a k.
12. Achar a curva, em que o produto dos segmentos determinados sobre os eixos cartesianos pela reta tangente seja igual a k.

Respostas:

1. $y = cx + 1 - \ln c$, $\quad$ $y = 2 + \ln x$
2. $y = cx - c^3$, $\quad$ $27y^2 = 4x^3$
3. $y = cx - e^c$, $\quad$ $y = x\ln x - x$
4. $y = cx + \dfrac{c^2}{2}$, $\quad$ $y = -\dfrac{x^2}{2}$
5. $y = cx - c^2$, $\quad$ $x^2 = 4y$
6. $y = cx + 3c^2$, $\quad$ $x^2 = -12y$
7. $y = cx + \dfrac{1}{c^2}$, $\quad$ $4y^3 = 27x^2$
8. $c(5 - y + cx) + 4 = 0$, $\quad$ $(y - 5)^2 = 16x$
9. $y = cx - 1/c^2$, $\quad$ $y^3 = -27x^2/4$
10. $y = cx + \sqrt{1 + c^2}$, $\quad$ $y = \sqrt{1 - x^2}$
11. $(x + y - k)^2 = 4xy$
12. $4xy = k$

EQUAÇÕES DE LAGRANGE

Conceito: São as equações da forma $y = xf\left(\dfrac{dy}{dx}\right) + g\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Resolução: Chamando $\dfrac{dy}{dx} = p$ a equação de Lagrange fica $y = xf(p) + g(p)$.

Derivando a equação anterior em relação a x, teremos:

$$\frac{dy}{dx} = xf'(p)\frac{dp}{dx} + f(p).1 + g'(p)\frac{dp}{dx}$$

$$p - f(p) = \frac{dp}{dx}\left(xf'(p) + g'(p)\right)$$

$$\left(p - f(p)\right)\frac{dx}{dp} = xf'(p) + g'(p)$$

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p - f(p)}x = \frac{g'(p)}{p - f(p)}$$ (que é uma equação linear).

Como em geral não será possível isolar p na solução da equação linear anterior, a solução geral da equação de Lagrange será dada na forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = x(p) \\ y = y(p) \end{cases}$$

Resolva as seguintes equações:

1. $y = x\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{dy}{dx}$
2. $y = 2x\dfrac{dy}{dx} - x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

3. $y=\left(1+\dfrac{dy}{dx}\right)x+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

4. $y=-\dfrac{1}{2}\dfrac{dy}{dx}\left(2x+\dfrac{dy}{dx}\right)$

5. $y=2x\dfrac{dy}{dx}+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

6. $y=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2.e^{dy/dx}$

7. $y=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2+2\ln\dfrac{dy}{dx}$

8. $y=2x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dx}{dy}$

9. $y=\dfrac{dy}{dx}+\sqrt{1-\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

10. $4y=x^2+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$

Aplicação:

11. Achar a curva em que a reta tangente em qualquer ponto P, da curva, seja bissetriz do ângulo formado pela reta vertical que passa por P e pela reta que une P à origem.

Respostas:

1. $\begin{cases} x=-\dfrac{p}{\sqrt{p^2-1}}\left[\ln\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)-C\right] \\ y=-\dfrac{1}{\sqrt{p^2-1}}\left[\ln\left(p+\sqrt{p^2-1}\right)-C\right]-p \end{cases}$

2. $\begin{cases} x=\dfrac{C}{p^2} \\ y=\dfrac{2C}{p}-C \end{cases}$

3. $\begin{cases} x=ce^{-p}-2p+2 \\ y=c(1+p)e^{-p}-p^2+2 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x=\dfrac{1}{3}\left(cp^{-1/2}-p\right) \\ y=\dfrac{1}{6}\left(2cp^{1/2}-p^2\right) \end{cases}$

5. $\begin{cases} x=c/3p^2-2p/3 \\ y=(2c-p^3)/3p \end{cases}$

6. $\begin{cases} x=e^p+pe^p+c \\ y=p^2.e^p \end{cases}$

7. $\begin{cases} x=2p-2c/p \\ y=p^2+2\ln p \end{cases}$

8. $\begin{cases} x=\dfrac{\ln p+C}{p^2} \\ y=\dfrac{2\ln p+2C+1}{p} \end{cases}$

9. $\begin{cases} x=\ln p-arcsenp+C \\ y=p+\sqrt{1-p^2} \end{cases}$

10. $4y=x^2+p^2$

11. $C^2x^2-2Cy-1=0$

EQUAÇÕES LINEARES DE ORDEM SUPERIOR

Tipos especiais de equações de 2ª ordem:

1º) Equação do tipo: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x)$

Solução:

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x) \Rightarrow \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = f(x) \Rightarrow d\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = f(x)dx$. Integrando ambos os membros, vem:

$$\frac{dy}{dx} = \int f(x)dx + C_1$$

$$dy = \left[\int f(x)dx + C_1\right]dx$$

$$y = \int\left[\int f(x)dx + C_1\right]dx + C_2$$

Ex: Resolva a equação $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6x + 7 = 0$

2º) Equação do tipo $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(x, \dfrac{dy}{dx})$**:**

Faz-se $\dfrac{dy}{dx} = p, \quad p = p(x)$, vem: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx}$.

Assim, tem-se $\dfrac{dp}{dx} = f(x, p)$, que é uma equação de primeira ordem em relação a *p*, cuja solução geral desta equação é *p =F(x, C₁).*

Como p=$\dfrac{dy}{dx}$, vem:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, C_1) \Rightarrow dy = F(x, C_1)dx \Rightarrow y = \int F(x, C_1)dx + C_2$$

Ex.: Resolva as equações:

a) $(1+x)\dfrac{d^2y}{dx^2} + \dfrac{dy}{dx} = 0$

b) $y'' - y' = 6e^x$

3º) Equação do tipo $\dfrac{d^2y}{dx^2} = f(y)$**:**

Faz-se $\dfrac{dy}{dx} = p, \quad p = p(y)$, donde vem:

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{dp}{dx} = \dfrac{dp}{dy}.\dfrac{dy}{dx} = p\dfrac{dp}{dy}$.

Como $p\dfrac{dp}{dy} = f(y) \Rightarrow pdp = f(y)dy \Rightarrow \int pdp = \int f(y)dy \Rightarrow p^2 = 2\left[\int f(y)dy\right] + C_1$.

Daí vem:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2\left[\int f(y)dy\right] + C_1 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{2\left[\int f(y)dy\right] + C_1} \Rightarrow dx = \frac{dy}{\pm\sqrt{2\left[\int f(y)dy\right] + C_1}}$$

que é uma equação de variáveis separadas em *x* e *y*.

Ex.: Resolva a equação $y'' + 9y = 0$

Ex: Uma partícula de massa *m* se desloca ao longo do eixo dos x atraída por outra, situada na origem, com a força $F = -4mx^{-3}$, *sendo* $x > 0$. Determinar a equação do movimento, sabendo-se que para t =0 se tem x = 2 e a velocidade v = $-\sqrt{3}$.

4º) Equação do tipo $\frac{d^2y}{dx^2} = f(y, \frac{dy}{dx})$ **:**

Procedendo de modo análogo ao anterior, a equação se reduz a $p\frac{dp}{dy} = f(y, p)$.

Resolvendo-a em relação a p e substituindo pelo seu valor $\frac{dy}{dx}$, obtém-se uma equação de variáveis separadas.

Ex.: Resolver a equação $y.y'' - y^2.y' = (y')^2$

Equações lineares de ordem superior

Forma: Equações diferenciais lineares de ordem superior são as equações da forma $A_n\frac{d^ny}{dx^n} + A_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + A_2\frac{d^2y}{dx^2} + A_1\frac{dy}{dx} + A_0 y = B$ **(1)**, onde A_i e B são constantes ou funções de x, com i = 0 ... n. Quando B=0 diremos que a equação é linear homogênea.

Resolução: Iremos inicialmente resolver as equações lineares homogêneas de coeficientes constantes.

Observe que se fizermos $A_n = ... = A_2 = 0$ teremos uma equação linear de primeira ordem cuja solução particular pode ser da forma $y = e^{rx}$. Impondo que tal solução seja também uma solução particular da equação linear homogênea de coeficientes constantes, teremos a equação polinomial $A_n r^n + A_{n-1}r^{n-1} + \cdots + A_2 r^2 + A_1 r + A_0 = 0$, chamada de equação característica.

Em relação à equação característica podemos ter três casos a considerar:

i. ***Todas as raízes da equação característica são reais e distintas***

Sejam $r_1, r_2, r_3, ..., r_n$ as raízes reais e distintas da equação característica, então a solução geral será dada por:

$$\boxed{y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + C_3 e^{r_3 x} + \cdots + C_n e^{r_n x}}$$

ii. ***A equação característica tem raízes complexas***

Sejam $r_1 = a + bj$ e $r_2 = a - bj$ as raízes complexas da equação característica $A_2 r^2 + A_1 r + A_0 = 0$, proveniente da equação linear de segunda ordem $A_2\frac{d^2y}{dx^2} + A_1\frac{dy}{dx} + A_0 y = 0$, então a solução geral será dada por:

$$\boxed{y = e^{ax}\left(C_1 \cos bx + C_2 senbx\right)}$$

iii. A equação característica tem raízes múltiplas

Sejam $r_1 = r_2$ raízes múltiplas da equação característica $A_2 r^2 + A_1 r + A_0 = 0$, proveniente da equação linear de segunda ordem $A_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + A_1 \frac{dy}{dx} + A_0 y = B$, então a solução geral será dada por:

$$\boxed{y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 x e^{r_1 x}}$$

EXERCÍCIOS:

Encontre a solução geral para cada equação dada:

1. $4y''+y'=0$
2. $y''-36y=0$
3. $y''+9y=0$
4. $y''-y'-6y=0$
5. $y''+8y'+16y=0$
6. $y''+3y'-5y=0$
7. $12y''-5y'-2y=0$
8. $y''-4y'+5y=0$
9. $3y''+2y'+y=0$
10. $y'''-4y''-5y'=0$
11. $y'''-y=0$
12. $y'''-5y''+3y'+9y=0$
13. $y'''+y''-2y=0$
14. $y'''+3y''+3y'+y=0$
15. $\frac{d^4y}{dx^4}+\frac{d^3y}{dx^3}+\frac{d^2y}{dx^2}=0$
16. $16\frac{d^4y}{dx^4}+24\frac{d^2y}{dx^2}+9y=0$

Resolva as seguintes equações sujeita às condições indicadas:

17. $y''+16y=0$, $y(0)=2$ e $y'(0)=-2$
18. $y''+6y'+5y=0$, $y(0)=0$ e $y'(0)=3$
19. $2y''-2y'+5y=0$, $y(0)=-1$ e $y'(0)=0$
20. $y''+y'+2y=0$, $y(0)=y'(0)=0$
21. $y''-3y'+2y=0$, $y(1)=0$ e $y'(1)=1$
22. $y'''+12y''+36y'=0$, $y(0)=0$ e $y'(0)=1$ e $y''(0)=-7$

Respostas:

1. $y = c_1 + c_2 e^{-x/4}$
2. $y = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{6x}$
3. $y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$
4. $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$
5. $y = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$

6. $y = c_1 e^{(-3+\sqrt{29})x/2} + c_2 e^{(-3-\sqrt{29})x/2}$
7. $y = c_1 e^{2x/3} + c_2 e^{-x/4}$
8. $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$
9. $y = e^{-x/3}(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{3} x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{3} x)$
10. $y = c_1 + c_2 e^{-x} + c_3 e^{5x}$
11. $y = c_1 e^{x} + e^{-x/2}(c_2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_3 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x)$
12. $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x} + c_3 x e^{3x}$
13. $y = c_1 e^{x} + e^{-x}(c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x)$
14. $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x}$
15. $y = c_1 + c_2 x + e^{-x/2}\left(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_4 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$
16. $y = c_1 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_2 sen \frac{\sqrt{3}}{2} x + x.\left(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_4 sen \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$
17. $y = 2\cos 4x - \frac{sen 4x}{2}$
18. $y = -\frac{3e^{-5x}}{4} + \frac{3e^{-x}}{4}$
19. $y = -e^{x/2}\cos(3x/2) + \frac{e^{x/2} sen(3x/2)}{3}$
20. $y = 0$
21. $y = e^{2x-2} - e^{x-1}$
22. $y = \frac{5}{36} - \frac{5e^{-6x}}{36} + \frac{xe^{-6x}}{6}$

EQUAÇÕES LINEARES NÃO HOMOGÊNEAS

A solução geral de uma equação linear não homogênea tem a forma:

$\boxed{y = y_c + y_p}$, onde:

y_c é chamada solução característica ou complementar e é determinada resolvendo a equação linear como se fosse homogênea; já para determinarmos y_p, denominada solução particular, dispomos dos seguintes métodos:

i. Método dos coeficientes a determinar ou método de Descartes
ii. Método da variação de parâmetros ou método de Lagrange
iii. Método do operador derivada D.

MÉTODO DOS COEFICIENTES A DETERMINAR

Neste método impõem-se uma solução particular, de acordo com a forma do termo independente da equação linear. Podemos dividir este método nos seguintes casos particulares:

1° caso: O termo independente B é uma exponencial da forma $B = e^{ax}$. A solução particular terá a forma:

$$\boxed{y_p = Ax^h e^{ax}}, \qquad \text{onde}$$

h é a multiplicidade da raiz r=a na equação característica e A é um coeficiente a determinar.

2° caso: O termo independente B é da forma $B = senax$ ou $B = \cos ax$. A solução particular terá a forma:

$$\boxed{y_p = x^h (Asenax + B\cos ax)}, \qquad \text{onde}$$

h é a multiplicidade da raiz r=aj na equação característica e A e B são coeficientes a determinar.

3° caso: O termo independente B é um polinômio de grau m. A solução particular será um polinômio de grau m+r, onde r é a ordem da derivada de menor ordem da equação linear.

4° caso: O termo independente B é uma soma, subtração ou multiplicação de exponenciais, polinômios, senos ou cossenos. A solução particular será uma soma, subtração ou multiplicação dos termos do termo independente.

EXERCÌCIOS:
Resolva as seguintes equações diferenciais, pelo método dos coeficientes a determinar:

1. $y''+3y'+2y = 6$
2. $y''-10y'+25y = 30x+3$
3. $\frac{1}{4}y''+y'+y = x^2 - 2x$
4. $y''+4y'-2y = 2x^2 - 3x + 6$
5. $y''-9y = 54$
6. $y''-y'+y = 2\operatorname{sen} 3x$
7. $y''+25y = 6\operatorname{sen} x$
8. $16y^{(4)} - y = e^{x/2}$
9. $y''-5y'+4y = 8e^x$
10. $\frac{d^4y}{dx^4} - 2\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2} = e^x + 1$
11. $y''+3y = -48x^2e^{3x}$
12. $y''-y' = -3$
13. $y''-y'+\frac{y}{4} = 3 + e^{x/2}$
14. $y''+4y = 3\operatorname{sen} 2x$
15. $y''+y = 2x\operatorname{sen} x$
16. $y''-2y'+5y = e^x \cos 2x$
17. $y''+2y'+y = \operatorname{sen} x + 3\cos 2x$
18. $y'''-6y'' = 3 - \cos x$
19. $y'''-3y''+3y'-y = x - 4e^x$
20. $\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = (x-1)^2$
21. $y''+y = 8\operatorname{sen}^2 x$

Resolva as seguintes equações diferenciais, sujeita às condições iniciais dadas:

22. $y''+4y = -2,\quad y\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$ e $y'\left(\frac{\pi}{8}\right) = 2$
23. $5y''+y' = -6x,\quad y(0) = 0$ e $y'(0) = -10$
24. $y''+y'+5y = 35e^{-4x},\quad y(0) = -3$ e $y'(0) = 1$

25. $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=F_o\,\text{sen}\,\omega t,\quad x(0)=0 \text{ e } x'(0)=0$

26. $y''+y=\cos x-\text{sen}\,2x,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \text{ e } y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$

27. $y'''-2y''+y'=2-24e^{x}+40e^{5x},\quad y(0)=\dfrac{1}{2},\ y'(0)=\dfrac{5}{2} \text{ e } y''(0)=-\dfrac{9}{2}$

Respostas

1. $y=Ae^{-x}+Be^{-2x}+3$
2. $y=Ae^{5x}+Bxe^{5x}+\dfrac{6x}{5}+\dfrac{3}{5}$
3. $y=Ae^{-2x}+Bx^{-2x}+x^2-4x+7/2$
4. $y=Ae^{-(2+\sqrt{6})x}+Be^{(-2+\sqrt{6})x}-x^2-\dfrac{5x}{2}-9$
5. $y=Ae^{-3x}+Be^{3x}-6$
6. $y=e^{1/2}(A\cos\dfrac{\sqrt{3}x}{2}+Bsen\dfrac{\sqrt{3}x}{2})+\dfrac{6\cos 3x}{73}+\dfrac{-16sen3x}{73}$
7. $y=A\cos 5x+Bsen5x+\dfrac{senx}{4}$
8. $y=Ae^{x/2}+Be^{-x/2}+C\cos x/2+Dsenx/2+xe^{x/2}/8$
9. $y=Ae^{x}+Be^{4x}-\dfrac{8xe^{x}}{3}$
10. $y=A+Bx+Ce^{x}+Dxe^{x}+\dfrac{x^2}{2}\left(e^{x}+1\right)$
11. $y=A\cos\sqrt{3}x+Bsen\sqrt{3}x+(-4x^2+4x-4/3)e^{3x}$
12. $y=A+Be^{x}+3x$
13. $y=Ae^{x/2}+Bxe^{x/2}+12+\dfrac{1}{2}x^2e^{x/2}$
14. $y=A\cos 2x+Bsen2x-\dfrac{3}{4}x\cos 2x$
15. $y=Asenx+B\cos x-\dfrac{x^2}{2}\cos x+\dfrac{1}{2}xsenx$
16. $y=e^{x}(A\cos 2x+Bsen2x)+\dfrac{xe^{x}sen2x}{4}$
17. $y=Ae^{-x}+Bxe^{-x}-\dfrac{\cos x}{2}+\dfrac{12sen2x}{25}-\dfrac{9\cos 2x}{25}$
18. $y=A+Bx+Ce^{6x}-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{6\cos x}{37}+\dfrac{senx}{37}$
19. $y=Ae^{x}+Bxe^{x}+Cx^2e^{x}-x-3-\dfrac{2x^3e^{x}}{3}$
20. $y=A\cos x+Bsenx+Cx\cos x+Dxsenx+x^2-2x-3$

21. $y = Asenx + B\cos x + 4 + \dfrac{4\cos 2x}{3}$

22. $y = \sqrt{2}sen2x - 1/2$

23. $y = -200 + 200e^{-x/5} - 3x^2 + 30x$

24. $y = -10e^{-2x}\cos x + 9e^{-2x}senx + 7e^{-4x}$

25. $x = \dfrac{F_o}{2\omega^2}sen\omega t - \dfrac{F_o}{2\omega}t\cos\omega t$

26. $y = \dfrac{-\cos x}{6} - \dfrac{\pi senx}{4} + \dfrac{xsenx}{2} + \dfrac{sen2x}{3}$

27. $y = 11 - 11e^x + 9xe^x + 2x - 12x^2e^x + e^{5x}/2$

MÉTODO DA VARIAÇÃO DE PARÂMETROS (LAGRANGE)

Vamos desenvolver o método inicialmente para uma equação linear de segunda ordem $\dfrac{d^2y}{dx^2} + A_1\dfrac{dy}{dx} + A_0y = B$ (1). A solução característica de (1) é dada por $y_c = C_1y_1 + C_2y_2$ e a solução particular será dada por $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$, onde u_1 e u_2 são funções que serão determinadas pela resolução do sistema:

$$\boxed{\begin{cases} u'_1\,y_1 + u'_2\,y_2 = 0 \\ u'_1\,y'_1 + u'_2\,y'_2 = B \end{cases}}$$

EXERCÍCIOS:

Resolva as seguintes equações diferenciais pelo método da variação de parâmetros:

1. $y'' + y = \sec x$
2. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$
3. $y'' + y = \dfrac{1}{senx}$
4. $y'' + 9y = \cot g3x$
5. $y'' - 2y = 4x^2e^{x^2}$
6. $y'' + y = senx$
7. $y'' + y = \cos^2 x$
8. $y'' - y = \cosh x$
9. $y'' - 4y = e^x \cos x$
10. $y'' + 3y' + 2y = \dfrac{1}{1+e^x}$
11. $y'' + 3y' + 2y = sene^x$
12. $y'' + 9y = 2\sec 3x$
13. $y'' - 2y' + y = x^{-2}e^x$
14. $y'' + 4y = \text{sen}^2 x$

Respostas:

1. $y = A\cos x + Bsenx + xsenx + \cos x.\ln(\cos x)$
2. $y = (A + Bx)e^x + xe^x \ln x$
3. $y = A\cos x + Bsenx - x.\cos x + senx.\ln(senx)$

4. $y = A\cos 3x + Bsen3x + \dfrac{sen3x}{9}\cdot \ln tg\left(\dfrac{3x}{2}\right)$

5. $y = Ae^{x\sqrt{2}} + Be^{-x\sqrt{2}} + e^{x^2}$

6. $y = A\cos x + Bsenx - \dfrac{x\cos x}{2}$

7. $y = A\cos x + Bsenx + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{6}\cos 2x$

8. $y = Ae^{x} + Be^{-x} + \dfrac{xe^{x}}{4} - \dfrac{xe^{-x}}{4} = Ae^{x} + Be^{-x} + \dfrac{xsenhx}{2}$

9. $y = Ae^{2x} + Be^{-2x} + \dfrac{e^{x}}{10}(senx - 2\cos x)$

10. $y = Ae^{-x} + Be^{-2x} + (e^{-x} + e^{-2x})\ln(1 + e^{x})$

11. $y = Ae^{-x} + Be^{-2x} - e^{-2x}sene^{x}$

12. $y = Asen3x + B\cos 3x + \dfrac{2}{3}sen3x + \dfrac{2}{9}(\cos 3x)\ln(\cos 3x)$

13. $y = Ae^{x} + Bxe^{x} - e^{x}(1 + \ln x)$

14. $y = Asen2x + B\cos 2x + \dfrac{1}{8}(1 - xsen2x)$

MÉTODO DO OPERADOR DERIVADA

Conceito: Dada uma função definida por y=f(x), chama-se operador derivada, denotado por D, a

$D = \dfrac{d}{dx},\ D^2 = \dfrac{d^2}{dx^2},\ D^3 = \dfrac{d^3}{dx^3},\ ...$

Propriedades:

Sejam u=u(x) e v =v(x):

P1. D(u+v)=Du+Dv

P2. D(a.u)=a.Du, a $\in\Re$

P3. $D^m(D^n u) = D^{m+n}u$, com m$\in\Re$ e n$\in\Re$.

P4. O operador direto $(D-a)u = Du - a.u$, a $\in\Re$.

P5. O operador inverso $\dfrac{1}{D-a}u = e^{ax}\int e^{-ax}.u.dx$, a $\in\Re$.

Exemplo: Resolver a equação $\left(D^2 - 5D + 6\right)y = e^{3x}$, utilizando o operador inverso.

$$\left(D^2 - 5D + 6\right)y = e^{3x}$$
$$(D-2)(D-3)y = e^{3x}$$
$$(D-3)y = \frac{1}{D-2}e^{3x}$$
$$(D-3)y = e^{2x}\int e^{-2x}.e^{3x}dx$$
$$(D-3)y = e^{2x}.\left(e^{x} + C\right)$$
$$(D-3)y = e^{3x} + Ce^{2x}$$

$$y = \frac{1}{D-3}(e^{3x} + Ce^{2x})$$
$$y = e^{3x}\int e^{-3x}(e^{3x} + Ce^{2x})dx$$
$$y = e^{3x}(x - Ce^{-x} + C_1)$$
$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{2x} + xe^{3x}$$

SIMPLIFICAÇÃO DO MÉTODO DO OPERADOR DERIVADA

Casos particulares

1°. Na equação diferencial $P(D)y = e^{ax}$ a solução particular será dada por $y_p = \frac{1}{P(a)}e^{ax}$, se P(a)≠0

2°. Na equação diferencial $P(D^2)y = sen(ax)$ a solução particular será dada por $y_p = \frac{1}{P(-a^2)}sen(ax)$.

3°. Na equação diferencial $P(D^2)y = \cos(ax)$ a solução particular será dada por $y_p = \frac{1}{P(-a^2)}\cos(ax)$.

4°. Na equação diferencial $P(D)y = x^m$ a solução particular será dada por $y_p = \frac{1}{P(D)}x^m$, onde $\frac{1}{P(D)}$ deverá ser desenvolvido em série de potências crescentes em D.

5°. Na equação diferencial $P(D)y = e^{ax}.f(x)$ a solução particular será dada por $y_p = e^{ax}\frac{1}{P(D+a)}f(x)$.

EXERCÍCIOS:

Resolver as seguintes equações diferenciais empregando o operador inverso:

1. $\left(D^2 - 3D + 2\right)y = e^x \text{ sen } x$
2. $\left(D^3 - 16D\right)y = e^{4x} + 1$
3. $\left(D^2 - 7D + 12\right)y = 5e^{3x}$
4. $\left(D^3 - 3D + 2\right)y = xe^{-2x}$

Resolver as seguintes equações diferenciais empregando o método dos operadores:

5. $\left(D^2 - 3D + 2\right)y = 5e^{3x}$
6. $\left(D^2 - 3D + 2\right)y = 3e^{2x}$
7. $(D-1)^2(D-2)y = 3e^x + 2e^{-x}$
8. $\left(D^2 - D - 12\right)y = e^{4x}$
9. $\left(D^2 + 4\right)y = 3\cos x$
10. $\left(D^2 - 3D + 2\right)y = 2\,\text{sen}\,2x$
11. $\left(D^2 + 25\right)y = 20\,\text{sen}\,5x$
12. $\left(D^2 - 4\right)y = x - 1$
13. $\left(D^2 - 3D + 2\right)y = x^2 - 3$
14. $\left(D^3 - 4D^2 + 4D\right)y = x^2 + 2x - 1$
15. $\left(D^2 - 2D - 3\right)y = 4e^x - 9$
16. $\left(D^2 - 4\right)y = x^2e^x$

17. $\left(D^2 - 3D + 2\right)y = e^x sen 2x$

18. $\left(D^2 - 2D + 5\right)y = e^x \text{ sen } x$

19. $\left(D^4 + 2D^3 - 3D^2\right)y = x^2 + 3e^{2x} + 4 \text{sen } x$

20. $\left(D^2 - 4D + 3\right)y = 2xe^{3x} + 3e^x \cos 2x$

Respostas

1. $y = Ae^x + Be^{2x} + \frac{e^x}{2}(\cos x - senx)$
2. $y = A + Be^{-4x} + Ce^{4x} + \frac{xe^{4x}}{32} - \frac{x}{16}$
3. $y = Ae^{3x} + Be^{4x} - 5xe^{3x}$
4. $y = Ae^x + Bxe^x + Ce^{-2x} + \frac{2xe^{-2x}}{27} + \frac{x^2e^{-2x}}{18}$
5. $y = Ae^x + Be^{2x} + \frac{5}{2}e^{3x}$
6. $y = Ae^x + Be^{2x} + 3xe^{2x}$
7. $y = Ae^x + Bxe^x + Ce^{2x} - \frac{3}{2}x^2e^x - \frac{1}{6}e^{-x}$
8. $y = Ae^{-3x} + Be^{4x} + \frac{xe^{4x}}{7}$
9. $y = A\cos 2x + Bsen2x + \cos x$
10. $y = Ae^x + Be^{2x} + \frac{1}{10}(3\cos 2x - sen2x)$
11. $y = A\cos 5x + Bsen5x - 2x\cos 5x$
12. $y = Ae^{-2x} + Be^{2x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{4}$
13. $y = Ae^x + Be^{2x} + \frac{x^2}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{1}{4}$
14. $y = A + Be^{2x} + Cxe^{2x} + \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + \frac{5x}{8}$
15. $y = Ae^{-x} + Be^{3x} - e^x + 3$
16. $y = Ae^{2x} + Be^{-2x} - e^x\left(\frac{x^2}{3} + \frac{4x}{9} + \frac{14}{27}\right)$
17. $y = Ae^x + Be^{2x} + \frac{e^x}{10}\left(\cos 2x - 2sen2x\right)$
18. $y = e^x(A\cos 2x + Bsen2x) + \frac{e^x senx}{3}$
19. $y = A + Bx + Ce^x + De^{-3x} - \frac{x^4}{36} - \frac{2x^3}{27} - \frac{7x^2}{27} + \frac{3e^{2x}}{20} + \frac{2}{5}\left(\cos x + 2senx\right)$
20. $y = Ae^x + Be^{3x} + \frac{xe^{3x}}{2}(x - 1) - \frac{3e^x}{8}(sen2x + \cos 2x)$

EQUAÇÃO DE EULER-CAUCHY

A equação de Euler-Cauchy tem a seguinte forma: $A_n(ax+b)^n \frac{d^n y}{dx^n} + \cdots + A_2(ax+b)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + A_1(ax+b)\frac{dy}{dx} + A_0 y = B$, onde A_0, A_1, ..., A_n, a e b são constantes. Para resolver tal equação faremos $ax+b = a.e^t$, que irá eliminar os coeficientes variáveis.

EXERCÍCIOS:

Resolver as seguintes equações diferenciais:

1. $(2x+1)^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2(2x+1)\frac{dy}{dx} - 12y = 6x$
2. $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} - 12y = 0$
3. $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + y = \ln x$
4. $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x$
5. $x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + 2y = 3x$
6. $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 2xy' + 2y = 0$
7. $x^3 y''' + 2xy' - 2y = x^2 \ln x + 3x$
8. $(1+x)^3 y''' + 9(1+x)^2 y'' + 18(1+x)y' + 6y = \ln(1+x)$
9. $x^2 y'' + 3xy' = 0,\ \text{com } y(1) = 0 \text{ e } y'(1) = 4$
10. $x^2 y'' + xy' + y = 0,\ \text{com } y(1) = 1 \text{ e } y'(1) = 2$

Resolva as seguintes equações diferenciais por desenvolvimento em série:

11. $x\frac{dy}{dx} - y - x^2 = 0$
12. $xy' - y - x^2 e^x = 0$
13. $(1+x^2)y'' + xy' - y = 0$

Respostas

1. $y = A\frac{2}{2x+1} + B\left(\frac{2x+1}{2}\right)^3 - \frac{6x+3}{16} + \frac{1}{4}$
2. $y = Ax^3 + Bx^{-4}$
3. $y = Ax + Bx\ln x + 2 + \ln x$
4. $y = Ax + Bx^3 + 2x^2 e^x - 2xe^x$
5. $y = Ax + Bx^2 - 3x\ln x$
6. $y = Ax + Bx\ln x + Cx^{-2}$

7. $y = Ax + x[B\cos(\ln x) + Csen(\ln x)] + \dfrac{x^2 \ln x}{2} - x^2 + 3x\ln x$

8. $y = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{(x+1)^2} + \dfrac{C}{(x+1)^3} + \dfrac{\ln(x+1)}{6} - \dfrac{11}{36}$

9. $y = 2 - \dfrac{2}{x^2}$

10. $y = \cos(\ln x) + 2sen(\ln x)$

11. $y = Ax + x^2$

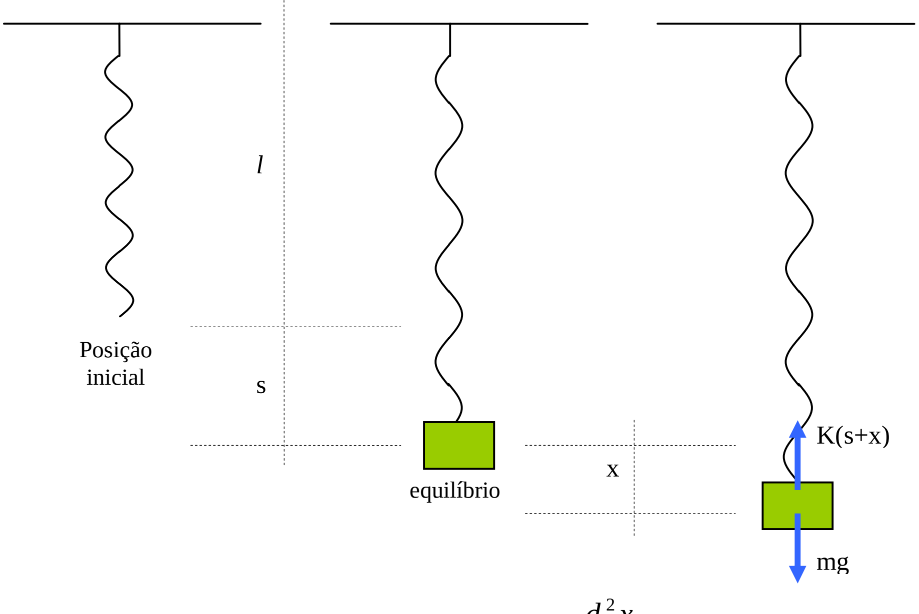
12. $y = Ax + xe^x$

13. $y = A_o + A_1 x + \dfrac{A_o}{2}x^2 - \dfrac{A_o}{8}x^4 + \ldots$

APLICAÇÕES

1. Molas

Um corpo de massa *m* é conectado a uma mola de comprimento *l* e constante elástica *k*, provocando um deslocamento *s* na mola, atingindo o equilíbrio. Após o equilíbrio, se a massa for deslocada de uma distância *x* e solta, teremos um movimento harmônico simples.



Pela 2ª lei de Newton $F = ma$. Como $a = \dfrac{d^2x}{dt^2}$ teremos:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -ks - kx + mg$$

Mas como na posição de equilíbrio mg=ks, vem:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx\,, \quad (1)$$

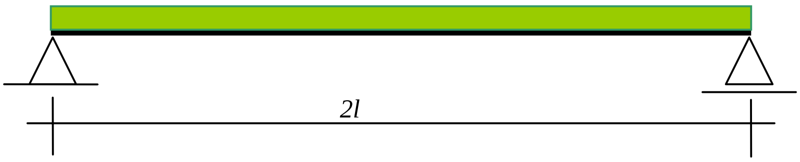
sujeito às condições iniciais $x(0)=x_0$ e $x'(0)=x_1$. Resolvendo, teremos a equação do movimento.

Obs.: Quando tivermos uma força de resistência ao movimento, devida ao meio ambiente, por exemplo, vamos supor que esta força seja proporcional à velocidade. Assim a equação (1) acima ficará:

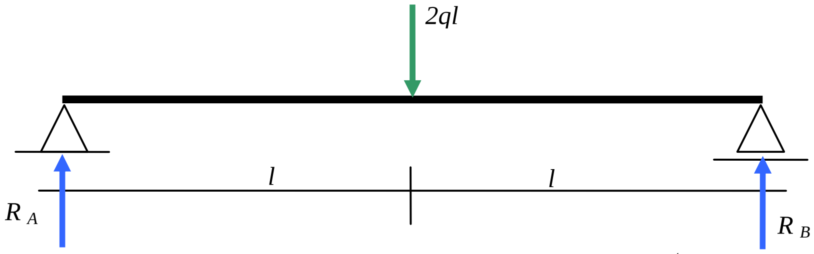
$m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -kx - \alpha\dfrac{dx}{dt}$, onde α é uma constante de proporcionalidade.

2. Deformação em vigas horizontais

Dada uma viga simplesmente apoiada de comprimento (vão) *2l*, sujeita a uma carga uniformemente distribuída *q*.

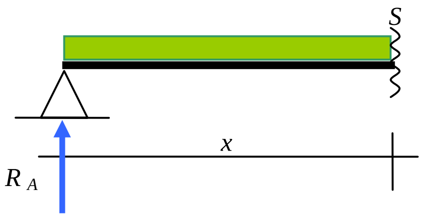


Para determinar as reações de apoio, poderemos associar a carga uniformemente distribuída a uma carga concentrada equivalente, aplicada no centro de gravidade da carga uniforme.



Aplicando as equações de equilíbrio da Estática $\left(\sum H = 0, \sum \mathrm{V} = 0 \text{ e } \sum \mathrm{M} = 0\right)$ chegaremos a $R_A = R_B = ql$, onde H, V e M são as componentes horizontais, verticais e momentos estáticos, respectivamente.

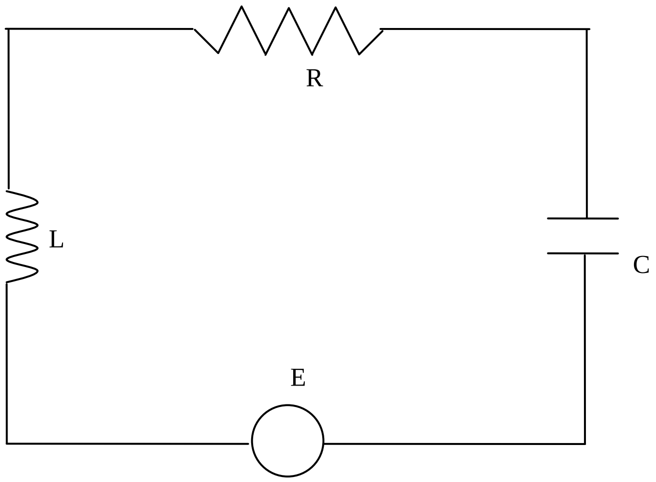
Para a determinação da equação dos momentos, tomaremos uma seção S, qualquer, na estrutura.



Chegando a: $M_S = R_A.x - qx.\dfrac{x}{2} = \dfrac{qlx}{2} - \dfrac{qx^2}{2}$.

Sabemos da Mecânica que $\dfrac{EI}{R} = M$, onde E é o módulo de elasticidade, I é o momento de inércia da seção transversal, R é o raio de curvatura da linha elástica. Do Cálculo Diferencial, sabemos que $R = \dfrac{\left[1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\dfrac{d^2y}{dx^2}}$. Como a inclinação da linha elástica é muito pequena, podemos impor que $\dfrac{dy}{dx} = 0$, chegando a $\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{M}{EI}$, que sujeita as condições de contorno y(0)=0 e y'(*l*)=0, nos dará a equação da linha elástica.

3. Circuitos elétricos RLC em série



Aplicando a segunda Lei de Kirchoff, chegamos a:

$L\dfrac{d^2q}{dt^2}+R\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{q}{C}=E(t)$, que sujeito às condições iniciais i(0)=i_o e q(0)=q_o, nos dará a equação da carga q=q(t) num circuito RLC, em série.

Exercícios:

1. Uma certa mola, cuja constante é k=48lb/ft, é mantida na vertical, estando sua extremidade superior presa a um suporte. Um corpo pesando 16lb é amarrado à extremidade inferior da mola. Depois do sistema em repouso, o corpo é puxado 2 polegadas para baixo e em seguida solto. Desprezando a resistência do ar, discutir o movimento.
2. Uma viga horizontal simplesmente apoiada, de comprimento *2l* está sujeita a uma carga uniformemente distribuída *q*. Determinar a equação da linha elástica e a deformação máxima (flecha).
3. Determinar a equação da corrente (*i*) e a equação da carga (*q*) em um circuito com uma indutância de 0,5 henry, uma resistência de 20 ohms, uma capacitância de 100 microfarads e uma força eletromotriz dada por $E(t)=100\cos 200t$, sujeito às condições iniciais i=0 e q=0 quando t=0.
4. Um peso de 0,5kg é atado a uma mola de 1,5m de comprimento. Na posição de equilíbrio, o comprimento da mola é de 2,48m. Se o peso for suspenso e solto a partir do repouso de um ponto 2m acima da posição de equilíbrio, encontre o deslocamento x(t) se é sabido ainda que o meio ambiente oferece uma resistência numericamente igual à velocidade instantânea.

Respostas:

1. $x=\dfrac{\cos\sqrt{96}t}{6}$ 2. $EIy=\dfrac{qlx^3}{6}-\dfrac{qx^4}{24}-\dfrac{ql^3x}{3}$, $y_{\max}=\dfrac{5ql^4}{24EI}$

3. $q=e^{-200t}(-0{,}01\cos 400t-0{,}0075sen400t)+0{,}01\cos 200t+0{,}005sen200t$

$i=e^{-200t}(-\cos 400t+5{,}5sen400t)-2sen200t+\cos 200t$

4. $x(t)=e^{-t}\left(-2\cos 3t-\dfrac{2sen3t}{3}\right)$

SISTEMAS DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Chama-se sistema de equações diferenciais a um conjunto de equações diferenciais que tenham as mesmas funções incógnitas e que se verifiquem simultaneamente para as mesmas soluções.

Neste item iremos estudar somente os sistemas de equações diferenciais ordinárias de coeficientes constantes em que o número de equações seja igual ao número de funções incógnitas.

A resolução dos sistemas de equações diferenciais é análoga à resolução dos sistemas de equações algébricas lineares.

É sempre conveniente escrever o sistema em função do operador derivada D.

EXERCÍCIOS:

Resolver os seguintes sistemas de equações diferenciais:

1. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dz}{dx} - y = e^x \\ \dfrac{dy}{dx} - \dfrac{d^2z}{dx^2} - 2z = x^2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dfrac{dx}{du} + 6x + 3y - 14z = 0 \\ \dfrac{dy}{du} - 4x - 3y + 8z = 0 \\ \dfrac{dz}{du} + 2x + y - 5z = senu \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{dz}{dx} - 4y - z = e^x \\ \dfrac{dy}{dx} + 3y + z = 0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} (D-3)y + 2(D+2)z = 2senx \\ 2(D+1)y + (D-1)z = \cos x \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{d^2y}{dx^2} - 3\dfrac{dz}{dx} = x^2 \\ \dfrac{d^2y}{dx^2} - 2\dfrac{dz}{dx} - 2y + z = x \end{cases}$

6. $x' = -3x + 2y$, y'= -3x + 4y , com x=x(t), y=y(t), x(0)=0 e y(0)=2

7. $2y' - x' = x + 3y + e^t$, 3x'-4y'= x -15y + e^{-t}

Respostas:

1) $\begin{cases} z = Ae^{\sqrt{2}x} + Be^{-\sqrt{2}x} + C\cos x + Dsenx - \dfrac{e^x}{2} - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{3}{2} \\ y = 2\sqrt{2}Ae^{\sqrt{2}x} - 2\sqrt{2}Be^{-\sqrt{2}x} - C\cos x + Dsenx - \dfrac{3e^x}{2} + 2x \end{cases}$

2) $$\begin{cases} x = Ae^{u} + Be^{2u} + Ce^{-u} - 5senu + \cos u \\ y = -\dfrac{Be^{-u}}{2} - \dfrac{4Ce^{2u}}{5} + \dfrac{12senu}{5} - \dfrac{4\cos u}{5} \\ z = \dfrac{Ae^{u}}{2} + \dfrac{Be^{-u}}{4} + \dfrac{2Ce^{2u}}{5} - \dfrac{17senu}{10} - \dfrac{\cos u}{10} \end{cases}$$

3) $$\begin{cases} y = A\cos x + Bsenx - \dfrac{e^{x}}{2} \\ z = -(3A+B)\cos x + (A-3B)senx + 2e^{x} \end{cases}$$

4) $$\begin{cases} y = Ae^{-x/3} + Be^{-5x} + \dfrac{1}{65}(8senx + \cos x) \\ z = Ae^{-x/3} - \dfrac{4Be^{-5x}}{3} - \dfrac{33\cos x}{130} + \dfrac{61senx}{130} \end{cases}$$

5) $$\begin{cases} z = A + Be^{2x} + Ce^{-3x} - \dfrac{x^{3}}{9} - \dfrac{x^{2}}{18} + \dfrac{11x}{54} \\ y = \dfrac{3Be^{2x}}{2} - Ce^{-3x} - \dfrac{x^{3}}{18} + \dfrac{11x^{2}}{36} \end{cases}$$

6) $x = \dfrac{4}{5}(e^{3t} - e^{-2t})$, $y = \dfrac{2}{5}(6e^{3t} - e^{-2t})$

7) $x = A\cos 3t + Bsen3t - \dfrac{11e^{t}}{20} - \dfrac{e^{-t}}{4}$, $y = \dfrac{1}{3}\{(A-B)\cos 3t + (A+B)sen3t\} + \dfrac{e^{t}}{10}$

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS

Conceitos:

São as equações diferenciais que possuem derivadas parciais de uma função de várias variáveis.

A maior ordem da derivada que aparece na equação diferencial é chamada de ordem da equação diferencial parcial.

Com respeito às soluções de uma equação diferencial parcial devemos citar as soluções: Solução geral que é aquela que possui funções arbitrárias, a solução completa que possui constantes arbitrárias e a solução singular que é a envoltória da família de superfícies correspondentes à solução completa.

Usualmente, nas equações diferenciais parciais que possuam derivadas parciais da função z=f(x,y), denota-se $\dfrac{\partial z}{\partial x} = p$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = q$, ou seja, a equação $zx\dfrac{\partial z}{\partial x} + yz\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy$ pode ser escrita da forma $zxp + yzq = 2xy$.

As equações da forma $P.p + Q.q = R$ são chamadas de equações lineares, onde P=P(x,y,z), Q=Q(x,y,z) e R=R(x,y,z)

Determinação da solução geral:

Nos casos particulares das equações lineares $P.p + Q.q = R$, onde P=0 ou Q=0 a solução geral é facilmente determinada por integração, vejamos os exemplos:

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 4x + y - 3$ terá solução geral $z = 2x^2 + xy - 3x + f(y)$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 4x + y - 3$ terá solução geral $z = 4xy + \dfrac{y^2}{2} - 3y + f(x)$

EXERCÍCIOS:
Determine a solução geral das equações diferenciais parciais:

1. $x + yp = 0$
2. $xp = x + 2y + 2z$
3. $y - xq = 0$
4. $xp - y = z - x$
5. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 5\dfrac{\partial z}{\partial x} + 6z = 12x$
6. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 4\dfrac{\partial z}{\partial x} - 5z = e^x$
7. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = x^2 + y^2$
8. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2xy^2$

Respostas:

1. $z = -\dfrac{x^2}{2y} + \phi(y)$
2. $z = x^2\phi(y) - x - y$
3. $z = \dfrac{y^2}{2x} + \phi(x)$
4. $z = x\left[-\dfrac{y}{x} - \ln x + \phi(x)\right]$
5. $z = \phi_1(y).e^{2x} + \phi_2(y).e^{3x} + 2x + \dfrac{5}{3}$
6. $z = \phi_1(y).e^{-x} + \phi_2(y).e^{5x} - \dfrac{e^x}{8}$
7. $z = \dfrac{x^3 y}{3} + \dfrac{xy^3}{3} + \phi_1(x) + \phi_2(y)$
8. $z = \dfrac{x^2 y^3}{3} + \phi_1(x) + \phi_2(y)$

Nos casos gerais poderemos empregar o método de Lagrange, que consiste na resolução do sistema $\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$, cujas soluções são u=u(x,y,z)=a e v=v(x,y,z)=b e as relações $\phi(u,v) = 0$ ou $u = \phi(v)$ ou ainda $v = \phi(u)$ serão soluções gerais da equação diferencial linear, desde que pelo menos u ou v tenham a variável z.

Exemplos:

Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais parciais:

1) $2px - 3qy = 2z$

Na comparação com a equação linear vemos que $P = 2x$, $Q = -3y$ e $R = 2z$, que substituído no sistema de Lagrange $\dfrac{dx}{P} = \dfrac{dy}{Q} = \dfrac{dz}{R}$, resulta $\dfrac{dx}{2x} = \dfrac{dy}{-3y} = \dfrac{dz}{2z}$.

De $\dfrac{dx}{2x} = \dfrac{dy}{-3y}$ obtemos $x^3 y^2 = a$ e de $\dfrac{dy}{-3y} = \dfrac{dz}{2z}$ teremos $z^3 y^2 = b$

Assim uma solução geral pode ser $z^3 y^2 = \phi(x^3 y^2)$

2) $yp + xq = 0$

Substituindo no sistema de Lagrange $P = y$, $Q = x$ e $R = 0$, teremos:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$$

De $\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x}$ obtemos $x^2 - y^2 = a$ e de $\frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$ teremos $z = b$, logo:

$z = \phi(x^2 - y^2)$ é uma solução geral.

3) $(x - y + x)p + (2y - z)q = z$

O sistema auxiliar é dado por $\frac{dx}{x - y + z} = \frac{dy}{2y - z} = \frac{dz}{z}$

De $\frac{dy}{2y - z} = \frac{dz}{z}$ vem a equação linear $\frac{dy}{dz} - \frac{2y}{z} = -1$ cuja solução é $\frac{y}{z^2} - \frac{1}{z} = a$

Para determinarmos uma segunda equação diferencial a partir do sistema auxiliar, vamos aplicar propriedades das proporções, assim:

$$\frac{dx}{x - y + z} = \frac{dy}{2y - z} = \frac{dz}{z} = \frac{dx + dy}{x - y + z + 2y - z} = \frac{d(x + y)}{x + y}$$, de onde obteremos:

$$\frac{dz}{z} = \frac{d(x + y)}{x + y}$$

$$\frac{z}{x + y} = b$$

Logo $\frac{z}{x + y} = \phi\left(\frac{y}{z^2} - \frac{1}{z}\right)$ é uma solução geral.

EXERCÍCIOS:

Determine a solução geral das equações diferenciais parciais:

1. $2p + 3q = 1$
2. $y^2 zp - x^2 zq = x^2 y$
3. $x\frac{\partial z}{\partial t} + y\frac{\partial z}{\partial y} + t\frac{\partial z}{\partial t} = xyt$
4. $p + q = z$
5. $3p + 4q = 2$
6. $-xp + yq = z$
7. $xzp + yzq = xy$
8. $x^2 p + y^2 q = z^2$
9. $yp - xq = 2xyz$
10. $p.senx + q.\cos x = 1$
11. $\frac{y^3}{x^2}p + \frac{x^3}{y^2}q = z$
12. $(x^2 + y^2)p + 2xyq = (x + y)^3 z$

Respostas:

1. $\phi(x - 2z, 3x - 2y) = 0$
2. $y^2 + z^2 = \phi(x^3 + y^3)$
3. $\phi(x / y, t / y, xyt - 3z) = 0$
4. $z = e^y \phi(x - y)$
5. $3z = 2x + \phi(3y - 4x)$
6. $xz = \phi(xy)$
7. $y = x\phi(xy - z^2)$
8. $x - y = xy\phi(1/x - 1/z)$
9. $z = e^{x^2}.\phi(x^2 + y^2)$
10. $\ln(senx) - y = \phi\left[z - \ln(tg\frac{x}{2})\right]$

11. $\phi\left(\dfrac{x^3+y^3}{z^3}, x^6-y^6\right)=0$

12. $(x+y)^2-2\ln z=\phi\left(\dfrac{2x}{x^2-y^2}\right)$

Determinação da solução completa – Método de Charpit:

Dada uma equação diferencial não linear $f(x,y,z,p,q)=0$ (1), com z uma função de x e y. O método de Charpit para a determinação da solução completa (1), consiste em encontrar uma equação $F(x,y,z,p,q)=0$ (2) tal que na resolução simultânea de (1) e (2) possamos determinar uma relação $p=P(x,y,z)$ e $q=Q(x,y,z)$ de modo que a na diferencial total $dz=p.dx+q.dy$ possa ser integrada. Para a obtenção de (2) deveremos resolver o sistema auxiliar:

$$\boxed{\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}}=\frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}}=\frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x}+p\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y}+q\frac{\partial f}{\partial z}}=\frac{dz}{-\left(p\frac{\partial f}{\partial p}+q\frac{\partial f}{\partial q}\right)}=\frac{dF}{0}} \quad (3)$$

Exemplos:

Determine a solução completa das seguintes equações diferenciais parciais:

a) $q=-xp+p^2$

A função $f(x,y,z,p,q)=0$ (1) é $f=q+xp-p^2=0$ e substituída no sistema auxiliar nos fornece:

$$\frac{dx}{2p-x}=\frac{dy}{-1}=\frac{dp}{p}=\frac{dq}{0}=\frac{dz}{-px+2p^2-q}=\frac{dF}{0}$$

A partir de $\dfrac{dy}{-1}=\dfrac{dp}{p}$ vem $p=a.e^{-y}$

Substituindo na equação diferencial dada implica em:

$$q=-xp+p^2=-axe^{-y}+a^2e^{-2y}.$$

Substituindo p e q em $dz=p.dx+q.dy$, teremos:

$dz=a.e^{-y}dx+\left(-ax.e^{-y}+a^2e^{-2y}\right)dy$, que é uma diferencial exata, pois $\dfrac{\partial a.e^{-y}}{\partial y}=\dfrac{\partial(-ax.e^{-y}+a^2e^{-2y})}{\partial x}$, e integrada resulta em:

$$z=ax.e^{-y}-\frac{a^2e^{-2y}}{2}+b$$, que é a solução completa.

b) $2p+q^3-3=0$

O sistema auxiliar será $\dfrac{dx}{-2}=\dfrac{dy}{-2q}=\dfrac{dp}{0}=\dfrac{dq}{0}=\dfrac{dz}{-2p-2q^2}=\dfrac{dF}{0}$ e da razão $\dfrac{dp}{0}$ teremos $p=a$, que substituído na equação dada nos fornece $q=\sqrt[3]{3-2a}$.

Substituindo p e q em $dz=p.dx+q.dy$, teremos $dz=adx+\sqrt[3]{3-2a}dy$.

Integrando a diferencial anterior teremos a solução completa:

$$z=ax+\sqrt[3]{3-2a}\,y+b$$

c) $2yp^2 + 5q = 0$

O sistema auxiliar será $\dfrac{dx}{-4yp} = \dfrac{dy}{-5} = \dfrac{dp}{0} = \dfrac{dq}{2q^2} = \dfrac{dz}{-4p^2y - 5q} = \dfrac{dF}{0}$ e da razão $\dfrac{dp}{0}$ teremos $p = a$, que substituído na equação dada nos fornece $q = \dfrac{-2a^2y}{5}$, assim $dz = a.dx - \dfrac{2a^2y}{5}dy$ nos dará a solução completa $z = ax - \dfrac{a^2y^2}{5} + b$.

d) $pq = z$

$$\frac{dx}{-\frac{\partial f}{\partial p}} = \frac{dy}{-\frac{\partial f}{\partial q}} = \frac{dp}{\frac{\partial f}{\partial x} + p\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dq}{\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{dz}{-\left(p\frac{\partial f}{\partial p} + q\frac{\partial f}{\partial q}\right)} = \frac{dF}{0}$$

$$\frac{dx}{-q} = \frac{dy}{-p} = \frac{dp}{-p} = \frac{dq}{-q} = \frac{dz}{-2pq} = \frac{dF}{0}$$

De $\dfrac{dp}{-p} = \dfrac{dq}{-q}$ vem $p = a.q$

Resolvendo $\begin{cases} p = aq \\ pq = z \end{cases}$ teremos:

$p = \sqrt{az}$ e $q = \sqrt{\dfrac{z}{a}}$ que substituído na diferencial $dz = p.dx + q.dy$ nos fornece $\sqrt{az}dx + \sqrt{\dfrac{z}{a}}dy = dz$, que integrado nos dará a solução completa $2\sqrt{z} = \dfrac{ax + y}{\sqrt{a}} + b$.

A aplicação do método de Charpit para determinadas formas de equações diferenciais parciais nos darão regras mais simplificadas para a obtenção da solução completa. Podemos citar os seguintes casos:

i. $f(p, q) = 0$

Uma solução completa é $z = ax + by + c$, onde $f(p, q) = 0$ com $a = p$ e $b = q$.

ii. $f(x, p, q) = 0$

Fazendo $q = a$ em $f(x, p, q) = 0$ determinaremos $p = f_1(a, x)$, que substituído em $dz = p.dx + q.dy$ e integrado nos dará a solução completa $z = \int f_1(a, x)dx + ay + b$.

iii. $f(y, p, q) = 0$

Fazendo $p = a$ em $f(y, p, q) = 0$ determinaremos $q = f_1(a, y)$, que substituído em $dz = p.dx + q.dy$ e integrado nos dará a solução completa $z = ax + \int f_1(a, y)dy + b$.

iv. $f(z, p, q) = 0$

A partir das equações auxiliares do método de Charpit teremos $q = ap$ (1), assim a equação $f(z, p, q) = 0$ ficará $f(z, p, ap) = 0$ (2). A integração de $dz = p.dx + q.dy$ após a substituição de q e p, das equações (1) e (2) anteriores, nos dará a solução completa.

v. $z = px + qy + f(p,q)$

Uma solução completa tem a forma $z = ax + by + c$, com $c = f(p,q)$.

EXERCÍCIOS:

Determine a solução completa das equações diferenciais parciais:

1. $p^2 + q^2 = 9$
2. $pq + p + q = 0$
3. $z = px + qy + p^2 + pq + q^2$
4. $z = px + qy + p^2q^2$
5. $p^2 = 2qx$
6. $p = q^2$
7. $pq = 2p - q$
8. $p = y^2q^2$
9. $p + x = qy$
10. $1 + p^2 = qz$

Respostas:

1. $z = ax + \sqrt{9 - a^2}\, y + b$
2. $z = ax - \dfrac{a}{a+1} y + b$
3. $z = ax + by + c$, onde $c = a^2 + b^2 + ab$
4. $z = ax + by + a^2b^2$
5. $z = \pm\dfrac{2}{3}\sqrt{2a}.x^{3/2} + ay + b$
6. $z = a^2x + ay + b$
7. $z = ax + \dfrac{2ay}{a+1} + b$
8. $z = ax \pm \sqrt{a}\ln y + b$
9. $z = ax - \dfrac{x^2}{2} + a\ln y + b$
10. $a^2z^2 + az\sqrt{a^2z^2 - 4} - 4\ln(az + \sqrt{a^2z^2 - 4}) = 4a(x + ay + b)$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ABUNAHMAN, Sérgio A. *Equações diferenciais*. São Paulo: LTCE.
AYRES Jr, Frank. *Equações diferenciais*. Rio de Janeiro: McGraw-Hill do Brasil, 1970.
EDWARDS Jr, C. H. *Equações diferenciais elementares com problemas de contorno*. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil, 1995.
ZILL, Dennis G. *Equações diferenciais com aplicações em modelagem*. São Paulo: Pioneira Thompson Learning, 2003.