UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA - CENTRO TECNOLÓGICO
DEPARTAMENTO DE INFORMÁTICA E ESTATÍSTICA
Disciplina: MÉTODOS ESTATÍSTICOS – Professor José Fletes.

PROVA UNIDADE II – 19/Nov./2020 – Para entregar dia 26/Nov. até 00:00h .

Esta prova tem por base os capítulos 4 a 6 do livro-texto, bem como o material do livro "Andar do Bêbado e as aulas da unidade (Notas de aula no moodle).

Nome: Emanuelle Foscarini **MATRÍCULA Nº:19200415**

Obs.: 1) não será aceito apenas a resposta do problema!
2) nos problemas: **x**= 9 e **y**= 2
3) Favor ao postar o teste no moodle **identifique-o (nome_prova2.pdf)** e anexe-o **no formato .pdf**.

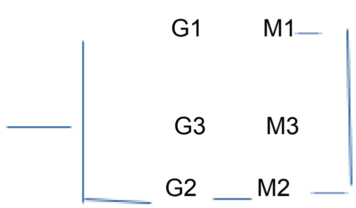
Q.1 (Vale 3,0) – Seu colega/amigo que cursa Engenharia e está para se graduar, sabendo que Você está cursando a disciplina de Probabilidade e Estatística lhe consulta sobre o problema abaixo:

1ª situação: O sistema abaixo é formado por quatro componentes de igual confiabilidade. Se cada componente tem confiabilidade igual a **0,9 ,** qual é a confiabilidade do sistema?

Notação: Gi = i-ésimo gerador; Mi = i-ésimo motor

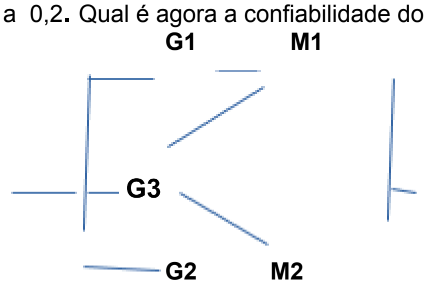
Resposta 1ª situação = 1 - [(1-0,9*0,9) * (1-0,9*0,9)] = 0,9639

2ª situação: Dadas as características do serviço, convém alcançar uma confiabilidade do sistema superior a **0,98**. Com esse objetivo pensou em agregar um outro subsistema gerador (G3) – motor (M3) em paralelo com as mesmas características anteriores. Foi alcançada a confiabilidade desejada? Constate matematicamente obtendo a confiabilidade da 2ª situação.



Resposta 2ª situação = 1 - [(1-0,9*0,9) * (1-0,9*0,9) * (1-0,9*0,9)] = 0,993141. Foi alcançada a confiabilidade do sistema superior a 0,98.

3ª situação: Na 2ª situação o custo de aquisição da instalação superou as possibilidades financeiras da empresa. O seu colega de engenharia propõe a seguinte solução: incorporar um elemento gerador (G3) com um dispositivo de comutação que permita acionar de forma indistinta os motores descritos. O custo dessa solução é 45% daquela da 2ª situação e poderia ser absorvida pela empresa. A probabilidade de falha do G3 é igual a 0,2**.** Qual é agora a confiabilidade do sistema? Satisfaz a condição pedida na 2ª situação?



Resposta 3ª situação =

P(S1) = {1 - [(1-0,9) * (1-0,8)]} * 0,9 = 0,882

P(S2) = {1 - [(1-0,9) * (1-0,8)]} * 0,9 = 0,882

P = 1 - [(1-0,882) * (1-0,882)] = 0,9860

Foi alcançada a confiabilidade do sistema superior a 0,98.

Q.2 (Vale 4,0) – **Desafio individual:** leia o material disponível no site indicado e reproduza os exemplos seguindo a orientação para os modelos aplicados.

Faça um resumo de acordo com a Unidade II dos temas que abordam em cada tópico e que foram vistos em aula nos capítulos 5 e 6.

1- Introdução

http://www.portalaction.com.br/simulacao-monte-carlo/41-introducao

A ideia de incerteza está sempre relacionada à ocorrência de acontecimentos futuros já o risco está relacionado ao grau de incerteza que atribuímos às possíveis situações futuras.

A probabilidade objetiva se refere à probabilidade calculada usando informações e conhecimentos anteriores ou com base em uma série de dados reais. Por outro lado, a probabilidade subjetiva é a probabilidade que é especificada e determinada, ou seja, a probabilidade de não haver um banco de dados como suporte.

Podemos dizer que toda situação de risco reconhece um certo grau de incerteza, mas não o contrário, ou seja, a incerteza se apresenta como condição necessária para o risco, mas não é suficiente.

2- Simulação do **Modelo Binomial**

http://www.portalaction.com.br/simulacao-monte-carlo/211-simulacao-do-modelo-binomial

Essa distribuição é aplicada onde existem dois possíveis resultados, como cara ou coroa. Seja X o número de sucessos em n tentativas independentes (Bernoulli), com p sendo a probabilidade de sucesso em cada ensaio (já aplicada a identidade recursiva):

$$\mathbb{P}[x = k+1] = \frac{n-k}{k+1}\frac{p}{1-p}\mathbb{P}[X = k]$$

k = valor atual

$\mathbb{P}[X = k]$ = probabilidade de X se igual a k.

Passos para gerar valores aleatórios:

1. Gerar um número aleatório U de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.

$$c = \frac{0,3}{1-0,3} = 0,43$$

$$F = pr = (1-0,3)^5 = 0,17$$

2. Iniciar os valores: $c = p/(1-p)$, $k = 0$, $pr = (1-p)^n, F = pr$.
3. Se $U < F$, $X = k$, finalizar.

$$pr = [0,43(5-1)/(0+1)]0,17 = 0,29$$

$$F = 0,17 + 0,29 = 0,46$$

$$k = 1$$

4. Caso contrário, $pr = [c(n-k)/(k+1)]pr$, $F = F + pr$, $k = k+1$
5. Volte ao passo 3.

O número de tentativas para encontrar o valor de X será sempre $1 + X$.

Gerar um número com a distribuição Binomial [5,0.3], tomando U = 0.23:

Como temos U > F:

Sendo agora, U < F, o número gerado é X = 1.

3- Simulação do **Modelo Poisson**

http://www.portalaction.com.br/simulacao-monte-carlo/212-simulacao-do-modelo-de-poisson

Esta é uma distribuição associada a "eventos raros". Seja λ a média de eventos em um intervalo de tempo, e a variável aleatória X a contagem do número de eventos ocorrendo no intervalo, ela segue a distribuição de Poisson se sua função de probabilidade for dada por:

$$p_k = \mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}.$$ x = 0, 1, 2..

O algoritmo para gerar variáveis aleatórias de Poisson com média λ é dado por:

1 - Gerar um número aleatório U de uma distribuição uniforme no intervalo $[0, 1]$.

2 - Iniciar os valores: $k = 0$, $p = e^{-\lambda}$, $F = p$.

3 - Se $U < F$, $X = k$, finalizar.

4 - Caso contrário, $p = \lambda p/(k+1)$, $F = F + p$, $k = k + 1$

$$k = 0$$
$$p = e^{-2} \approx 0,13$$
$$F = 0,13$$

5 - Volte ao passo 3.

$$p = (2 * 0,13)/(0+1) = 0,26$$
$$F = 0,13 + 0,26 = 0,39$$
$$k = 1$$

Com parâmetro $\lambda = 2$ e U = 0,37, geramos um número seguindo uma distribuição de Poisson:

Como U > F:

Neste caso temos $U < F$ então, o número gerado é $X = 1$. (Passo 3)

4- Simulação do **Modelo de Gauss** (Modelo da Curva Normal)

http://www.portalaction.com.br/simulacao-monte-carlo/223-simulacao-do-modelo-normal

A distribuição normal possui dois parâmetros, a média (μ), onde está centralizada, e a variância (σ^2 >0) que descreve o seu grau de dispersão. Ainda, é comum se referir a dispersão em termos de unidades padrão, ou seja desvio padrão (σ).

A variável aleatória contínua X tem distribuição normal se sua função densidade de probabilidade for dada por:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right], \quad -\infty < x < +\infty,$$

em que $-\infty < \mu < \infty$ e $0 < \sigma^2 < \infty$.

Propriedades:

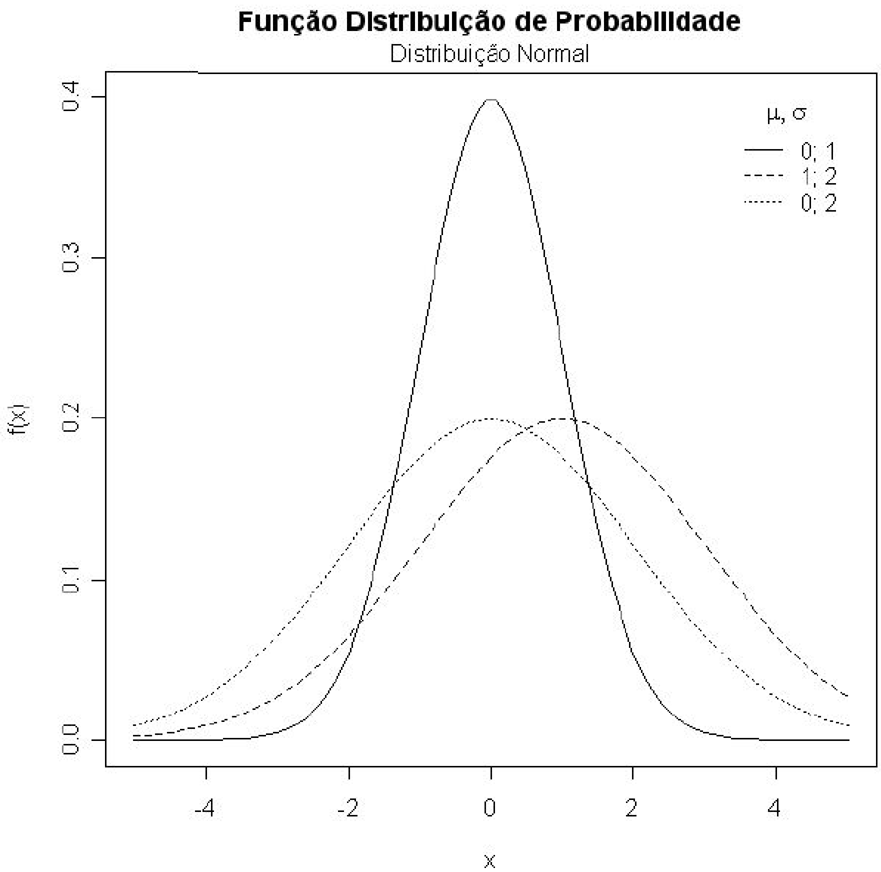
1. $\mathbb{E}(X) = \mu$;
2. $\text{Var}(X) = \sigma^2$;

3. $f(x) \to 0$ quando $x \to \pm\infty$;
4. $\mu - \sigma$ e $\mu + \sigma$ são pontos de inflexão de $f(x)$;
5. $x = \mu$ é ponto de máximo de $f(x)$, e o valor máximo é $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$;
6. $f(x)$ é simétrica ao redor de $x = \mu$, isto é, $f(\mu + x) = f(\mu - x)$, para todo $-\infty < x < +\infty$.

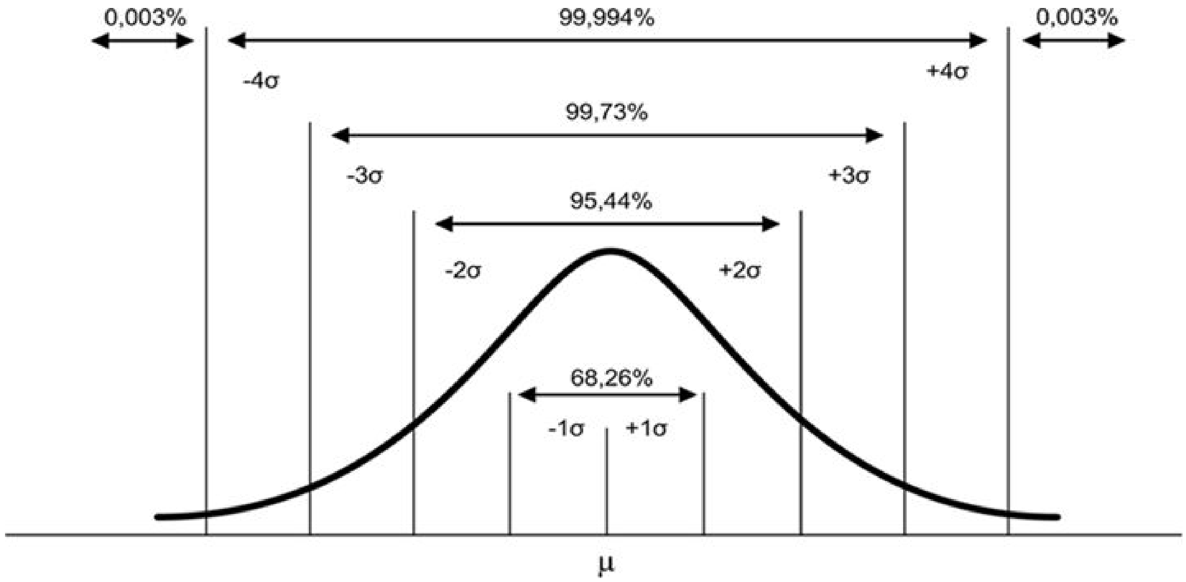
Notação: Se X tem distribuição normal, com média μ e variância σ^2, escrevemos:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2).$$

Observe na figura abaixo uma distribuição normal com parâmetros diversos de μ e σ^2 . Note que a distribuição normal tende a forma de "sino".



Função densidade de probabilidade da distribuição normal:



O modelo normal é utilizado nas seguintes situações:

- Sem informação sobre os limites de variação da variável em estudo, ou não queremos fixar os limites para a variável em estudo;
- Admitimos que a variável se distribui simetricamente em torno da média e com probabilidade determinadas conforme gráfico e tabela acima.

O método mais utilizado para simular a distribuição normal foi proposto por Box e Muller (1958):

1º) Gerar uma variável aleatória U_1 com distribuição uniforme $[0,1]$, e tomar $Z = 2\pi U_1$;

2º) Gerar uma variável aleatória U_2 com distribuição uniforme $[0,1]$, e tomar $E = -\ln(U_2)$ e $R = \sqrt{2E}$

3) Tomar $X = R\cos(Z)$ e $Y = R\sin(Z)$ como amostras independentes da distribuição normal com média zero e desvio padrão 1;

Para obtermos amostras de uma distribuição normal com média μ e desvio padrão σ, basta aplicarmos a seguinte transformação:

$$\theta = \mu + \sigma X.$$

Exemplo para μ = 10.000 e σ = 1.500:

Para $X \leq 10.000$:

$$\mathbb{P}(X \leq 10.000) = \mathbb{P}\left(\frac{X - 10.000}{1.500} < \frac{10.000 - 10.000}{1.500}\right) = \mathbb{P}(Z \leq 0) = 0,5 = 50\%;$$

Para $X \geq 10.000$:

$$\mathbb{P}(X \geq 10.000) = \mathbb{P}(Z \geq 0) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 0) = 0,5 = 50\%;$$

Para $12.000 < X < 15.000$:

$$\mathbb{P}(12.000 < X < 15.000) = \mathbb{P}\left[\frac{12.000 - 10.000}{1.500} \leq Z \leq \frac{15.000 - 10.000}{1.500}\right]$$
$$= \mathbb{P}\left[\frac{4}{3} \leq Z \leq \frac{10}{3}\right] = \mathbb{P}(1,33 \leq Z \leq 3,33)$$
$$= 0,4997 - 0,40824 = 0,09133 = 9\%$$

Para $X \geq 20.000$:

$$\mathbb{P}(X \geq 20.000) = \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{20.000 - 10.000}{1.500}\right) = \mathbb{P}(Z \geq 6,67) \cong 0.$$

Q.3 (Vale 1,5) – Num concurso público, a pontuação nos exames avalia-se segundo o modelo da Curva de Gauss utilizando o critério abaixo:
- Os **9**% com pontuação de no mínimo 90, consideram-se aprovados para preencher as vagas existentes;
- Os **2*9**% abaixo do primeiro grupo ficam classificados para a segunda chamada (caso haja desistência no primeiro grupo), tendo pontuação mínima de 75;
- Os que pontuaram abaixo do limite do segundo grupo consideram-se desclassificados ou reprovados.

Calcule a média (μ) e o desvio padrão (σ) para a pontuação esperada nos exames do concurso.

$P(X \geq 90) = 0{,}09 \rightarrow P(Z1 \geq z1) = 0{,}09 \rightarrow z1 = (90 - \mu)/\sigma \cong 1{,}34$

$P(75 \leq X < 90) = 0{,}18 \rightarrow P(z2 \leq Z2 \leq z1) = 0{,}18$

$P(X \geq 75) = 0{,}27 \rightarrow P(Z3 \geq z2) = 0{,}27 \rightarrow z2 = (75 - \mu)/\sigma \cong 0{,}61$

$\sigma = 20{,}54$ e $\mu = 62{,}46$

Q.4 (Vale 1,5) – Você está com viagem marcada para **Maceió (MCZ)**, saindo de **Florianópolis (FLN)** e mudando de aeronave em **São Paulo (SAO)**. Considere que o tempo da viagem aérea entre as cidades segue aproximadamente o modelo de Gauss com as características abaixo:

De FLN a SAO: Média de 60 minutos com desvio padrão de 5 minutos.

Em São Paulo (SAO) Você aguarda por **92** minutos a troca de aeronave.

De SAO a MCZ: Média de 160 minutos com desvio padrão de 10 minutos

4.1- Qual é média e o desvio padrão para o tempo entre FLN e MCZ?

Sendo:

FLN ⇒ SAO = S1

SAO ⇒ MCZ = S2

FLN ⇒ MCZ = S

$Var(S1) = \sigma_1^2 = 25$

$Var(S2) = \sigma_2^2 = 100$

$Var(S) = Var(X_1) + Var(X_2) = 125 \Rightarrow \sigma = 11,18$

E(S) = μ **1** + Tempo Troca de Avião + μ **2** = 60 + 92 + 160 = 312

4.2- Qual é a probabilidade de que o tempo entre FLN e MCZ seja superior a 340 minutos?

P(X > 340) = P[Z > (340 - 312)/11,18] = P(Z > 2,50) = 0,0062