Lista 2 - Aplicações EDO - (Resolver somente os exercícios ímpares)

APLICAÇÕES DAS EQUAÇÕES DE 1ª ORDEM E 1º GRAU

1. Determine a equação das curvas que possuem a subnormal constante.
2. Determine a equação das curvas que possuem a subtangente constante.
3. Nos problemas a seguir determine as trajetórias ortogonais de cada família de curvas dadas:

a. $y = cx$

b. $y = cx^2$

c. $cx^2 + y^2 = 1$

d. $y = ce^{-x}$

e. $y^2 = cx^3$

f. $y = \dfrac{x}{1+cx}$

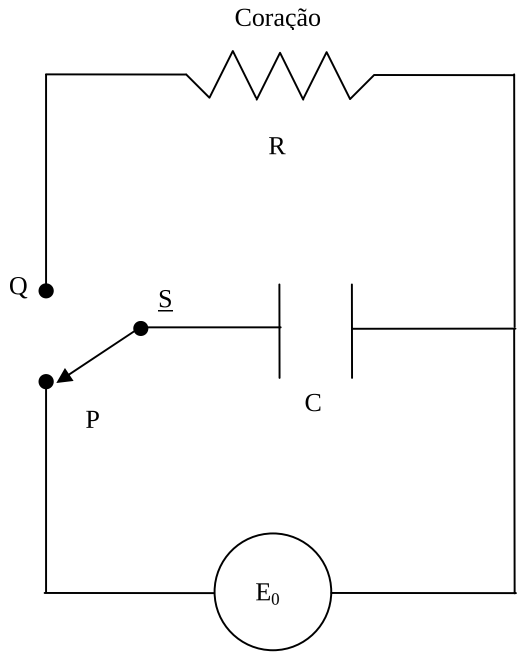
g. $2x^2 + y^2 = 4cx$

4. Encontre as curvas das trajetórias ortogonais de $x + y = ce^{y}$, que passam por P(0,5).
5. Um investidor aplica determinada quantia que triplica em 30 meses. Em quanto tempo essa quantia estará quadruplicada, supondo que o aumento é proporcional ao capital existente a cada instante?
6. Sabe-se que a população de uma certa comunidade cresce a uma taxa proporcional ao número de pessoas presentes em qualquer instante. Se a população duplicou em 5 anos, quando ela triplicará?
7. Suponha que a população da comunidade do problema 6 anterior seja 10.000 após 3 anos. Qual era a população inicial? Qual será a população em 10 anos?
8. A população de bactérias em uma cultura cresce a uma taxa proporcional ao número de bactérias presentes em qualquer tempo. Após 3 horas, observa-se que há 400 bactérias presentes. Após 10 horas existem 2000. Qual era o número inicial de bactérias ?
9. O isótopo radioativo de chumbo, Pb-209, decresce a uma taxa proporcional à quantidade presente em qualquer tempo. Sua meia-vida é 3,3 horas. Se 1 grama de chumbo está presente inicialmente, quanto tempo levará para 90% de chumbo desaparecer?
10. Quando um raio de luz vertical passa através de uma substância transparente, a taxa na qual sua intensidade I decresce é proporcional a I(t), em que t representa a espessura do meio (em metros). No mar a intensidade a 3 m abaixo da superfície é de 25% da intensidade inicial I_o do raio incidente. Qual é a intensidade do raio a 15m abaixo da superfície?
11. Segundo a Lei de Newton, a velocidade de resfriamento de um corpo no ar é proporcional à diferença entre a temperatura do corpo e a temperatura do ar. Se a temperatura do ar é 20ºC e o corpo se resfria em 20 minutos de 100ºC para 60ºC, dentro de quanto tempo sua temperatura descerá para 30ºC?
12. Um termômetro é retirado de uma sala, em que a temperatura é 70ºF, e colocado no lado fora onde a temperatura é 10ºF. Após 0,5 minuto o termômetro marcava 50ºF. Qual será a temperatura marcada pelo termômetro no instante t=1 minuto? Quanto levará para marcar 15ºF?
13. Um indivíduo é encontrado morto em seu escritório pela secretária que liga imediatamente para a polícia. Quando a polícia chega, 2 horas depois da chamada, examina o cadáver e o ambiente tirando os seguintes dados. A temperatura do escritório era de 20ºC, o cadáver inicialmente tinha uma temperatura de 35ºC. Uma hora depois medindo novamente a temperatura do corpo obteve 34.2ºC. O investigador, supondo que a temperatura de uma pessoa

viva é de 36.5^oC, prende a secretária. Por que?. No dia seguinte o advogado da secretária a liberta, alegando o que?

14. Em um depósito há 100*l* de uma solução aquosa que contém 10*kg* de sal. Joga-se água neste depósito com uma velocidade de 3*l/min* ao mesmo tempo em que, através de um orifício desse tanque, a mistura escoa com uma velocidade de 2*l/min*. A mistura se mantém homogênea por agitação. Que quantidade de sal haverá no tanque 1*h* depois de iniciada a operação
15. Inicialmente, 50 gramas de sal são dissolvidos em um tanque contendo 300 litros de água. Uma solução salina é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 3 litros por minuto e a solução bem misturada é então drenada na mesma taxa. Se a concentração da solução que entra é 2 gramas por litro, determine a quantidade de sal no tanque em qualquer instante. Quantas gramas de sal estão presentes após 50 minutos? E após um longo tempo?
16. Um tanque contém 500 litros de água pura. Uma solução salina contendo 2g de sal por litro é bombeada para dentro do tanque a uma taxa de 5 litros por minuto. A mistura é drenada à mesma taxa. Encontre a quantidade de gramas de sal no tanque em qualquer instante.
17. Suponha que um estudante infectado com um vírus da gripe retorne a uma faculdade isolada no campus onde se encontra 1000 estudantes. Presumindo que a taxa na qual o vírus se espalha é proporcional não somente à quantidade de alunos infectados, mas também à quantidade de alunos não infectados, determine o número de alunos infectados após 6 dias se ainda é observado que depois de 4 dias x(4)= 50.
18. Uma lancha se desloca numa lagoa com uma velocidade de 10m/s. Em dado instante seu motor é desligado, com isso a lancha sofre uma redução de velocidade proporcional à velocidade instantânea. Sabendo que ao final de 5 segundos sua velocidade é de 8m/s, qual será o tempo necessário para que a lancha adquira velocidade de 1m/s?
19. Um bote está sendo rebocado a uma velocidade de 12*nós*(6,17*m/s*). No instante em que o cabo do reboque é largado, um homem no bote começa a remar, no sentido do movimento com uma força de 10*N*. Sabendo que o peso do homem e do bote é 200*N* e que a resistência ao deslocamento, em *N*, é de 2.6*v*, sendo *v* a velocidade em *m/s*, achar a velocidade do bote no fim de 30 segundos.
20. Uma bateria de 12 volts é conectada a um circuito em série no qual a indutância é de 0.5 Henry e a resistência 10 ohms. Determine a corrente *i* se a corrente inicial é zero.
21. Achar a equação da curva que passa pelo ponto P(5,6), conhecendo-se a declividade de sua tangente num ponto qualquer $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y}$.
22. Achar a equação da curva cuja subtangente seja o dobro da abscissa do ponto de contato.
23. Achar a equação da curva cuja subtangente num ponto P(x,y) seja igual à ordenada de P.
24. Uma curva dada passa pelos pontos (0,0) e (3,9). Achar a sua equação sabendo que a mesma tem a propriedade de dividir o retângulo formado pelos eixos coordenados e pelas retas paralelas a estes, tomadas por um ponto P(x,y), em duas partes, sendo a área de uma dela o triplo da outra.
25. Achar a equação da família de curvas em que a subnormal, num ponto P(x,y) seja igual à abscissa desse ponto.

26. Um marca passo, como indicado na figura abaixo, consiste em uma bateria, um capacitor e o coração como resistor. Quando a chave S está em P, o capacitor C é carregado; quando S está em Q, o capacitor R descarregado, enviando um impulso elétrico ao coração. Durante esse tempo, a voltagem E aplicada ao coração é dada por $\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{RC}E$, $t_1 < t < t_2$, onde R e C são constantes. Determine E(t) se $E(t_1)=E_0$. (É claro que a chave é aberta e fechada periodicamente para simular o batimento cardíaco natural.)



27. Em março de 1987 a população mundial atingiu cinco bilhões, e estava crescendo à taxa de 380 mil pessoas por dia. Assumindo-se taxas de natalidade e mortalidade constantes, para quando se deve esperar uma população mundial de 10 bilhões de pessoas.
28. É um fato da física que os elementos radioativos se desintegram espontaneamente em um processo chamado decaimento radioativo. Os experimentos têm mostrado que a taxa de desintegração é proporcional à quantidade de elemento presente. Sabe-se que a meia-vida específica do carbono-14 radioativo está em torno de 5730 anos. Em 1988, o Vaticano autorizou o Museu Britânico a datar a relíquia de pano conhecida como o Sudário de Turim, possivelmente o sudário de Jesus de Nazaré. Este pano, que apareceu em 1356, contém o negativo da imagem de um corpo humano que se acreditava no mundo inteiro ser o de Jesus. O relatório do Museu mostrou que as fibras no pano continham entre 92 e 93% do carbono-14 original. Use esta informação para estimar a idade do sudário.
29. Ache uma curva do plano xy que passa pelo ponto P(0,3) e cuja reta tangente em um ponto qualquer tem inclinação $2x/y^2$.
30. Uma bala de massa $m=3.56x10^{-3}kg$ é disparada para cima com uma velocidade inicial v_o=988m/s, e torna-se mais lenta pela força da gravidade e uma força de resistência do ar de kv^2, sendo k=7.3x10^{-6}kg/m. Determine a altura máxima atingida pela bala.(Considere g=9,8m/s^2)

31. Considere um compartimento que contém 3 litros de água salgada. Suponha que água, contendo 25 gramas de sal por litro, esteja sendo bombeada no compartimento a uma taxa de 2 litros por hora, e a mistura, que é homogeneizada continuamente é bombeada para fora do compartimento com a mesma taxa. Encontre a concentração de sal na mistura após 3 horas.
32. Em uma certa floresta tropical, "restos vegetais" (principalmente devido à vegetação morta) se acumulam no solo a uma taxa de 10 g/cm^2/ano. Ao mesmo tempo, entretanto, estes restos vegetais se decompõem a uma taxa de 80% ao ano. Determine a quantidade de restos vegetais, em g/cm^2, após 5 anos, sabendo-se que inicialmente esta quantidade era de 300g/cm^2.
33. Um assado pesando 5 libras, inicialmente a 50ºF, é posto num forno a 375ºF às 5 horas da tarde. Depois de 75 minutos a temperatura do assado é de 125ºF. Quando será a temperatura do assado de 150ºF (meio mal passado).
34. Uma pedra é solta a partir do repouso de uma altura h acima da superfície da Terra. Desprezando a resistência do ar, qual a velocidade com que atinge o solo?
35. Um tanque hemisférico tem raio do topo de 121.92cm e no instante t=0s está cheio de água. Neste momento um buraco circular com diâmetro de 2.54cm é aberto no fundo do tanque. Quanto demorará para que toda a água do tanque tenha escoado? (Dica: Use a equação de Torricelli $A(y)\dfrac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy}$ e g=9,8m/s^2 para chegar a $\pi(8y - y^2)\dfrac{dy}{dt} = -\pi\left(\dfrac{1}{24}\right)^2\sqrt{64y}$)
36. Um aterrissador lunar está em queda livre em direção à superfície da lua a uma velocidade de 1000mi/h. Seus foguetes retro propulsores, quando disparados no espaço livre, produzem uma desaceleração de 33000mi/h^2. A que altura da superfície lunar devem os foguetes retro propulsores ser ativados para assegurar um pouso suave (v=0) no impacto? (Considere g_{Lua}=13kmi/h^2 e r_{Lua}=1,08kmi)
37. Suponha que uma corda flexível de 4 pés de extensão começa com 3 pés de seu comprimento arrumados num monte bem junto à borda de uma mesa horizontal, com o resto pendurado (em repouso) para fora da mesa. No instante t=0 o monte começa a desenrolar e a corda começa gradualmente a cair para fora da mesa, sob a força da gravidade puxando a parte pendurada. Assumindo que as forças de atrito de quaisquer tipo sejam negligenciáveis, quanto tempo levará para toda a corda cair para fora da mesa? (Dica: $\omega g x = \dfrac{d(\omega x v)}{dt} = \omega(x\dfrac{dv}{dt} + v\dfrac{dx}{dt})$. Você chegará na integral imprópria $T = \left(\dfrac{2}{3g}\right)^{1/2} \int_0^{\operatorname{arccos} 1/8} (\sec u)^{4/3}\, du$, onde $\sec^2 u = x^3$ que deverá der resolvida pela Regra de Simpsom com 100 subintervalos ou por integração numérica.)

RESPOSTAS

1) $y^2 = 2Kx + C$

2) $\boldsymbol{y = e^{\frac{x}{K}+C}}$

3)

a) $x^2 + y^2 = C^2$

b) $2y^2 + x^2 = C$

f) $x^3 + y^3 = C$

g) $y^2 \ln y + x^2 = Cy^2$

c) $2\ln y = x \;\; + y^2 + C$

d) $y^2 = 2x + C$

e) $2x^2 + 3y^2 = C$

4) $y = 2 - x + 3e^{-x}$

5) 37.8 meses

6) 7.9 anos

7). 6598; 26392

8). 200

9) 11 horas

10) I(15)=0.00098I_o

11) t = 60 minutos

12) T(1)=36.67°F em 3.06 minutos

13)

14) 3.91 kg de sal

15) A(50)=266.41 gramas

A(∞) = 600 gramas

16) $A(t) = 1000 - 1000e^{-t/100}$

17) 276 estuantes

18) 51,6 segundos

19) 3,9 m/s

20) $i(t) = 1.2 - 1.2e^{-20t}$

34) $v = \sqrt{2gh}$

35) t=2150s

36)25 milhas

37) t=0,541s

h) $r = C\,\mathrm{sen}\,\theta$

i) $r^2 = C\cos 2\theta$

21) $3y^2 - 2x^2 = 58$

22) $y^2 = xC^2$

23) $y = x + C$

24) $y = \dfrac{x^3}{3}$ ou $y^3 = 243x$

25) $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$

26) $E(t) = E_0 e^{(-t+t_1)/RC}$

27) $t = \dfrac{\ln 2}{0,0278} \approx 25\,\text{anos} \rightarrow 2012$

28) De 600 a 689 anos

29) $y = \left(3x^2 + 27\right)^{1/3}$

30) 1298,23m

31) 75+(y_0-75).e^{-2}

32) 17,76g/cm^2

33) t=105minutos → 6h45min