

Domínios, Gráficos e Curvas de Nível

1 — Nos seguintes exercícios, (i) encontre o domínio $\text{Dom } f$, (ii) encontre a imagem $\text{Im } f$, e (iii) descreva as curvas de nível da função:

- $f(x, y) = x^2 - y^2$
- $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$
- $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}}$
- $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$
- $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$
- $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$

2 — Esboce o gráfico das funções a seguir:

- $f(x, y) = 3$;
- $f(x, y) = y$;
- $f(x, y) = 1 - x - y$;
- $f(x, y) = \cos(x)$;
- $f(x, y) = 1 - x^2$;
- $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$;
- $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$;
- $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$;
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

3 — Considere as funções:

- $f(x, y) = x + y$. Para quais valores de x e y temos $f(x, y) = 2$? Represente graficamente a resposta.
- $f(x, y) = 2^{x+y}$. Para quais valores de x e y temos $f(x, y) = 1$? Represente graficamente a resposta.
- $f(x, y) = xy$. Para quais valores de x e y temos $f(x, y) = 1$? Represente graficamente a resposta.

4 — Desenhe as curvas de nível $f^{-1}(k) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = k\}$ das funções de duas variáveis f a seguir para os valores de k dados:

- $f(x, y) = x^2 - y^2$; $k = 0, 1, 2, 3$;
- $f(x, y) = y^2 - x^2$; $k = 0, 1, 2, 3$;
- $f(x, y) = \frac{1}{2} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$; $k = 0, 1, 2, 3$;
- $f(x, y) = |x| + |y|$; $k = 1, 2, 4$.

5 — Uma camada fina de metal, localizada no plano xy , tem temperatura $T(x, y)$ no ponto (x, y) . As curvas de nível de T são chamadas de *isotérmicas* porque todos os pontos em uma isotérmica têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função de temperatura for dada por

$$T(x, y) = \frac{100}{1 + x^2 + 2y^2}.$$

6 — Se $V(x, y)$ é o potencial elétrico de um ponto (x, y) do plano xy , as curvas de nível de V são chamadas *curvas equipotenciais*, porque nelas todos os pontos têm o mesmo potencial elétrico. Esboce algumas curvas equipotenciais de

$$V(x, y) = \frac{c}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

onde c é uma constante positiva.

7 — Dada a função $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, pede-se:

- As equações das curvas de nível $z = 1/4$, $z = 4$ e $z = 9$.
- A equação e o esboço da curva de nível que contém o ponto $(0, 2)$.
- Um esboço do gráfico da função.

8 — Seja $f(x, y) = \sqrt{10 - x - y^2}$.

- Represente o domínio de f no plano xy e determine a imagem de f .
- Identifique as interseções do gráfico de f com os planos $z = 0$, $z = 1$, $z = 2$, $y = 0$ e $x = 0$.
- Faça um esboço do gráfico de f .

9 — Associe a função (i) com seu gráfico (indicado por A-F na Figura 1) e (ii) com suas respectivas curvas de nível (indicado por I-VI na Figura 2).¹

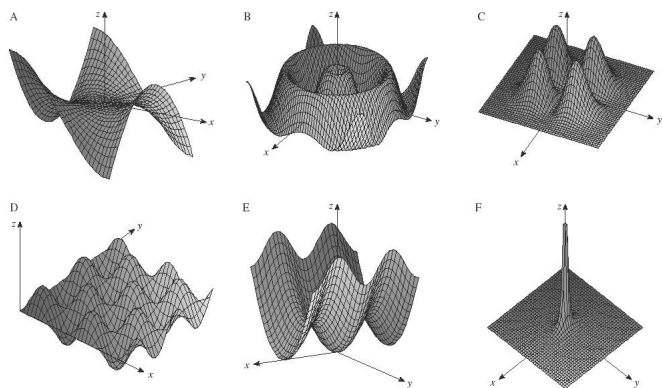


Figura 1

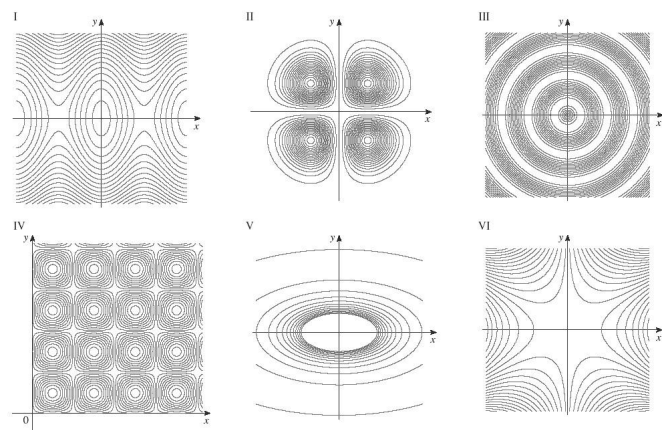


Figura 2

- a) $z = \sin(\sqrt{x^2 + y^2})$
- b) $z = x^2 y^2 e^{-x^2 - y^2}$
- c) $z = \frac{1}{x^2 + 4y^2}$
- d) $z = x^3 - 3xy^2$
- e) $z = \sin(x)\sin(y)$
- f) $z = \sin^2(x) + \frac{1}{4}y^2$

10 — Na Figura 3 são mostradas curvas de nível para a função f . Use-as para estimar o valor de $f(-3, 3)$ e $f(3, -2)$. O que você pode dizer sobre a forma do gráfico de $f(x, y)$?

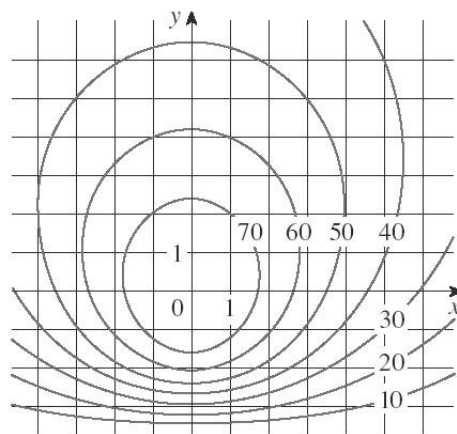


Figura 3

¹Fonte das figuras: J. Stewart, *Cálculo*, 5a. edição, vol. 2, pág. 899. Cengage Learning, 2006.

Respostas dos Exercícios

1 a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}^2$, $\text{Im } f = \mathbb{R}$, curvas de nível: $x^2 - y^2 = k$

b) $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$, $\text{Im } f = \mathbb{R}$, curvas de nível: $y = kx^2$

c) $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 < 16\}$, $\text{Im } f = [1/4, +\infty)$, curvas de nível: $k^2 = \frac{1}{16-x^2-y^2}$, $k \neq 0$

d) $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \geq 9\}$, $\text{Im } f = [0, 3]$, curvas de nível: $x^2 + y^2 = 9 - k^2$

e) $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 0\}$, $\text{Im } f = \mathbb{R}$, curvas de nível: $x^2 + y^2 = e^k$

f) $\text{Dom } f = \mathbb{R}^2$, $\text{Im } f = (0, 1]$, curvas de nível: $x^2 + y^2 = -\ln k$

2

3

4

5 Curvas de nível:

$$\frac{x^2}{(100-k)/k} + \frac{y^2}{(100-k)/2k} = 1$$

6 Curvas de nível: $x^2 + y^2 = r^2 - \frac{c^2}{k^2}$

7 a) $z = \frac{1}{4} : x^2 + y^2 = 4$; $z = 4 : x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$;
 $z = 9 : x^2 + y^2 = \frac{1}{9}$

b) $z = \frac{1}{4}$

8 a) $\text{Dom } f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 10 - y^2\}$; $\text{Im } f = [0, \infty)$

b) $z = 0 : x = 10 - y^2$; $z = 1 : x = 9 - y^2$;
 $z = 2 : x = 8 - y^2$, $y = 0 : x = 10 - z^2$,
 $x = 0 : z^2 + y^2 = 10$

9 a) B(III)

b) C(II)

c) F(V)

d) A(VI)

e) D(IV)

f) E(I)

10 $f(-3, 3) \approx 55$; $f(3, -2) \approx 35$