Prof. Dr. Matthes
Optimaler Transport - Geometrie und Anwendungen

Manuela Lambacher
09.12.2015

# Zeit-Diskretisierung von Gradientenflüssen

## 1 Approximierte Gradientenflüsse

Betrachte

$$\frac{dX}{dt} = -\operatorname{grad} E(X), \qquad X(0) = X^0 \tag{1.1}$$

für $X(t) \in \mathbb{R}^k$ für festes $t \in [0, \infty)$ und ein Energie-Funktional $E: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$.

**Definition 1.1.** *Der* ***approximierte Gradientenfluss*** $(X_\tau)$ *mit Anfangswert* $X^0$ *für das Energie-Funktional* $E$ *in einem metrischen Raum wird folgendermaßen konstruiert:*
*Sei* $\tau > 0$ *die zeitliche Schrittweite,* $n \in \mathbb{N}_0$*, dann ist die Folge* $(X_\tau^n)_{n\geq 0}$ *gegeben durch:*
$X_\tau^0 := X^0$,
$X_\tau^{n+1}$ *ist ein Minimierer des Minimerungsproblems*

$$\min_X \left[ E(X) + \frac{\operatorname{dist}(X_\tau^n, X)^2}{2\tau} \right] \tag{1.2}$$

*Dann sei* $X_\tau$ *auf* $\mathbb{R}_+^k$ *als stückweise konstante Funktion mit Wert* $X_\tau(t) = X_\tau^n$ *für* $t \in [n\tau, (n+1)\tau)$ *definiert.*

Sei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm, $E(X) \geq C$, $E(X^0) \leq \infty$ und $(X_\tau^n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wie in Definition (1.1). Dann sind folgende Aussagen erfüllt:

**Lemma 1.2** (Energy estimate)**.**

$$\sup_{n\geq 0} E(X_\tau^n) \leq E(X^0)$$

**Lemma 1.3** (Total square distance estimate)**.**

$$\sum_{n\geq 0} \|X_\tau^n - X_\tau^{n+1}\|^2 \leq 2\tau(E(X^0) - \inf_X E(X))$$

**Lemma 1.4** (Hölder 1/2-Abschätzung für $X_\tau$)**.**
*Für* $s < t$ *gilt:*

$$\|X_\tau(s) - X_\tau(t)\|^2 \leq \left[\frac{t-s}{\tau} + 1\right] \sum_{\frac{s}{\tau} \leq n \leq \frac{t}{\tau}} \|X_\tau^n - X_\tau^{n+1}\|^2 \leq 2(E(X^0) - \inf_X E(X))[(t-s) + \tau].$$

**Corollar 1.5.** *Sei* $E \in \mathcal{C}^1$. $X_\tau^m, X_\tau^{m+1} \subset (X_\tau^n)_{n\geq 0}$ *erfüllen für* $\omega \in \mathbb{R}^k$*:*

$$-\operatorname{grad} E(X_\tau^{m+1}) \cdot \omega = \frac{X_\tau^m - X_\tau^{m+1}}{\tau} \cdot \omega \tag{1.3}$$

# 2 Der approximierte Gradientenfluss der linearen Fokker-Planck-Gleichung

**Definition 2.1.** *Die **lineare Fokker-Planck-Gleichung** mit Potential $V(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^k), \mathbb{R}^k \to [0, \infty)$, und Anfangswert $\rho_0 \in P_{ac}(\mathbb{R}^k)$ ist gegeben durch:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho(x,t)}{\partial t} &= \Delta\rho(x,t) + \nabla \cdot (\rho(x,t)\nabla V(x)), \\ \rho(x,0) &= \rho_0(x). \end{aligned} \tag{2.1}$$

*Sei $T > 0$. $\rho(\cdot, t) \in P_{ac}(\mathbb{R}^k)$ erfüllt die (LFP) im schwachen Sinne, falls für alle $\psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^k)$ gilt:*

$$\int_{\mathbb{R}^k} \int_0^T (\rho\Delta\psi + \rho\nabla V \cdot \nabla\psi - \rho\psi_t) dt dx = \int \rho_0 \psi(x,0) dx$$

**Definition 2.2.** *Für eine Wahrscheinlichkeitsdichte $\rho(x) \in P_{ac}(\mathbb{R}^k)$ und ein Potential $V(x) \in L^1(\mathbb{R}^k)$ sei das **Freie Energie Funktional** $E(\rho)$ gegeben durch:*

$$E(\rho) := \int_{\mathbb{R}^k} \rho \log \rho \; dx + \int_{\mathbb{R}^k} \rho V dx \tag{2.2}$$

**Theorem 2.3.** *Sei $V(x) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^k)$ ein Potential, sodass $V(x) = O(|x|^2)$ für $x \to \infty$. Sei $\rho_0 \in P_{ac}(\mathbb{R}^k)$ derart, dass für das Freie Energie Funktional gilt $E(\rho_0) < \infty$. Sei $\tau > 0$.*

*Sei außerdem $\rho_\tau(x,t)$ der (Def. 1.1) approximierte Gradientenfluss für $E(\rho)$ bzgl. der quadratischen Wassersteinmetrik. Dann gilt:*

$$\rho_\tau(x,t) \rightharpoonup \rho(x,t) \text{ in } L^1(\mathbb{R}^k) \text{ für } \tau \to 0,$$

*wobei $\rho(x,t) \in C^\infty(\mathbb{R}^k \times (0,\infty))$ die eindeutige Lösung der linearen Fokker-Planck-Gleichung mit Anfangswert $\rho_0$ ist.*