Trabajo Práctico N° 2. Matemática D1.

Integración Numérica.

Ejercicio 1

Aplicar la regla del trapecio a la integración de $\sqrt{x}$ entre los argumentos 1.00 y 1.30, utilizando la siguiente tabla:

x_i	1.00	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30
$f(x_i)$	1.00000	1.02470	1.04881	1.07238	1.09544	1.11803	1.14017

Acotar el error de discretización y comparar con el valor analítico de la integral.

Ejercicio 2

Dadas las siguientes integrales:

$$1)\quad \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx \qquad\qquad 2)\quad \int_1^2 \frac{2x+1}{x^2+x}dx$$

a) Aproximar su valor empleando la regla trapezoidal simple. Acote el error cometido.

b) Aproximar su valor empleando la regla de Simpson simple. Acote el error cometido.

c) Grafique y compare las aproximaciones realizadas en los incisos anteriores. Puede utilizar el siguiente código como referencia en un software de cálculo numérico.

```
a=1;                            % limite inferior de integración
b=2;                            % limite superior de integración
f=inline('1./(1+x.^2)','x');    % define la funcion a integrar

xt=a:0.01:b;            % define un vector para graficar
yt=feval(f,xt);
plot(xt,yt)             % grafica la funcion definida

P1=feval(f,a)+(feval(f,b)-feval(f,a))/(b-a).*(xt-a);
hold on
plot(xt,P1,'r')         % grafica la aproximación mediante un trapecio

Itrap=(feval(f,b)+feval(f,a))/2*(b-a)   % calcula el valor de la integral

h=(b-a)/2;              % aproximación con un polinomio de orden 2
P2= feval(f,a)+(feval(f,a+h)-feval(f,a))/h.*(xt-a)+ (feval(f,b)-2*feval(f,a+h)
+feval(f,a))/2/h.^2.*(xt-a).*(xt-a-h);
plot(xt,P2,'g')         % grafica la aproximación mediante un polinomio de orden 2

Isimp=h/3*(feval(f,b)+4*feval(f,a+h)+feval(f,a))  % Calcula el valor de la integral
```

d) Aproximar su valor empleando la regla trapezoidal compuesta utilizando un paso $h = 0,1$.

e) Aproximar su valor empleando la regla de Simpson compuesta utilizando un paso $h = 0,1$. Comparar con el inciso anterior.

f) Obtener el valor exacto de cada integral y calcular el valor del error porcentual de cada resultado obtenido.

g) Realice un gráfico esquemático comparando las reglas simple y compuesta de cada método de calculo. Prediga como evoluciona el valor de la integral al aumentar el paso h.

Ejercicio 3

Calcular la integral de los siguientes datos tabulados empleando el método de trapecios y Simpson.

Puntos	0	1	2	3	4	5
x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$f(x)$	1	7	4	3	5	2

¿Es posible emplear las fórmulas de cuadraturas Gaussianas para el calculo de la integral con los datos suministrados?

Ejercicio 4

Calcular por la fórmula de los trapecios, con $h = 0{,}25$ y $h = 0{,}125$

$$\int_0^3 \frac{1}{1+x^3}$$

Con las soluciones calculadas ¿es posible obtener una mejor aproximación del valor de la integral?

Ejercicio 5

Sabiendo que

$$ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\, dt$$

Calcular aproximadamente $ln(x)$ para x=1.1 con h=0.1 empleando la fórmula trapezoidal. Acotar el error y comparar con el error real cometido.

Ejercicio 6

Calcular el área de forma exacta de las regiones limitadas por las siguientes funciones empleando el método numérico óptimo.

$$A = \begin{cases} y = x + 1 \\ y = 0 \\ x = 0 \\ x = 2 \end{cases} \qquad B = \begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y = 0 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 7

Evalúe las siguientes integrales, utilizando las fórmulas de cuadratura de Gauss-Legendre. Con dos, tres y cuatro puntos. (Obtener los pesos y raíces de una tabla normalizada)

a) $\displaystyle\int_0^3 \frac{e^x sen(x)}{1+x^2}\, dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{arctg(x)}{1+x}\, dx$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{sen(x)}{x}\, dx$

d) $\displaystyle\int_0^1 \frac{ln(1+x)}{1+x^2}\, dx$

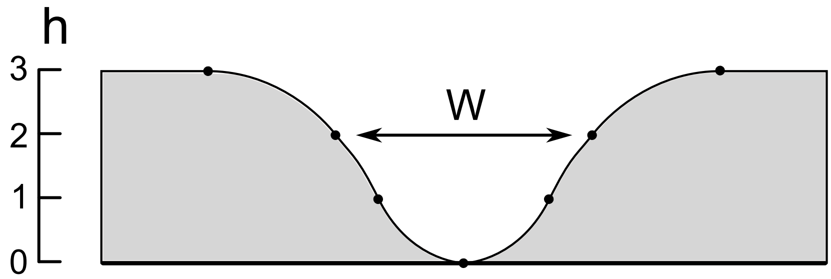
Ejercicio 8

Hallar numéricamente el volumen del sólido de revolución, obtenido cuando la curva $y = xe^{-x}cos(x)$ gira alrededor del eje $(0x)$ entre $x = 0$ y $x = \pi$.

Ejercicio 9

Dada la sección transversal del canal de la figura y los valores del ancho W medidos para distintas profundidades h, calcular el área de la misma aplicando: a) Regla del Trapecio. b) Fórmula de Simpson.

h [m]	W [m]
0	0
1	2
2	3
3	6



Ejercicio 10

Calcular empleando un software de cálculo numérico la siguiente integral

$$I = \int_{-2}^{2} e^{\frac{-x^2}{2}}\, dx$$

cuyo valor exacto es $I = 2{,}3925$. Resolver por regla trapezoidal, de Simpson y de cuadratura de Gauss con $h = 1{,}0$, $h = 0{,}5$ y $h = 0{,}25$. Realizar un cuadro comparativo con los resultados obtenidos.

Ejercicio 11

¿Qué diferencias puede mencionar entre los métodos de integración de Newton-Cotes y Gauss?

Ejercicio 12

La velocidad hacia arriba de un cohete se puede calcular con la siguiente fórmula:

$$v = u \cdot ln\left(\frac{M_0}{M_0 - q\,t}\right) - g\,t$$

donde:

u : velocidad a la cual se expulsa el combustible relativa al cohete.
M_0 : masa inicial del cohete.
q : razón de consumo de combustible.
g : aceleración debido a la gravedad. Se supone constante.

Si $u = 2000\ m/s$, $M_0 = 150000\ kg$ y $q = 2600\ kg/s$ calcule la altura del cohete luego de 30 segundos.

Ejercicio 13

Indique si cada proposición es verdadera o falsa. Justifique la respuesta.

a) El método de integración del trapecio integra exactamente un polinomio que tiene a lo sumo orden uno.

b) El método de Simpson integra exactamente un polinomio que tiene a lo sumo orden dos.

c) El error de integrar mediante la fórmula de Simpson utilizando un número par de subintervalos es aproximadamente el doble al error de integrar con un número impar de subintervalos.

d) Para integrar una función en un intervalo [a, b] es necesario conocer los valores de f(a) y f(b) por lo menos, independientemente del método de integración utilizado. Sin embargo esta condición no es suficiente