Facultad de Ingeniería – UNLP

Diferenciación numérica

Diferenciación numérica. La derivada de f, en un punto a, puede ser estimada a partir del cociente incremental

$$f'(a) \simeq \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

para valores pequeños de h. La expresión se conoce con el nombre de *fórmula de diferencia progresiva* si $h > 0$ o *regresiva* si $h < 0$.

1) Demostrar que el error de truncamiento de la fórmula de diferencia está dado por

$$E(f) = -\frac{h}{2} f''(\xi)$$

para algún ξ entre a y $a+h$.

2) Demostrar la *fórmula de diferencia centrada*

$$f'(a) \simeq \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$$

y su término de error

$$E(f) = -\frac{h^2}{6} f'''(\xi),$$

donde ξ se encuentra entre $a - b$ y $a + b$, constituyendo una mejor aproximación que la fórmula anterior.

3) Aproximar $f'(0.1)$ para $f(x) = sen(x)$ empleando la fórmula de diferencia centrada con diferentes valores de h. Comenzar con $h = 10$ y reducir en forma sucesiva el paso a la décima parte del paso anterior. Imprimir para cada h el valor estimado de la derivada y el error cometido (al menos 25 veces). Comentar los resultados obtenidos. A qué se debe lo observado ? Cuál parece ser el rango del valor apropiado para h ?

4) Mostrar que si los errores de redondeo por la utilización de aritmética finita en la evaluación de f están acotados por algún $\delta > 0$ y la derivada tercera de f está acotada por $M > 0$, entonces

$$\left| f'(a) - \frac{\hat{f}(a+h) - \hat{f}(a-h)}{2h} \right| \leq \frac{\delta}{h} + \frac{h^2}{6} M,$$

donde $\hat{f}$ denota la evaluación de f en aritmética finita. Además, demostrar que el valor *óptimo* de h, definido como el valor de h para el cual la suma de las magnitudes del error de redondeo y truncamiento se minimizan, se expresa por

$$h_{opt} = \left(\frac{3\delta}{M} \right)^{1/3}.$$

5) Demostrar que $f''(a)$ se puede aproximar por la expresión de diferencias

$$f''(x) \simeq \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}$$

con un término de error dado por

$$E(f) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(\xi),$$

donde ξ se encuentra entre $a - h$ y $a + h$.
6) A partir de una tabla de valores originados por la función $f(x) = cos(x)$ en el intervalo $[0, 0.8]$, aproximar la derivada primera en $x = 0.8$ utilizando la fórmula de derivada hacia atrás. Calcular para distintos valores de h y graficar el error absoluto en función de h.
7) Aproximar la derivada segunda de $f(x) = cos(x)$ en el punto $x = 0.5$ con un valor de $h = 0.1$, $h = 0.01$ y $h = 0.001$. Calcular el error en cada caso y obtener conclusiones. Con qué valor de h es conveniente aproximar la derivada para obtener un menor error ?