Diferenciación numérica

La diferenciación debe evaluar

$$\frac{df(x)}{dx}$$

para un x arbitrario, dado sólo unos pocos valores de $f(x)$ en los puntos $x_0, x_1, \ldots x_n$.

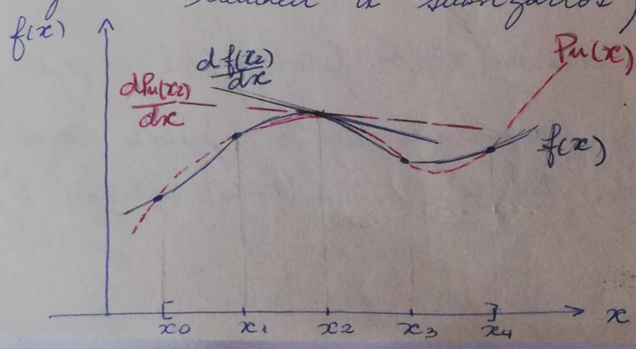
La elección usual para aproximar la función es $P_n(x)$, un polinomio de interpolación de grado n q pasa por los puntos $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)) \ldots (x_n, f(x_n)) \Rightarrow$

$$\frac{df(x)}{dx} \sim \frac{dP_n(x)}{dx}$$

Si $f(x)$ es m veces diferenciable, pueden aproximarse derivadas de orden superior, evaluando las derivadas de $P_n(x)$, $n \leq m$ $\underbrace{m \leq n}$

$$\frac{d^m f(x)}{dx^m} \sim \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

Una dificultad inherente con esta aproximación es q la diferenciación tiende a magnificar pequeñas discrepancias o errores en la función de aproximación (los procesos de integración tienden a suavizarlos)



$\frac{dP_n(x)}{dx} \equiv$ pdte de la línea tg a $P_n(x)$ q puede variar significativamente de $\frac{df(x)}{dx}$, aún en los puntos donde $P_n(x)$ y $f(x)$ coinciden

La diferenciación de orden superior tiende a magnificar estas diferencias aún más.

La diferenciación numérica es un proceso q' pierde precisión

Debido a esto es un proceso q' será evitado siempre q' sea posible. Aún más cierto si los valores de $f(x_i)$ están ellos mismos afectados de error. (por ejemplo, si se determinan experimentalm.).

Si deben calcularse valores y usarse en cálculos posteriores, es mejor usar polinomios por mínimos cuadrados para suavizar los datos antes de diferenciarlos.

A pesar de estos problemas asociados, la aproximación

$$\frac{d^m f(x)}{dx^m} \sim \frac{d^m P_n(x)}{dx^m} \quad \text{es usada.}$$

Luego,

$$f(x) = P_n(x) + \underbrace{E_n(x)}_{\text{error asociado al polinomio de interpolación de grado } n.}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\,f(x)}{dx} = \frac{d P_n(x)}{dx} + \frac{d E_n(x)}{dx}.$$