Fórmulas de diferencias centradas

Las mejores fórmulas usan valores de x a izquierda y derecha del valor a calcular

Form. Centrados de orden $O(h^2)$

$f \in C^3[a,b]$ $\quad$ $x-h \quad x \quad x+h$

$x-h,\ x,\ x+h \in [a,b]$.

$$f'(x) \cong \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} + \underbrace{E_{trunc}(f,h)}_{\text{ERROR DE TRUNCAM.}}$$

$$E_{trunc} = -\frac{1}{6} h^2 f^3(\xi) = O(h^2);\ \xi \in [a,b]$$

Demostración: fórmula de Taylor, orden 2, alrededor de x.

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} + f'''(\xi_1)\frac{h^3}{3!}$$

$$f(x-h) = f(x) - f'(x)h + f''(x)\frac{h^2}{2!} - f'''(\xi_2)\frac{h^3}{3!}$$

restando:

$$f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + \frac{h^3}{3!}\left(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)\right)$$

Como $f'''(x)$ es continua usamos el teor del valor medio $\Rightarrow \exists$ un $\xi \,/\, \frac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2} = f'''(\xi)$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} - \frac{f'''(\xi)\, h^2}{3!}$$

c.q.d.

Si $f'''(\xi)$ no cambian muy rápidamente, entonces $E_{trunc.} \to 0$ con $h^2 \to 0$ (igual vel.) de aquí $O(h^2)$.

Pareciera q cuando h es más chico, mejor! Sin embargo, vamos a ver q en la práctica el valor de h chico puede tener problemas. y sería preferible contar con una fórmula de orden $O(h^4)$.

Form. centrada de orden $O(h^4)$

$f \in C^5$ en $[a,b]$, $x-2h$, $x-h$, x, $x+h$, $x+2h$

$$f'(x) \approx \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h}$$

y $\exists\ \xi$ en $[a,b]$ /

$$E_{trunc.}(f,h) = \frac{h^4}{30} f^{5}(\xi) = O(h^4)$$

Dem. : Taylor de cuarto orden, alrededor de x.

$$\frac{48}{12} \frac{84}{120} = \frac{1}{30}$$

① $f(x+h) - f(x-h) = 2f'(x)h + 2\frac{f'''(x)h^3}{3!} + 2\frac{f^5(\xi_1)h^5}{5!}$

Ahora usamos la corresp. para $2h$.
$h^3 \equiv (2h)^3$

② $f(x+2h) - f(x-2h) = 4f'(x)h + 16\frac{f'''(x)h^3}{3!} + 64\frac{f^5(\xi_2)h^5}{5!}$

Si multipl. por 8 a ① y restamos se elimina f'''

$$-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h) =$$
$$= 12f'(x)h + \left(16f^5(\xi_1) - 64f^5(\xi_2)\right)\frac{h^5}{5! = 120}$$

Si $f^5(\xi)$ no cambia rápidamente de valor cuando x.
$(16-64)f^5(\xi) = -48f^5(\xi)$

$$f'(x) \simeq \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} + \frac{f^5(\xi)h^4}{30}$$

$O(h^4) \rightarrow 0$ más rápidamente que $O(h^2)$ $\therefore$ se puede usar un incremento mayor para igual aproximación.

Ejemplo:

$f(x) = \cos x$. Valor exacto $f'(x) = -\operatorname{sen} x$
en $x = 0{,}8$.

Trabajar con 9 cifras decimales signific.

a) orden $O(h^2)$; $h = 0,01$

$$f'(0,8) \simeq \frac{f(0,81) - f(0,79)}{0,02} \simeq -0,717344150$$

b) orden $O(h^4)$; $h = 0,01$

$$f'(0,8) \simeq \frac{-f(0,82) + 8f(0,81) - 8f(0,79) + f(0,78)}{0,12}$$

$$\simeq -0,717356108$$

error para $O(h^2) = -0,000011941$
error para $O(h^4) = +0,000000017$

Si se repite para $h = 0,0001$

Error $O(h^2) = -0,000003909$
error $O(h^4) = 0,000004742$

Porqué ocurre esto?.
Influyen los errores de redondeo al usar la calculadora.

x_0-h	x_0	x_0+h
-1	0	$+1$

$$f(x_0 - h) = y_{-1} + e_{-1}$$
$$f(x_0 + h) = y_1 + e_1 \rightarrow \text{errores de redondeo}$$

Si usamos $f'(x_0) \simeq \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h}$

$$f'(x_0) = \frac{y_1 - y_{-1}}{2h} + \underbrace{E_{red}(f,h)}_{\frac{e_1 - e_{-1}}{2h}} + \underbrace{E_{trunc}(f,h)}_{-\frac{h^2 f'''(\xi)}{6}}$$

Si $|e_{-1}| < \varepsilon$; $|e_1| < \varepsilon$ y $f'''(\xi) = M = \max\{f'''(x)\}$ en $[a,b]$

$$|E(f,h)| \leq \underbrace{\frac{\cancel{2}\varepsilon}{\cancel{2}h}}_{\text{grande para h chico.}} + \frac{h^2 M}{6}$$

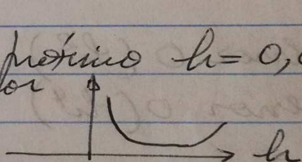
El $\underline{h}$ que minimiza el error es $h = \left(\dfrac{3\varepsilon}{M}\right)^{1/3}$

Para el ejemplo, $|\operatorname{sen} x| \leq 1$ [$f'''(x)$ acotada].

$\varepsilon = 0{,}5 \times 10^{-9}$ como error de redondeo

$\Rightarrow$ h óptimo $= 0{,}00114714$

por esto, el valor de h más próximo $h = 0{,}001$ es el mejor.



Para la form. de orden $O(h^4)$.

$$f'(x_0) = \frac{-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}}{12h} + \underbrace{\frac{-e_2 + 8e_1 - 8e_{-1} + e_{-2}}{12h}}_{\text{redond.}} + \underbrace{\frac{h^4 f^{5}(\xi)}{30}}_{\text{trunc.}}$$

$$\frac{18}{12}$$

$$|E(f,h)| \leq \frac{3\varepsilon}{2h} + \frac{M h^4}{30}$$

$$-\frac{3\varepsilon}{2h^2} + \frac{4h^3 M}{30}$$

$$\varepsilon \cdot \overset{15}{30} \cdot \frac{3}{2 \cdot 4} = h^3$$

h óptimo que minimiza la expresión:

$$h = \left(\frac{45\varepsilon}{4M}\right)^{1/5}$$

Para el ejemplo: $h = 0{,}022388475$
el mejor $h = 0{,}01$ (más próximo)..

Si tomamos el pol. de interp. de Lagrange

x	0,7	0,8	0,9
$f(x)$	cos 0,7	cos 0,8	cos 0,9

$$p_2(x) = 1{,}046875165 - 0{,}159260044x - 0{,}348063157x^2$$

$$p_2'(0{,}8) = -0{,}716161095$$

$$p_4(x) = 0{,}998452927 + 0{,}009638391x - 0{,}52329134x^2 + 0{,}026521229x^3 + 0{,}028981100x^4.$$

\+

x	0,6	1,0
$f(x)$	cos 0,6	cos 1

$$p_4'(x) = -0{,}717353703$$

q corresponden a $h = 0{,}1$. para las fórmulas.