Übungen zu Algorithmen
WSI für Informatik
Kaufmann/Kuckuk/Förster

Wintersemester 2020/21
Universität Tübingen
4. November 2021

Aufgabensammlung Teil 2

Thema: Rekursionen und Heaps

Aufgabe 1: Rekursion

Teilaufgabe f) ist eine alte Klausuraufgabe!

Finden Sie für $T(n)$ eine geschlossene Form ohne das Mastertheorem und beweisen Sie die Korrektheit mittels Induktion. Sie dürfen bei a) und b), c) und f) annehmen, dass n eine Zweierpotenz ist (also $n = 2^k$), bei d) und e) $n = 2^{2^k}$.

a) $T(n) = n^2 T\left(\frac{n}{2}\right)$, $T(1) = 0$

b) $T(n) = 4T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$, $T(1) = 1$

c) $T(n) = nT\left(\frac{n}{2}\right)$, $T(1) = 1$

d) $T(n) = nT(\sqrt{n}) + n^2$, $T(2) = 1$

e) $T(n) = \sqrt{n}T(\sqrt{n}) + n$, $T(2) = 1$

f) $T(n) = \frac{n}{2}T(\frac{n}{2})$, $T(1) = 1$

Aufgabe 2: Heap

Gegeben sei das Array $A = \langle 5, 3, 17, 10, 84, 19, 6, 22, 9 \rangle$.

a) Bilden Sie den Heap für Array A. Benutzen Sie dabei die „Heap-Eigenschaft“: jeder Baumknoten u ist mit einem Element $S[u]$ beschriftet und es gilt: ist u Elternknoten von v, so ist $S[u] \leq S[v]$. Veranschaulichen und kommentieren Sie alle Schritte.

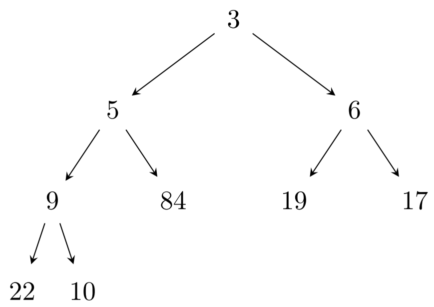
b) Wie sieht der Heap aus, wenn Sie eine ExtractMin Operation ausgeführt und dann die Heapeigenschaft wieder hergestellt haben?

c) Fügen Sie das neue Element 2 zu dem Heap (aus b)) hinzu.

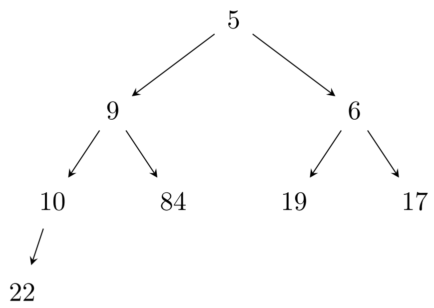
d) Wie viele Schritte in $\mathcal{O}$-Notation brauchen Sie um das maximale Element aus dem Heap zu löschen?

Lösungen:

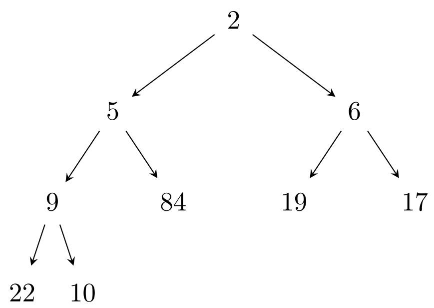
1. a) $T(n) = 0$
   b) $T(n) = (log(n) + 1) \cdot n^2$
   c) $T(n = 2^k) = 2^{k(k+1)/2}$
   d) $T(n) = log(log(n)) \cdot n^2 + \frac{n^2}{4}$
   e) $T(n = 2^{2^k}) = \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot 2^{2^k}$
   f) $T(n = 2^k) = 2^{\frac{k(k-1)}{2}}$
2. a) Bildung des Heap.



   b) Extractmin ausführen und Heapeigenschaft wiederherstellen.



   c) Neues Element 2 hinzufügen.



   d) $\mathcal{O}(n)$