Aufgabensammlung Teil 5

Thema: Grundlagen zu Graphen

Aufgabe 1: Begriffe aus der Graphentheorie

Dies ist eine alte Klausuraufgabe!

Erklären Sie die folgenden Begriffe aus der **Graphentheorie**:

a) Artikulationspunkt

b) Starke Zusammenhangskomponente

c) Baum

d) Bipartiter Graph

e) Induzierter Teilgraph

f) Querkante bei DFS

Aufgabe 2: Adjazenzmatrix vs. Adjazenzliste

Der *transponierte Graph* eines Graphen $G = (V, E)$ ist der Graph $G' = (V, E')$, wobei

$$E' := \{(v, u) \mid (u, v) \in E\}.$$

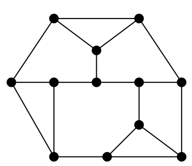
a) Nehmen Sie an, dass G als Adjazenzmatrix vorliegt. Beschreiben Sie einen Algorithmus, der den transponierten Graph G' in einer Laufzeit von $\mathcal{O}(|V|^2)$ berechnet.

b) Nehmen Sie nun an, dass G als Adjazenzliste vorliegt. Beschreiben Sie einen Algorithmus, der den transponierten Graph G' in einer Laufzeit von $\mathcal{O}(|V| + |E|)$ berechnet.

Aufgabe 3: Knotenfärbung

Sei $G = (V, E)$ ein ungerichteter Graph mit $|V| = n$ und $|E| = m$. Eine Knotenfärbung von G ist eine Abbildung $f : V \to \{c_1, \ldots, c_k\}$, mit $k \leq n$, die jedem Knoten eine Farbe $c_1, \ldots, c_k$ zuordnet. Dabei dürfen keine zwei benachbarten Knoten die selbe Farbe haben, d. h. für alle Kanten $(u, v) \in E$ gilt: $f(u) \neq f(v)$. Üblicherweise wird versucht, die Anzahl der verwendeten Farben k zu minimieren. Bestimmen Sie die minimale Anzahl an Farben für die folgenden Graphen und begründen Sie, warum die Anzahl minimal ist.

a) G ist der folgende Graph:



b) G ist ein vollständiger Graph. Dabei heißt G *vollständig*, wenn jeder Knoten von G durch Kanten mit jedem anderen Knoten verbunden ist.

c) G ist ein bipartiter Graph. Dabei heißt G *bipartit*, wenn sich V zerlegen lässt in zwei disjunkte Knotenmengen U und W, so dass für jede Kante $e \in E$ gilt: Ein Endpunkt von e ist in U und der andere in W.

d) G ist ein Baum.

e) G ist ein Gitter. Ein Gitter ist wie folgt definiert: Es gibt $n = a \cdot b$ Knoten, nämlich

$$v_{(1,1)}, v_{(1,2)}, \dots v_{(1,b)}, \dots, v_{(a,1)}, v_{(a,2)}, \dots v_{(a,b)}.$$

Zwischen zwei Knoten $v_{(i,j)}$ und $v_{(k,\ell)}$ gibt es genau dann eine Kante, wenn $|i-k| + |j-\ell| = 1$.

f) G ist ein Kreis. Ist $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, so gilt für einen Kreis

$$E = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), \dots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)\}.$$

Aufgabe 4: Graphen und Bäume

Sei G ein schleifenfreier, ungerichteter Graph mit $|V| = n$ Knoten und $|E| = m$ Kanten. G heißt *ungerichteter Baum*, wenn alle Kanten so gerichtet werden können, dass der resultierende Graph ein Baum nach Definition in der Vorlesung ist. Ein *einfacher Zykel* in einem schleifenfreien, ungerichteten Graphen ist eine geordnete Sequenz von Knoten $(v_0, v_1, \dots, v_k)$, so dass $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ für alle $0 \le i \le k$ und $v_i \ne v_j$ für alle $0 \le i < j \le k$ mit der Ausnahme $v_0 = v_k$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Jeder kürzeste Pfad in G ist immer einfach, d.h. kein Knoten wird mehrfach besucht.

b) Ist G zusammenhängend, so gilt $\mathrm{diam}(G) \le n - 1$.

Anmerkung: $\mathrm{diam}(G)$ bezeichnet den Durchmesser von G; dieser ist definiert als die maximale Länge irgendeines kürzesten Pfades in G.

c) Die Summe aller Knotengrade in G ist gleich der Anzahl aller Kanten m.

d) Die Anzahl der Knoten mit ungeradem Grad in G ist gerade.

e) Ist G ein Baum, so ist jeder Pfad einfach.

f) Wenn G keine Zykel enthält, so ist G ein Baum.

g) Wenn G ein ungerichteter Baum ist, dann hat $G' = (V, E \cup e)$ für $e \notin E$ genau einen einfachen Zykel.

h) Wenn G ein vollständiger k-närer Baum ist $(k \ge 2)$, so gilt $\mathrm{diam}(G) \le 2\lceil \log_k n \rceil$.

i) G hat höchstens $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten.

j) Es existiert kein solcher Graph G, in dem jeder Knoten zu jedem anderen mit einem Pfad der Länge 2 verbunden werden kann.

Lösungen:

1. Vergleiche mit der Vorlesung
2. a) Der Inhalt jedes Feldes $a_{i,j}$ der Adjazenzmatrix A von G muss in das Feld $a^{'}_{j,i}$ der Adjazenzmatrix $A^{'}$ von $G^{'}$ geschrieben werden.
   b) Initialisiere eine neue Adjazenzliste für $G^{'}$. Gehe jede Liste von Nachbarn in der Adjazenzliste von G vor. Wenn in der Nachbarliste von u der Knoten v gefunden wird, schreibe u in die Nachbarliste von v in $G^{'}$.
3. a) 3 (Dreiecke brauchen 3 Farben)
   b) $|V|$
   c) 2
   d) 2 (jedes Level nach BFS-Suche von Wurzel mit anderer Farbe)
   e) 2 (Schachbrettmuster)
   f) 3 (beachte ungerade Kreise)
4. a) Ja.
   b) Ja.
   c) Nein, $2m$ wäre richtig.
   d) Nein, G ist dann ein Wald.
   e) Nein, aber nicht-einfache Pfade enthalten zwingend nicht-einfache Zykel Zykel. Kürzeste Pfade sind einfach.
   f) Ja.
   g) Ja.
   h) Ja.
   i) Ja.
   j) Nein, im vollständigen Graphen gibt es viele Pfade der Länge 2 zwischen allen Knoten.