Algo Tutorium 2

29.10.21

Anmeldung

Tipps

- Youtube: MIT OpenCourseWare
- FSI: Altklausuren

- Bitte immer nur einer das Blatt hochladen
- Immer idiotensicher bitte ☺

- Wer hat keinen Partner?

Thema: Rekursionen

Allgemein

- vereinfacht: $T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$

- a : Anzahl der Teilprobleme
- b : Größe der Teilprobleme
- $f(n)$: „Kosten" des Zusammenfügens in der Rekursion

- Laufzeit von Rekursionen abschätzbar durch:
    - Mastertheorem
    - Geschlossene Form (rekursives Einsetzen)

Master-Theorem

Seien $a \geq 1, b > 1, f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, T(n) \geq 0$ und
$T(n) = a \cdot T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$. Dann gilt:

1. falls $f(n) = O\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right)$ für ein $\epsilon > 0$:
   $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$
2. falls $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$:
   $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log_{\mathrm{b}} n\right)$
3. falls $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right)$ mit $\epsilon > 0$ und $\exists c < 1$ mit
   $$a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n) \text{ für n groß genug :}$$
   $T(n) = \Theta(f(n))$

„Vorgehen" Master-Theorem

1. $a, b, f(n), \log_b a$ bestimmen
2. 2. Fall prüfen $\begin{pmatrix} \text{falls } f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right): \\ T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right) \end{pmatrix}$
3. Orientierung nach oben/unten:
   Verhältnis von $f(n)$ und $n^{\log_b a}$ prüfen
   - wenn $f(n)$ **ausreichend** kleiner als $n^{\log_b a}$ $\Rightarrow$ 1. Fall
   - wenn $f(n)$ **ausreichend** größer als $n^{\log_b a}$ $\Rightarrow$ 3. Fall

1. falls $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$:
   $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$

2. falls $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$:
   $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$

3. falls $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$ und $\exists c, c < 1$
   mit $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$ für n groß genug, für $\epsilon > 0$:
   $T(n) = \Theta(f(n))$

Beispiele Master-Theorem

1. $T(n) = 5 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

$a = 5, b = 2, f(n) = n, \log_b a = \log_2 5$

- 2. Fall scheidet direkt aus: n $\neq \Theta(n^{log_2 5})$
- 3. Fall geht nicht, $f(n) = n$ kann nicht schneller wachsen als $n^{log_2 5+\epsilon}$ für egal welches $\epsilon > 0$
- 1. Fall probieren: $\mathrm{f(n)} = n^1 = O(n^{\log_2 2}) = O(n^{\log_2 5-\epsilon})$

  $f\ddot{u}r\ \epsilon = \log_2 5 - 1 > 0 \Rightarrow$ 1. Fall!

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^{\log_2 5})$

2. $T(n) = 9 \cdot T\left(\frac{n}{3}\right) + n^2$

$a = 9, b = 3, f(n) = n^2, \log_b a = 2$

- 2. Fall klappt: $n^2 = \Theta(n^{\log_3 9}) = \Theta(n^2)$

$\Rightarrow T(n) = \Theta(n^2 \cdot \log n)$

Rekursionen, geschlossene Form

- rekursiv einsetzen und ggfs. Wissen über n nutzen
  (z.B. wenn $n = 2^k$ schreibe $T\left(\frac{n}{2}\right) = T(2^{k-1})$)
- bei Vermutung über geschlossene Form: **Induktionsbeweis!**
- Übungssache, oft Klausuraufgabe

Wichtige Summen

Summen

$\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$

$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$ geometr. Reihe

$\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}$ für $|x| < 1$

$\sum_{i=0}^{\infty} i x^i = \frac{x}{(1-x)^2}$ für $|x| < 1$ warum ? Ableiten !!

$\sum_{i=1}^{n} 1/i = 1 + 1/2 + 1/3 + \ldots. = \ln n + O(1)$ n-te harmon. Zahl

Bsp. Rekursion

Vor.: $T(n) = 3 \cdot \mathrm{T}\left(\frac{n}{2}\right)$ und $T(1) = 1$, zudem $n = 2^k \; \forall k \in N$

$$T(n) = T\left(2^k\right) = 3 \cdot T\left(2^{k-1}\right) = 3^2 \cdot T\left(2^{k-2}\right) \; \ldots$$
$$= 3^k \cdot T\left(2^{k-k}\right) = 3^k \cdot T(1) = 3^k = 3^{\log_2 n}$$

<u>Beweis der Korrektheit per Induktion:</u>

IA: $3^{\log_2 1} = 3^0 = 1 = T(1)$

IV: Die Behauptung ($T(n) = 3^{\log_2 n}$) gelte für bel., aber festes $n \in N$.

IS: $n \rightarrow 2n$.

$$T(2n) = 3 \cdot T(n) = 3 \cdot 3^{\log_2 n} = 3^{(\log_2 n)+1} = 3^{(\log_2 n)+(\log_2 2)} = 3^{\log_2 2n}$$

PB

Aufgabe 1: Mastertheorem

— Vorbereitung auf Aufgabe 1 des Übungsblattes —

Wenden Sie - wenn möglich - das Mastertheorem auf $T(n)$ an! Wenn das Mastertheorem nicht angewandt werden kann, begründen Sie warum nicht.

a) $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 3\left(\frac{n}{2}\right) - 2$

b) $T(n) = 2 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n$

c) $T(n) = 8 \cdot T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

Aufgabe 2: Rekursionen

— Vorbereitung auf Aufgabe 1 und 2 des Übungsblattes —

Sei n eine Zweierpotenz, das heißt $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Folgende Rekursion ist für die Funktion T wie folgt gegeben. Für $n > 1$ gelte

$$T(n) = A(n) + B(n),$$

wobei

$$A(n) = A\left(\frac{n}{2}\right) + B\left(\frac{n}{2}\right)$$

und

$$B(n) = B(n-1) + 3.$$

Zudem seien $T(1) = 1$, $B(1) = 1$ und $A(1) = 0$.
Finden Sie für $T(n)$ eine geschlossene Form ohne das Mastertheorem zu verwenden und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer geschlossenen Form mit vollständiger Induktion.

Besprechung PB

1. falls $f(n) = O\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right)$ für ein $\epsilon > 0$:
   $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$
2. falls $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$:
   $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right)$
3. falls $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right)$ und $\exists c, c < 1$
   mit $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$ für n groß genug, für $\epsilon > 0$:
   $T(n) = \Theta(f(n))$

A1 (Master-Theorem)

a) $T(n) = T\left(\frac{n}{2}\right) + 3\left(\frac{n}{2}\right) - 2,$

$$\boldsymbol{a} = 1, \boldsymbol{b} = 2, \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}) = 3\left(\frac{n}{2}\right) - 2,\ \mathbf{log_b}\, \boldsymbol{a} = \log_2 1 = 0$$

$f(n) = \frac{3}{2}n - 2$ mit $n^{\log_b a} = n^0 = 1$ vergleichen

3. Fall:

1. Bedingung:

Wir setzen $\epsilon = 1 > 0$.

$$f(n) = \frac{3}{2}n - 2 = \frac{3}{2}n^{0+1} - 2 = \frac{3}{2}n^{0+\epsilon} - 2 = \Omega\left(n^{\log_2 1+\epsilon}\right)$$

2. Bedingung:

Setze $c := \frac{1}{2}$ und prüfe für pos. n:

$$af\left(\frac{n}{b}\right) = f\left(\frac{n}{2}\right) = \frac{3n}{4} - 2 \leq 3\left(\frac{n}{4}\right) - 1 = cf(n)$$

Daher $T(n) = \Theta\big(f(n)\big) = \Theta(n)$

A1 (Master-Theorem)

1. falls $f(n) = O\left(n^{\log_b(a)-\epsilon}\right)$ für ein $\epsilon > 0$:
   $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$
2. falls $f(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$:
   $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right)$
3. falls $f(n) = \Omega\left(n^{\log_b(a)+\epsilon}\right)$ und $\exists c, c < 1$
   mit $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$ für n groß genug, für $\epsilon > 0$:
   $T(n) = \Theta(f(n))$

b) $T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + n,$

$\boldsymbol{a} = 2, \boldsymbol{b} = 2, \boldsymbol{f(n)} = n, \boldsymbol{\log_b a} = \log_2 2 = 1$

$f(n) = n$ mit $n^{\log_b a} = n^1 = n$ vergleichen

2. Fall: $f(n) = n = n^1 = \Theta(n^1) = \Theta\left(n^{\log_2 2}\right)$

Daher $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a} \cdot \log n\right) = \Theta(n \cdot \log n)$

A1 (Master-Theorem)

1. falls $f(n) = O(n^{\log_b(a)-\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$:
   $T(n) = \Theta(n^{\log_b(a)})$
2. falls $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$:
   $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \cdot \log n)$
3. falls $f(n) = \Omega(n^{\log_b(a)+\epsilon})$ und $\exists c, c < 1$
   mit $a \cdot f\left(\frac{n}{b}\right) \leq c \cdot f(n)$ für n groß genug, für $\epsilon > 0$:
   $T(n) = \Theta(f(n))$

c) $T(n) = 8T\left(\frac{n}{2}\right) + n^2$

$\boldsymbol{a} = 8, \boldsymbol{b} = 2, \boldsymbol{f(n)} = n^2, \boldsymbol{\log_b a} = \log_2 8 = 3$

$f(n) = n^2$ mit $n^{\log_b a} = n^3$ vergleichen

1. Fall: Sei $\epsilon = 1$

$$f(n) = n^2 = O(n^{3-1}) = O(n^{3-\epsilon})$$

Daher $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^3)$

Nr.2 – Vor.

- Vor.:

  $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$. Für n > 1 gilt:

$$T(n) = A(n) + B(n)$$

$$A(n) = A\left(\frac{n}{2}\right) + B\left(\frac{n}{2}\right)$$

$$B(n) = B(n-1) + 3$$

$$T(1) = 1, \qquad B(1) = 1, \qquad A(1) = 0$$

Nr.2 – B(n) Überlegung

$$B(n) = B(n-1) + 3$$
$$= B(n-2) + 3 + 3$$
$$= B(n-3) + 3 + 3 + 3$$
$$\ldots$$
$$= B(n-(n-1)) + (n-1) \cdot 3$$
$$= B(1) + 3n - 3$$
$$= 3n - 2$$

Nr.2 – B(n) Induktion

- IA: n = 1: $\mathrm{B}(1) \overset{Vor.}{=} 1 = 3 \cdot 1 \ - 2.$
- IV: Sei für ein n $> 0\ B(n) = 3n - 2.$
- IS: n+1:

$$
\begin{aligned}
B(n+1) &\overset{Vor.}{=} B(n) + 3 \\
&\overset{IV}{=} 3n - 2 + 3 \\
&= 3(n+1) - 2
\end{aligned}
$$

Nr.2 - A(n) Überlegung

$$A(n) = A\left(\frac{n}{2}\right) + B\left(\frac{n}{2}\right)$$

Formel einsetzen $= A\left(\frac{n}{2}\right) + 3 \cdot \frac{n}{2} - 2$

$n = 2^k$ $\quad = A\left(2^{k-1}\right) + 3 \cdot 2^{k-1} - 2$

$\ldots$

$= A\left(2^{k-k}\right) + 3 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} 2^i - 2k$

Vor+geom. Sum. $= 0 + 3 \cdot \frac{2^k - 1}{2-1} - 2k$

Umformen $= 3 \cdot 2^k - 2k - 3$

Nr.2 - A(n) Induktion

- IA: n=1. $A(1 = 2^0)$ d.h. $k = 0$.
  $A(1) \overset{Vor.}{=} 0 = 3 \cdot 2^0 - 2 \cdot 0 - 3$
- IV: Für ein $n > 0$ sei $A(n) = A(2^k) = 3 \cdot 2^k - 2k - 3$
- IS: 2n, also k+1.

$$A(2^{k+1}) = A(2^k) + B(2^k)$$

$$=^{IV} (3 \cdot 2^k - 2k - 3) + (3 \cdot 2^k - 2)$$

$$= 3 \cdot 2^{k+1} - 2k - 3 - 2$$

$$= 3 \cdot 2^{k+1} - 2(k + 1) - 3$$

Nr.2 - T(n)

- Somit haben wir eine geschlossene Form für $T(n)$ gefunden:
- $$\begin{aligned} T(n = 2^k) &= A(2^k) + B(2^k) \\ &= (3 \cdot 2^k - 2k - 3) + (3 \cdot 2^k - 2) \\ &= 6 \cdot 2^k - 2k - 5 \\ &= 3 \cdot 2^{k+1} - 2k - 5 \end{aligned}$$

Bis nächste Woche!

Anmeldung nächste Woche