Aufgabensammlung Teil 8

Thema: MST

Aufgabe 1: Verallgemeinerungen und Eindeutige MSTs

a) Gegeben sei ein ungerichteter Graph mit positiven und negativen Kantengewichten. Ist es möglich Kruskals Algorithmus zu verwenden, um einen MST zu bestimmen?

b) Modifizieren Sie Kruskals Algorithmus so, dass er einen *maximal spanning tree* findet. Ein maximal spanning tree ist ein Spannbaum, der die Summe der Kantenkosten maximiert.

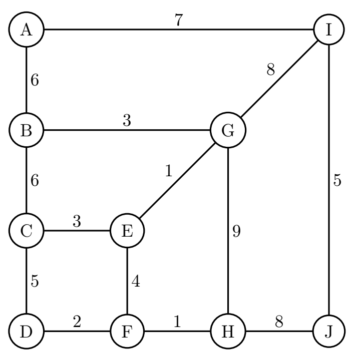
c) Beweisen Sie, dass ein Graph mit paarweise verschiedenen Kantengewichten einen eindeutigen MST besitzt.

d) Betrachten Sie einen ungerichteten gewichteten Graphen mit mindestens einem Zykel. Beweisen Sie, dass falls eine eindeutige Kante in einem Zykel existiert mit größerem Gewicht als alle anderen Kanten im Zykel, diese Kante nicht im MST enthalten ist.

e) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass die Aussage aus Teilaufgabe d) nicht gilt, wenn die Kante nicht eindeutig ist. Das heißt: Es gibt mindestens zwei Kanten im Zykel mit gleichem Gewicht, das strikt größer ist als das Gewicht aller anderen Kanten im Zykel.

Aufgabe 2: Kruskal & Prim

Gegeben sei folgender Graph G:



a) Führen Sie Kruskal's Algorithmus aus, um einen minimalen Spannbaum für G zu bestimmen. Geben Sie dessen Kanten in der Reihenfolge ihrer Hinzufügung an.

b) Nutzen Sie in a) die Union-Find-Datenstruktur (genauer: Union-By-Rank, wobei im Falle gleichen Rangs der zwei Wurzeln, die alphabetisch kleinere der Elternknoten wird), und geben Sie deren Endzustand an. Es genügt, den Elternknoten jedes Knotens zu nennen.

c) Führen Sie Prim's Algorithmus gestartet an $\{A\}$ aus, um einen minimalen Spannbaum für G zu bestimmen. Geben Sie die Kanten in der Reihenfolge ihrer Hinzufügung an.

Aufgabe 3: Verständnisfragen zu MST

Gegeben sei ein zusammenhängendes ungerichtetes Netzwerk $G = (V, E, c)$ mit positiven Kantengewichten $c\colon E \to \mathbb{N}$. Sei $T = (V, E')$ ein MST für G.

a) Beweisen oder widerlegen Sie folgende Aussagen:

1. Für jedes $v \in V$ existiert eine Kante $\{v, u\} \in E'$, so dass für alle $\{v, w\} \in E$ gilt:

$$c(\{v, u\}) \leq c(\{v, w\}).$$

   In Worten: In einem ungerichteten gewichteten Graphen ist für jeden Knoten eine billigste inzidente Kante immer im MST enthalten.

2. In G ist für jeden Knoten keine der teuersten inzidenten Kanten im MST enthalten. Formal:

$$\forall v \in V : c(\{v, u\}) = \max\{c(\{v, w\}) \mid \{v, w\} \in E\} \Rightarrow \{v, u\} \notin E'$$

b) Nehmen Sie an, dass G lauter verschiedene Kantengewichte hat. Betrachten Sie folgenden Algorithmus für G:

Initialisiere T als den ganzen Graphen G. Ordne die Kanten von G von groß nach klein und wähle die jeweils nächste Kante gemäß dieser Ordnung. Lösche die aktuelle Kante aus T, wenn sie in T zu einem Zykel gehört.

Berechnet dieser Algorithmus einen MST? Begründen Sie Ihre Antwort!

c) Betrachten Sie das Netzwerk $G' = (V, E, c')$, wobei die Kantengewichte c' folgendermaßen festgelegt werden:

1. $c'(e) = c(e) + 100$ für jede Kante $e \in E$.
2. $c'(e) = 2^{c(e)}$ für jede Kante $e \in E$.
3. $c'(e) = \log(c(e) + 1)$ für jede Kante $e \in E$.
4. $c'(e) = \frac{1}{c(e)}$ für jede Kante $e \in E$.
5. $c'(e) = \left\lfloor \frac{c(e)}{2} \right\rfloor$ für jede Kante $e \in E$.

Liefert die Berechnung eines MST's für G' in den fünf Szenarien auch einen MST für G? Falls ja, begründen Sie warum. Falls nein, geben Sie ein Gegenbeispiel an.

Lösungen:

1. a) Ja, Kruskal achtet nur auf die Ordnung nach Gewicht.
   b) Sortiere Kanten nach absteigendem Gewicht.
   c) Dies ist etwas tricky. Man kann z.B. über die Anzahl der Knoten Induktion durchführen und dann nochmal Induktion über die Anzahl der Kanten im Induktionsschritt.
   d) Beweis durch Widerspruch. Eine Kante des Zykels muss fehlen, man erhält einen neuen Spannbaum durch tausch dieser Kante mit der längsten Kante des Zykels.
   e) Beide Kanten können miteinander getauscht werden, man erhölt zwei verschiedene MSTs.
2. a) EG und FH / DF / CE und BG / EF / IJ / AB / AI
   b)

Knoten	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
Parent	E	E	E	F	-	E	E	F	E	I

   c) AB / BG / EG / CE / EF / FH / DF / AI / IJ
3. a) 1. Ja, Beweis durch Widerspruch: Die fehlende Kante schließt genau einen Zykel, dort gibt es eine teurere adjazente Kante.
      2. Falsch, betrachte z.B. Knoten von Grad 1
   b) Siehe 1d)
   c) 1. Ja (Ordnung der Kanten bleibt gleich)
      2. Ja (Ordnung der Kanten bleibt gleich)
      3. Ja (Ordnung der Kanten bleibt gleich)
      4. Nein
      5. Nein