Übungen zu Algorithmen | **Wintersemester 2020/21**
WSI für Informatik | **Universität Tübingen**
Kaufmann/Kuckuk/Förster | **18. November 2020**

Aufgabensammlung Teil 1

Thema: O-Notation

Aufgabe 1: Einige Aussagen in O-Notation

Seien $f(n)$ und $g(n)$ zwei Funktionen, so dass $f(n) = \mathcal{O}(g(n))$. Zeigen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) $h(n) = \mathcal{O}(f(n)) + \mathcal{O}(g(n)) \Rightarrow h(n) = \mathcal{O}(f(n) + g(n))$.

b) $f(n) + g(n) = \mathcal{O}(g(n))$.

c) $f(n) \cdot g(n) = \mathcal{O}(g(n))$.

d) Sei $f'(n) = \mathcal{O}(g(n))$. Dann ist $f(n) \cdot f'(n) = \mathcal{O}(g^2(n))$.

e) $\exists h(n) = \mathcal{O}(g(n)) : f(n) = \mathcal{O}(h(n))$.

f) $\forall h(n) = \mathcal{O}(g(n)) : f(n) = \mathcal{O}(h(n))$.

g) $\forall h(n) = \Omega(g(n)) : f(n) = \mathcal{O}(h(n))$.

h) $\exists h(n) = \Omega(g(n)) : f(n) = \mathcal{O}(h(n))$.

Aufgabe 2: Vergleich von Funktionen in O-Notation

Bestimmen Sie für die folgenden Beispiele jeweils, welcher der folgenden drei Fälle vorliegt: $f(n) \in o(g(n))$, $f(n) \in \omega(g(n))$ oder $f(n) \in \Theta(g(n))$.

	f(n)	g(n)
a)	$n/2$	$4n + 250$
b)	$10n^2 + 8n + 100$	n^3
c)	$10 \log n$	$\log n^2$
d)	n	$n \log n$
e)	$n^{1.01}$	$n(\log n)^5$
f)	2^n	2^{n+1}
g)	$n!$	2^n
h)	$(\log n)^{\log n}$	$2^{(\log n)^2}$

Aufgabe 3: Asymptotisches Wachstum von Funktionen

Dies ist eine alte Klausuraufgabe!

Ordnen Sie die folgenden Funktionen nach ihrem asymptotischen Wachstum.

$$A(n) = \log(n) \qquad B(n) = 2^{\sqrt{\log n}} \qquad C(n) = (\log n)^{\log n} \qquad D(n) = \log(n!)$$
$$E(n) = (\log n)^{\sqrt{n}} \qquad F(n) = (\log(\log n))^n \qquad G(n) = 42n$$

Ordnen Sie die Funktionen gemäß ihrem asymptotischen Wachstum. Beweisen Sie die Korrektheit jeweils für die sechs **benachbarten** Funktionenpaare!

Lösungen:

1. a) Stimmt. Dies gilt auch, wenn $f(n) \neq \mathcal{O}(g(n))$.
   b) Stimmt.
   c) Stimmt nicht. Es gilt nur, dass $f(n) \cdot g(n) = \mathcal{O}(f(n) \cdot g(n))$.
   d) Stimmt.
   e) Stimmt.
   f) Stimmt nicht. Betrachte zum Beispiel $h(n) = 1$.
   g) Stimmt.
   h) Stimmt.
2. a) $f(n) \in \Theta(g(n))$
   b) $f(n) \in o(g(n))$
   c) $f(n) \in \Theta(g(n))$
   d) $f(n) \in o(g(n))$
   e) $f(n) \in \omega(g(n))$
   f) $f(n) \in \Theta(g(n))$
   g) $f(n) \in \omega(g(n))$
   h) $f(n) \in o(g(n))$
3. Sei $f(n) \prec g(n)$ genau dann, wenn $f(n) = \mathcal{O}(g(n)$. Es gilt:

$$A(n) \prec B(n) \prec G(n) \prec D(n) \prec C(n) \prec E(n) \prec F(n).$$