Gedächtnisprotokoll
Algorithmen

bei Prof. Kaufmann

3. März 2021

```
Klausur:       Hauptklausur, WS, 2020
Pruefer:       Prof. Kaufmann
Datum:         03.03.2020
Zeit:          95 min
Punkte:        30
Hilfsmittel:   Cheat-Sheet
Sprache:       Deutsch
```

1 Rekursion - 6 Punkte

Sei $T(n) = \sqrt{2} \cdot T(\frac{n}{2}) + \sqrt{n}$ und $T(1) = 1$

a)

Wenden Sie das Mastertheorem auf T(n) an.

b)

Finden Sie für T(n) eine geschlossene Form und beweisen Sie die Korrektheit mittels In- duktion.

2 Graphen - 6 Punkte

6 Multiple Choice fragen zu Graphen. Gefragt wurde z.B. wieviele Kanten bistimmten Graphen die gerichtet oder bipartit sind. Gefragt wurde ob sich ein Graph zykelfrei in einen ungerichteten Graph umwandeln lässt.

3 Kürzeste Wege - 6 Punkte

Gegeben war ein gerichteter Graph mit Kantenkosten.

a)

Wenden Sie Dijkstra auf den Graphen an.

b)

Sei G = (V, E) ein (beliebiger) gerichteter Graph und p ein kürzester Pfad in G von s V nach t V . Zeigen oder widerlegen Sie: Wird jede Kante (u, v) von G durch einen gerichteten Pfad von u nach v der Länge 7 ersetzt, so gibt es im resultierenden Graphen einen kürzesten Pfad von s nach t, der durch alle Knoten geht, durch die p geht.

4 MST - 6 Punkte

Gegeben war die Definition von Manhattan-Spanning-Trees.

a)

Zeichnen sie zu gegebenen Punkten einen minimalen Manhattan-Spanning-Tree.

b)

Zeigen Sie: In einem Rechteck, dass von p und q aufgespannt wird, befindet sich kein anderer Punkt $r \notin \{p, q\}$.

5 Sortieralgorithmen - 6 Punkte

In der Vorlesung haben Sie den Sortieralgorithmus Mergesort kennengelernt. Dieser hat eine erwartete Laufzeit von O(n log n).

a)

Beweisen Sie, dass Mergesort unter der Annahme, dass der Median in konstanter Zeit bestimmt werden kann, ein Array der Größe n in Zeit O(n log n) sortiert.

Grafikkarten haben heute sehr viele Cores. Vereinfacht nehmen wir an, dass es so viele Cores gibt, dass alle Teilprobleme derselben Größe parallel berechnet werden können, d.h. alle diese Berechnungen laufen in derselben Zeit ab. Dies ermöglicht eine starke Verbesserung der Gesamt- laufzeit.

b)

Beweisen Sie, dass parallelisiertes Mergesort unter der Annahme, dass der Median in konstanter Zeit bestimmt werden kann, ein Array der Größe n in Zeit O(n) sortiert.

6 Dynamische Programmieren - 6 Punkte

Betrachten Sie das Rucksackproblem: Gegeben seien n Objekte $o_1.o_2, ..., o_n$. Jedes Objekt $o_j (1 \leq j \leq n)$ hat ein Gewicht w_j. Nun soll ein Rucksack mit einer Anzahl an Objekten gefüllt werden, so dass das Gesamtgewichts des Rucksacks nicht W überschreitet. Gehen Sie davon aus, dass $w_1, ..w_n$ und W natürliche Zahlen größer 0 sind.

a)

Betrachten sie folgende Instanz: Gegeben seien die vier Obgekte $w_1 = 2, w_2 = 5, w_3 = 3$ und $w_4 = 6$. Makieren sie in der Tabelle alle erreichbaren Gewichte. Überlegen Sie dabei, mit welchen i Gewichten das Gewicht erreicht wird.

Gewicht	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Erreichbar?												

b)

Geben Sie einen Algorithmus in Pseudocode an, der das maximal erreichbare Gewicht berechnet. Verwenden sie dabei Dynamische Programmierung.

c)

Begründen Sie die Korrektheit und die Laufzeit ihres Programms.