

Aufgabe 1: Rekursionsgleichung (6 Punkte)

Es liegen zwei Algorithmen vor, die ein Problem der Größe n lösen.

Algorithmus A: Teilt das Problem in vier Teilprobleme mit der halben Größe auf, löst diese rekursiv und fügt sie wieder in n^2 zusammen.

Algorithmus B: Reduziert das Problem in linearer Zeit cn in ein Teilproblem der Größe $n - 1$, welches dann rekursiv gelöst wird und in \tilde{c} wieder zusammengefügt wird.

Geben Sie die Laufzeit der beiden Algorithmen in Θ mit Beweis an und begründen Sie, welche der beiden Algorithmen Sie verwenden würden.

Aufgabe 2: Suchalgorithmus (6 Punkte)

Sei A ein unendlich langer Array, welcher bis auf die Stellen $1..n$ nur ∞ als Einträge hat. n ist Ihnen nicht bekannt. Geben Sie einen Algorithmus mit der Laufzeit $\mathcal{O}(\log n)$ an, welcher die Stelle eines Wertes x in A bestimmt und -1 zurückgibt, falls x nicht in A enthalten ist. Beschreiben Sie, wie Ihr Algorithmus funktioniert und beweisen Sie Korrektheit und Laufzeit.

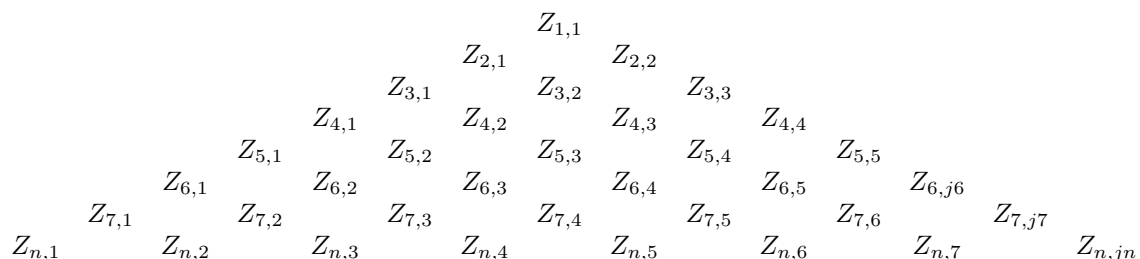
Aufgabe 3: Median (6 Punkte)

In der Vorlesung wurde beschrieben, wie der Median mit dem Median der Mediane gefunden werden kann. Dabei wurden fünf Untergruppen gewählt und folgende Gleichung hergeleitet:

$$T(n) \leq T\left(\frac{n}{5}\right) + T\left(\frac{7n}{10}\right) + cn$$

- Wie wurde die Gleichung aufgestellt?
- Warum wurden nicht drei Untergruppen gewählt?
- Wie würde die Gleichung für sieben Untergruppen aussehen?

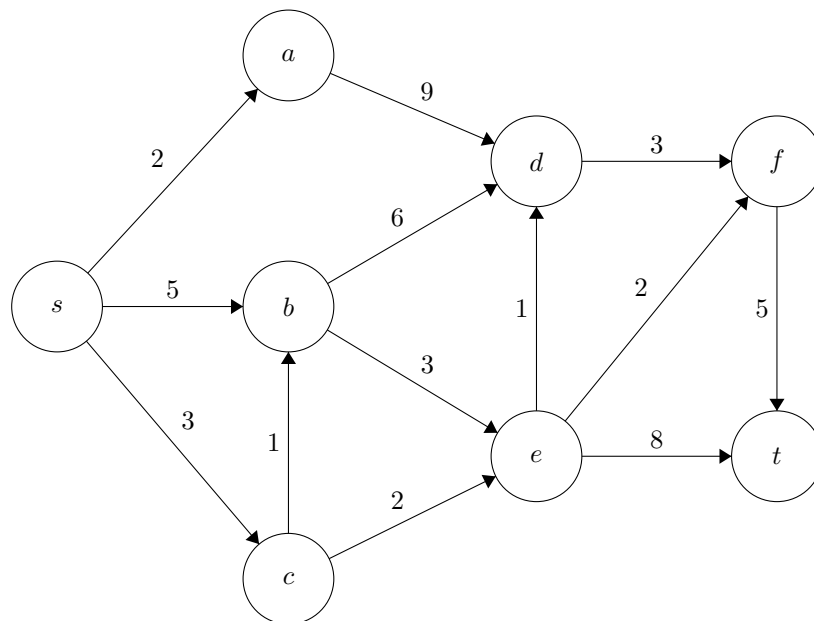
Aufgabe 4: Dynamisches Programmieren (6 Punkte)



Sei ein Dreieck aus Zahlen $Z_{1,1}..Z_{n,jn}$ so definiert, dass in jeder Zeile $1 \leq j \leq n$ genau j Einträge stehen. Ein Pfad kann so durch das Dreieck gelegt werden, dass nach Zahl $Z_{k,l}$ entweder die Zahl $Z_{k+1,l}$ oder die Zahl $Z_{k+1,l+1}$ folgt. D.h. von einer Zahl aus kann nur direkt links oder rechts diagonal nach unten gegangen werden.

Geben sie ein dynamisches Programm in Pseudocode an, welches den Pfad mit der maximalen Pfadsumme berechnet. Erklären Sie Ihren Algorithmus und beweisen Sie Korrektheit und Laufzeit.

Aufgabe 5: Dijkstra (6 Punkte)



- (a) Wenden Sie Dijkstra auf den gegebenen Graphen an. Formulieren Sie die Einträge als (Knoten, Kosten, Pfad).

	Abgearbeitet	In der Warteschlange
Schritt 1	(a,0,-)	
Schritt 2		
Schritt 3		
Schritt 4		
Schritt 5		
Schritt 6		

- (b) Sei p kürzester Pfad von s nach t , mit Kantenkosten $c : E \rightarrow \mathbb{N}$. Beweisen oder widerlegen Sie, dass p der kürzeste Pfad von s nach t bleibt, wenn alle Kantenkosten im Graphen verdoppelt werden.

Aufgabe 6: Graphen (6 Punkte)

Erklären Sie folgende Begriffe im Kontext der Graphentheorie:

- (a) Artikulationspunkt
- (b) Starke Zusammenhangskomponente
- (c) Baum
- (d) Bipartiter Graph
- (e) Induzierter Teilgraph
- (f) Querkante bei DFS