Algo-Tutorium 12

Speicherung

- **Blattorientiert:**
  - innere Knoten als Schlüssel, Blätter als Daten
- **Knotenorientiert:**
  - Datenspeicherung in den Knoten
- Allgemein: Für B- und (a,b)-Bäume beides möglich

B-Bäume – Basics

Knotenorientierter, balancierter Suchbaum der Ordnung k

- knotenorientiert:= Datenspeicherung in den Knoten
- Ordnung: $k \geq 2$ legt Kinderanzahl fest
- „vollständig“ balanciert: alle Blätter haben dieselbe Tiefe

- Kinderanzahl:
  - Wurzel: ≥ 2 Kinder
  - $k \leq$ #Kinder $\leq 2k-1$ (für innere Knoten)

- Höhe: $O(\log(n))$

Einfügen/ Löschen im B-Baum

- nach beiden Operationen soll die Balance noch gelten (Balance in unserem Fall: alle Blätter haben dieselbe Höhe, Anzahl der Kinder muss passen)
- falls nicht: herstellen durch

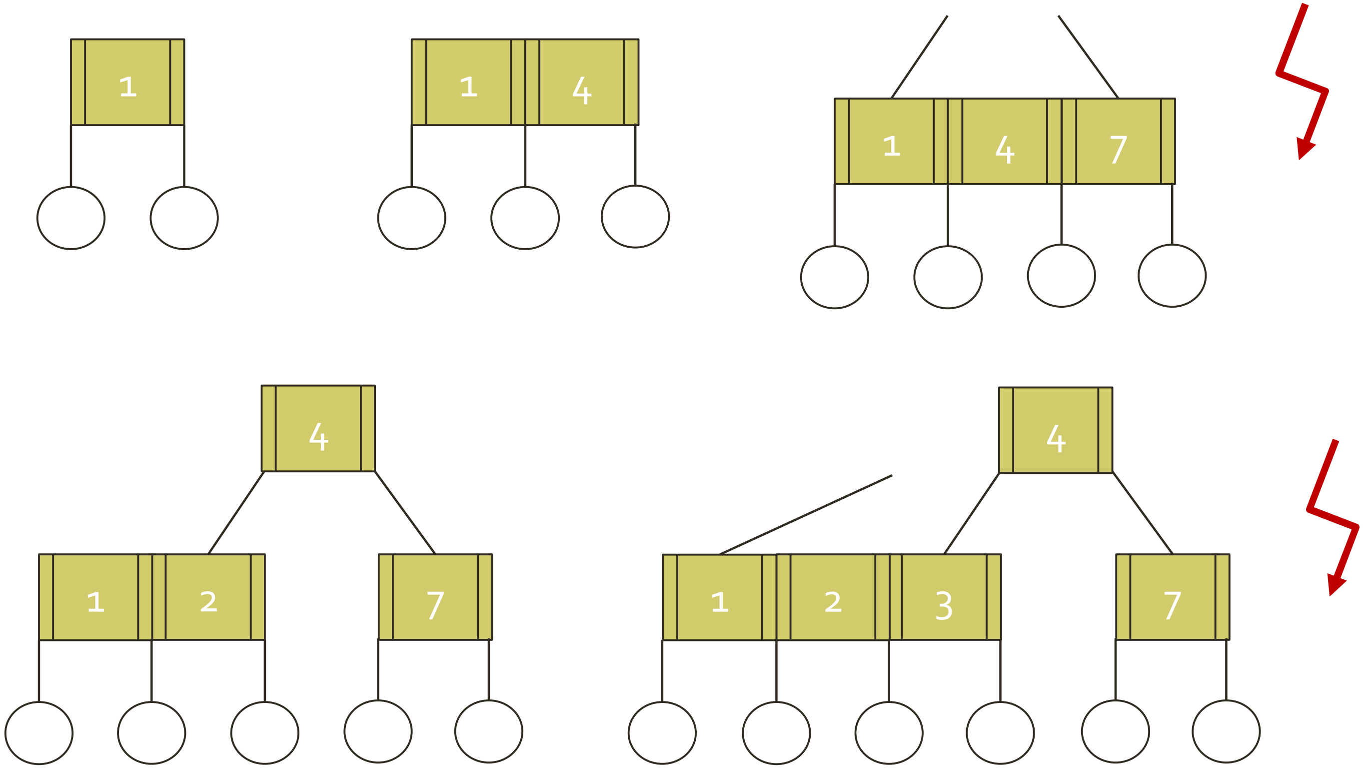
1. „zu wenig“: Verschmelzen
2. „zu viele“: Aufspalten

- Hat Knoten nach Einfügen $\leq 2k-2$ Werte/ $2k-1$ Dummies OK
- Hat Knoten nach Einfügen $\geq 2k-1$ Werte/ $2k$ Dummies SPALTE bei mittlerem Element auf und lasse es hochsteigen

Einfügen im B-Baum

Verfahren: finde richtige Stelle anhand der Schlüssel, füge ein, prüfe Kinderanzahl und spalte auf (ggfs. iterativ nach oben weiter)

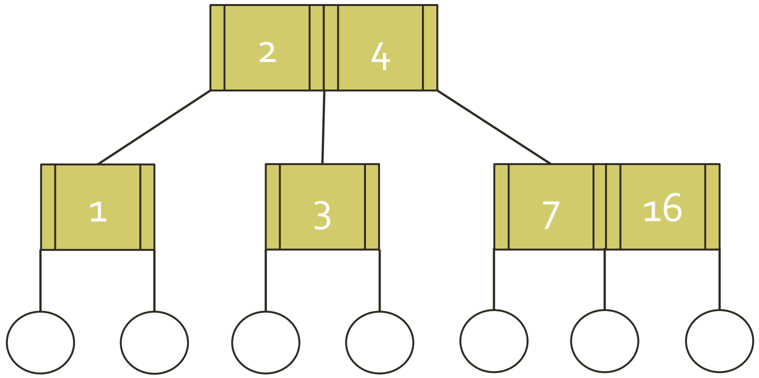
Füge ein: 1 – 4 –7 – 2 – 3 – 16 – 9 in B-Baum der Ordnung $k = 2$

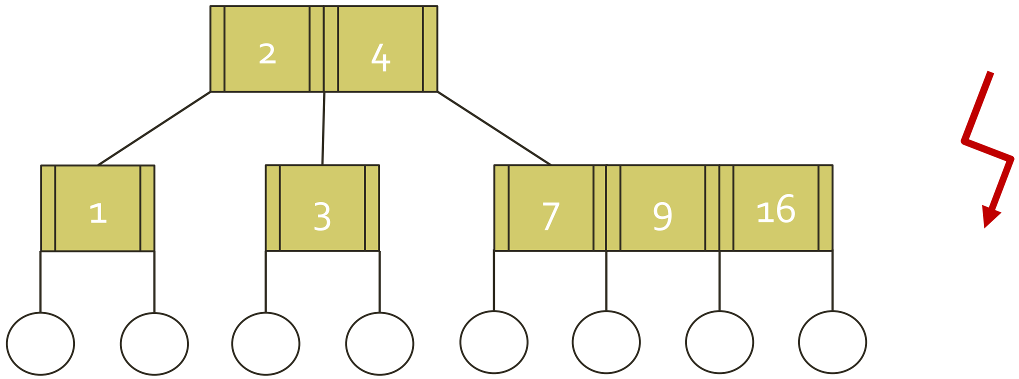


Einfügen im B-Baum

Verfahren: finde richtige Stelle anhand der Schlüssel, füge ein, prüfe Kinderanzahl und spalte auf (ggfs. iterativ nach oben weiter)

Füge ein: 1 – 4 –7 – 2 – 3 – 16 – 9 in B-Baum der Ordnung $k = 2$



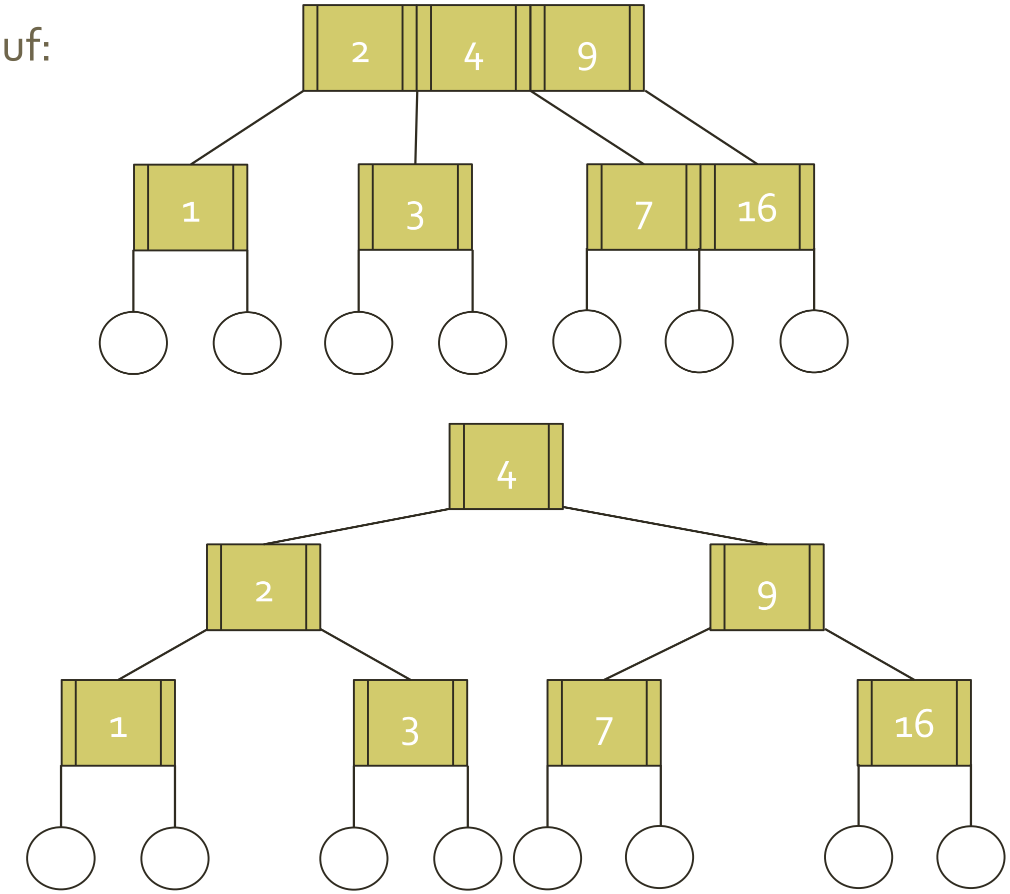


Einfügen im B-Baum

Verfahren: finde richtige Stelle anhand der Schlüssel, füge ein, prüfe Kinderanzahl und spalte auf (ggfs. iterativ nach oben weiter)

Füge ein: $1 - 4 - 7 - 2 - 3 - 16 - 9$ in B-Baum der Ordnung $k = 2$

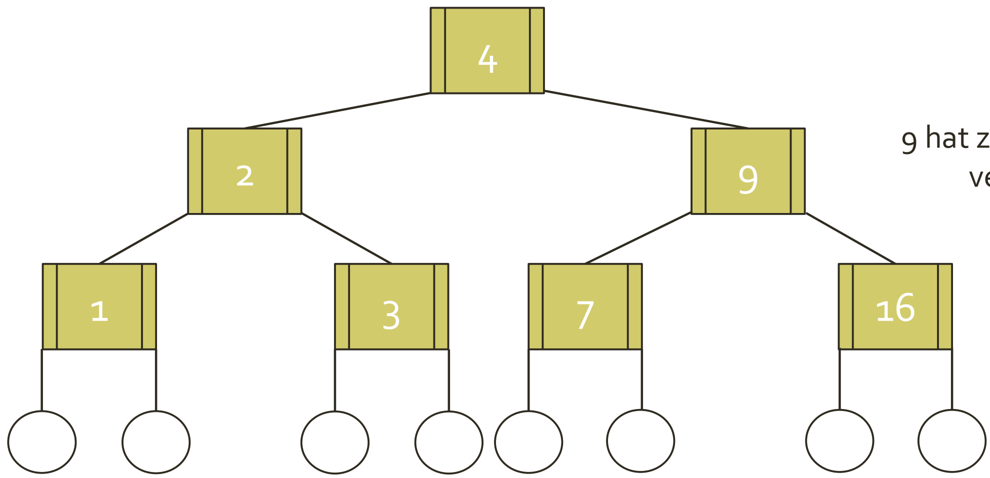
spalte auf:



Löschen im B-Baum

Verfahren: finde richtige Stelle anhand der Schlüssel, lösche, ersetze ggfs. durch Vorgänger und repariere durch Verschmelzen

Lösche: einmal 7, einmal 9 (aus diesem Baum)



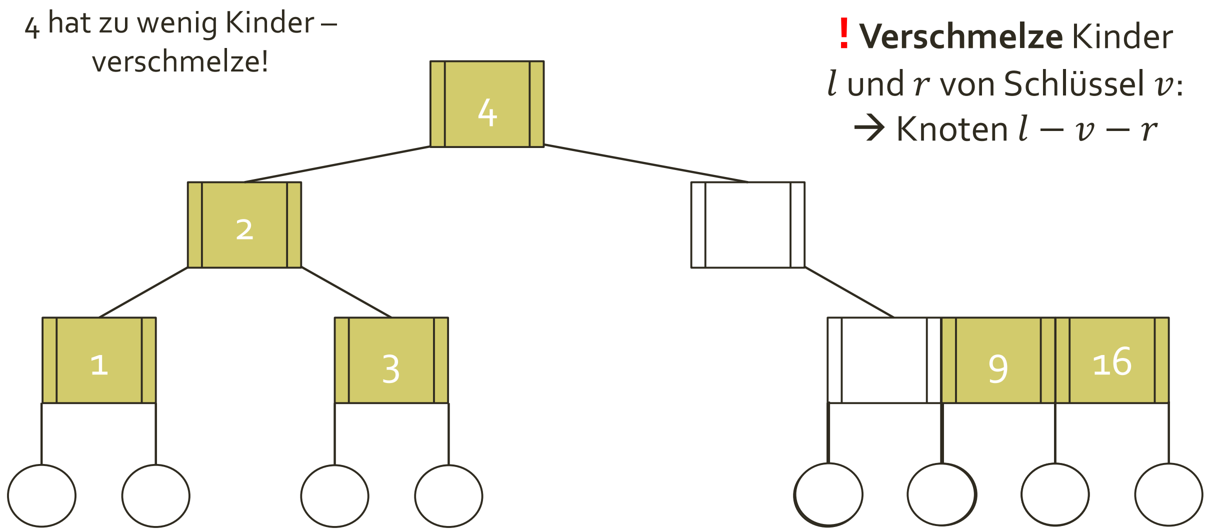
9 hat zu wenig Kinder – verschmelze!

7 hat nur „Blätter"-Kinder
→ kein Vorgänger notwendig

Löschen im B-Baum

Verfahren: finde richtige Stelle anhand der Schlüssel, lösche, ersetze ggfs. durch Vorgänger und repariere durch Verschmelzen

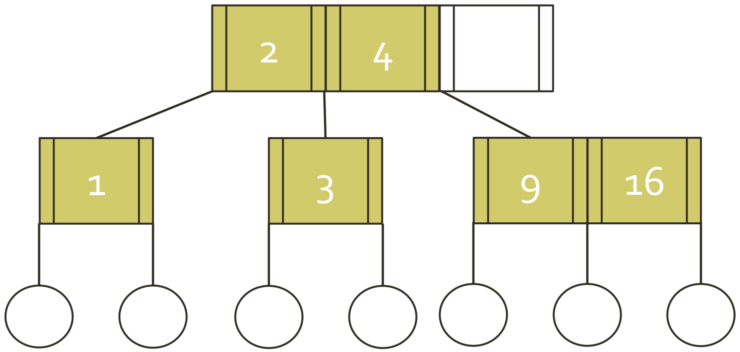
Lösche: einmal 7, einmal 9 (aus gleichem Baum)



Löschen im B-Baum

Verfahren: finde richtige Stelle anhand der Schlüssel, lösche, ersetze ggfs. durch Vorgänger und repariere durch Verschmelzen

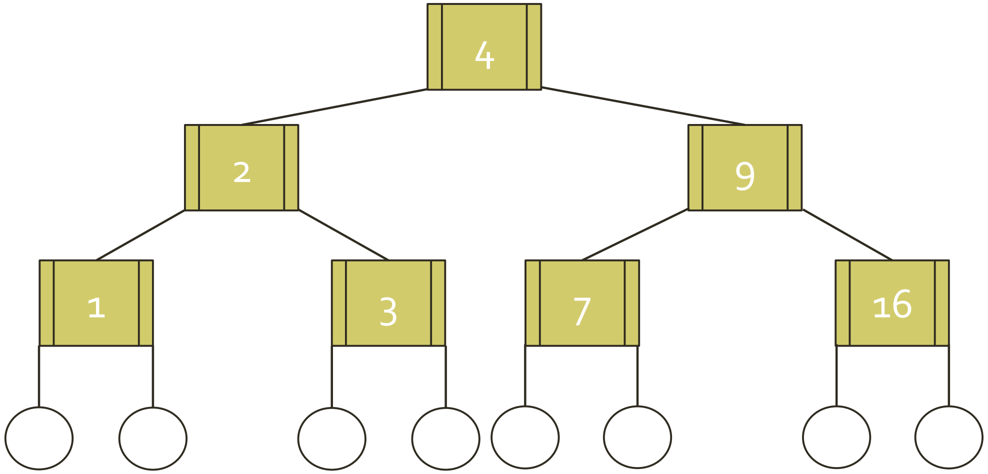
Lösche: einmal 7, einmal 9 (aus gleichem Baum)



Löschen im B-Baum

Verfahren: finde richtige Stelle anhand der Schlüssel, lösche, ersetze ggfs. durch Vorgänger und repariere durch Verschmelzen

Lösche: einmal 7, einmal 9 (aus gleichem Baum)



Restliches Reparieren wie beim Fall davor – Übung!

Vorgänger = rechtester Schlüssel im linken Teilbaum

(a,b)-Bäume – Basics

Blattorientierter, balancierter Suchbaum der Ordnung $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$

! $a \geq 2, b \geq 2a - 1$

- blattorientiert:= innere Knoten als Schlüssel, Blätter als Daten
- Ordnung: legt Kinderanzahl fest
- „vollständig" balanciert: alle Blätter haben dieselbe Tiefe

- Kinderanzahl:
  - Wurzel: ≥ 2 Kinder
  - a $\leq$ #Kinder $\leq b$ (für innere Knoten)

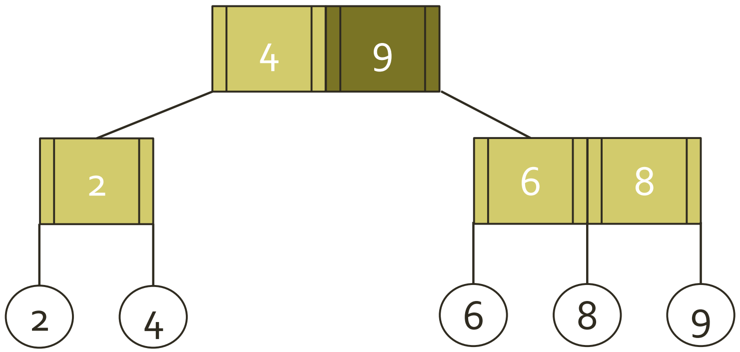
- Höhe: $\mathrm{O}(\log(n))$

(a,b)-Bäume – Basics

Verhältnis Schlüssel und Blatt:

- (innerer) Knoten hat d Kinder und besteht daher aus $d - 1$ Schlüsseln
- s_i (i-ter Schlüssel) ist gleichzeitig rechtestes Blatt (*Maximum*!) im i-ten Unterbaum

➢ daher steht GesamtMax auch in der Wurzel



Einfügen/ Löschen im (a,b)-Baum

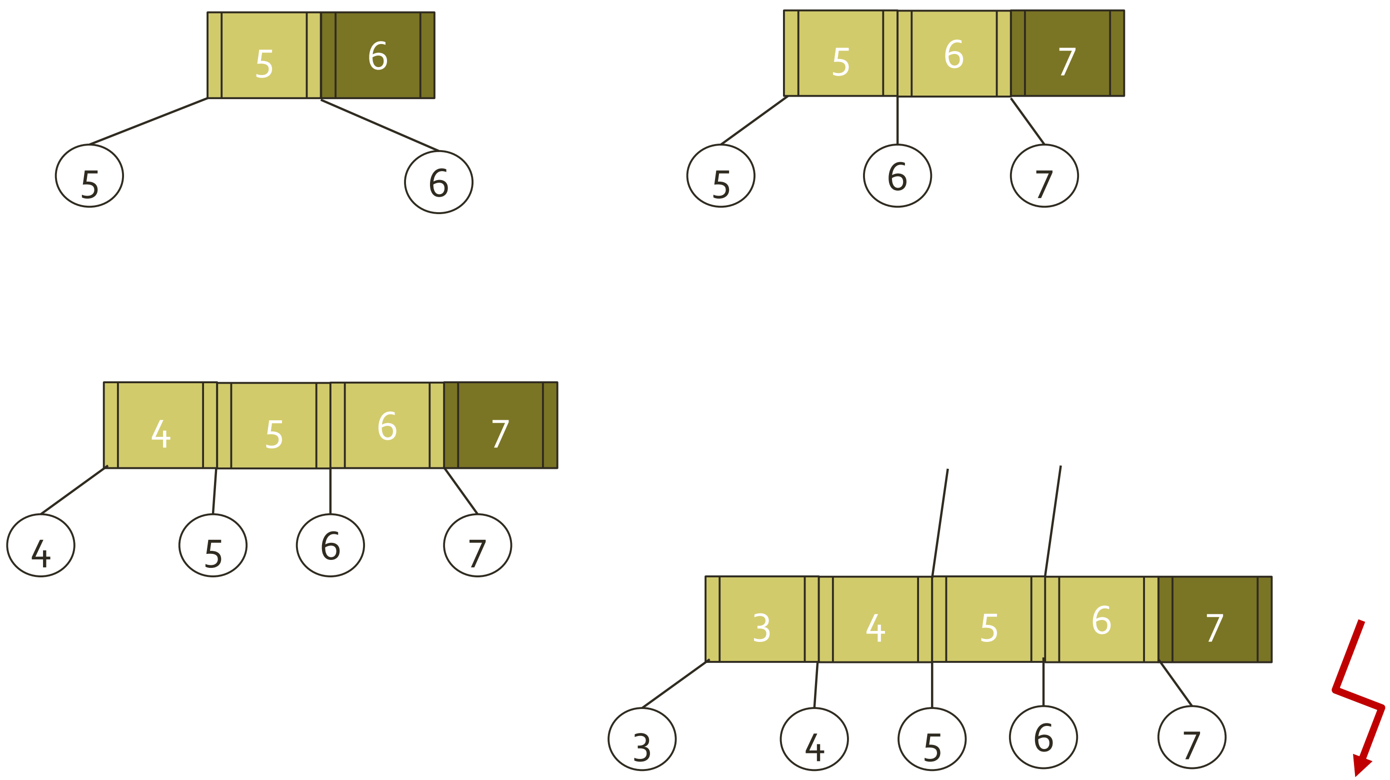
- nach beiden Operationen soll die Balance noch gelten (Balance in unserem Fall: alle Blätter haben dieselbe Höhe, Anzahl der Kinder muss passen)
- falls nicht: herstellen durch

1. „zu wenig“: Verschmelzen oder Stehlen
2. „zu viele“: Aufspalten

Einfügen im (a,b)-Baum

Verfahren: finde richtige Stelle anhand der Schlüssel, füge ein, prüfe Kinderanzahl und spalte auf (ggfs. iterativ nach oben weiter)

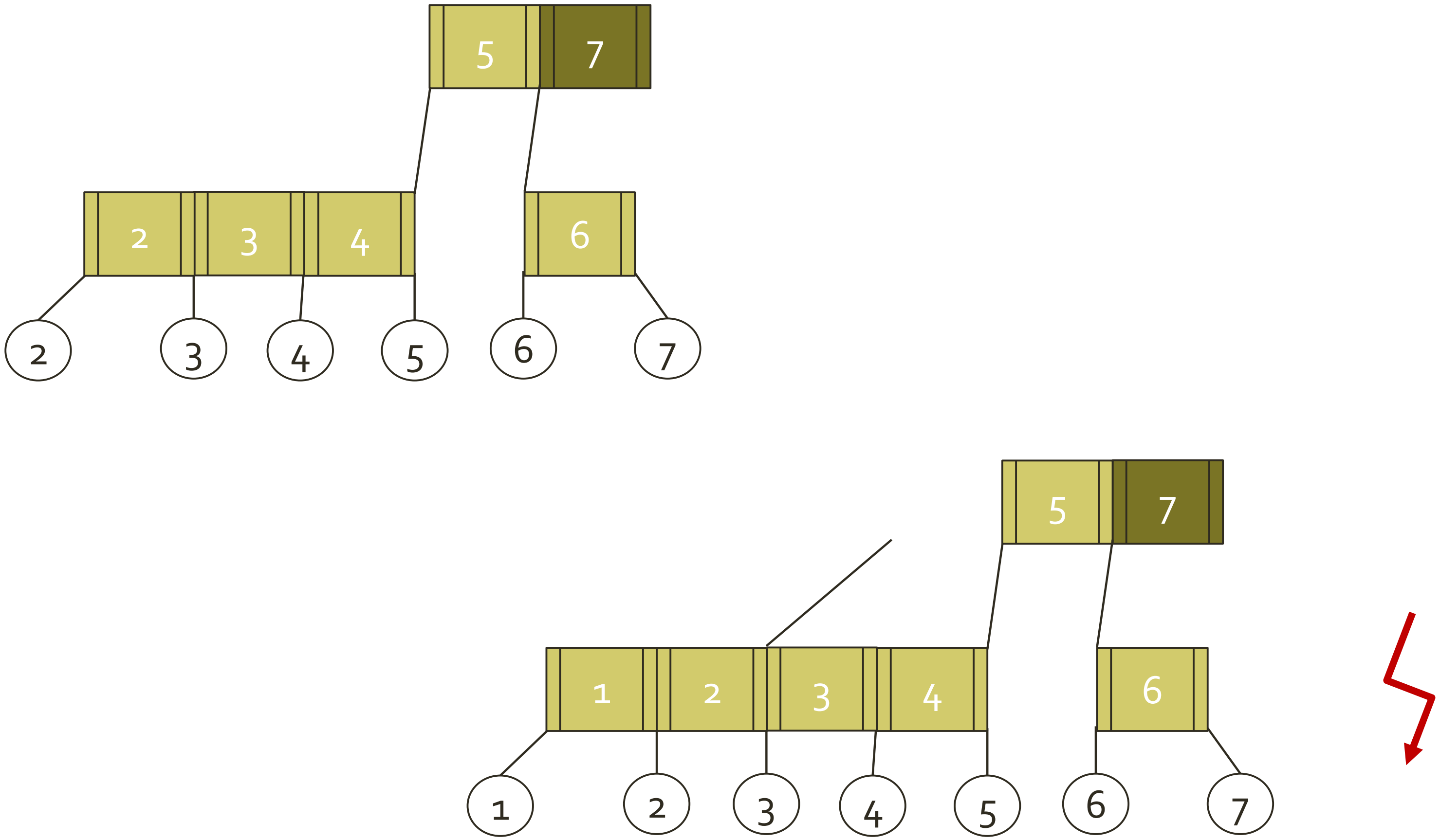
Füge ein: $5 - 6 - 7 - 4 - 3 - 2 - 1 - 8$ mit $a = 2, b = 4$



Einfügen im (a,b)-Baum

Verfahren: finde richtige Stelle anhand der Schlüssel, füge ein, prüfe Kinderanzahl und spalte auf (ggfs. iterativ nach oben weiter)

Füge ein: 5 – 6 –7 – 4 – 3 – 2 – 1 mit $a = 2, b = 4$



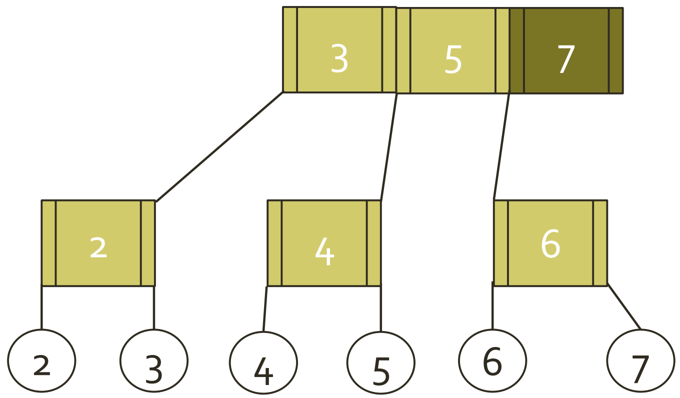
Löschen im (a,b)-Baum

Verfahren: finde richtige Stelle anhand der Schlüssel: a ist in Blatt v

1. a steht auch in $parent(v)$ → lösche a
2. a steht in Schlüsselebene weiter oben → lösche a, ersetze oben mit nächstkleinerem Element

$parent(v)$ verliert Kind: verschmelze (2 → 1) oder stehle (2 → 2)

Lösche: 4 mit $a = 2, b = 4$



Fall 1: lösche!
alle Geschwister „voll"?
Nein, verschmelzen!

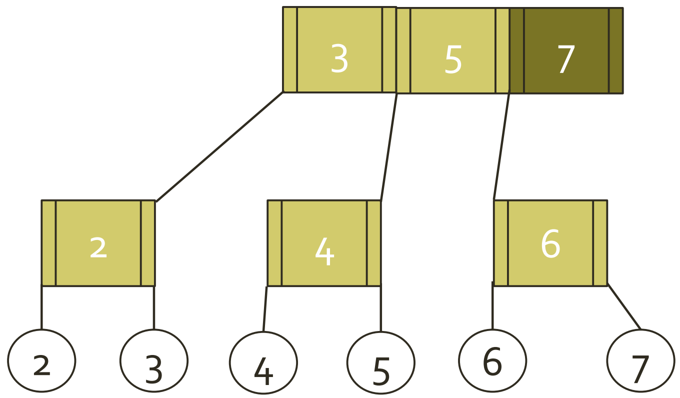
Löschen im (a,b)-Baum

Verfahren: finde richtige Stelle anhand der Schlüssel: a ist in Blatt v

1. a steht auch in $parent(v)$ $\rightarrow$ lösche a
2. a steht in Schlüsselebene weiter oben $\rightarrow$ lösche a, ersetze oben mit nächstkleinerem Element

$parent(v)$ verliert Kind: verschmelze $(2 \rightarrow 1)$ oder stehle $(2 \rightarrow 2)$

Lösche: 4 mit $a = 2, b = 4$



Fall 1: lösche!
alle Geschwister „voll"?
Nein, verschmelzen!

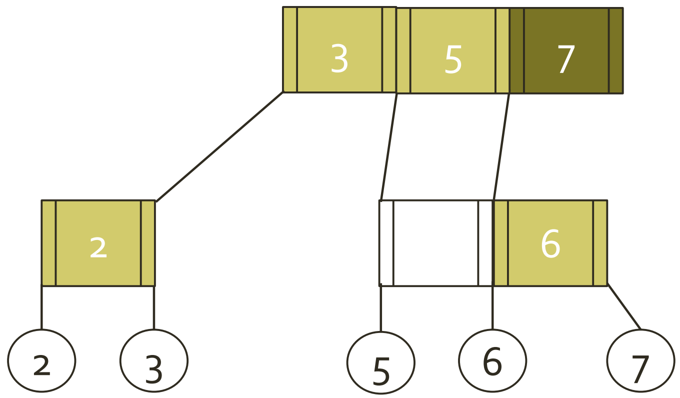
Löschen im (a,b)-Baum

Verfahren: finde richtige Stelle anhand der Schlüssel: a ist in Blatt v

1. a steht auch in $parent(v)$ $\rightarrow$ lösche a
2. a steht in Schlüsselebene weiter oben $\rightarrow$ lösche a, ersetze oben mit nächstkleinerem Element

$parent(v)$ verliert Kind: verschmelze $(2 \rightarrow 1)$ oder stehle $(2 \rightarrow 2)$

Lösche: 4 mit $a = 2, b = 4$



Schlüssel anpassen

Fall 1: lösche!
Geschwister $\geq$ 3 Kinder?
Nein, verschmelzen!

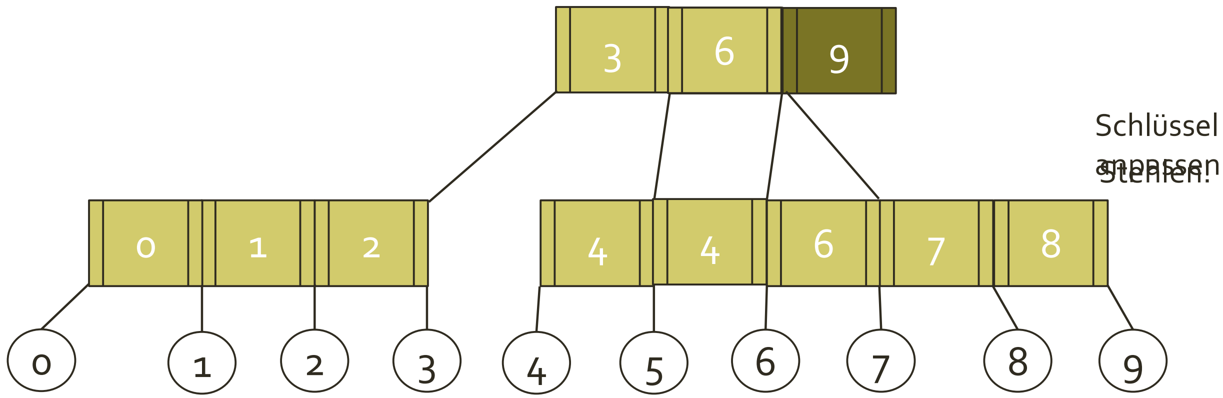
Löschen im (a,b)-Baum

Verfahren: finde richtige Stelle anhand der Schlüssel: a ist in Blatt v

1. a steht auch in $parent(v)$ $\rightarrow$ lösche a
2. a steht in Schlüsselebene weiter oben $\rightarrow$ lösche a, ersetze oben mit nächstkleinerem Element

$parent(v)$ verliert Kind: verschmelze $(2 \rightarrow 1)$ oder stehle $(2 \rightarrow 2)$

Lösche: 5 mit $a = 2, b = 4$



Fall 2: lösche, ersetze durch 4
alle Geschwister $\geq$ 3 Kinder?
Ja, stehlen!

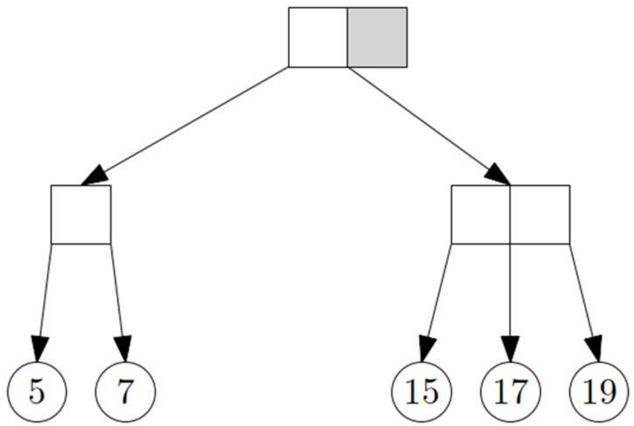
PB

A1

Aufgabe 1: (2,4)-Bäume

— Vorbereitung auf Aufgabe 3 des Übungsblattes —

Betrachten Sie den folgenden (2,4)-Baum.



a) Fügen Sie die fehlenden Labels ein.

b) Fügen Sie die Schlüssel 20, 18 und 12 in dieser Reihenfolge in den (2,4)-Baum ein und zeichnen Sie die resultierenden Bäume.

c) Sei T der Baum nach dem Einfügen von 20, 18 und 12. Löschen Sie den Schlüssel 5 aus T und zeichnen Sie den resultierenden Baum.

A2

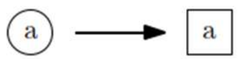
AVL-Bäume lassen sich einfach in $(2,4)$-Bäume umwandeln. Zeigen Sie per vollständiger Induktion, dass sich ein AVL-Baum T der Höhe h in einen (2,4)-Baum T' mit folgenden Eigenschaften umwandeln lässt:

- Ist $h = 2k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so hat T' Höhe k und die Wurzel von T' hat genau einen Key.
- Ist $h = 2k + 1$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so gilt entweder
  - dass T' Höhe k hat und die Wurzel von T' mehr als einen Key enthält, oder,
  - dass T' Höhe $k + 1$ hat und die Wurzel von T' genau einen Key enthält.

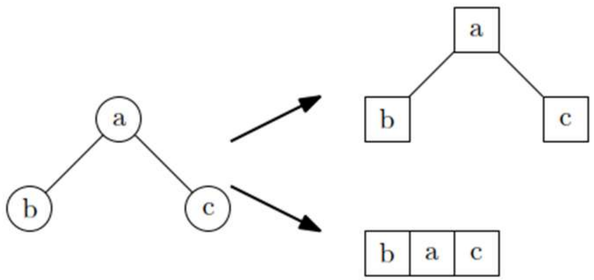
  Dabei können stets beide Optionen realisiert werden.

Gehen Sie dabei davon aus, dass sowohl T als auch T' knotenorientiert sind. Vereinfacht können Sie dabei annehmen, dass der linke Teilbaum mindestens so tief ist, wie der rechte und dass es **keinen** Teilbaum der Höhe 1 gibt, bei dem die Wurzel nur ein Kind hat.
Entsprechend kann der Induktionsanfang dann wie folgt aussehen:

$h = 0$:



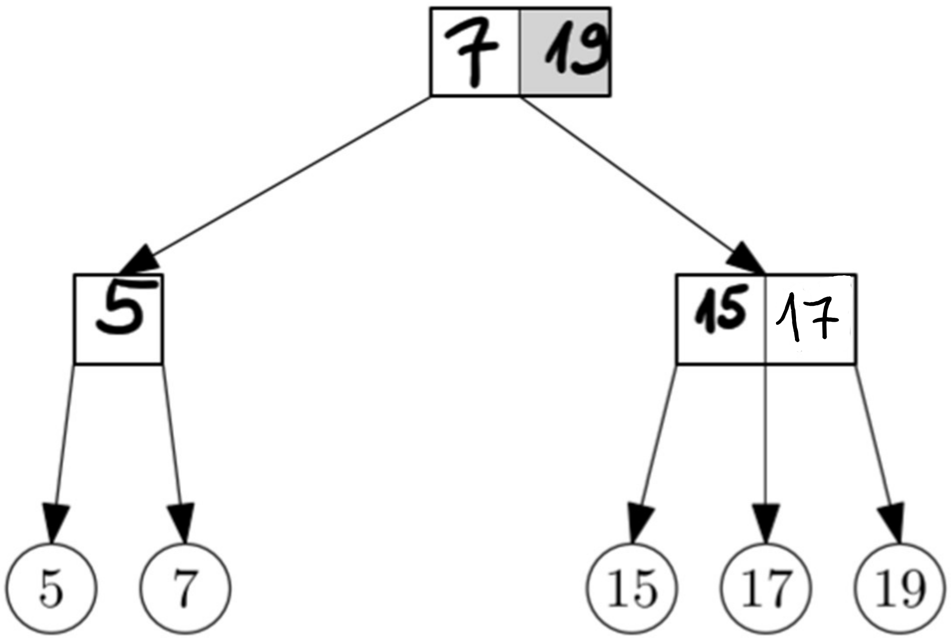
$h = 1$:



Besprechung

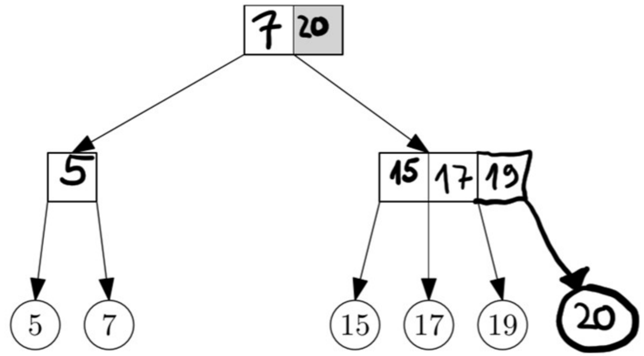
A1
a)

- Key ist jeweils der größte Wert im jeweiligen Teilbaum:

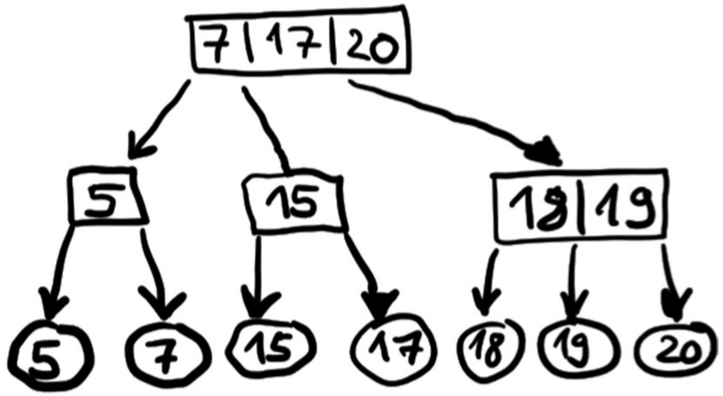


A1 b)

- 20

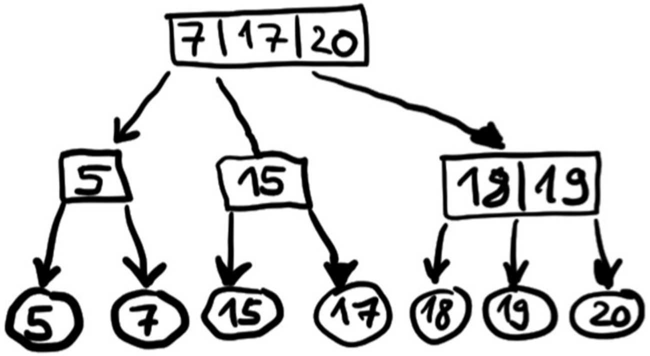


- 18: Split benötigt weil rechter Teilbaum nun 5 Kinder hat

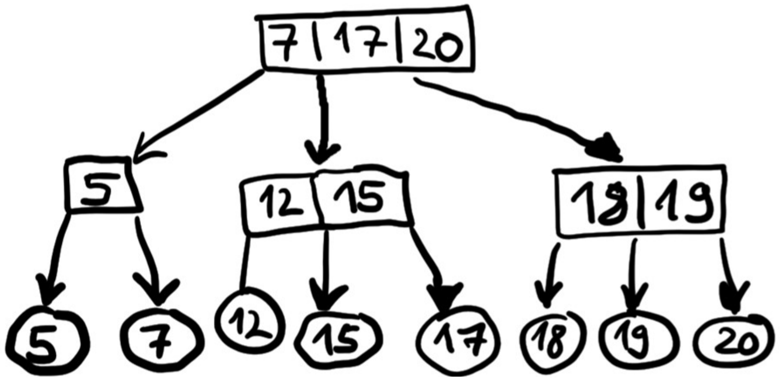


A1 b)

- 18: Split benötigt weil rechter Teilbaum nun 5 Teilbäume hat

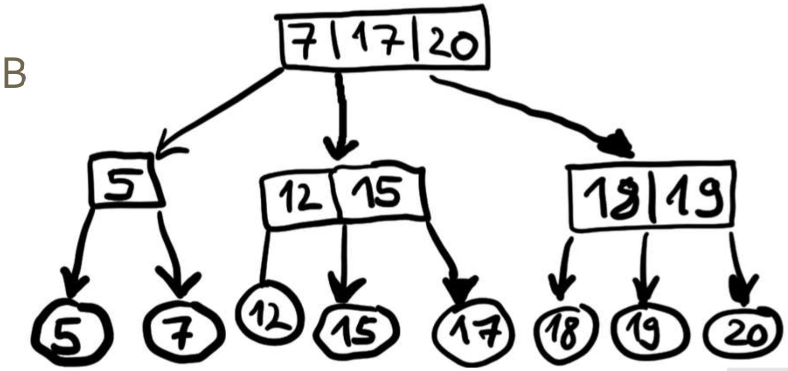


- 12

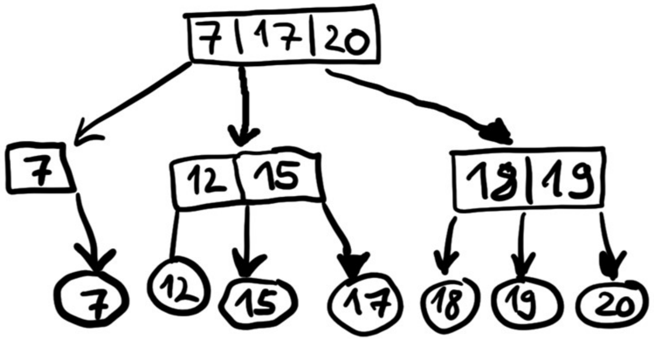


A1
c)

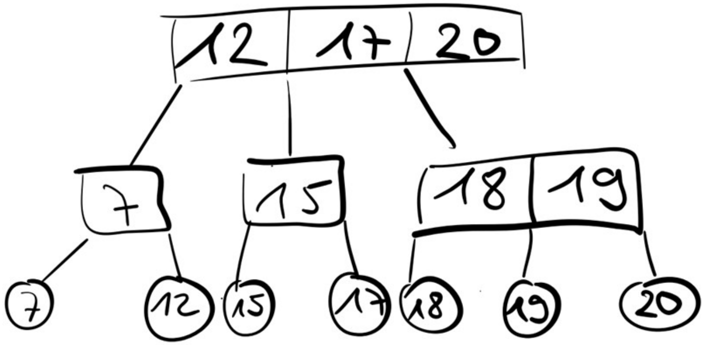
Vorheriger B



- Lösche nun die 5

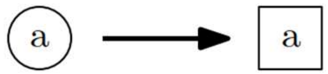


- Durch Löschen hat linker Teilbaum nur noch 1 Kind ➔ stehle

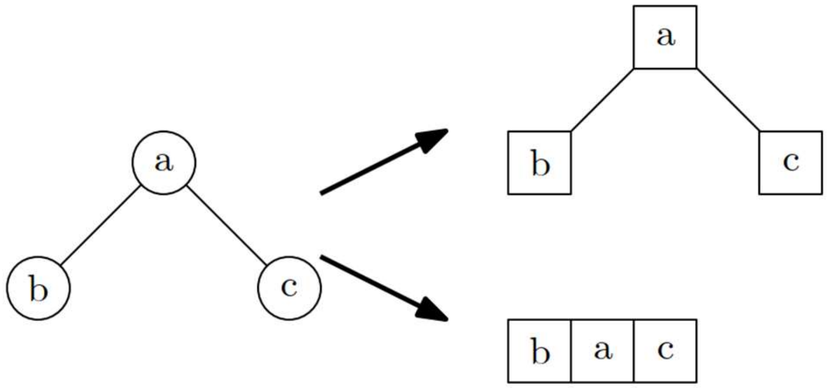


A2

IA: $h = 0$:



$h = 1$:

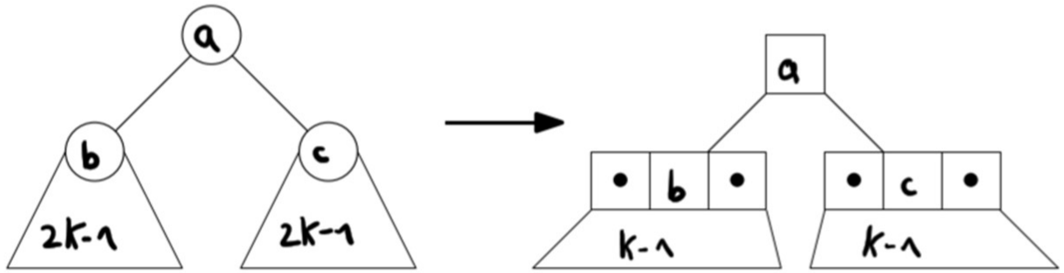


IV: Sei $h - 1 = 2k - 1 \in N$ bel. aber fest. Dann können wir einen AVL-Baum der Höhe h-1 und h-2 in einen (2,4)-Baum umwandeln. (Nach den in der Aufgabenstellung beschriebenen Regeln.)

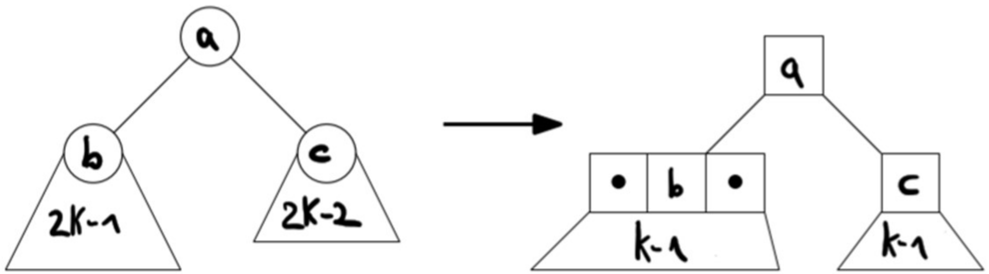
A2

IS:

Fall 1: $h = 2k$ und $B(a) = 0$:

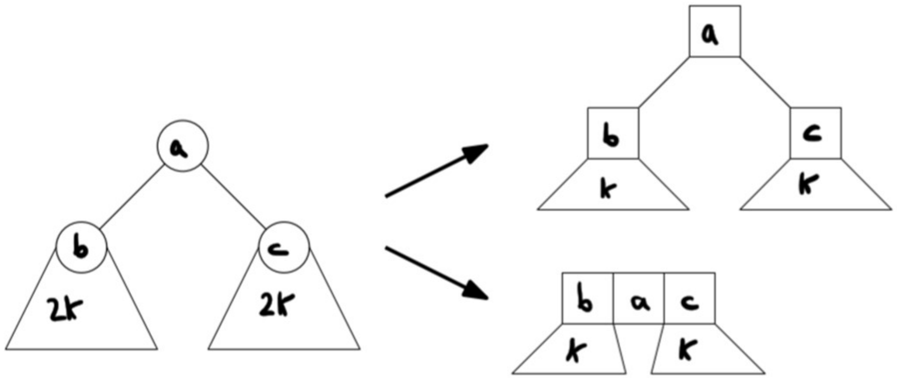


Fall 2: $h = 2k$ und $B(a) = -1$:



A2

Fall 3: $h = 2k + 1$ und $B(a) = 0$:



Fall 4: $h = 2k + 1$ und $B(a) = -1$: