Simetrías en ecuaciones diferenciales y visualización de soluciones

Manuel Sánchez Torrón

TRABAJO DE FIN DE GRADO

Doble grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

FACULTAD DE CIENCIAS MATEMÁTICAS

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

Directora: **María Ángeles Prieto Yerro**

Septiembre 2019

Índice

Resumen

El campo de las ecuaciones diferenciales comprende numerosos métodos para estudiar y resolver este tipo de ecuaciones. La teoría de simetrías en ecuaciones diferenciales, iniciada por el matemático noruego Sophus Lie a mediados del siglo XIX, proporciona una base algebraica para la unificación de estos métodos de resolución, basada en la teoría de grupos. Aunque su trabajo fue muy poco apreciado durante su vida, Lie estaba convencido de que sus estudios serían de gran importancia en algún momento en el futuro. A mediados del siglo XX, más de 50 años después de su muerte, su trabajo comenzó a adquirir la relevancia que merecía, e incluso hoy en día sigue siendo fundamental en diversos campos que precisan de ecuaciones diferenciales, algunos tan importantes como mecánica de fluidos, biología evolutiva, química cuántica o procesamiento de señales.

De hecho, la teoría que promulgaba Lie era mucho más amplia de lo que él mismo pensaba en un principio. Otros grandes matemáticos del siglo XIX, como Évariste Galois o Niels Henrik Abel, habían desarrollado técnicas análogas en campos en principio no relacionados con las ecuaciones diferenciales. En concreto, Galois y Abel habían empleado grupos de simetría para estudiar y clasificar extensiones de cuerpos y en última instancia resolver ecuaciones algebraicas.

En este trabajo se introduce la teoría de resolución mediante simetrías que propuso Sophus Lie, haciendo hincapié en su base algebraica, explicando los pasos necesarios para resolver ecuaciones diferenciales con este método y dejando patente su aspecto unificador. Asimismo, se ha implementado en MATLAB una aplicación que recibe por interfaz un sistema de dos o tres ecuaciones diferenciales autónomas y que dibuja las soluciones aproximadas y el diagrama de fases, con distintos métodos numéricos (también implementados a propósito de este trabajo), así como otras opciones. Las gráficas empleadas para ilustrar algunos ejemplos del trabajo se han obtenido mediante esta aplicación.

Abstract

The field of differential equations includes numerous methods to study and solve this kind of equations. The theory of symmetries in differential equations, initiated by the Norwegian mathematician Sophus Lie in the mid-19th century, provides an algebraic basis for the unification of these methods of resolution, based on group theory. Although his work was very little appreciated during his life, Lie was convinced that his studies would be of great importance at some point in the future. In the mid-20th century, more than 50 years after his death, his work began to acquire the relevance it deserved, and even today it is still fundamental in several fields that require differential equations, some as important as fluid mechanics, evolutionary biology, quantum chemistry or signal processing.

Moreover, the theory that Lie promulgated was much wider than he initially thought. Other great mathematicians of the 19th century, such as Évariste Galois or Niels Henrik Abel, developed analogous techniques in fields which were not related to differential equations. Specifically, Galois and Abel employed symmetry groups to study and classify field extensions and ultimately solve algebraic equations.

This paper makes an introduction to the theory of resolution through symmetries proposed by Sophus Lie, emphasizing its algebraic basis, explaining the necessary steps to solve differential equations with this method and making its unifying aspect clear. Likewise, an application has been implemented in MATLAB that receives a system of two or three autonomous differential equations and draws the approximate solutions and the approximate phase diagram, with different numerical methods (also implemented in order to carry this paper out), as well as some other options. The graphs used to illustrate some examples of the paper have been obtained through this application.

1. Simetrías

En general en Matemáticas las simetrías consisten en aplicaciones que transforman un objeto en sí mismo o en otro que preserva cierta propiedad del original. Por ejemplo, un triángulo equilátero se transforma en sí mismo si se le aplica una rotación de 0, $\frac{2\pi}{3}$ o $\frac{4\pi}{3}$ radianes. En este caso, la figura admite un conjunto discreto de simetrías. Un ejemplo similar es una circunferencia, pero en este caso la simetría se da para cualquier rotación sin importar el ángulo de giro. Por tanto, la circunferencia admite un conjunto continuo de simetrías.

Ahora bien, en lo sucesivo trataremos con simetrías de una manera más formal. En particular, partiremos del concepto de simetrías de una función para definir el concepto de simetrías de una ecuación diferencial ordinaria.

Entonces, dada una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, su dominio $Dom(f)$ y su gráfica $G_f := \{(x, f(x)) \mid x \in Dom(f)\}$. Sea $\phi : \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}^{n+m}$ continua, se dice que ϕ es una simetría de f si verifica que:

$$\phi(z) \in G_f,\ \forall z \in G_f \subset \mathbb{R}^{n+m}$$

y además ϕ^{-1} es continua.

Nótese que se ha exigido de ϕ ser una aplicación continua con inversa continua. Las funciones que verifican estas condiciones reciben el nombre de *homeomorfismos*. Por tanto, una simetría no es más que un homeomorfismo que deja invariante la gráfica de f. Para ilustar la definción, consideremos un caso sencillo:

Si $f(x) = x^3$, entonces $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ la aplicación $\phi_t(x, y) = (tx, t^3 y)$ es una simetría de f. En efecto, tenemos que la gráfica G_f son los puntos de la forma $(x, x^3) \in \mathbb{R}^2$. Si $(x, y) \in G_f$, entonces $\phi(x, y) = \phi(x, x^3) = (tx, t^3 x^3) = (tx, (tx)^3) = (z, z^3) \in G_f$. Y además $\phi_t^{-1} = \phi_{t^{-1}}$ es continua.

El parámetro t puede ser interpretado como una medida temporal. En tal caso el automorfismo ϕ_t representa movimiento de los puntos sobre la gráfica de f.

1.1. Simetrías de ecuaciones diferenciales ordinarias

Al tratar con simetrías de ecuaciones diferenciales ordinarias se debe tener en cuenta la principal diferencia entre una ecuación diferencial y una ecuación estándar: una solución de una ecuación diferencial es una curva y no solo un punto. Es por ello que en este caso el concepto de simetría no consistirá en una aplicación que transforma gráficas en sí mismas como se había descrito anteriormente, sino en aplicaciones que transformen soluciones de la ecuación diferencial en otras soluciones de la misma. En adelante se considerarán principalmente ecuaciones diferenciales con soluciones contenidas en $\mathbb{R}^2$.

Procedemos entonces a definir una simetría de una ecuación diferencial ordinaria de primer orden.

Definición. *Simetría de una ecuación diferencial de primer orden.*

Dada la EDO

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x,y) \tag{1}$$

con F definida en $D \subset \mathbb{R}^2$. Una simetría es una aplicación $\phi : D \to D$ diferenciable con inversa diferenciable que cumple que si $y(x)$ es una solución entonces $\phi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ y $v(u)$ también es solución. Es decir, se verifica

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = F(u,v)$$

En este caso podemos considerar una simetría como una transformación ϕ como una aplicación $\phi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ que verifica que su jacobiano es no nulo:

$$u_x v_y - v_x u_y \neq 0$$

En resumen, una simetría de una EDO es una aplicación diferenciable con inversa también diferenciable (este tipo de funciones se denominan *difeomorfismos*) que mantiene las soluciones de la ecuación diferencial. Si la simetría transforma una solución en ella misma, diremos que se trata de una *simetría degenerada*

Por ejemplo, sea la EDO más sencilla

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

Es muy sencillo comprobar que las soluciones de esta EDO son de la forma $y(x) = \lambda$, es decir, rectas paralelas al eje de las x. De este modo, una aplicación $\phi_t(x, y) = (e^t x, e^t y)$ es una simetría de la EDO. En efecto: $\phi_t(x, \lambda) = (e^t x, \lambda e^t)$. Y es inmediato que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}(\lambda e^t)}{\mathrm{d}u} = 0$. De este modo la aplicación ϕ_t transforma la recta horizontal $y(x) = \lambda$ en la recta horizontal $v(u) = e^t \lambda$.

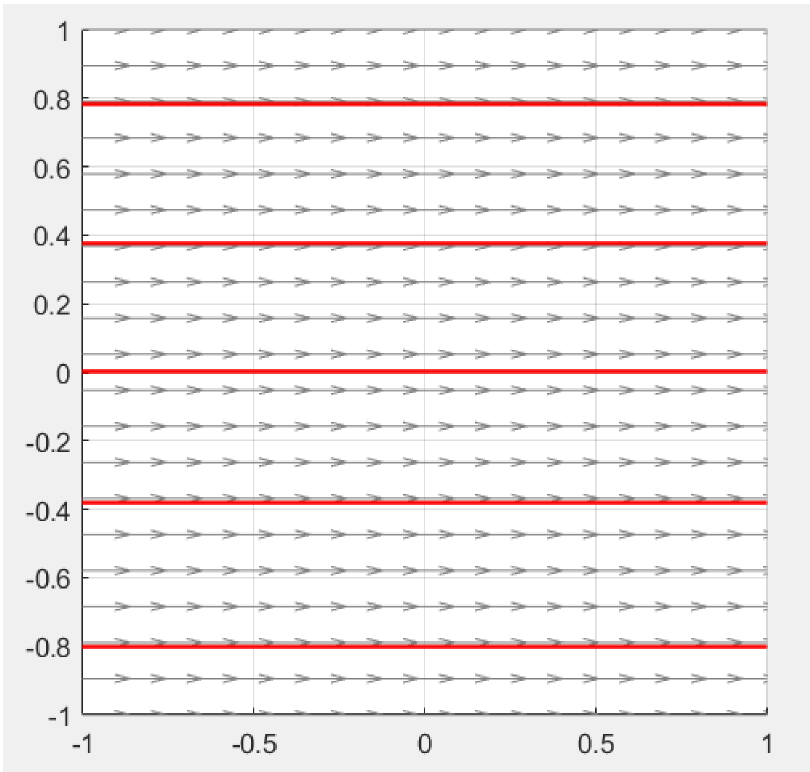

Figura 1: Trayectorias de la ecuación $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$

1.2. Encontrando simetrías

Con la definición de simetría de una ecuación diferencial ordinaria, es una tarea muy sencilla comprobar si una cierta aplicación ϕ es simetría o no de dicha EDO. No obstante, un cometido mucho más interesante es hallar la expresión de una simetría desconocida de una EDO a partir de ella misma. Consideramos de nuevo

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x,y)$$

y una simetría $\phi(x,y) = (u,v)$. Como $v(u)$ es solución de $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = F(u,v)$ si se expanden dv y du en términos de dx y dy se obtiene:

$$F(u,v) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{v_x\,dx + v_y\,dy}{u_x\,dx + u_y\,dy} = \frac{v_x\,dx + v_y\,y'(x)\,dx}{u_x\,dx + u_y\,y'(x)\,dx} = \frac{v_x + v_y\,F(x,y)}{u_x + u_y\,F(x,y)}$$

En resumidas cuentas, hallar una simetría consiste en resolver la siguiente ecuación en derivadas parciales

$$F(u,v) = \frac{v_x + v_y\,F(x,y)}{u_x + u_y\,F(x,y)} \tag{2}$$

y obtener las dos funciones $u(x,y)$, $v(x,y)$ que además deben verificar que su jacobiano es no nulo

$$u_x v_y - u_y v_x \neq 0$$

En general resolver este problema puede ser excepcionalmente complicado, pero es posible imponer ciertas condiciones a la simetría buscada para simplificar enormemente los cálculos.

1.3. Traslaciones en la dirección de los ejes

En primer lugar, consideremos las ecuaciones de la forma $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y)$ Este tipo de ecuaciones son las más fáciles de resolver, dado que es posible separar los términos dependientes de x de los dependientes de y. Este tipo de ecuaciones recibe el nombre de *separable* y es importante dado que algunas ecuaciones diferenciales más complicadas pueden resolverse mediante un cambio de coordenadas adecuado, que consiga transformar la ecuación diferencial en una ecuación diferencial separable. Las simetrías jugarán un papel crucial a la hora de encontrar dicho cambio de variable, dado que las ecuaciones separables poseen simetrías concretas que proveerán información acerca del cambio de coordenadas adecuado.

A continuación se estudian algunos casos de ecuaciones diferenciales que poseen simetrías fáciles de hallar. En concreto, trataremos las ecuaciones diferenciales que sólo dependen de una de las variables.

Consideramos una ecuación diferencial ordinaria cuyo segundo miembro es independiente de la variable x:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(y) \tag{3}$$

Nótese que las soluciones de la ecuación diferencial son, además de las constantes que anulan F, las soluciones que vienen dadas por

$$\int \frac{dy}{F(y)} = \int dx$$

que da lugar a curvas de la forma $y = \psi(x,t)$, siendo t la constante de integración que se obtiene al resolver la ecuación diferencial. Estas curvas tienen una pendiente $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ que es independiente de x. Esto significa que si se realiza una traslación en el eje x las soluciones permanecen invariantes (en el sentido de que una solución se traslada en otra). En otras palabras, una aplicación de la forma $\phi_t(x,y) = (x+t, y)$ es una simetría de (3). A continuación procedemos a demostrar este resultado de una forma más rigurosa.

Demostración. Para hallar una simetría de la forma $\phi(x,y) = (u(x,y), v(x,y))$ se debe resolver la EDP

$$F(v) = \frac{v_x + v_y\, F(y)}{u_x + u_y\, F(y)}$$

Como no buscamos todas las soluciones, sino sólo algunas, se puede establecer $v := y$, y reducir la EDP a

$$u_x + u_y\, F(y) = 1$$

Ahora, es posible reducir aún más la ecuación si se establece $u_y = 0$ o $u_x = 0$. Esta última daría lugar a una solución degenerada (ambas funciones dependerían sólamente de y y por tanto el jacobiano de la transformación sería nulo), por lo que se establece $u_y = 0$, y se deduce que $u_x = 1$. Y resolver esta ecuación es trivial, obteniéndose $u(x, y) = x + t$ siendo t la constante de integración. Por tanto la aplicación

$$\phi_t(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) = (x + t, y)$$

es simetría de (3). $\square$

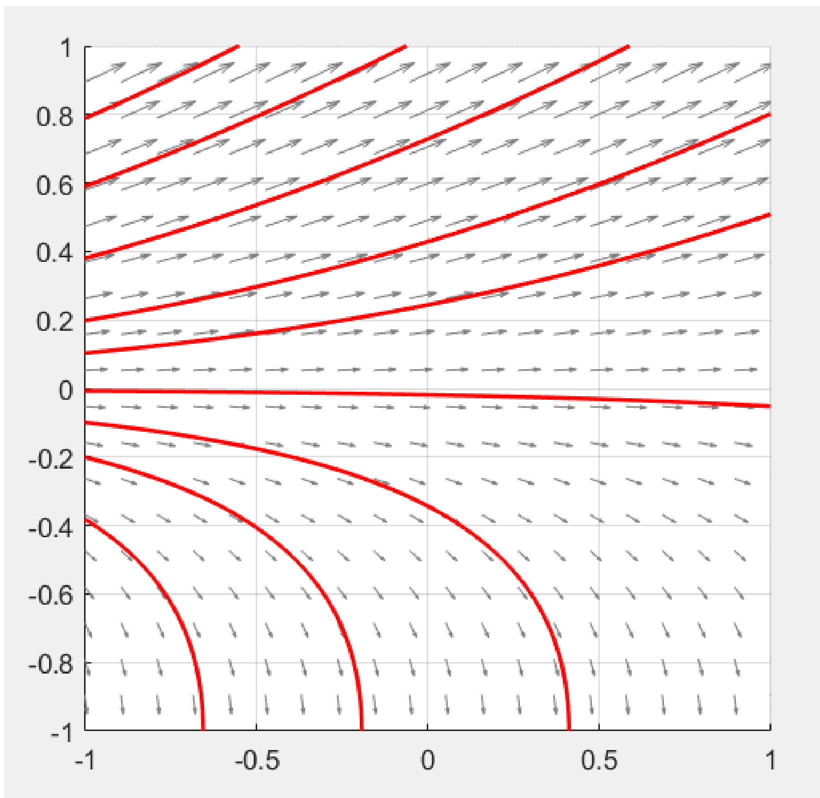

Figura 2: Trayectorias de la ecuación $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{y+1}$

Consideramos ahora el caso en el que el segundo miembro de la ecuación depende únicamente de la variable x.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x) \tag{4}$$

sus soluciones se calculan resolviendo

$$\int dy = \int F(x)dx$$

y con un razonamiento análogo al anterior, se obtiene que las traslaciones en el eje de las y, $\phi_t(x, y) = (x, y + t)$ son simetrías de (4).

Algunas ecuaciones diferenciales ordinarias cumplen alguna de ambas condiciones tras un cambio de coordenadas adecuado. Por ejemplo, sea la EDO:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^3 + x^2y - x - y}{x^3 + xy^2 - x + y} \tag{5}$$

Utilizando un cambio a coordenadas polares $(x, y) = (r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta))$ se obtiene la EDO

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = r(1 - r^2) \tag{6}$$

que es un caso particular de (3). Por tanto, la aplicación $\phi_t(\theta, r) = (\theta + t, r)$ es una simetría de esta ecuación diferencial. Mientras que en los casos anteriores las simetrías consistían en un desplazamiento en la dirección de alguno de los ejes, el cambio a coordenadas polares supone que en este caso se da la simetría con respecto a una rotación de las soluciones en torno al origen de coordenadas.

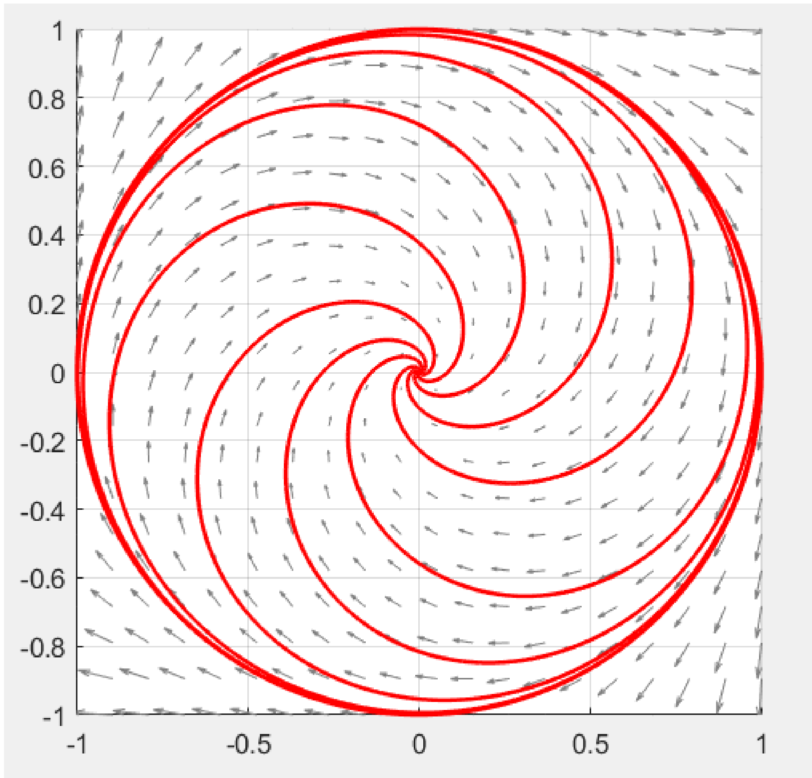

Figura 3: Trayectorias de la ecuación $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^3+x^2y-x-y}{x^3+xy^2-x+y}$

Recíprocamente, si consideramos una ecuación diferencial ordinaria cuyas soluciones son simétricas respecto a traslaciones en el eje de las y, $\phi_t(x,y) = (u(t), v(t)) = (x, y+t)$, entonces se tiene

$$F(x, y+t) = F(u(t), v(t)) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{\mathrm{d}(y+t)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x,y)$$

por lo que F es independiente de la variable y.

Así pues, una ecuación diferencial de primer orden puede reescribirse como una ecuación diferencial separable si las curvas de las soluciones son invariantes bajo traslación en *algún* sistema de coordenadas. Por ello, el objetivo consistirá en encontrar un método para calcular un cambio de coordenadas bajo el cual podamos integrar la ecuación.

Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$$

es separable y sus soluciones vienen dadas por

$$\int y\, dy = -\int x\, dx$$

que se traduce en la ecuación implícita

$$x^2 + y^2 = k$$

para $k > 0$, es decir, las circunferencias centradas en el origen de radio $\sqrt{k}$. Con un cambio a coordenadas polares se obtiene la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta} = 0$$

y es evidente que la aplicación $\phi(r, \theta) = \phi(r + t, \theta)$ es una simetría de la ecuación, dado que transforma las circunferencias de radio r en las circunferencias de radio $r + t$ (manteniendo cada punto en el mismo ángulo), ambas soluciones de la ecuación. Otra posible simetría es $\varphi(r, \theta) = \varphi(r, \theta + \theta_0)$ que rota las circunferencias un ángulo de θ_0. Este último caso es un ejemplo de una simetría degenerada. De hecho otra simetría de la ecuación sería una combinación de estas dos simetrías, un cambio en el radio de la circunferencia y una rotación sobre sí misma.

Pero esta ecuación admite otras muchas simetrías que son sencillas de encontrar bajo el sistema de referencia adecuado. Con el cambio de coordenadas $(r, s) = (x, y^2/2)$ se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}r} = \frac{\mathrm{d}(\frac{1}{2}y^2)}{\mathrm{d}x} = yy' = y\frac{-x}{y} = -x = -r$$

Así que la ecuación diferencial sólo depende de r y las soluciones son invariantes por traslación en el eje de las s. En general para resolver una ecuación diferencial solo será necesario encontrar una simetría.

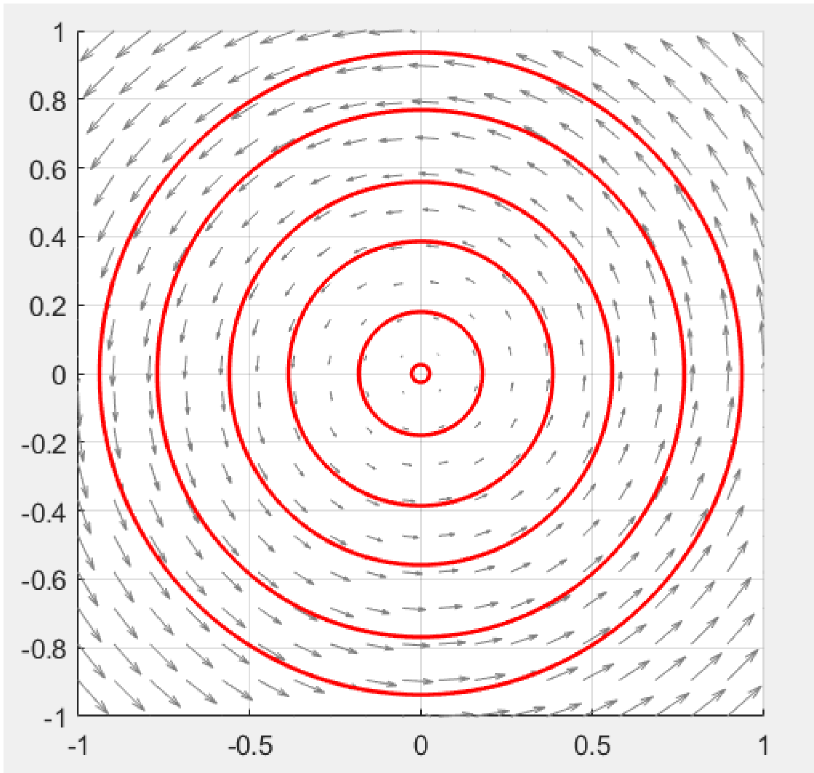

Figura 4: Trayectorias de la ecuación $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{y}$

2. Resolver ecuaciones diferenciales con simetrías

Antes de estudiar los formalismos de las simetrías, es necesario introducir una serie de conceptos algebraicos necesarios para comprender los resultados siguientes.

Definición. *Grupo. Sea un conjunto* G *y una aplicación* $G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto ab$. *Entonces el par formado por* G *y la aplicación es un grupo si se cumplen las siguientes condiciones:*

1. *Propiedad asociativa. Para cualesquiera* $a, b, c \in G$: $(ab)c = a(bc)$.
2. *Elemento neutro. Existe un elemento* $1_G \in G$ *tal que* $a1_G = 1_G a = a$ $\forall a \in G$

3. *Elemento inverso. Para cada $a \in G$, existe $a^{-1} \in G$ tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1_G$.*

Un ejemplo: Sea X no vacío. El conjunto $Biy(X) := \{f : X \to X|\text{ f es biyectiva}\}$ tiene estructura de grupo con la aplicación *composición*.

Definición. *Homomorfismo de grupos. Sean dos grupos G, H y $f : G \to H$. Entonces f es homomorfismo de grupos si para cada $a, b \in G$: $f(ab) = f(a)f(b)$.*

Definición. *Acción de un grupo sobre un conjunto. Sea un conjunto no vacío X. La acción de un grupo G sobre X se define como un homomorfismo $G \to Biy(X)$, $g \mapsto \tilde{g}$.*

La acción de G sobre X induce una aplicación $G \times X \to X$, $(g, x) \mapsto \tilde{g}(x)$. En otras palabras, tratar con acciones consiste en asociar cada elemento del grupo a una biyección del conjunto X.

Para ilustrar el concepto de grupo de simetrías, recuperemos el ejemplo del triángulo equilátero, simétrico bajo rotaciones de 0, $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$ radianes. Sea $\omega \in Biy(\mathbb{R}^2)$ la aplicación rotación de $\frac{2\pi}{3}$ radianes en el plano, es decir $\omega : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Ax$, siendo $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ y $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Entonces el conjunto $G := \{Id, \omega, \omega^2\} = \langle\omega\rangle$ es un grupo de simetrías del triángulo equilátero, y cada elemento se corresponde con las rotaciones de 0, $\frac{2\pi}{3}$ y $\frac{4\pi}{3}$ radianes respectivamente. Como se había mencionado anteriormente, el grupo es discreto y de hecho finito y de orden 3, por lo que $G \simeq \mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$. Una posible acción de este grupo es la aplicación $f : i \mapsto \omega^i$ para $i \in \mathbb{Z}_3$

2.1. Grupos de Lie

Hasta ahora hemos considerado las simetrías de ecuaciones diferenciales como aplicaciones que mueven curvas que verifican la ecuación diferencial en otras curvas que también verifican dicha ecuación. En lo sucesivo, trataremos de formalizar más el concepto de simetría mediante la incorporación de los grupos uniparaméricos de Lie. Nótese que en todos los ejemplos de las anteriores secciones se consideraban simetrías dependientes de un parámetro t. Este parámetro es importante a la hora de considerar las simetrías como acciones de los grupos que vamos a describir a continuación, así como de las órbitas de los puntos, que desempeñarán un papel importante a la hora de resolver ecuaciones diferenciales con simetrías.

Consideramos pares de puntos de $\mathbb{R}^2$: $\mathbf{x} = (x, y)$ y $\mathbf{X} = (X, Y)$. Ahora, para $t \in \mathbb{R}$, sea una transformación $P_t : \mathbf{x} \mapsto \phi(\mathbf{x}, t) = \mathbf{X}$ que transforma puntos $\mathbf{x}$ en puntos $\mathbf{X}$. Y supongamos que se cumplen las siguientes propiedades:

1. P_t es una biyección.
2. $P_{t_2} \circ P_{t_1} = P_{t_1+t_2}$, es decir $\phi(\phi(\mathbf{x}, t_1), t_2) = \phi(\mathbf{x}, t_1 + t_2)$.
3. $P_0 = Id$, es decir $\phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$.
4. Para cada t_1 existe un único t_2 (de hecho $t_2 = -t_1$) tal que $P_{t_2} \circ P_{t_1} = P_0 = Id$. En efecto $\phi(\phi(\mathbf{x}, t_1), t_2) = \phi(\mathbf{x}, t_1 + t_2) = \phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$.

Entonces el conjunto $G := \{P_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ recibe el nombre de *grupo uniparamétrico de transformaciones*. Si además ϕ es infinitamente diferenciable con respecto a $\mathbf{x}$ y analítica con respecto a t, entonces G se denomina *grupo uniparamétrico de Lie* (o *grupo de Lie*, para abreviar). También recibe el nombre de *flujo*, dado que puede considerarse como el movimiento de cada uno de los puntos del plano a lo largo de las trayectorias definidas por P_t.

Las distintas condiciones que son necesarias para considerar un grupo de simetrías como un grupo de Lie implica ciertas propiedades de las curvas soluciones de ecuaciones diferenciales. La condición 1 indica que la imagen de una curva maximal por la simetría P_t es otra curva maximal. La segunda condición establece que partiendo de una solución concreta y_0 dejando pasar t unidades de tiempo hasta transformar la solución en y_t, entonces, partiendo de la misma solución y_0, si se dejan pasar t_1 unidades de tiempo hasta una solución y_{t_1} y a partir de ella se dejan pasar t_2 unidades de tiempo hasta la solución y_{t_2}; si $t = t_1 + t_2$ entonces $y_t \equiv y_{t_2}$.

La tercera condición es evidente, una solución no sufre cambios si se transforma durante 0 unidades de tiempo. Por último, la cuarta es consecuencia directa de las condiciones 2 y 3, e indica que si transformamos la solución durante t unidades de tiempo, se puede revertir si aplicamos la transformación durante $-t$ unidades de tiempo.

Así pues, podemos considerar las simetrías de ecuaciones diferenciales de $\mathbb{R}^2$ como acciones de los grupos uniparamétricos de Lie, si cumplen las condiciones pertinentes. En tal caso reciben el nombre de *grupo de simetrías de Lie*. Nótese que estas acciones están definidas bajo grupos locales, es decir, no están necesariamente definidas en todo el plano euclídeo.

2.2. Órbitas

Definición. *G-órbita de un elemento*

Dado un elemento $x \in X$ y una acción de un grupo G sobre X. Se define la G-órbita de x bajo la acción de G al conjunto

$$O_{G,x} := \{\tilde{g}(x) \mid g \in G\}$$

En lo sucesivo, y para abreviar, nos referiremos a las G-órbitas simplemente como órbitas y denotaremos simplemente $O_{G,x} = O_x$.

De este modo, sean un punto fijo (x_0, y_0) y la acción de un grupo de Lie

$$P_t : (x_0, y_0) \mapsto (X_0, Y_0) = \phi((x_0, y_0), t)$$

La órbita del punto (x_0, y_0) es el conjunto de puntos (X_0, Y_0) que se obtienen según se varía t o, en otras palabras, la imagen de la aplicación $t \mapsto \phi((x_0, y_0), t)$, que recibe el nombre de *curva integral*. A continuación se enuncian y se demuestran algunas propiedades de las órbitas.

Proposición. *Las órbitas son disjuntas y forman una partición de la región del plano en la que están definidas.*

Demostración. Se reduce la demostración a probar que si $\mathbf{y} \in O_{\mathbf{x}}$, entonces $O_{\mathbf{x}} = O_{\mathbf{y}}$. En efecto, si $\mathbf{y} \in O_{\mathbf{x}} \Rightarrow \mathbf{y} = \phi(\mathbf{x}, t_0) \Rightarrow \mathbf{x} = \phi(\mathbf{y}, -t_0)$. Así que

$$\phi(\mathbf{y}, t) = \phi(\mathbf{x}, t + t_0), \qquad \phi(\mathbf{x}, t) = \phi(\mathbf{y}, t - t_0)$$

La primera igualdad implica $O_{\mathbf{y}} \subseteq O_{\mathbf{x}}$ y la segunda $O_{\mathbf{x}} \subseteq O_{\mathbf{y}}$ □

Por tanto, las órbitas de cada punto del plano consisten en caminos que recorren el plano euclídeo atravesando las soluciones de la ecuación diferencial.

Recordemos que el objetivo para conseguir resolver ecuaciones diferenciales es encontrar un sistema de coordenadas bajo el cual la ecuación sea independiente de una variable, y que en este caso, una traslación paralela a los ejes constituye una simetría de la ecuación. Y recíprocamente, si la ecuación admite como simetría una traslación en el sentido de alguno de los ejes, entonces es independiente de una de las variable y por tanto, factible de ser resuelta mediante la resolución de una integral.

Ahora bien, sea un punto en concreto del plano (x_0, y_0), y la órbita de dicho punto bajo la acción de un grupo de simetría de Lie. En la "dirección" de la órbita las soluciones se trasladan unas en otras, de manera similar a los casos sencillos de traslación paralela a los ejes.

Por tanto, consideramos una EDO

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(x, y)$$

y una simetría

$$P_t : (x, y) \mapsto (X, Y) = \phi((x, y), t) := (u(x, y, t), v(x, y, t))$$

que, por ser simetría, verifica la ecuación en derivadas parciales (2):

$$(X, Y) = \frac{Y_x + Y_y\, F(x, y)}{X_x + X_y\, F(x, y)} \tag{7}$$

Como vimos anteriormente, esta ecuación en derivadas parciales puede ser imposible de resolver, pero mediante simplificaciones adecuadas es factible hallar alguna solución. Este método consiste básicamente en linealizar la ecuación. El siguiente paso será formalizar un método para conseguir linealizar ecuaciones en derivadas parciales de este tipo, para lo cual introduciremos el concepto de *campo de vectores*.

2.3. Campo de vectores de una órbita

Dado un grupo de simetrías

$$P_t : (x, y) \mapsto (X, Y) = \phi((x, y), t) := (u(x, y, t), v(x, y, t))$$

entonces, a lo largo de cada una de las órbitas, podemos definir:

$$\xi(X, Y) := \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\eta(X,Y) := \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

y recordemos que por la tercera condición de grupo de transformaciones $\phi((x,y),0) = (x,y)$, por lo que se tiene que:

$$\xi(x,y) = \left.\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

$$\eta(x,y) = \left.\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}$$

Las funciones ξ y η se denominan *símbolos* de la transformación infinitesimal, y definen vectores tangentes a la órbita en cada punto. Por ello, los campos de vectores así definidos se denominan *campos tangentes*. El vector $(\xi(x,y),\, \eta(x,y))$ recibe el nombre de *vector generador* del campo o *generador infinitesimal*.

La cuestión ahora es calcular un campo tangente a las órbitas del grupo de simetrías de la ecuación diferencial. Por definición de grupo de Lie, la aplicación $\phi((x,y),t)$ es analítica con respecto a t, por lo que las funciones X, Y y $F(X,Y)$ admiten una expresión en serie de Taylor. En particular, del desarrollo en torno a $t=0$ se obtiene:

$$X = x + t\xi(x,y) + \mathcal{O}(t^2)$$

$$Y = y + t\eta(x,y) + \mathcal{O}(t^2)$$

$$F(X,Y) = F(x,y) + t(F_x(x,y)\xi(x,y) + F_y(x,y)\eta(x,y)) + \mathcal{O}(t^2)$$

Como el objetivo es linealizar la ecuación en derivadas parciales (7), tendremos en cuenta los dos primeros términos del desarrollo de Taylor. Asimismo, con el fin de simplificar la notación, se omitirán en lo sucesivo los nombres de las variables de las funciones, entendiendo salvo que se indique lo contrario que se tratan de (x,y).

Sustituyendo en (7) e ignorando los términos de orden t^2 y superior:

$$\frac{F + t(\eta_x + F\eta_y)}{1 + t(\xi_x + F\xi_y)} = F + t(\xi F_x + \eta F_y)$$

Multiplicando ambos miembros por $1 + t(\xi_x + F\xi_y)$ e ignorando de nuevo los términos de orden t^2 y superior:

$$F + t(\eta_x + F\eta_y) = F + t(F_x\xi + F_y\eta + F\xi_x + F^2\xi_y)$$

$$F + t(\eta_x + F(\eta_y - \xi_x) - F^2\xi_y) = F + t(F_x\xi + F_y\eta)$$

es decir:

$$\eta_x + F(\eta_y - \xi_x) - F^2\xi_y = (F_x\xi + F_y\eta)$$

Se obtiene por tanto la ecuación en derivadas parciales:

$$\eta_x + F(\eta_y - \xi_x) - F^2\xi_y - (F_x\xi + F_y\eta) = 0 \tag{8}$$

De nuevo, esta ecuación puede ser compleja y difícil de resolver. No obstante, si realizamos algunas suposiciones sobre el campo tangente (ξ, η) se puede simplificar y en última instancia resolver.

2.4. Coordenadas canónicas

El último paso para resolver ecuaciones diferenciales es encontrar un sistema de coordenadas en términos de x e y en el cual la ecuación sea separable; que denominaremos *sistema de coordenadas canónicas*. Así pues, si denotamos las nuevas coordenadas como $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$, tendremos que obtener $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \tilde{F}(u)$ o bien $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \tilde{F}(v)$, es decir una nueva ecuación diferencial que será independiente de una de las variables. Dado que ambos casos son análogos, consideremos $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \tilde{F}(u)$.

Como se ha visto anteriormente, una ecuación diferencial de este tipo es simétrica respecto a traslaciones en el eje de la variable v. Entonces, obtenemos un grupo de simetrías de la forma $P_t : (u, v) \mapsto (U, V) = (u, v + t)$. Es sencillo, en este caso, hallar un campo tangente a (u, v):

$$\left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 0$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = 1$$

Como es lógico, dado que las órbitas de esta simetría son líneas paralelas al eje v.

Si aplicamos la regla de la cadena a la expresión del campo en términos de u y v:

$$0 = \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} + \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\xi + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}\eta$$

y por otro lado:

$$1 = \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} + \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\xi + \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\eta$$

Y obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} u_x\xi + u_y\eta &= 0 \\ v_x\xi + v_y\eta &= 1 \end{aligned} \tag{9}$$

Los casos en los que $\xi(x,y) = 0$ o $\eta(x,y) = 0$ permiten resolver de manera sencilla estas ecuaciones y obtener $(u,v) = (x, \int \frac{dy}{\eta})$ o $(u,v) = (y, \int \frac{dx}{\xi})$ respectivamente.

Nótese también que para u buscamos una expresión constante a través de las órbitas de la simetría. En algunos casos, la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)}$$

es sencilla de resolver y las soluciones dependerán de una constante c. Si despejamos c de la solución, obtendremos una expresión en x e y que se mantiene constante a lo largo de las órbitas del campo, ergo una posible expresión de u.

Geométricamente las funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ describen superficies de $\mathbb{R}^3$. Las soluciones que verifican $u = c$ y $v = k$ se denominan *integrales primeras* y son las curvas de nivel cuyas proyecciones en el plano (x,y) tomaremos como el nuevo sistema de coordenadas.

Por último, debemos encontrar la nueva expresión de F en las nuevas coordenadas (u,v). Según la expresión no lineal de simetría (2):

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{v_x + v_y\,F(x,y)}{u_x + u_y\,F(x,y)}$$

y del segundo miembro conocemos todos los factores: $F(x,y)$ de la ecuación original y las derivadas parciales de u y v se pueden calcular según se ha visto en el apartado anterior. En resumen, la nueva ecuación en coordenadas canónicas será:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \tilde{F}(u,v) := \frac{v_x + v_y\,F(x,y)}{u_x + u_y\,F(x,y)}$$

que, si los cálculos realizados han sido correctos, debería ser $\tilde{F}(u, v) = \tilde{F}(u)$. Y si la transformación es válida, es decir, el jacobiano $u_x v_y - v_x u_y$ es no nulo, entonces podemos expresar las soluciones $v(u)$ en el sistema de coordenadas original, que a fin de cuentas es el objetivo último de todo el proceso.

2.5. En resumen

El método de resolución de una ecuación diferencial ordinaria mediante simetrías consiste en:

1. Encontrar alguna simetría de Lie P_t de la ecuación mediante la ecuación (2).

2. Hallar los símbolos ξ y η del campo descrito por las órbitas de la simetría.

   Si la expresión de la simetría es difícil de hallar, es posible recurrir directamente a la ecuación (8), pero será necesario realizar algunas suposiciones acerca de las soluciones y confiar en que den resultado.

3. Calcular el sistema de coordenadas canónicas (u, v) a partir de las ecuaciones (9).

4. Expresar la nueva ecuación diferencial en términos de u y v.

5. Resolver la ecuación separable integrando y deshacer el cambio de coordenadas para expresar la solución en las variables originales x e y.

3. Simetrías como método subyacente

En los cursos de ecuaciones diferenciales a menudo se plantean métodos de resolución que en principio no parecen tener nada en común y que dan la sensación de que la única manera de resolver estas ecuaciones es mediante algunos trucos que alguien tuvo el ingenio de descubrir. No obstante, algunos de estos métodos consisten en casos particulares de ecuaciones que admiten simetrías y cambios de variable favorables. La teoría de Lie, en consecuencia, proporciona un formalismo que unifica muchos de los métodos de resolución de ecuaciones diferenciales que existían por aquel entonces.

3.1. Coordenadas homogéneas

Una ecuación diferencial se dice homogénea si es de la forma

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = F(\frac{y}{x})$$

A la vista de que la ecuación sólo depende de la relación entre x e y resulta evidente que una aplicación que multiplique las coordenadas de los puntos por un factor igual es una simetría de la ecuación. En tal caso

$$\phi_t(x,y) = (e^t x, e^t y)$$

es una de las simetrías válidas y sus órbitas son rectas que pasan por el origen de coordenadas. Por ello, si definimos $u := yx^{-1}$, entonces u es constante a lo largo de las órbitas, y $v := \ln|x|$ verifica (9). Además el jacobiano de la transformación es no nulo.

Aplicando este cambio a coordenadas canónicas se obtiene la ecuación separable:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{v_x + v_y\,F(\frac{y}{x})}{u_x + u_y\,F(\frac{y}{x})} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{y}{x^2} + F(\frac{y}{x})\frac{1}{x}} = \frac{1}{F(u) - u}$$

3.2. Factor integrante

Dada la ecuación diferencial:

$$y' + F(x)y = G(x)$$

Si multiplicamos ambos miembros por un factor integrante $e^{-\int_0^x Fd\tau}$ e integramos, la solución viene dada por

$$y = e^{-\int_0^x Fd\tau} \int e^{\int_0^x Fd\tau} G(x)dx$$

La aplicación del factor $e^{-\int_0^x Fd\tau}$ se explica por el método de simetrías. La función $y_h(x) = e^{-\int_0^x Fd\tau}$ es la solución de la ecuación homogénea asociada:

$$y' + F(x)y = 0$$

por lo que la aplicación $\phi_t(x,y) = (x, y + ty_h(x))$ es simetría de la ecuación inhomogénea. En efecto, teniendo en cuenta que $y_h'(x) = -F(x)y_h(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[y(x) + ty_h(x)] + F(x)[y(x) + ty_h(x)] =$$
$$= y'(x) + F(x)y(x) + [ty_h'(x) + tF(x)y_h(x)] =$$
$$= y'(x) + F(x)y(x) = G(x)$$

Establecemos $u := x$ y como $\eta = y_h(x)$ entonces de (9) se deduce $v_y = y_h(x)^{-1}$ y por tanto $v = yy_h(x)^{-1}$.

Así pues, finalmente se obtiene la ecuación separable

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{v_x dx + v_y dy}{u_x dx + u_y dy} = \frac{-\frac{yy_h'}{y_h^2}dx + \frac{1}{y_h}dy}{dx} = -\frac{y(-F(x)y_h)}{y_h^2} + \frac{1}{y_h}y'(x) =$$
$$= \frac{-F(x)y}{y_h} + \frac{1}{y_h}[G(x) - F(x)y] = \frac{G(x)}{y_h(x)} = \frac{G(u)}{y_h(u)}$$

Cuya solución se obtiene integrando $v(u) = -\int \frac{G(u)}{e^{\int_0^u F d\tau}}$.

3.3. Reducción de orden

Consideramos la ecuación lineal de segundo orden homogénea:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

que intentaremos transformar a una de primer orden.

La familia de transformaciones $\phi_t(x,y) = (x, e^t y)$ son simetrías de la ecuación diferencial, dado que

$$(e^t y)'' + p(x)(e^t y)' + q(x)(e^t y) = e^t(y'' + p(x)y' + q(x)y) = 0$$

De nuevo, tomando $u := x$ y al ser $\xi = 0$ y $\eta = y$ establecemos $v := \ln|y|$ y la ecuación se convierte en:

$$v'' + (v')^2 + p(x)v' + q(x) = 0$$

que es una ecuación que podemos reducir a una de primer orden, si resolvemos para v'.

3.4. Convertir ecuaciones en derivadas parciales en ecuaciones diferenciales ordinarias

De una manera similar a la reducción de orden de una ecuación diferencial, es posible utilizar simetrías para reducir las variables de una ecuación en derivadas parciales. Por ejemplo, la ecuación de transporte:

$$z_x + z_y = k$$

es simétrica respecto a $\phi_t(x, y, z) = (X, Y, z) := (x + t, y + t, z)$ dado que

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial X}$$

y

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial Y}\frac{\partial Y}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial Y}$$

y $z_X + z_Y = k$ si y solo si $z_x + z_y = k$.

Tomando como nuevo sistema de coordenadas canónicas $u := y - x$, $v := \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}x$ y w una función en (x, y, z) se tiene que:

$$X_x = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = -X_u + \frac{1}{2}X_v$$

y

$$X_y = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = X_u + \frac{1}{2}X_v$$

Y la expresión de la ecuación en derivadas parciales $X_x + X_y = k$ en las coordenadas (u, v, w) es

$$X_v = k$$

4. Ejemplos completos

Ahora que disponemos de toda la información, procederemos a resolver algunas ecuaciones diferenciales ordinarias encontrando simetrías.

4.1. Ejemplo 1

Sea la ecuación diferencial:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}$$

Puede comprobarse de forma sencilla que la aplicación $\phi_t(x,y) = (\frac{x}{1-tx}, \frac{y}{1-tx})$ es una simetría de la ecuación diferencial.

Como tenemos una expresión de la simetría, podemos calcular los símbolos a partir de ella. En efecto:

$$\xi(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{x}{1-tx}\bigg|_{t=0} = \frac{x^2}{(1-tx)^2}\bigg|_{t=0} = x^2$$

$$\eta(x,y) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{y}{1-tx}\bigg|_{t=0} = \frac{xy}{(1-tx)^2}\bigg|_{t=0} = xy$$

Queremos que u sea constante a lo largo de las órbitas definidas por la simetría, que en este caso son las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\eta(x,y)}{\xi(x,y)} = \frac{xy}{x^2} = \frac{y}{x}$$

que son las curvas de la forma $y = cx$. Entonces yx^{-1} es constante a lo largo de las órbitas y podemos tomar $u(x,y) = yx^{-1}$.

Ahora, de la ecuación

$$v_x\xi + v_y\eta = 1$$

estableciendo $v(x,y) = v(x)$ y por tanto $v_y = 0$, se deduce que $v_x = \frac{1}{x^2}$ y finalmente $v(x,y) = -\frac{1}{x}$.

La ecuación en coordenadas canónicas será

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = -\frac{\frac{1}{x^2}}{-\frac{y}{x^2} + \frac{1}{x}(\frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3})} = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{1}{1+u^2}$$

La solución de esta ecuación viene dada por $v = \arctan(u) + c$ y deshaciendo el cambio de coordenadas obtenemos la solución en las variables (x,y):

$$y = x\tan\left(-\frac{1}{x} + c\right)$$

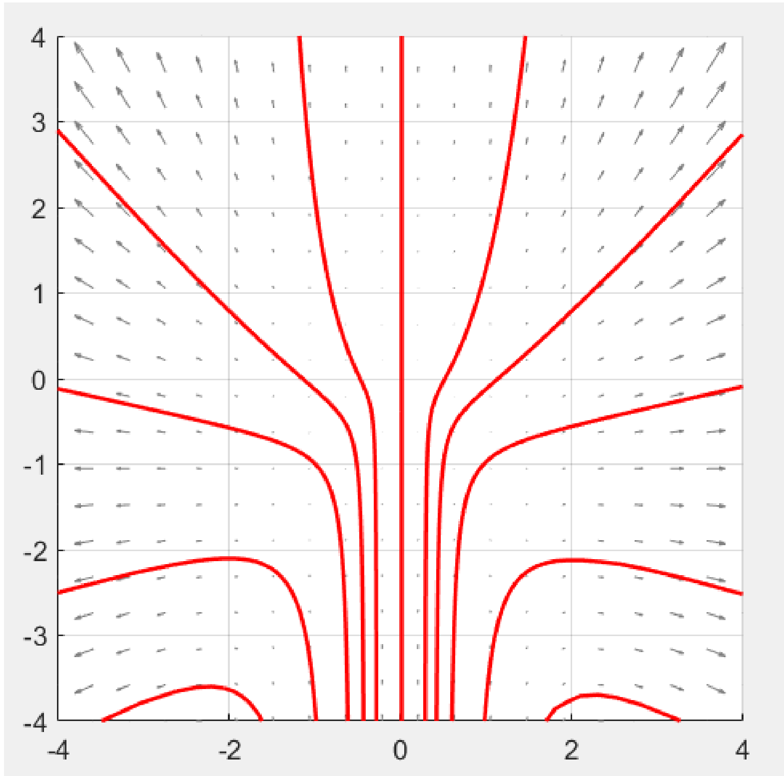

Figura 5: Trayectorias de la ecuación $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y+1}{x} + \frac{y^2}{x^3}$

4.2. Ejemplo 2

Por ejemplo, si consideramos la familia de curvas $y = (x-c)^2 - c^2$. Vamos a encontrar una ecuación diferencial que describa esta familia de curvas diferenciando la ecuación implícita, y comprobaremos que efectivamente la solución obtenida por el método de resolución por simetrías verifica $y = (x-c)^2 - c^2$.

Para hallar la ecuación diferencial debemos aplicar el operador de diferencial total:

$$D_x := \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}x}\frac{\partial}{\partial y'} + \cdots = \frac{\partial}{\partial x} + y'\frac{\partial}{\partial y} + y''\frac{\partial}{\partial y'} + \cdots$$

Entonces, teniendo en cuenta que podemos despejar c de la ecuación y

$c = \frac{x^2-y}{2x}$:

$$0 = D_x((x-c)^2 - c^2 - y) = 2(x-c) - y' = 2(x - \frac{x^2-y}{2x}) - y' = x + \frac{y}{x} - y'$$

Y se obtiene la ecuación diferencial

$$y' = x + \frac{y}{x}$$

Procedemos a resolver la ecuación. Al sustituir en la ecuación (8) $F(x,y) = \frac{y}{x} + x$, y teniendo en cuenta $F_x = 1 - \frac{y}{x^2}$, $F_y = \frac{1}{x}$ se obtiene

$$\eta_x + (\frac{y}{x} + x)(\eta_y - \xi_x) - (\frac{y}{x} + x)^2 \xi_y - ((1 - \frac{y}{x^2})\xi + \frac{1}{x}\eta) = 0$$

Vamos a asumir que los símbolos del campo cumplen $\xi = 0$ y $\eta = \eta(x)$. En tal caso la ecuación resulta en

$$\eta_x = \frac{\eta}{x}$$

por lo que

$$\eta = x$$

De este modo hemos calculado los símbolos ξ y η y al sustituir los resultados en las ecuaciones (9) podemos encontrar el sistema de coordenadas canónicas:

$$(u,v) = (x, \int \frac{dy}{\eta}) = (x, \int \frac{dy}{x}) = (x, \frac{y}{x})$$

Ahora, en estas coordenadas tendremos la siguiente expresión de la ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{v_x + v_y\, F(x,y)}{u_x + u_y\, F(x,y)}$$

de la que conocemos todos los factores:

$$F(x,y) = \frac{y}{x} + x$$

$$u_x = 1 \qquad u_y = 0$$

$$v_x = -\frac{y}{x^2} \qquad v_y = \frac{1}{x}$$

Obtenemos entonces la nueva ecuación:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{-\frac{y}{x^2} + (\frac{y}{x} + x)\frac{1}{x}}{1+0} = 1$$

que es separable y de resolución inmediata:

$$\int dv = \int du$$

de donde obtenemos la siguiente expresión (nombrando a la constante de integración $C = -2k$):

$$v = u - 2k$$

Deshaciendo el cambio de coordenadas se obtiene la curva

$$y = x^2 - 2kx = (x-k)^2 - k^2$$

que es la solución de la ecuación diferencial.

En este caso no hemos encontrado simetrías de la ecuación original. En situaciones como esta tendremos que asumir ciertas características acerca de los símbolos del campo y esperar que funcionen a la hora de calcular una solución. Aunque en un principio pueda parecer un método informal, hay que tener en cuenta que no buscamos todas las simetrías de la ecuación, que pueden ser infinitas, sino solo una. Es por ello que no es tan descabellado ir probando con símbolos progresivamente más complejos hasta dar con alguno que sirva para nuestros propósitos. En particular, este ejemplo ha dado resultado con $\xi = 0$ y $\eta = \eta(x)$. De haber fallado, se podrían intentar otras posibilidades, como polinomios de una variable $\xi = P(x)$ y $\eta = Q(y)$ o viceversa $\xi = Q(y)$ y $\eta = P(x)$, sumas de polinomios $\xi = P_1(x) + Q_1(y)$ y $\eta = P_2(x) + Q_2(y)$, productos, cocientes, etc.

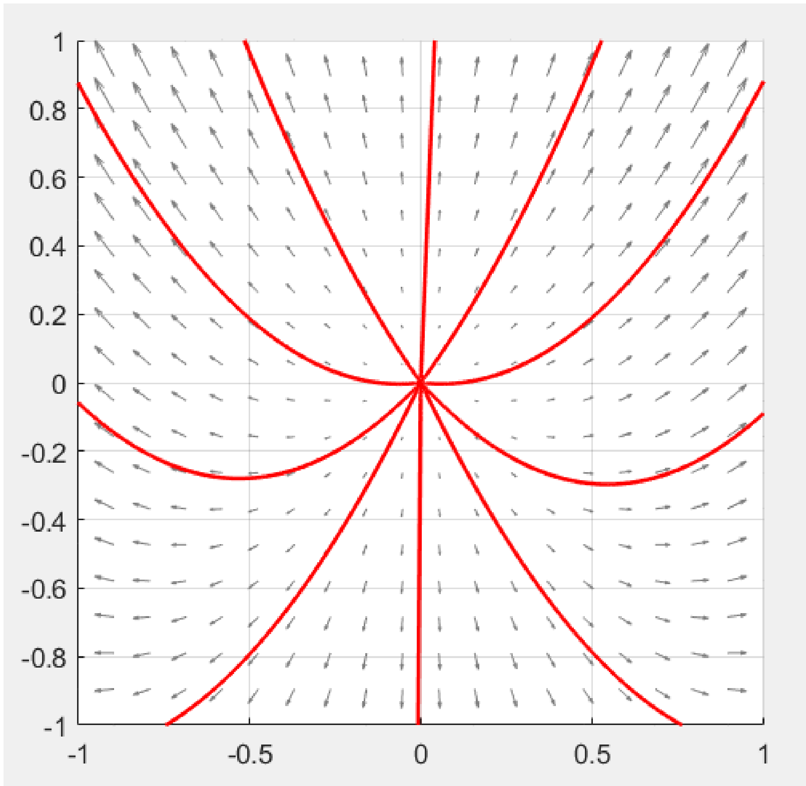

Figura 6: Trayectorias de la ecuación $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + \frac{y}{x}$

5. Conclusiones

A partir de la noción general de simetría en las Matemáticas se ha definido el concepto aplicado a las ecuaciones diferenciales ordinarias con soluciones contenidas en $\mathbb{R}^2$. Se ha demostrado que una ecuación diferencial es independiente de una de las variables si y solo si admite una simetría de traslación paralela a uno de los ejes. Las ecuaciones dependientes de una sola variable, en general, se pueden resolver mediante una integración estándar. En consecuencia, se ha determinado como objetivo encontrar, a partir de una simetría cualquiera de la ecuación original, un sistema de coordenadas en el que la ecuación admita una simetría de traslación paralela a uno de los ejes, convirtiéndola así en una ecuación dependiente de una sola variable. Una vez integrada la nueva ecuación, si esto es posible, se deshace el cambio para llegar a la solución deseada.

Para encontrar este sistema de coordenadas canónicas, se ha introducido el concepto de grupo de Lie, que proporciona una base algebraica al método de resolución. Estudiando las órbitas de las acciones de los grupos de Lie, y recurriendo si es preciso a una linealización de la misma mediante un desarrollo de Taylor, es posible hallar este nuevo sistema de coordenadas, aunque en ocasiones el método obligue a realizar suposiciones que no siempre dan resultado.

Además, se ha estudiado el aspecto unificador de este método, tal como había propuesto Sophus Lie a mediados del siglo XIX, que en casos particulares subyace a otros métodos de resolución de ecuaciones diferenciales más conocidos, como las coordenadas homogéneas, el factor integrante o la reducción de orden.

Por último se han propuesto dos ejemplos que demuestran que, en efecto se pueden resolver ecuaciones diferenciales complejas aplicando el método de simetrías.

La aplicación informática permite visualizar las soluciones de sistemas de ecuaciones autónomos y ha sido de gran ayuda para ilustrar los ejemplos expuestos en el trabajo.

Anexo I. Tutorial de uso de la aplicación.

Para descargar la aplicación hay que acceder a `https://github.com/ManuTorron5/TFG-app` y seguir las instrucciones.

La aplicación consiste en una interfaz gráfica de usuario en la que se puede introducir un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas y que dibuja las soluciones y el diagrama de fases. En la primera pantalla podemos seleccionar si queremos dibujar un diagrama plano o tridimensional. Por motivos de complejidad de programación, la aplicación de diagramas tridimensionales es mucho más sencilla que la de diagramas planos, por lo que el tutorial se centrará en un ejemplo plano. Seleccionamos 2 dimensiones y se abrirá la interfaz del sistema de ecuaciones.

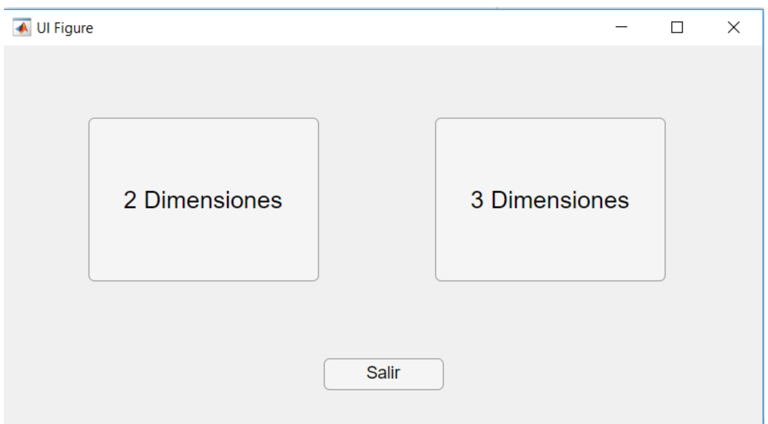

Figura 7: Pantalla de inicio

En el panel "Ecuaciones" debemos escribir las expresiones de x' e y' respectivamente en lenguaje MATLAB. En la siguiente figura se muestra un ejemplo. Podemos dejar hasta seis parámetros libres e indicar sus valores en el panel "Parámetros". El tamaño de la ventana indicará el tamaño del diagrama de fase y en otros datos podemos establecer la longitud del intervalo y el número de puntos sobre los que se evaluarán las soluciones. Nótese que si la longitud del intervalo es L, las soluciones se calcularán entre $-L$ y L, y que a mayor número de puntos las soluciones serán más exactas, pero aumentará el tiempo de cálculo. Además, podemos elegir si pintar las trayectorias hacia adelante (entre 0 y L), hacia atrás (de $-L$ a 0) o ambas. En la pestaña "Galería" se guardan algunos sistemas conocidos, como el sistema presa-depredador de Lotka-Volterra.

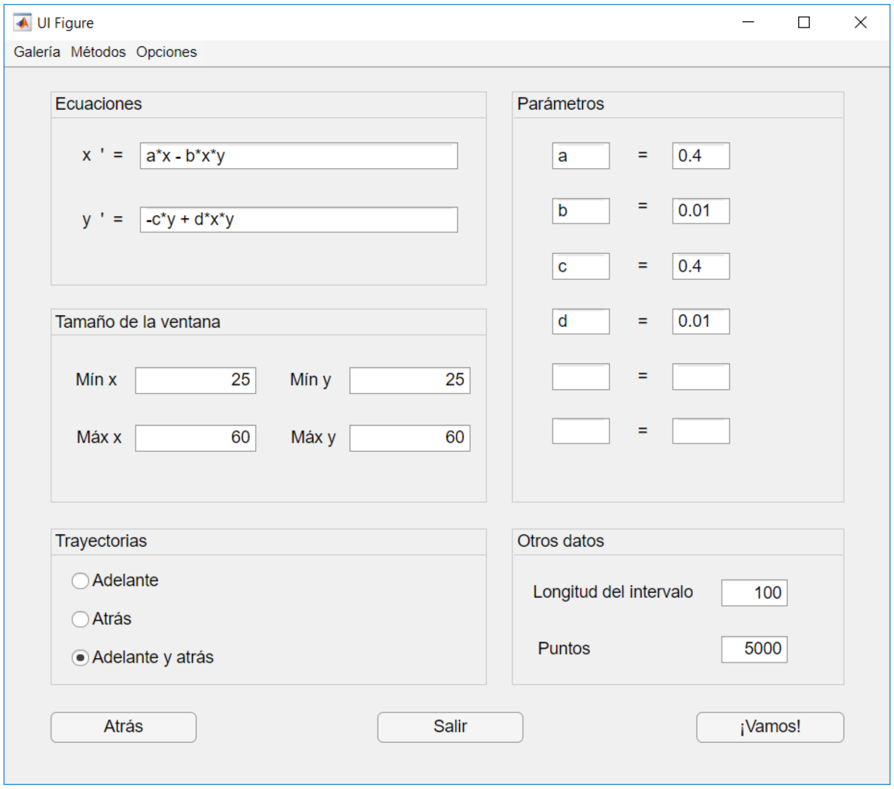

Figura 8: Pantalla principal de 2D

Al pinchar en el botón "¡Vamos!" se abrirán dos figuras. En la figura 1 se mostrarán las direcciones del diagramas de fases. Al pinchar en un punto cualquiera se dibujará la trayectoria según los parámetros indicados y en la figura 2 se dibujarán las soluciones aproximadas de las dos funciones $x(t)$ e $y(t)$.

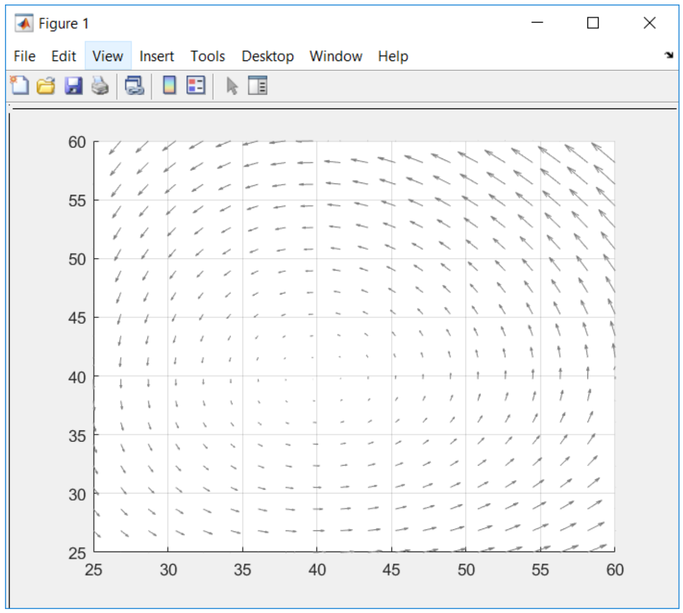

Figura 9: Direcciones del sistema de Lotka-Volterra

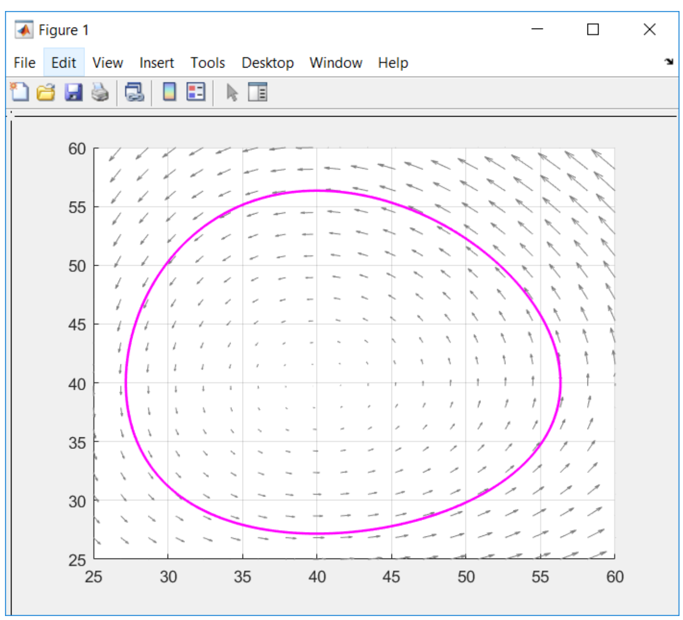

Figura 10: Una trayectoria del sistema de Lotka-Volterra (método: Runge-Kutta 4)

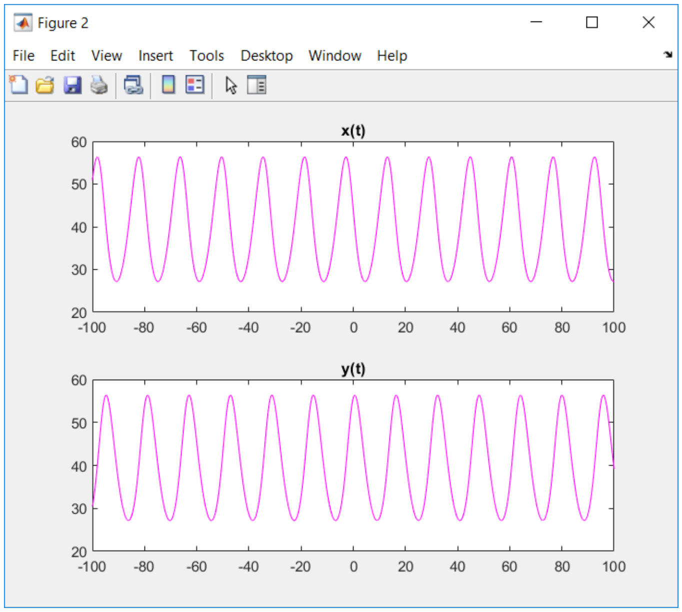

Figura 11: Soluciones aproximadas (método: Runge-Kutta 4)

En “Métodos” podremos elegir entre los métodos numéricos disponibles para realizar los cálculos, incluso los ya incluidos en MATLAB. Si elegimos un nuevo método, podemos pinchar directamente en el diagrama y se pintará la nueva trayectoria en un color diferente.

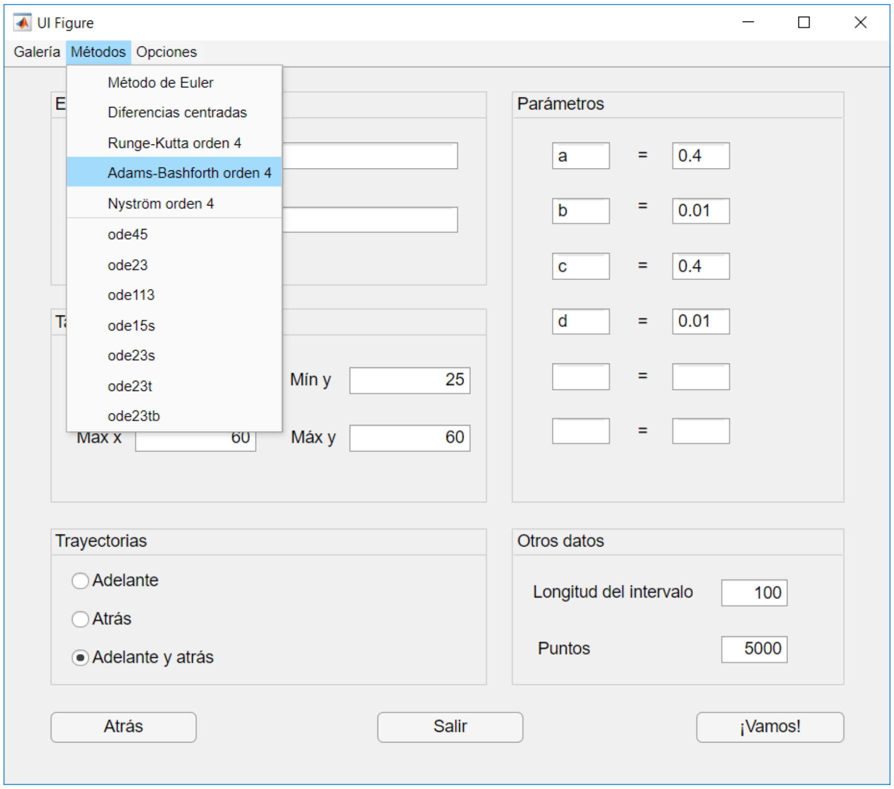

Figura 12: Selección de otro método

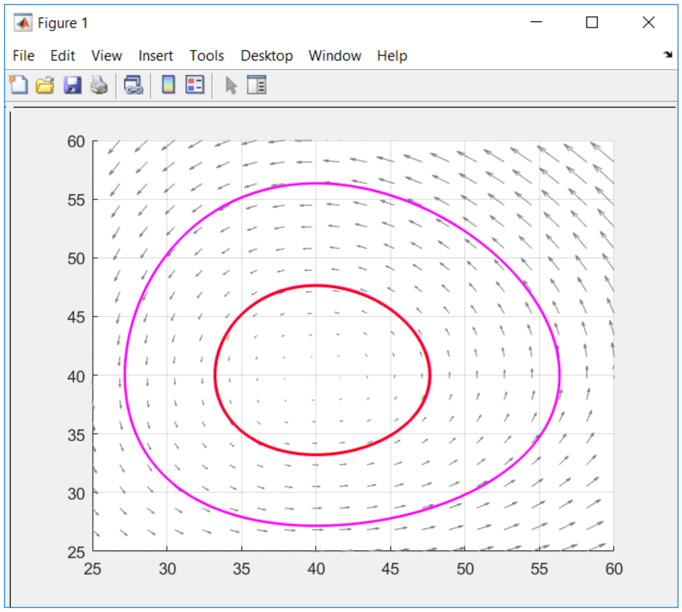

Figura 13: Otra trayectoria (en rojo) del sistema de Lotka-Volterra (método: Adams-Bashforth 4)

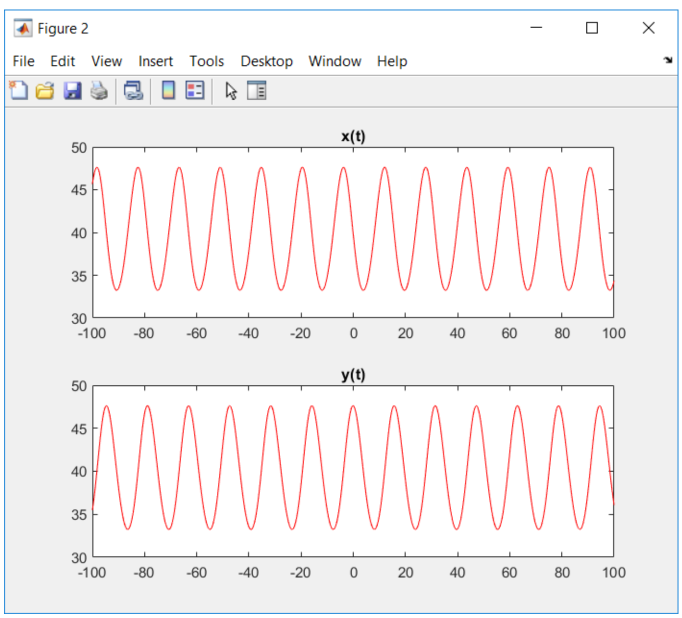

Figura 14: Soluciones aproximadas (método: Adams-Bashforth 4)

Por último, en la pestaña "Opciones" podremos pinchar en "Isoclinas" y en el diagrama se dibujarán las isoclinas respectivas a $x' = 0$ e $y' = 0$, es decir, aquellos puntos donde la trayectoria es horizontal o vertical. Los puntos de equilibrio del sistema se corresponden con las intersecciones de estas curvas.

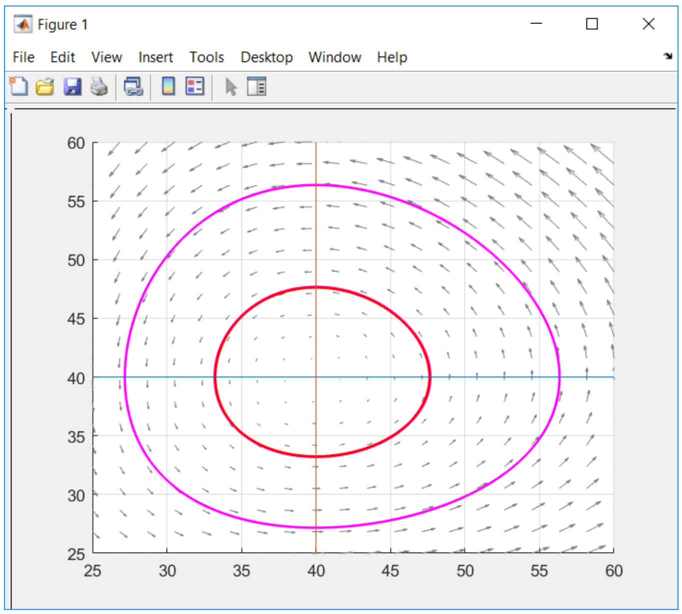

Figura 15: Isoclinas del sistema Lotka-Volterra

La versión en 3D es análoga, pero más sencilla: no admite parámetros y sólo dibuja una trayectoria, siempre hacia adelante, de cada vez, por lo que el punto inicial debe indicarse desde la interfaz y no pinchando en el diagrama. Además, por motivos de claridad, no se dibujan las direcciones y las isoclinas $x' = 0$, $y' = 0$ y $z' = 0$ se dibujan en una figura aparte.

Referencias

[1] Burden, R.L. y Faires, J.D. (1998): *Análisis Numérico*, International Thomson Editores.

[2] Fernández Pérez, C. Vázquez Hernández, F.J. y Vegas Montaner, J.M: *Ecuaciones diferenciales y en diferencias. Sistemas dinámicos*, Madrid, Thomson.

[3] Fernando, J.F. y Gamboa, J.M: *Estructuras Algebraicas: Teoría Elemental de Grupos*, Madrid, Sanz y Torres.

[4] Gamboa, J.M. y Ruiz, J.M. (1999): *Iniciación al estudio de las Variedades Diferenciables*, 3ª edición, Madrid, Sanz y Torres.

[5] John, F. (1982): *Partial Differential Equations*, 4ª edición, Nueva York, Springer.

[6] Muñoz Fernández, G.A. y Seoane Sepúlveda, J.B. (2017): *Fundamentos y problemas resueltos de teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales*, Madrid, Paraninfo.

[7] Olver, P. (1993): *Applications of Lie Groups to Differential Equations*, Springer.

[8] Sanjurjo, J.M. y Ruiz, J.M: *Introducción a la Geometría Diferencial I. Curvas*, Sanz y Torres.

[9] Starret, J. (2007): "Solving Differential Equations by Symmetry Groups", *The American Mathematical Monthly*, 114(9), pp. 778-792.

[10] Llamado Yap, S. (2010): "Differential Equations-Not just a bag of tricks!", *Mathematics Magazine*, 83(1), pp. 3-14.