

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Национальный исследовательский университет ИТМО»  
Факультет программной инженерии и компьютерной техники

Лабораторная работа 6 по дисциплине  
**«Вычислительная математика»**

Вариант № 10

Выполнил:  
Мамонтов Г. А.

Преподаватели:  
Машина Е. А.  
Малышева Т. А.

Санкт-Петербург, 2025 г

## Цель работы

Решить задачу Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений численными методами.

## Описание алгоритма решения задачи

### 1. Цель

Решить задачу Коши:

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

$$x \in [x_0; x_n]$$

численными методами: Эйлера, Рунге-Кутта 4-го порядка, Милна (предиктор-корректор), с заданным шагом  $h$  и оценкой точности решений.

### 2. Выбор исходных данных

1. Пользователь выбирает одно из предложенных дифференциальных уравнений.
2. Пользователь вводит:
  - начальные условия;
  - интервал интегрирования;
  - шаг интегрирования;
  - желаемую точность  $\varepsilon$  (для оценки)

### 3. Метод Эйлера (одношаговый, порядок 1)

Формула:

$$y_{i+1} = y_i + h * f(x_i, y_i)$$

Алгоритм:

1. Установить  $x_0, y_0$ .
2. Повторять до  $x_i \leq x_n$ :
  - Вычислить  $y_{i+1}$  по формуле выше.
  - Увеличить  $x_i = x_i + h$ .

Оценка точности:

Используется правило Рунге:

$$R = \frac{|y_h - y_{h/2}|}{2^p - 1}, p = 1$$

#### 4. Метод Рунге-Кутты 4-го порядка (одношаговый, порядок 4)

Формула:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_2}{2})$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Оценка точности:

Используется правило Рунге:

$$R = \frac{|y_h - y_{h/2}|}{2^p - 1}, p = 4$$

## 5. Метод Милна (многошаговый, порядок 4)

Требует 4-х начальных точек, которые берутся из метода Рунге-Кутты.

Формулы:

Предиктор (оценка):

$$y_{i+1}^{(0)} = y_{i-3} + \frac{4h}{3}(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i)$$

Корректор( уточнение):

$$y_{i+1} = y_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1}^{(0)})$$

Алгоритм:

1. Получить  $y_0, y_1, y_2, y_3$  методом Рунге-Кутты.
2. С  $i = 3$  и далее:
  - Вычислить предсказанное значение.
  - Уточнить по формуле корректора.

Оценка точности:

$$\text{Сравнение с точным решением: } \varepsilon = \max |y_i^{\text{точн}} - y_i^{\text{числ}}|$$

## 6. Вывод результатов

Выводим графики, таблицу, анализируем точность

**Листинг программы (по крайней мере, коды используемых методов)**

```

#Метод Эйлера
def euler_method(f, x0, y0, xn, h):
    x_vals = [x0]
    y_vals = [y0]
    x = x0
    y = y0
    # Шаг за шагом вычисляем  $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$ 
    while x < xn:
        y += h * f(x, y)
        x = round(x + h, 10)
        x_vals.append(x)
        y_vals.append(y)
    return x_vals, y_vals

#Метод Рунге-Кутты 4-го порядка
def runge_kutta_method(f, x0, y0, xn, h):
    x_vals = [x0]
    y_vals = [y0]
    x = x0
    y = y0
    # Вычисляем  $y_{i+1}$  с помощью взвешенного среднего значений
    производных
    while x < xn:
        k1 = h * f(x, y)
        k2 = h * f(x + h / 2, y + k1 / 2)
        k3 = h * f(x + h / 2, y + k2 / 2)
        k4 = h * f(x + h, y + k3)
        y += (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6
        x = round(x + h, 10)
        x_vals.append(x)
        y_vals.append(y)
    return x_vals, y_vals

#Метод Милна (предиктор-корректор)
def milne_method(f, x0, y0, xn, h):
    # Сначала получаем 4 стартовые точки методом Рунге-Кутты
    x_init, y_init = runge_kutta_method(f, x0, y0, x0 + 3 * h, h)
    x_vals = x_init.copy()
    y_vals = y_init.copy()
    i = 3
    # На каждом шаге:

```

```

# Предиктор:  $y_{i+1} = y_{i-3} + (4h/3)(2f_{i-2} - f_{i-1} + 2f_i)$ 
# Корректор:  $y_{i+1} = y_{i-1} + (h/3)(f_{i-1} + 4f_i + f_{i+1})$ 
while x_vals[-1] < xn:
    y_pred = y_vals[i-3] + (4*h/3)*(2*f(x_vals[i-2], y_vals[i-2]) -
f(x_vals[i-1], y_vals[i-1]) + 2*f(x_vals[i], y_vals[i]))
    x_next = round(x_vals[i] + h, 10)
    f_next = f(x_next, y_pred)
    y_corr = y_vals[i-1] + (h/3)*(f(x_vals[i-1], y_vals[i-1]) +
4*f(x_vals[i], y_vals[i]) + f_next)
    x_vals.append(x_next)
    y_vals.append(y_corr)
    i += 1
return x_vals, y_vals

```

 Untitled9.ipynb

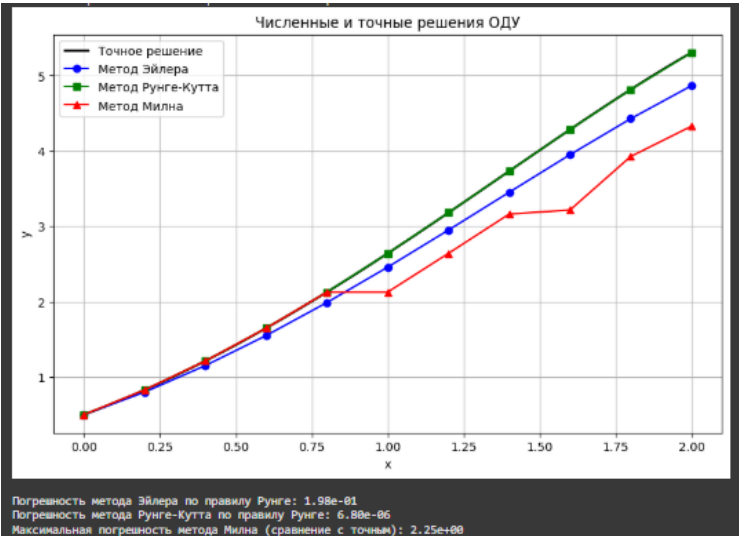
# Ввод и выводы

```
Введите x0: 0
Введите y0: 0.5
Введите xp: 2
Введите шаг h: 0.2
Введите точность eps: 0.001
Выберите ОДУ для решения:
1: y' = y - x^2 + 1
2: y' = x * sqrt(y)
3: y' = x + y
Введите номер уравнения (1, 2 или 3): 1
```

| Результаты метода Эйлера: |            |            |          |
|---------------------------|------------|------------|----------|
| x                         | y (числ.)  | y (точн.)  | norp     |
| 0.00000                   | 0.50000000 | 0.50000000 | 0.00e+00 |
| 0.20000                   | 0.80000000 | 0.82929862 | 2.93e-02 |
| 0.40000                   | 1.15200000 | 1.21408765 | 6.21e-02 |
| 0.60000                   | 1.55940000 | 1.64894069 | 9.85e-02 |
| 0.80000                   | 1.98840000 | 2.12722954 | 1.30e-01 |
| 1.00000                   | 2.45817600 | 2.64885909 | 1.83e-01 |
| 1.20000                   | 2.94981120 | 3.17994154 | 2.30e-01 |
| 1.40000                   | 3.45177344 | 3.73240002 | 2.81e-01 |
| 1.60000                   | 3.95012312 | 4.28348379 | 3.35e-01 |
| 1.80000                   | 4.42815375 | 4.81517627 | 3.87e-01 |
| 2.00000                   | 4.86578450 | 5.30547195 | 4.40e-01 |

| Результаты метода Рунге-Кутты: |            |            |          |
|--------------------------------|------------|------------|----------|
| x                              | y (числ.)  | y (точн.)  | norp     |
| 0.00000                        | 0.50000000 | 0.50000000 | 0.00e+00 |
| 0.20000                        | 0.82929333 | 0.82929862 | 5.29e-06 |
| 0.40000                        | 1.21407621 | 1.21408765 | 1.14e-05 |
| 0.60000                        | 1.64892202 | 1.64894069 | 1.86e-05 |
| 0.80000                        | 2.12720268 | 2.12722954 | 2.69e-05 |
| 1.00000                        | 2.64882269 | 2.64885909 | 3.64e-05 |
| 1.20000                        | 3.17890417 | 3.17994154 | 4.74e-05 |
| 1.40000                        | 3.73234007 | 3.73240002 | 5.99e-05 |
| 1.60000                        | 4.28340950 | 4.28348379 | 7.43e-05 |
| 1.80000                        | 4.81508569 | 4.81517627 | 9.06e-05 |
| 2.00000                        | 5.30536300 | 5.30547195 | 1.09e-04 |

| Результаты метода Милна: |            |            |          |
|--------------------------|------------|------------|----------|
| x                        | y (числ.)  | y (точн.)  | norp     |
| 0.00000                  | 0.50000000 | 0.50000000 | 0.00e+00 |
| 0.20000                  | 0.82929333 | 0.82929862 | 5.29e-06 |
| 0.40000                  | 1.21407621 | 1.21408765 | 1.14e-05 |
| 0.60000                  | 1.64892202 | 1.64894069 | 1.86e-05 |
| 0.80000                  | 2.12720268 | 2.12722954 | 2.69e-05 |
| 1.00000                  | 2.12721346 | 2.12722954 | 1.61e-05 |
| 1.20000                  | 2.64883284 | 2.64885909 | 2.62e-05 |
| 1.40000                  | 3.16281275 | 2.64885909 | 5.22e-04 |
| 1.60000                  | 3.21695761 | 3.17994154 | 3.60e-02 |
| 1.80000                  | 3.92672695 | 3.17994154 | 7.47e-01 |
| 2.00000                  | 4.32810574 | 3.73240002 | 5.96e-01 |
| 1.40000                  | 4.62994855 | 3.73240002 | 8.98e-01 |
| 1.60000                  | 5.32066046 | 4.28348379 | 1.04e+00 |
| 1.80000                  | 5.83627838 | 4.28348379 | 1.55e+00 |
| 2.00000                  | 6.17812675 | 4.81517627 | 1.36e+00 |
| 1.80000                  | 7.06595543 | 4.81517627 | 2.25e+00 |
| 2.00000                  | 7.47790590 | 5.30547195 | 2.17e+00 |



Введите  $x_0$ : 0  
 Введите  $y_0$ : 1  
 Введите  $x_1$ : 2  
 Введите шаг  $h$ : 0.5  
 Введите точность  $\epsilon$ : 0.01  
 Выберите ОДУ для решения:  
 1:  $y' = y - x^2 + 1$   
 2:  $y' = x * \sqrt{y}$   
 3:  $y' = x + y$   
 Введите номер уравнения (1, 2 или 3): 2

Результаты метода Эйлера:

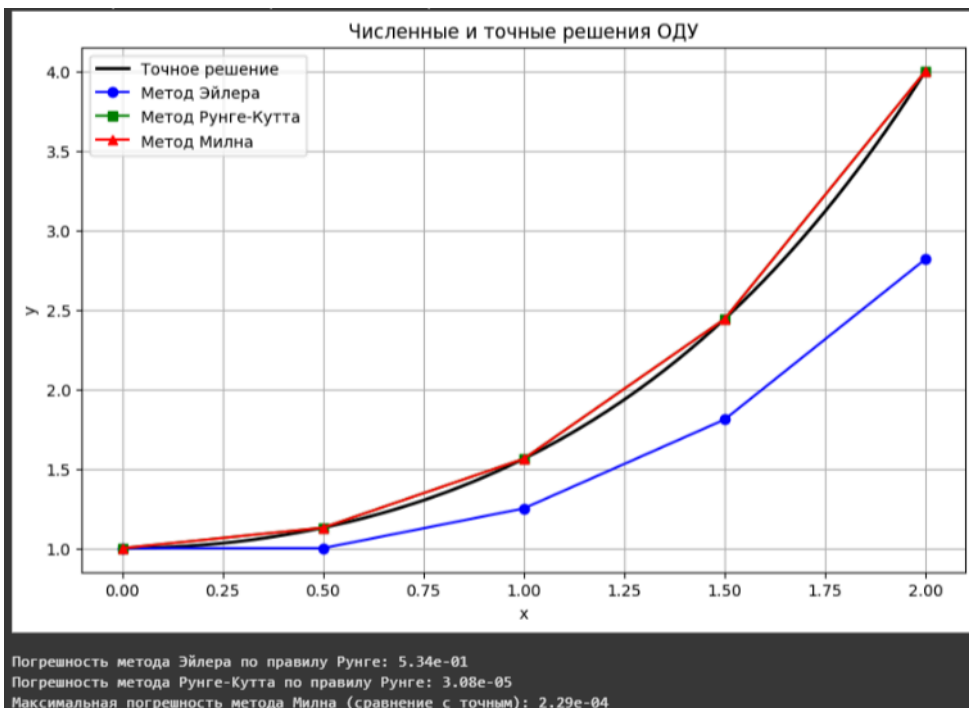
| $x$     | $y$ (числ.) | $y$ (точн.) | погр     |
|---------|-------------|-------------|----------|
| 0.00000 | 1.00000000  | 1.00000000  | 0.00e+00 |
| 0.50000 | 1.00000000  | 1.12890625  | 1.29e-01 |
| 1.00000 | 1.25000000  | 1.56250000  | 3.12e-01 |
| 1.50000 | 1.80901699  | 2.44140625  | 6.32e-01 |
| 2.00000 | 2.81776476  | 4.00000000  | 1.18e+00 |

Результаты метода Рунге-Кутты:

| $x$     | $y$ (числ.) | $y$ (точн.) | погр     |
|---------|-------------|-------------|----------|
| 0.00000 | 1.00000000  | 1.00000000  | 0.00e+00 |
| 0.50000 | 1.12888536  | 1.12890625  | 2.09e-05 |
| 1.00000 | 1.56241299  | 1.56250000  | 8.70e-05 |
| 1.50000 | 2.44117721  | 2.44140625  | 2.29e-04 |
| 2.00000 | 3.99950433  | 4.00000000  | 4.96e-04 |

Результаты метода Милна:

| $x$     | $y$ (числ.) | $y$ (точн.) | погр     |
|---------|-------------|-------------|----------|
| 0.00000 | 1.00000000  | 1.00000000  | 0.00e+00 |
| 0.50000 | 1.12888536  | 1.12890625  | 2.09e-05 |
| 1.00000 | 1.56241299  | 1.56250000  | 8.70e-05 |
| 1.50000 | 2.44117721  | 2.44140625  | 2.29e-04 |
| 2.00000 | 3.99982306  | 4.00000000  | 1.77e-04 |





Введите  $x_0$ : 0  
 Введите  $y_0$ : 1  
 Введите  $x_1$ : 3  
 Введите шаг  $h$ : 1  
 Введите точность  $\epsilon$ : 0.01  
 Выберите ОДУ для решения:  
 1:  $y' = y - x^2 + 1$   
 2:  $y' = x * \sqrt{y}$   
 3:  $y' = x + y$   
 Введите номер уравнения (1, 2 или 3): 3

Результаты метода Эйлера:

| x       | y (числ.)   | y (точн.)   | погр     |
|---------|-------------|-------------|----------|
| 0.00000 | 1.00000000  | 1.00000000  | 0.00e+00 |
| 1.00000 | 2.00000000  | 3.43656366  | 1.44e+00 |
| 2.00000 | 5.00000000  | 11.77811220 | 6.78e+00 |
| 3.00000 | 12.00000000 | 36.17107385 | 2.42e+01 |

Результаты метода Рунге-Кутты:

| x       | y (числ.)   | y (точн.)   | погр     |
|---------|-------------|-------------|----------|
| 0.00000 | 1.00000000  | 1.00000000  | 0.00e+00 |
| 1.00000 | 3.41666667  | 3.43656366  | 1.99e-02 |
| 2.00000 | 11.67013889 | 11.77811220 | 1.08e-01 |
| 3.00000 | 35.73162616 | 36.17107385 | 4.39e-01 |

Результаты метода Милна:

| x       | y (числ.)   | y (точн.)   | погр     |
|---------|-------------|-------------|----------|
| 0.00000 | 1.00000000  | 1.00000000  | 0.00e+00 |
| 1.00000 | 3.41666667  | 3.43656366  | 1.99e-02 |
| 2.00000 | 11.67013889 | 11.77811220 | 1.08e-01 |
| 3.00000 | 35.73162616 | 36.17107385 | 4.39e-01 |

