



Instituto Tecnológico
de Buenos Aires

Investigación de Operaciones II

Caso N°1

Segundo cuatrimestre de 2024

Integrantes:

Manuel Dominguez 63388

Fecha de entrega: viernes 23 de agosto de 2024

Análisis Estadístico con teoría de Montecarlo

Manuel I. Dominguez - manudominguez@itba.edu.ar

RESUMEN

En este informe se realizará un análisis estadístico del juego de mesa “Los tres chanchitos” usando la teoría de Montecarlo. En el mismo se harán pruebas estadísticas a diferentes modalidades del mismo juego con el fin de evaluar las diferencias. Asimismo se analizarán también las distribuciones de los datos con el fin de comprender como afectan diferentes variables al desarrollo del juego, como por ejemplo la cantidad de jugadores o reglas específicas.

A través del desarrollo del informe se encuentra que a medida que aumenta la cantidad de jugadores, el desarrollo del mismo disminuye, ya que con una cantidad de por ejemplo, mil jugadores, la media de rondas antes de que un juego termine es de cinco, que es a su vez la cantidad mínima de rondas que debe poseer el juego.

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo busca modelar y simular el desarrollo del juego “Los tres chanchitos”, analizando las diferencias entre las distintas modalidades, como por ejemplo la variación de la media de la cantidad de rondas jugadas si aumenta la cantidad de jugadores, cuya cantidad recomendada es de dos a cuatro jugadores. Para esto se usó la teoría de Montecarlo, que es un método no determinista o estadístico numérico para representar situaciones complejas de forma más simple.

El desarrollo del juego y de la simulación fue hecha en el lenguaje de programación Python, que permitió tanto la creación del juego como el análisis estadístico correspondiente. El código del mismo se puede encontrar en el siguiente repositorio de [GitHub](#)

LÓGICAS DEL JUEGO

El juego hace referencia a la clásica historia de niños de los chanchitos que construyen su casa y el lobo que intenta derribarlas. La idea del juego es similar, cada jugador deberá intentar construir su casa y finalizarla antes que el resto de los jugadores teniendo en cuenta que el lobo se las puede derribar. Para lograrlo, los jugadores deberán ir armando su casa en base a las paredes que les salgan en los dados. El dado se compone de seis caras, donde cada cara posee un color que representa la pared de la casa. Los colores y sus significados son los siguientes:

CARAS	SIGNIFICADO
AZUL	Frente de la casa
VIOLETA	Fondo de la casa
AMARILLO Y VERDE	Paredes laterales
ROJO	Techo de la casa
NEGRO	Lobo

Tabla I: significados de las caras del dado

El juego finalizará en el momento en que un jugador logre completar su casa construyendo el techo, teniendo en cuenta que el mismo no se puede poner hasta que estén el resto de las paredes de la casa. En caso de sacar un color que ya se posea, se perderá el siguiente turno. Por otro lado, en caso de obtener el color negro, el lobo soplará y se perderá una de las paredes de la casa.

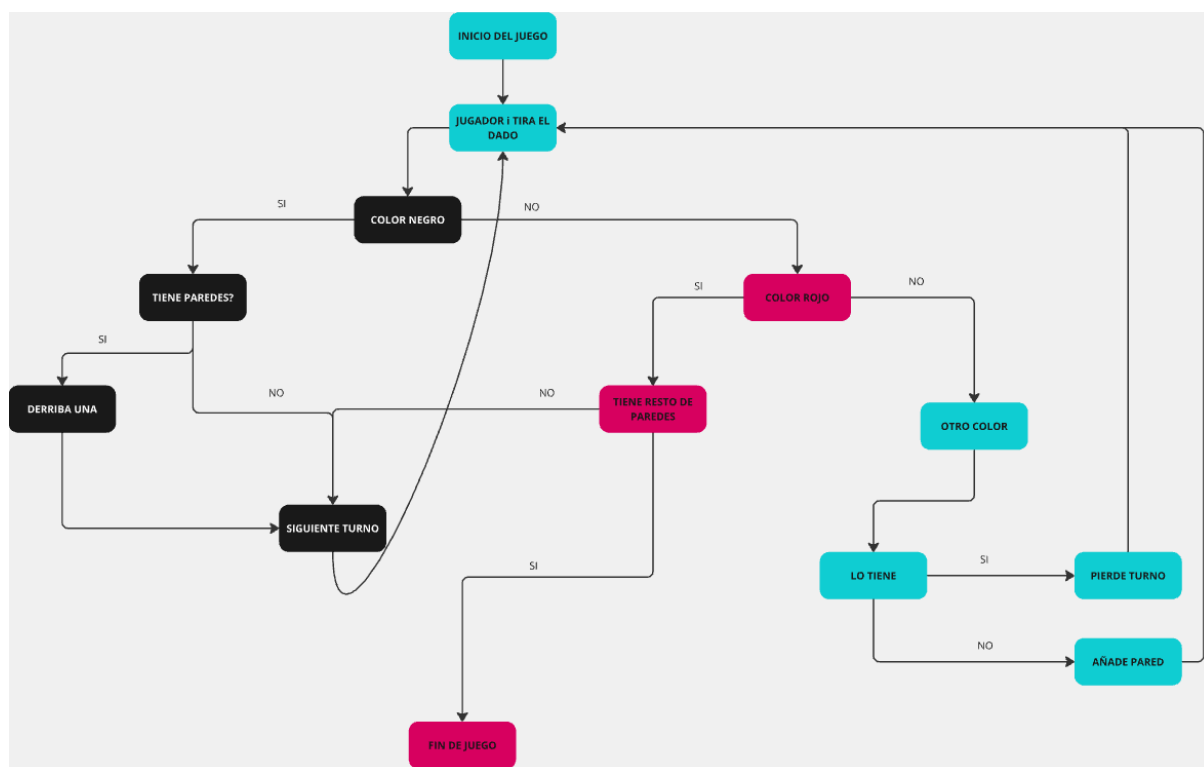


Figura I. Diagrama de flujo de modalidad I (se derrumba una pared)

Además de esta modalidad, se analizó la posibilidad de perder todas las paredes.

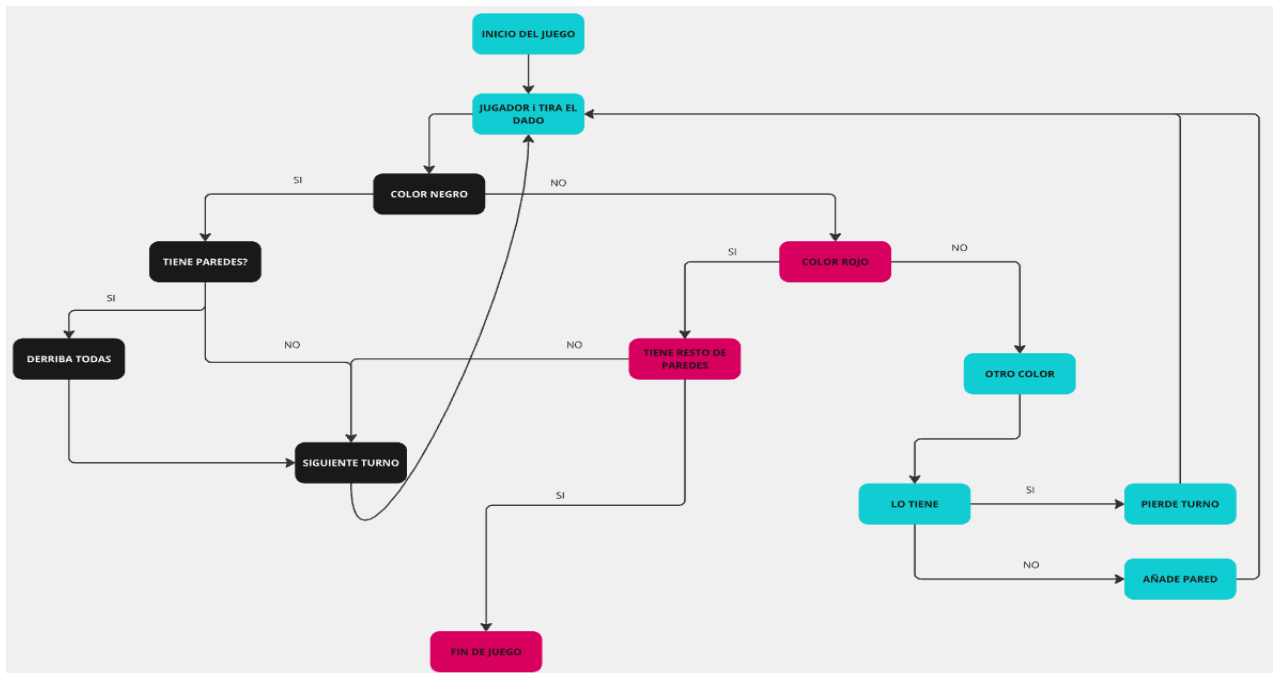


Figura II. Diagrama de flujo de modalidad II (se derrumban todas las paredes)

Por otro lado se planearon otras dos modalidades del mismo juego. En primer lugar, se planteó la posibilidad de robar una pared aleatoria en caso de que se obtenga el color negro al jugador anterior. Si el jugador ya posee la pared que intentó robar, perderá todas sus paredes.

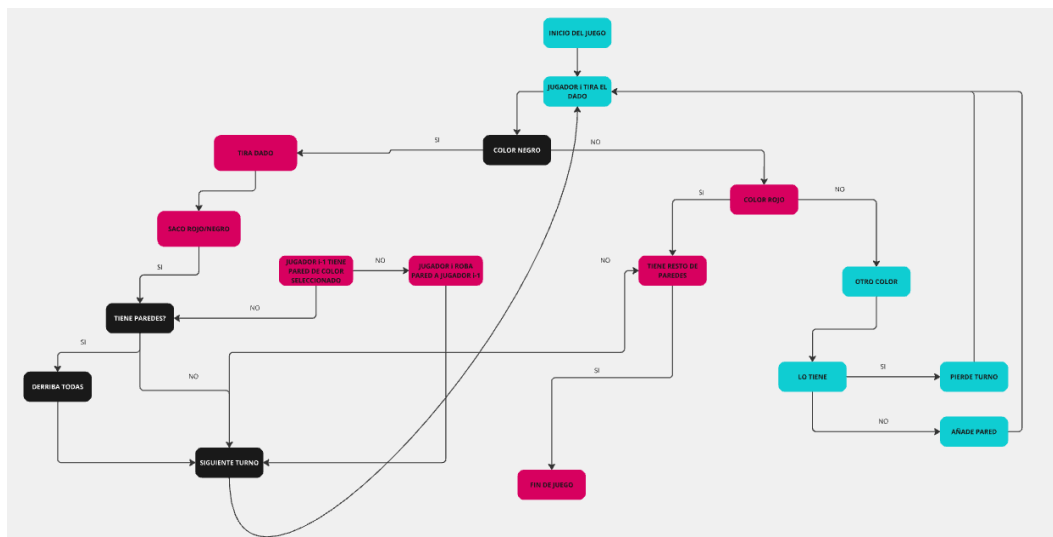


Figura III. Diagrama de flujo de modalidad III (se roba la pared del jugador anterior)

Por último se planteó otra modalidad incluida en la modalidad III, en la que si se obtiene un color que el jugador ya posee, tirará los dados nuevamente, y si en esa oportunidad vuelve a sacar ese mismo color le podrá robar esa pared al jugador anterior, si el jugador anterior no posee esa pared perderá el turno.

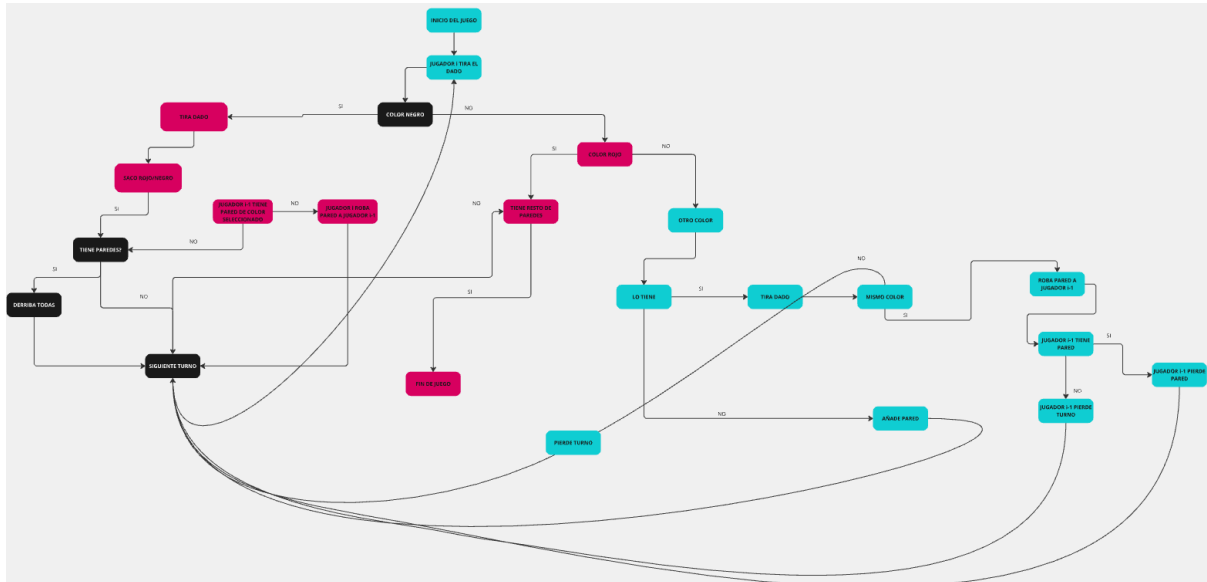


Figura IV. Diagrama de flujo de modalidad IVI (se roba la pared del jugador anterior en vez de perder el turno)

ANÁLISIS DESCRIPTIVO

1. Modalidad 1

Con el fin de poder analizar de forma precisa y realista los diferentes los resultados del juego de “Los Tres chanchitos” se hicieron simulaciones del mismo, analizando rondas jugadas, tiempo, turnos totales y turnos perdidos totales, teniendo en cuenta asimismo la cantidad de jugadores, ya que como se podrá observar, el juego cambia mucho dependiendo de la cantidad de jugadores. Por otro lado, se hizo un supuesto que cada jugador tarda entre 10 y 20 segundos en terminar cada uno de sus turnos.

En esta modalidad, se simuló la pérdida de una sola pared en caso que un jugador obtenga el color negro que representa al lobo. Analizando en un primer lugar con solo 30 muestras, debido al Teorema Central del Límite, se encontró que a medida que aumenta la cantidad de jugadores, el tiempo aumenta pero la cantidad de rondas van disminuyendo. A continuación se observan los resultados obtenidos de las medias y desvíos de cada una de las variables agrupadas por cantidad de jugadores teniendo en cuenta que la muestra para cada una de estas fue de 30.

Cantidad de Jugadores	Rondas		Tiempo		Jugados		Perdidos	
	Media	Desvío	Media	Desvío	Media	Desvío	Media	Desvío
2	36,16	22,3	17,3	11,21	71,8	44,58	18,86	13,62
4	18,46	9,21	17,5	9,09	72,26	36,67	17,5	11,49
10	15,03	5,91	35,86	14,74	145,3	59,10	29,73	16,76
50	7,43	2,29	86,7	29,18	348,33	118,02	48,6	33,87
100	6,4	1,56	146,43	40,89	587,8	162,39	68,43	42,78
500	5,13	0,43	572,5	64,89	2294,83	259,94	195	52,14

Tabla I. tabla de resultados por cantidad de jugadores con 30 muestras

Como se puede observar, si se quisiera estar el menor tiempo posible jugando, se debería jugar entre 2 personas, con un tiempo promedio de 17 minutos, mientras que a medida que aumentan los jugadores, a pesar de que la gran mayoría de las partidas no pasan de las 5 rondas (cantidad mínima de rondas para ganar), el tiempo promedio de la partida sería de 9 horas aproximadamente. Se puede observar que, a menor cantidad de jugadores hay una mayor cantidad de jugadores pero al mismo tiempo menores tiempos de partida.

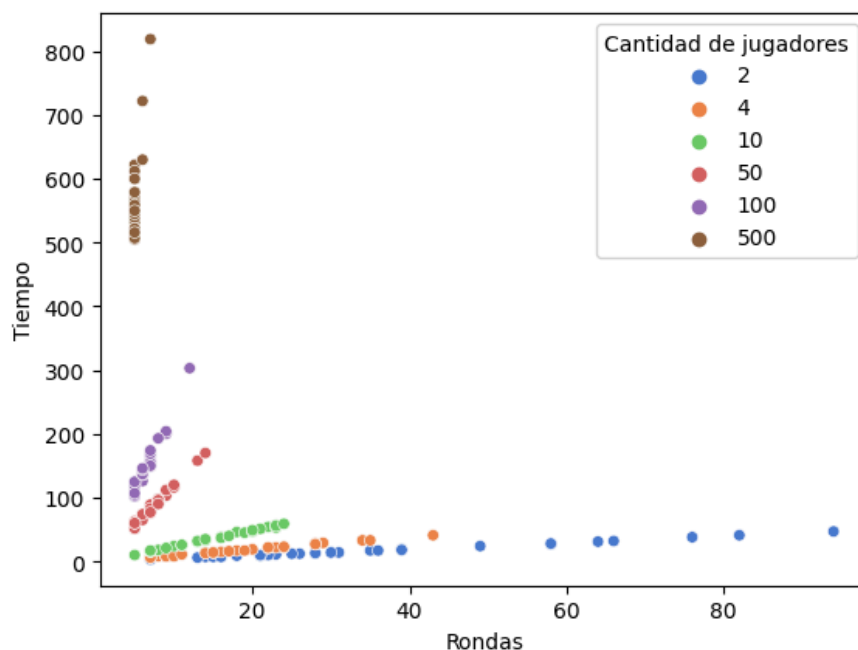


Figura V. scatterplot entre Rondas y Tiempo

A continuación se muestran de forma gráfica las distribuciones de las variables.

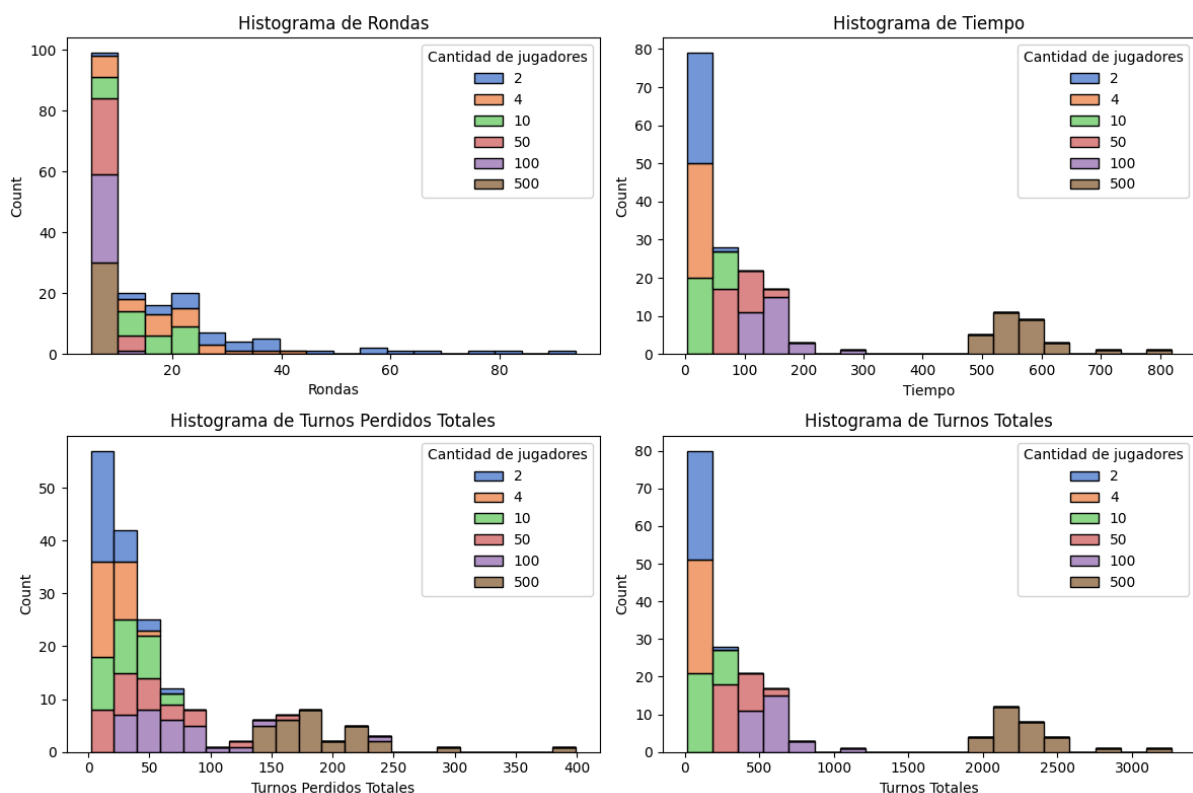


Figura VI. histogramas de modalidad 1 con 30 muestras

Las distribuciones de las cuatro variables presentan distribuciones asimétricas, con colas que se extienden hacia la derecha, indicando la presencia de outliers en algunos juegos. Estas distribuciones sugieren que pueden ser distribuciones Gamma, Log-Normal o Exponencial, debido a la asimetría y las colas largas hacia la derecha. Por otro lado, la cantidad de muestras no es representativa de la realidad, debido a la gran cantidad de variaciones que existen. Se calculó una cantidad de muestras mínimo para cada juego con su respectiva cantidad de jugadores con un intervalo de confianza del 95% con el fin de obtener una muestra más representativa de la realidad.

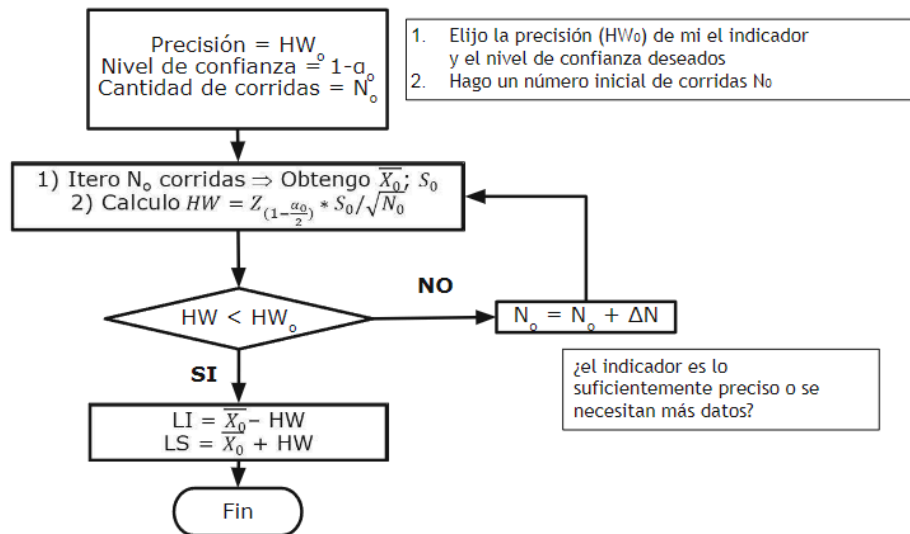
Cantidad de muestras óptimo

Para el cálculo de la cantidad de muestras óptimo se usó la variable Rondas, con un nivel de significancia del 5% y un nivel de precisión, que se refiere a la dispersión del conjunto de valores obtenidos, del 1% en relación a la media.

$$\alpha = 0,05$$

$$HW_0 = \bar{X} * 0,01$$

Se calcularon las medias y los desvíos iniciales para cada juego con su respectiva cantidad de jugadores. Luego de eso se programó un código iterativo en el cual se calcula el error, y mientras este sea mayor que la precisión deseada se aumenta la cantidad de muestras necesarias.



$$HW = Z_{0.975} \times \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

A partir de la cantidad de muestras mínimas, se calcularon los intervalos de confianza con un nivel de significancia del 5% y se obtuvieron los siguientes resultados en base a las Rondas del juego:

Cantidad de Jugadores	Muestra	Media	Límite Inferior	Límite Superior
2	14608	36,16	35,8	36,52
4	9562	18,46	18,28	18,65
10	5938	15,03	14,88	15,18
50	3677	7,43	7,35	7,5
100	2303	6,4	6,33	6,46
500	275	5,13	5,08	5,18

Tabla III. tabla de muestras mínimas e intervalos de confianza

Por otro lado se volvieron a calcular las medias y los desvíos estándar para todas las variables con la cantidad de muestras mínimas por cantidad de jugadores:

Cantidad de Jugadores	Rondas		Tiempo		Jugados		Perdidos	
	Media	Desvío	Media	Desvío	Media	Desvío	Media	Desvío
2	29,73	19,15	14,25	9,59	58,97	38,32	15,5	12,24
4	19,85	10,48	18,98	10,51	77,87	41,95	18,41	13,21
10	13,24	5,14	31,48	12,91	127,86	51,54	25,56	15,56
50	7,92	2,08	92,02	26,17	370,11	104,66	52,46	27,16
100	6,79	1,49	155,97	37,34	625,99	149,45	76,35	36,01
500	5,26	0,55	580,5	77,72	2324,25	311,06	203,65	65,25

Tabla IV. tabla de resultados por cantidad de jugadores

Además de esto se crearon nuevamente los histogramas con el objetivo de analizar las distribuciones de cada una de las variables. Se puede observar que nuevamente, todas las variables siguen una distribución asimétrica, hacia la izquierda con colas largas hacia la derecha, como en las distribuciones Log-Normal, Gamma y Exponencial, distribuciones típicas en simulaciones de eventos aleatorios.

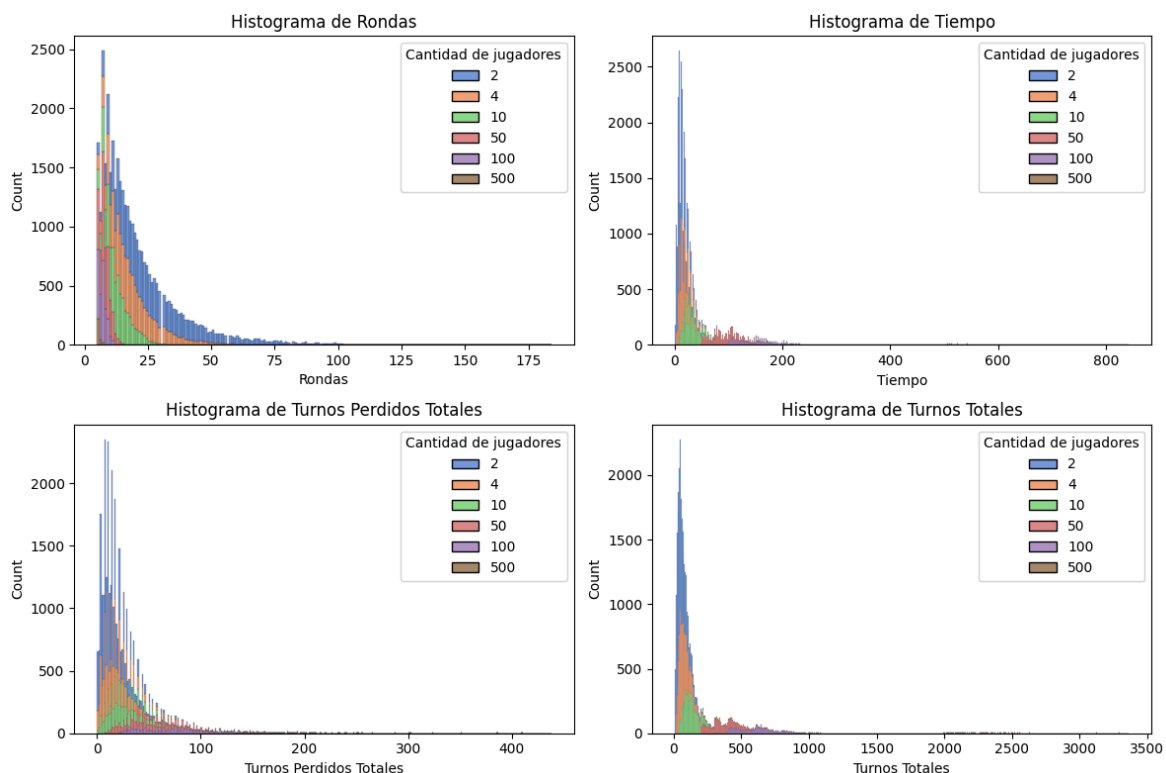


Figura VII. histogramas de modalidad 1 con muestras mínimas

2. Modalidad 2

A continuación se presenta el análisis descriptivo de las simulaciones que se realizaron para la modalidad número dos del juego “Los Tres Chanchitos”. A diferencia de la primera modalidad, esta presenta una diferencia respecto a la acción a realizar una vez que un jugador obtiene el color negro. En esta modalidad, en vez de derribar una pared, el lobo derriba todas las paredes, por lo que en caso de que algún jugador obtenga este color perderá todo el progreso y deberá comenzar nuevamente.

Se realizó un análisis estadístico de todas las variables, sacando la media y el desvío estándar agrupando por cada cantidad de jugadores, con una muestra de 30 nuevamente debido al Teorema Central del Límite. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Cantidad de Jugadores	Rondas		Tiempo		Jugados		Perdidos	
	Media	Desvío	Media	Desvío	Media	Desvío	Media	Desvío
2	41,4	31,28	20,11	15,42	82,53	62,44	17,36	14,58
4	24,1	13,72	23,46	14,06	94,63	54,802	18,13	12,88
10	13,66	6,24	32,46	15,66	131,7	61,93	23,5	15,08
50	7,46	1,99	86,33	25,49	346,7	101,84	43,9	23,47
100	6,63	1,84	153,33	46,07	615,46	184,29	73,13	42,07
500	5,13	0,43	568,5	60,02	2273,86	242,68	184,8	50,91

Tabla V. tabla de resultados por cantidad de jugadores con 30 muestras

Se puede observar a simple vista que esta modalidad afecta mucho más cuando la cantidad de jugadores es chica, ya que se pasó de 19 minutos en promedio a 23 minutos con cuatro jugadores y de 20 minutos a 14 minutos con un solo jugador. Por otro lado también podemos observar las distribuciones, y ver de forma más gráfica las diferencias entre las dos modalidades.

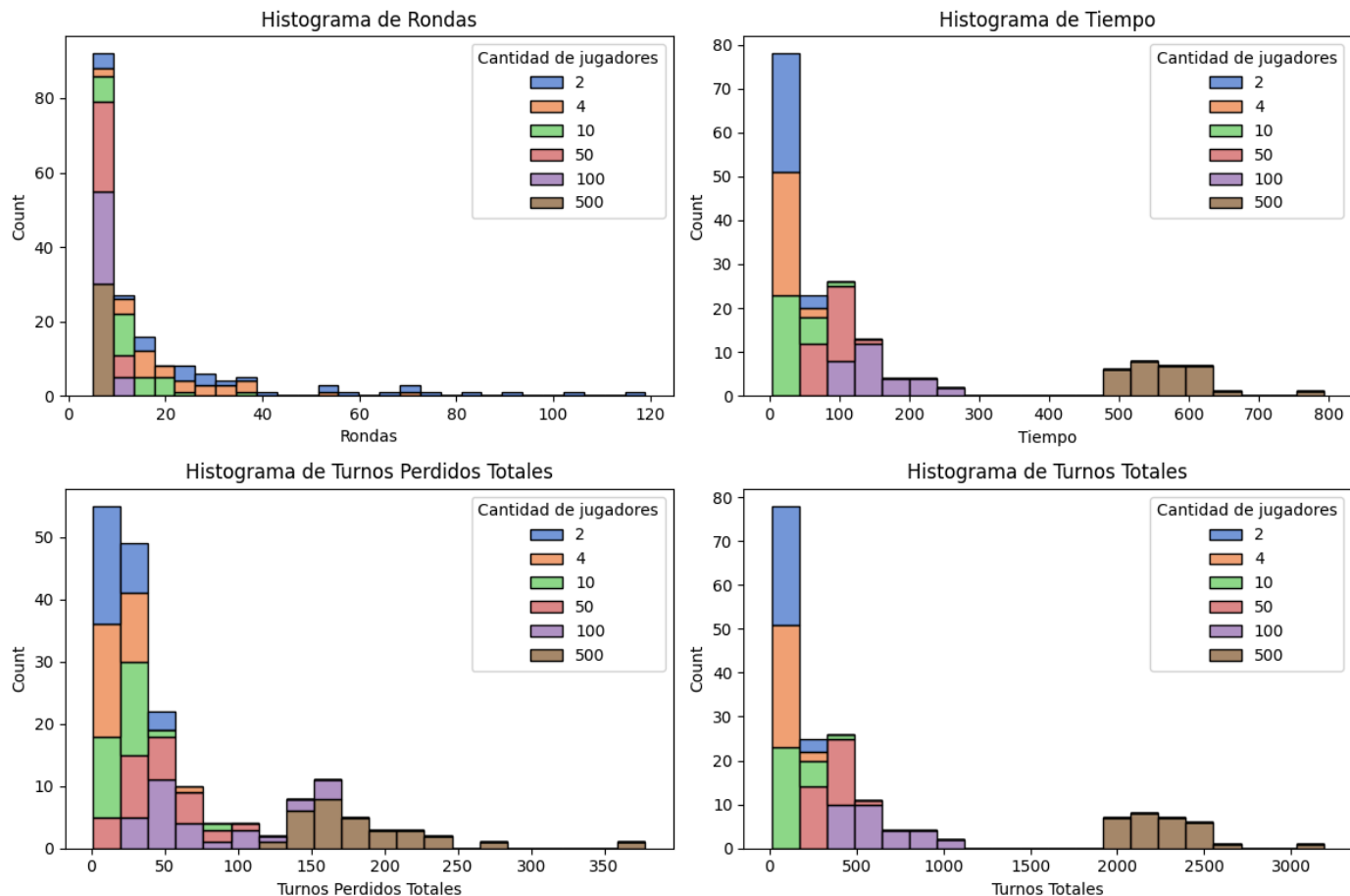


Figura VIII. histogramas de modalidad 2 con 30 muestras

Cantidad de muestras óptimo

Se calcularon nuevamente las cantidades mínimas con una precisión del 1% de la media, y con un nivel de confianza del 95%.

$$\alpha = 0,05$$

$$HW_0 = \bar{X} * 0,01$$

A continuación se muestran las muestras mínimas por Cantidad de jugadores junto a su media inicial de rondas y los límites inferiores y superiores del intervalo de confianza con el nivel de significancia del 5%:

Cantidad de Jugadores	Muestra	Media	Límite Inferior	Límite Superior
2	21940	41,4	40,98	41,81
4	12418	24,1	23,85	24,34
10	8019	13,66	15,53	13,8
50	2744	7,46	7,39	7,54
100	2980	6,63	6,56	6,69
500	275	5,13	5,08	5,18

Tabla VI. tabla de muestras mínimas e intervalos de confianza para modalidad 2

Además de esto se volvieron a graficar las distribuciones de todas las variables con las cantidades mínimas, donde podemos volver a encontrar distribuciones similares a las de la primera modalidad:

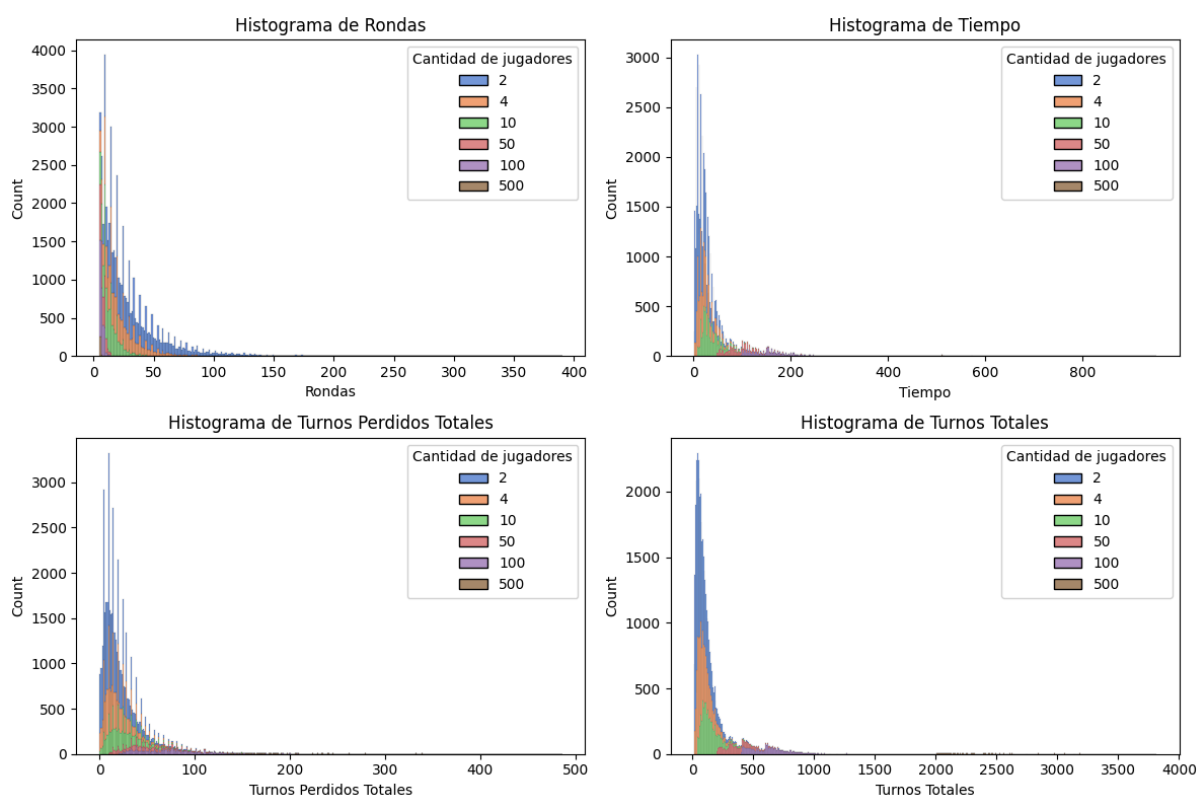


Figura IX. histogramas de modalidad 2 con 30 muestras

Los nuevos histogramas proporcionan una visión más detallada de la distribución de las variables clave del juego, pero esta vez con un mayor rango de datos y más simulaciones, lo que mejora la calidad del análisis.

La mayoría de los juegos terminan en menos de 50 rondas, aunque algunos se extienden hasta 400 rondas. A medida que aumenta el número de jugadores, las colas se hacen más largas, aunque la concentración de juegos con menos rondas sigue siendo fuerte.

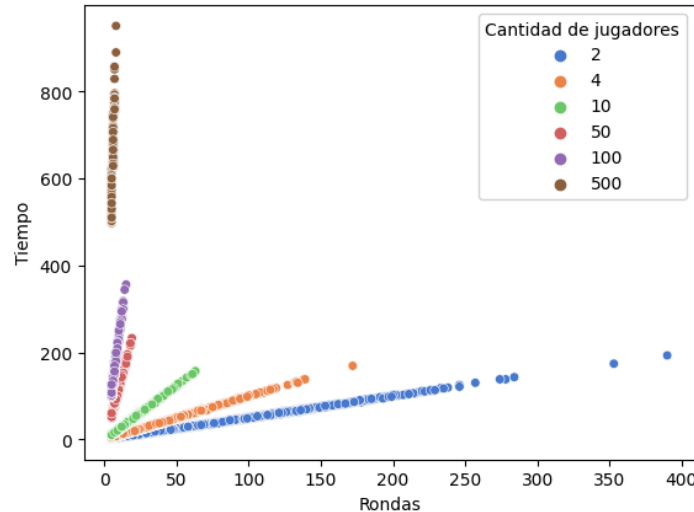


Figura X. scatterplot de Rondas vs Tiempo de modalidad 2 con muestras mínimas

3. Comparación Modalidad 3 y 4

Para el análisis de las modalidades 3 y 4 se estableció cuatro como la cantidad de jugadores fija debido a la recomendación del juego, y además de esto se estableció una cantidad de muestras de 10000 para el resto de los análisis con el objetivo de obtener una mayor precisión y un menor error. A pesar de que esto conlleva un mayor costo computacional, se observó que a medida que se aumenta la cantidad de muestras, también aumenta la robustez de la simulación, ya que disminuye el error y aumenta la precisión del modelaje.

En la modalidad 3, se modificó la acción que se toma una vez que se obtiene el color negro, en esta modalidad en vez de perder una pared o todas, el jugador intentará robar una pared al jugador anterior. El jugador deberá tirar el dado, y le robará la pared del color que salió al jugador anterior si es que la tiene. En caso que el jugador que debe robar saque Rojo o nuevamente Negro, perderá todas sus paredes de forma automática.

Por otro lado, la modalidad 4 implementa las modificaciones de la modalidad 3 y suma una nueva regla. Cuando un jugador obtenga un color que ya posea, lanzará el dado nuevamente, si consigue sacar el mismo color nuevamente se lo podrá robar al jugador anterior, que perderá el turno en caso de no tenerlo. En caso de que no obtenga el mismo color nuevamente, el jugador que lanzó el dado pierde el turno.

Comparación de medias

Se analizan las medias y los desvíos estándar de todas las variables de la modalidad 3 y 4 con el objetivo de compararlas de forma rápida. A continuación se presentan los resultados en forma de tabla:

Modalidad	Rondas		Tiempo		Jugados		Perdidos	
	Media	Desvío	Media	Desvío	Media	Desvío	Media	Desvío
3	22,5	14,4	37,06	24,04	87,78	56,94	19,35	14,71
4	24,09	16,05	39,62	26,83	92,95	62,86	18,8	14,85

Tabla VII. Comparación de modalidades

A simple vista se observa que la modalidad 4 conlleva un mayor tiempo y una mayor cantidad de rondas, aunque en esta modalidad se pierdan menos turnos que en la modalidad 3. La modalidad 4 es, dentro de las analizadas, la que mayor rondas necesita para terminar de jugarse, mientras que la modalidad 1 es la que menos rondas necesita.

A pesar de esto se hizo una comparación de medias entre las dos modalidades para cada una de las variables, con el objetivo de analizar si las medias son diferentes de forma significativa. Esta comparación de medias se hizo con un alfa del 1%, es decir con una confianza del 99%.

$$H_{i_0} = \text{Las medias de la variable}_i \text{ son iguales}$$

$$H_{i_1} = \text{Las medias de la variable}_i \text{ difieren}$$

Para realizar este tipo de prueba, es esencial que los dos grupos sean independientes y que la variable dependiente sea ordinal o continua. Sin embargo, si se desea comparar las medias entre los grupos, es importante que las distribuciones de las variables en ambos grupos sean de formas similares. Con el objetivo de probar la independencia entre las variables de las dos modalidades se hizo una prueba de correlación de Pearson para verificar la independencia. Los resultados se observan a continuación:

	Rondas	Tiempo	Jugados	Perdidos
Coeficiente Correlación	0,008	0,007	0,008	0,088
p-valor	0,40	0,48	0,40	0,37

Tabla VIII. Tabla de correlación

Debido a que los coeficientes dan cercanos a 0 y los p-valores son mayores a 0,01, se puede afirmar con un nivel de confianza del 99% que las variables entre las dos modalidades son independientes entre sí.

Por lo tanto, debido a que las variables son independientes se continúa con el análisis de la comparación de medias. Los resultados de la prueba mostraron valores cercanos a cero tanto para la cantidad de rondas que se jugaron como para el resto de las variables. Esto sugiere que, con un nivel de significancia de 0,01, hay una diferencia significativa entre las medias de las dos modalidades en las variables estudiadas.

Distribuciones

Además del análisis de las distintas variables y los respectivos tests entre las diferentes variables, se hizo un análisis de las distribuciones de cada variable. A continuación se presentan los gráficos de las distribuciones de las variables para la modalidad 3 y 4:

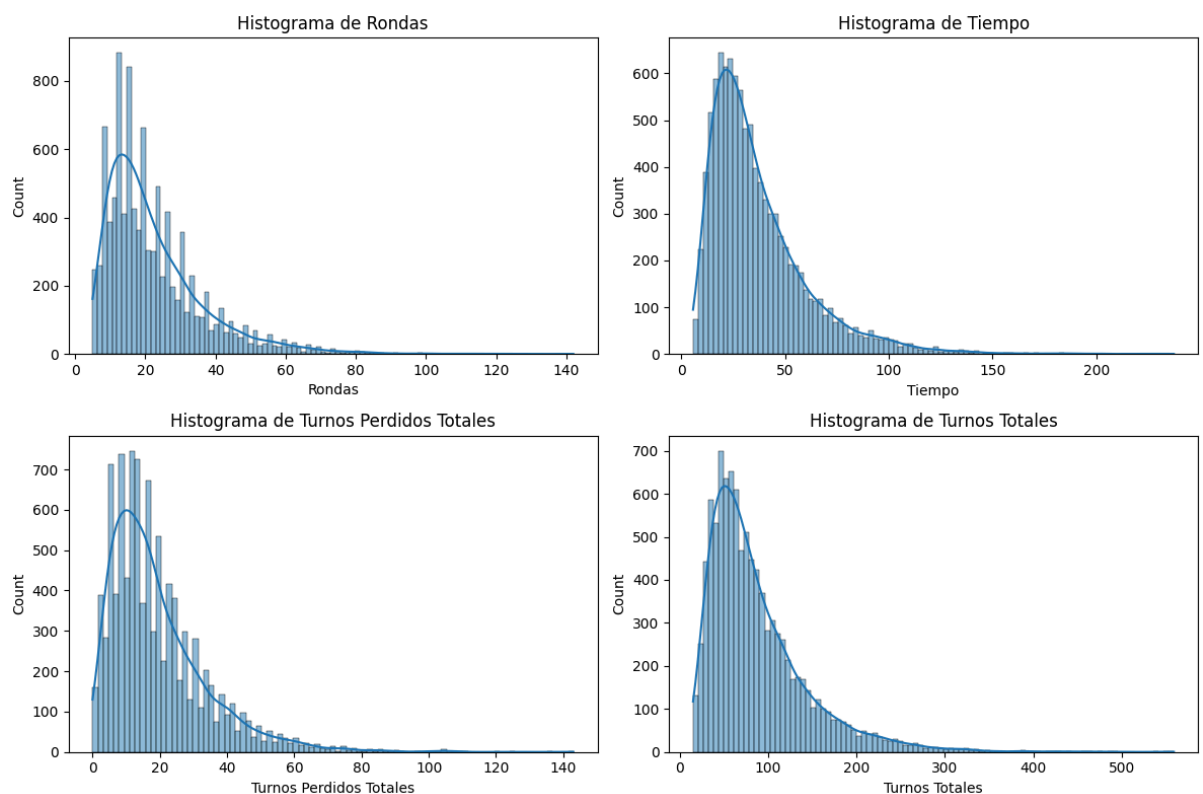


Figura XI. histogramas de modalidad 3 con 10000 muestras

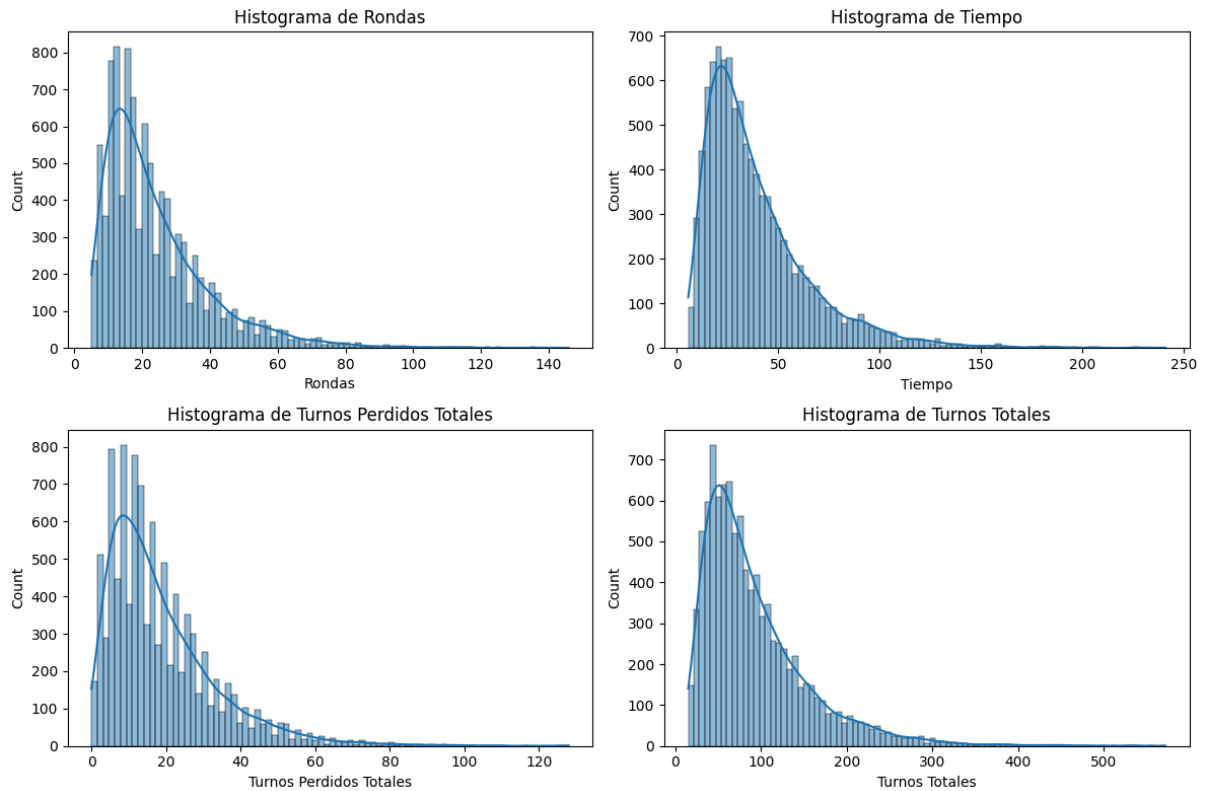


Figura XII. histogramas de modalidad 4 con 10000 muestras

Ambas modalidades presentan distribuciones similares, exhibiendo diferencias sutiles en los picos de la variable Rondas y los turnos perdidos totales, donde en la cual la modalidad 3 presentaba mayores pérdidas respecto a la modalidad 4. Por otro lado, podemos observar que siguen las mismas distribuciones que las modalidades 1 y 2, siguiendo la línea de las distribuciones Log-Normal, Gamma o Exponencial, comunes en eventos aleatorios. Esto se debe principalmente a que se los eventos aleatorios se van acumulando hacia a la izquierda, y van formando una cola hacia la derecha a medida que se sigan haciendo debido a que es poco probable que se mantengan siempre valores pequeños. Es por eso también que cuando poseemos pocas muestras, estas distribuciones no se vean tan claramente como se ven con muchas muestras.

A pesar de esto, se probó el ajuste de estos datos a una distribución normal mediante el test de Kolmogorov Smirnov (K-S), que consiste en probar los datos contra la distribución teórica que se desee, en este caso la distribución normal. Se plantearon las siguientes hipótesis.

H_{i_0} = la muestra de la variable i presenta una distribución normal

H_1 = la muestra de la variable i no presenta una distribución normal

Los resultados de la prueba de bondad de ajuste con un alfa de 0,001 otorgaron que se rechaza la hipótesis nula, ya que los p-valores fueron menores que el alfa, por lo que hay evidencia estadística para afirmar que ninguna de las variables posee una distribución normal.

Del mismo modo se hicieron estos tests usando el mismo nivel de significancia para las siguientes distribuciones: Exponencial, Gamma y Log-Normal. Se llegó a la conclusión que las variables Tiempo y Turnos totales son las únicas variables, en ambas modalidades, cuyo p-valor es menor al nivel de significancia de 0,001; mientras que el resto de las variables presentan p-valores de aproximación cero. A continuación se presentan los p-valores para las variables.

**se aproximaron los números a 0 si eran menores a $e-05$*

	Exponencial		Gamma		Log Normal	
Modalidad	III	IV	III	IV	III	IV
Variables						
Rondas	0	0	0	0	0	0
Tiempo	0	0	0	0	0,39	0,08
Jugados	0	0	0	0	0,13	0,018
Perdidos	0	0	0	0	0	0

Tabla IX. Tabla de p-valores

Se puede concluir que solo las variables Tiempo y Turnos jugados tienen evidencia estadísticamente significativa para afirmar que siguen una distribución Log Normal, ya que son las únicas variables en las que su p-valor no es mayor al alfa para rechazar la hipótesis nula.

CONCLUSIÓN

El análisis estadístico del juego de los 3 chanchitos a través de diversas simulaciones ha permitido entender las diferencias y particularidades entre las modalidades evaluadas. Las simulaciones realizadas mediante el método de Monte Carlo han demostrado ser una herramienta eficaz para capturar la variabilidad de cada modalidad del juego, proporcionando un marco robusto para comparar sus resultados. Además, durante el desarrollo del informe se logró demostrar que a medida que aumentan la cantidad de muestras, la precisión y el error aumentan y disminuyen respectivamente. A pesar de las ventajas se debe tener en cuenta el costo computacional de aumentar las muestras, ya que la simulación, realizada en Python, comenzó a tomar más tiempo con las últimas dos modalidades con 10.000 muestras.

Se puede concluir que a medida que se aumenten la cantidad de jugadores, la cantidad de rondas comienza a disminuir, en todas las modalidades, y es poco probable pasar de las 5 rondas (mínimas para ganar) una vez que se tienen 500 jugadores o más. A pesar de eso, cabe recalcar que a medida que aumenta la cantidad de jugadores aumenta el tiempo general del juego, llegando a sobrepasar las horas. El menor tiempo se obtuvo con la modalidad 1, donde solo se tira una pared en caso de obtener negro, con un tiempo promedio de 14 minutos. Por otro lado, también se realizó un test de comparación de medias entre las variables de las modalidades 3 y 4, donde se obtuvo que existe una diferencia significativa entre las medias de ambas modalidades.

Por otro lado, todas las modalidades siguen distribuciones similares a las distribuciones exponenciales, gamma o log-normal, algo común en las pruebas con eventos aleatorios debido a la acumulación y a la formación de una cola derecha debido a la improbabilidad de no obtener números grandes a medida que se sigue simulando. Se realizó el test de Kolmogorov Smirnov, con el objetivo de probar las distribuciones empíricas frente a las teóricas, y se puede afirmar con evidencia estadística que el tiempo jugado y los turnos siguen distribuciones log normales en las modalidades 3 y 4.

BIBLIOGRAFÍA

- *Douglas C. Montgomery, George C. Runger (2011). Arizona State University. Applied Statistics and Probability for Engineers. Fifth Edition.*
- *Averill M. Law (1982). Simulation Modeling and Analysis.*
- *Chenggang Y. and McKay A. (2018). Introduction to Modeling and Simulation Techniques*
- *Lastra, Gregorio, Vilaboa, Ivan Gonzalo, Ciapanna, Pablo (2024). IO2-24C2-Clase 02-Montecarlo*
- *<https://campus.itba.edu.ar/ultra/courses/_30804_1/outline/file/_785966_1>*