Hochschule
Ludwigshafen am Rhein

Wirtschaftsmathematik

Finanzmathematik

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Finanzmathematik

- Zinsrechnung
  – Einfache Verzinsung & Zinseszinsrechnung
  – Aufzinsen und Abzinsen: Endwert & Barwert
  – Unterjährige Verzinsung, stetige Verzinsung & effektiver Jahreszins

- Rentenrechnung
  – Rentenendwert und Rentenbarwert

- Tilgungsrechnung
  – Gesamtfällige Tilgung, Ratentilgung & Annuitätentilgung

- Investitionsrechnung
  – Kapitalwert

Geldanlage und Kredit

Kreditvertrag

- Wenn Sie sich bei einer Bank Geld leihen, schließen Sie einen Kreditvertrag ab, der eine bestimmte Zeit dauert. Dies ist die <u>Laufzeit</u>.
- Am Ende müssen Sie nicht nur das geliehene Geld zurückzahlen, sondern auch einen zusätzlichen Betrag. Das sind die <u>Zinsen</u>.
- Der Zins ist der Preis für das geliehene Kapital. Er ergibt sich am Kapitalmarkt durch Angebot und Nachfrage.

Sparvertrag

- Ein Sparvertrag ist die Umkehrung eines Kreditvertrags.
- Wenn Sie Ihr Geld bei einer Bank anlegen, dann leihen Sie der Bank Geld und <u>erhalten dafür Zinsen</u>.
- Je mehr Geld Sie anlegen und je länger Sie es anlegen, um so mehr Zinsen erhalten Sie.

Geldanlage und Kredit

Laufzeit

- Wenn eine Geldanlage oder ein Kredit längere Zeit läuft, werden die Zinsen nicht auf einmal bezahlt, sondern z.B. jährlich oder monatlich.
- Die Dauer zwischen zwei Zinszahlungen ist die Zinsperiode oder kürzer Periode.

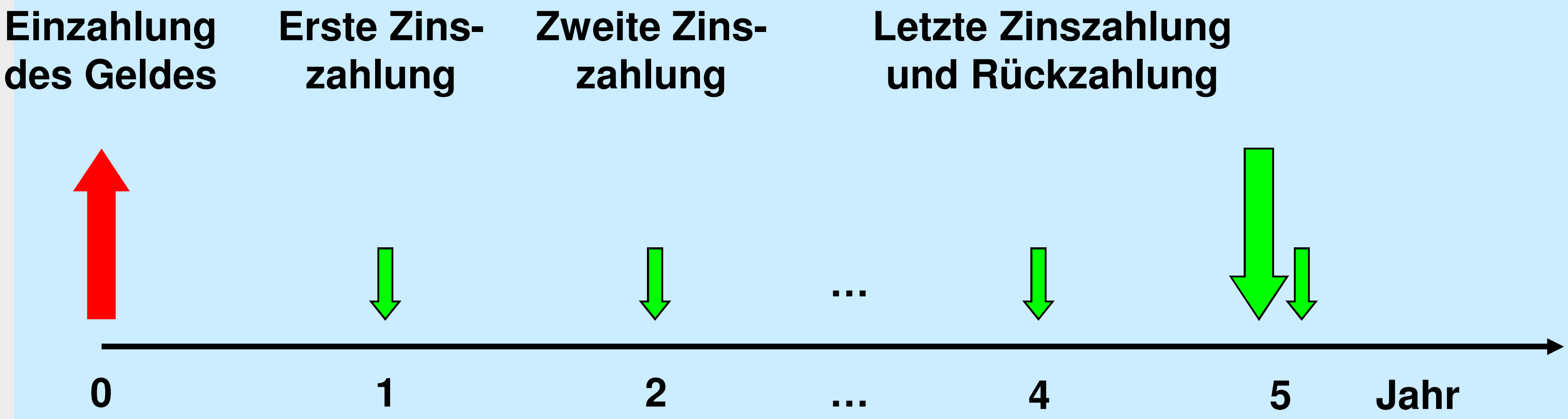
Zinszahlung

- Immer, wenn Zahlungen zu unterschiedlichen Terminen anfallen, spielt der Zins eine Rolle. Es ist deshalb nicht möglich Zahlungen zu unterschiedlichen Terminen zu addieren/subtrahieren, sondern sie müssen auf einen einheitlichen Zeitpunkt umgerechnet werden.
- Wenn die Zinsen immer am Anfang einer Zinsperiode bezahlt werden, nennt man dies vorschüssig.
- Wenn die Zinsen immer am Ende einer Zinsperiode bezahlt werden, nennt man dies nachschüssig.

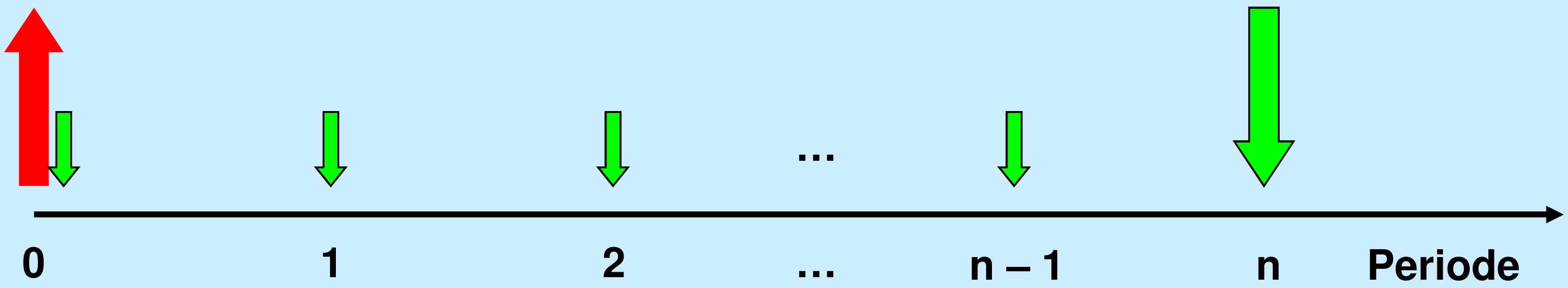
Geldanlage und Kredit

Beispiel

- Nachschüssige Geldanlage mit einer Laufzeit von 5 Jahren



- Vorschüssige Geldanlage mit einer Laufzeit von n Perioden



Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Notationen Zinsrechnung

- p: Zinssatz pro Periode

  (Mathematisch sind z.B. $5\% = \frac{5}{100} = 0{,}05$)
- q: Zinsfaktor, d.h. q=1+p
- n: Laufzeit in Perioden, i.d.R. in Jahren
- K_0: Anfangskapital (Kapital zu Beginn der Laufzeit)
- K_n: Endkapital (Kapital nach der n-ten Periode bzw. am Ende der Laufzeit)

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Einfache Verzinsung

- Einfache Verzinsung:

Das Anfangskapital wird verzinst, die aufgelaufenen Zinsen nicht.

(Dies entspricht z.B. dem Fall, dass am Ende eines Jahres immer der Zinsbetrag abgehoben wird.)

Beispiel:

Ein Sparer möchte bei einer Bank EUR 10.000 anlegen, die Bank bietet ihm 4% Zinsen.

a.) Wie hoch ist sein Kapital am Ende des 1. Jahres?

$$K_0 = 10.000\ EUR; \quad p = 4\%; \quad q = 1 + 0{,}04 = 1{,}04$$

$$K_1 = 10.000 \cdot 1{,}04 = \mathbf{10.400\ EUR}$$

b.) Wie hoch ist sein Kapital am Ende des 5. Jahres, wenn von einfacher Verzinsung ausgegangen wird?

$$K_5 = 10.000 + 400 \cdot 5 = \mathbf{12.000\ EUR}$$

oder: $K_5 = 10.000 \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}04) = 10.000 \cdot 1{,}2 = \mathbf{12.000\ EUR}$

Für einfache Verzinsung gilt:

$$\boxed{\boldsymbol{K_n = K_0 \cdot (1 + n \cdot p)}}$$

Einfache Verzinsung

- Bisher wurden immer ganze Perioden betrachtet.
- Was ist in diesem Fall zu tun:
  - Ein Sparer eröffnet am 15.05. ein Sparbuch und zahlt 1.000 EUR ein.
  - Die Verzinsung beträgt 1 % p.a. (pro Jahr).
  - Wie hoch ist die Zinsgutschrift am 31.12.?

Lösung:

- Entweder tagesgenaue Berechnung oder
- nach der deutschen Zinsmethode: Dabei hat ein Jahr 360 Tage und jeder Monat 30 Tage

(Anmerkung: Es gibt noch weitere Methoden.)

Mit deutscher Zinsmethode:

Anzahl Tage: 15+7*30 = 225

=> $\text{Zinsen} = K \cdot p \cdot \frac{Tage}{360} = 1000 \cdot 0{,}01 \cdot \frac{225}{360} = \mathbf{6{,}25\ EUR}$

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Einfache Verzinsung

- Wie hoch ist die Zinsgutschrift für folgendes Konto, wenn der Zinssatz 1% p.a. beträgt?

Vorgang	Valuta	Soll	Haben	Saldo	Tage
Vortrag	31.12.		1.000€	1.000€	15
Gutschrift	15.1.		4.000€	5.000€	15
Abbuchung	31.1	2.000€		3.000€	45
Gutschrift	15.3.		1.000€	4.000€	15
Abschluss	31.3.			4.000€	
Summen					90

Einfache Verzinsung

- Wie hoch ist die Zinsgutschrift für folgendes Konto, wenn der Zinssatz 1% p.a. beträgt?
- Diese Aufgabe ist auf verschiedene Arten lösbar. Einfach ist die Berechnung von <u>Zinszahlen</u>. Diese ergeben sich aus dem jeweiligen Saldo mal der Anzahl der zu verzinsenden Tage:

Vorgang	Valuta	Soll	Haben	Saldo	Tage	Zinszahl
Vortrag	31.12.		1.000€	1.000€	15	15.000
Gutschrift	15.1.		4.000€	5.000€	15	75.000
Abbuchung	31.1	2.000€		3.000€	45	135.000
Gutschrift	15.3.		1.000€	4.000€	15	60.000
Abschluss	31.3.			4.000€		
Summen					90	285.000

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Einfache Verzinsung

Vorgang	Valuta	Soll	Haben	Saldo	Tage	Zinszahl
Vortrag	31.12.		1.000€	1.000€	15	15.000
Gutschrift	15.1.		4.000€	5.000€	15	75.000
Abbuchung	31.1	2.000€		3.000€	45	135.000
Gutschrift	15.3.		1.000€	4.000€	15	60.000
Abschluss	31.3.			4.000€		
Summen					90	285.000

- <u>Berechnung des Gesamtzins:</u>

$$\text{Zinsen} = 285.000 * \frac{0{,}01}{360} \approx \boldsymbol{7,92\ EUR}$$

Andere Möglichkeit:

$$\text{Zinsen} = 0{,}01 * \left(1000 * \frac{15}{360} + 5000 * \frac{15}{360} + 3000 * \frac{45}{360} + 4000 * \frac{15}{360}\right)$$

$$= \frac{0{,}01}{360} * (1000 * 15 + 5000 * 15 + 3000 * 45 + 4000 * 15)$$

$$= \boldsymbol{\frac{0,01}{360} * 285.000}$$

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Einfache Verzinsung - Skonto

- Ein Lieferant bietet seinem Kunden folgende Zahlungsbedingungen:
  - 2% Skonto bei Zahlung innerhalb von 7 Tagen
  - Netto bei Zahlung innerhalb von 21 Tagen
- Der Rechnungsbetrag lautet: 1.000 EUR
- Sollte der Kunde ggf. kurzfristig sein Konto überziehen, um das Skonto zu nutzen?
- Lösung:
  - Entweder der Kunde bezahlt 1.000 EUR in 21 Tagen oder 980 EUR in 7 Tagen.
  - D.h., der Lieferant bietet einen Kredit über 980 EUR, Laufzeit: 14 Tage, Zins: 20 EUR (-> **Lieferantenkredit!**)
  - $\text{Zinsen} = 980 * \frac{14}{360} * p = 20$
  - $<=> p = \frac{20}{980} * \frac{360}{14} \approx 52{,}48\%$
  - A.: Der Kunde sollte sein Skonto nutzen, selbst wenn er sein Konto überziehen muss!

Zinseszinsrechnung

- Wenn ein Betrag für mehrere Jahre angelegt wird, wird meistens das Prinzip des Zinseszins verwendet.
- Die Zinsen, die im ersten Jahr anfallen, gehören im zweiten Jahr bereits zum Anlagebetrag und werden wieder mitverzinst.
- Allgemein: Alle angefallenen Zinsen werden in den Folgejahren wieder mitverzinst.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Zinseszinsrechnung

Beispiel:

Ein Sparer möchte bei einer Bank EUR 10.000 für 5 Jahre anlegen, die Bank bietet ihm 4% Zinsen. Wie hoch ist sein Kapital nach 5 Jahren?

Lösung:

$$K_0 = 10.000; \qquad q = 1{,}04$$

K_1 =10.000*1,04=10.400 EUR

$K_2 = 10.400 * 1{,}04 = 10.816\ EUR$

$K_3 = 10.816 * 1{,}04 = 11.248{,}64\ EUR$

$K_4 = 11.248{,}64 * 1{,}04 \approx 11.698{,}59\ EUR$

$K_5 = 11.698{,}59 * 1{,}04 \approx \mathbf{12.166{,}53\ EUR}$

Oder:

$K_5 = 10.000 * 1{,}04 * 1{,}04 * 1{,}04 * 1{,}04 * 1{,}04 = 10.000 * 1{,}04^5$

Es gilt damit folgende allgemeine Formel:

$$\boxed{\boldsymbol{K_n = K_0 \cdot q^n} \ \ \textbf{mit} \ \ \boldsymbol{q = 1 + p}}$$

Aufzinsen

- Der Wert eines Geldbetrags hängt von der Zeit ab:
- Es ist besser, heute 10.000 EUR zu haben, als erst in 5 Jahren 10.000 EUR zu haben, denn aus den 10.000 EUR von heute können mit Zinsen (und Zinseszinsen) in 5 Jahren 12.166,53 EUR werden.
- Durch die Formel $\boldsymbol{K_n = K_0 \cdot q^n}$ konnte berechnet werden, welchen Wert die EUR 10.000 von heute in 5 Jahren besitzen werden, nämlich den **Endwert** EUR 12.166,53.
- Diese Rechnung nennt man aufzinsen: Man sagt, wir haben den Betrag K_0 aufgezinst, und erhalten dadurch den Betrag K_n.
- $\boxed{\boldsymbol{q^n = (1+p)^n}}$ nennt man Aufzinsfaktor

Abzinsen

- Die Berechnung des Aufzinsens lässt sich einfach aber wirkungsvoll umkehren.

Fragestellung

- Wieviel Geld muss ich heute anlegen, um in 5 Jahren 10.000 EUR zu bekommen? bzw.
- Welchen Wert hat ein Betrag, der in 5 Jahren 10.000 EUR wert sein soll, bereits heute?
- Anders gesagt: Wie groß ist der heutige Wert oder Anfangswert oder **Barwert** K_0 (wenn wir n, K_n und p kennen)?

Beispiel:

- **Wieviel Geld muss ich bei 4% Zinsen heute anlegen, um in 5 Jahren ein Kapital von K_5 = EUR 10.000 zu erhalten?**

Abzinsen

Lösungsansatz

- Wir lösen die Formel $\boldsymbol{K_n = K_0 \cdot q^n}$ nach K_0 auf und erhalten für den Barwert folgende Formel bei der Zinseszinsrechnung:

$$\boxed{\boldsymbol{K_0 = \frac{K_n}{q^n}}}$$

Anwendung auf das Beispiel:

- Gesucht ist der Barwert der EUR 10.000 bei 4% Zinsen über 5 Jahre
- Anwendung der Formel:

$$K_0 = {}^{K_n}\!/_{q^n} = {}^{10.000}\!/_{1{,}04^5} = {}^{10.000}\!/_{1{,}216653} = 8.219{,}27$$

- Ergebnis: Wenn ich heute EUR 8.219,27 anlege, erhalte ich bei 4% Zinsen in 5 Jahren EUR 10.000

Abzinsen

Anmerkungen

- Wir erhalten den Barwert durch abzinsen.
- $\boxed{\dfrac{1}{q^n} = \dfrac{1}{(1+p)^n}}$ nennt man Abzinsfaktor.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Abzinsen

- Barwertberechnung bei mehreren Zahlungen:

Jahr	1	2	3	4	Summe
Zahlung	1000 €	1000 €	2000 €	4000 €	8000€

- Es wird ein Zinssatz von 10% unterstellt

$$B = 1.000€ \frac{1}{1{,}1^1} + 1.000€ \frac{1}{1{,}1^2} + 2.000€ \frac{1}{1{,}1^3} + 4.000€ \frac{1}{1{,}1^4} =$$

1 Jahr abzinsen

2 Jahre abzinsen

3 Jahre abzinsen

4 Jahre abzinsen

$$= 909{,}09€ + 826{,}45€ + 1.502{,}63€ + 2.732{,}05€$$

$$= 5.970{,}22€$$

Weitere Fragestellungen

- Die Aufzinsformel $K_n = K_0 \cdot q^n$ lässt sich auch noch nach n oder q auflösen. Dadurch lassen sich zwei weitere Fragestellungen lösen.

Beispiel

a) Ich besitze heute bereits 10.000 EUR und möchte in 5 Jahren 12.000 EUR haben. Welchen Zinssatz muss ich bei meiner Bank aushandeln?

b) Ich besitze heute bereits 10.000 EUR und möchte irgendwann 12.000 EUR haben. Der Zinssatz beträgt 3%. Wie lange muss ich warten?

Anmerkung

- In Beispiel a) sind K_0, K_n und n bekannt, gesucht ist q.
- In Beispiel b) sind K_0, K_n und q bekannt, gesucht ist n.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Weitere Fragestellungen

Allgemeine Rechnungen

- Aus der Aufzinsformel $K_n = K_0 \cdot q^n$ erhalten wir $q^n = K_n / K_0$
- Dies können wir nach q auflösen mit $q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$
- oder nach n auflösen mit

$$n = \frac{\ln K_n / K_0}{\ln q} = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln q}$$

Bei Zinseszinsrechnung erhalten wir Zinssatz oder Laufzeit durch

$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$ und $n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln q}$

Weitere Fragestellungen

Lösung des Beispiels:

a) Mit K_0 = 10.000 EUR, n = 5 und K_5 = 12.000 EUR ist

$$q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}} = \sqrt[5]{\frac{12.000}{10.000}} = \sqrt[5]{1,2} = 1,037$$

Ich brauche also einen Zinssatz von mindestens 3,7%

b) Mit K_0 = 10.000 EUR, K_n = 12.000 EUR und q = 1,03 ist

$$n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln q} = \frac{\ln 12000 - \ln 10000}{\ln 1,03} = \frac{0,18232}{0,029559} = 6,168$$

0,168*12=2,016

Es dauert also etwa 6 Jahre und 2 Monate.

Zinseszins

Weiteres Beispiel

- Eine frischgebackene Großmutter will zur Geburt Ihres ersten Enkels Geld anlegen, damit dieser nach 20 Jahren studieren kann.
- **Erster** Fall: Sie hat 50.000 EUR, die Bank bietet 3 Prozent Zinsen, wieviel Geld steht nach 20 Jahren zur Verfügung?
- Lösung: Endwert-Berechnung mit $K_n = K_0 \cdot q^n$
- Konkret: $K_{20} = 50.000 \cdot 1{,}03^{20} = 50.000 \cdot 1{,}80611 = 90.305{,}56$
- **Zweiter** Fall: Sie möchte aber, dass dem Enkel am Ende 100.000 EUR zur Verfügung stehen. Wieviel Geld müsste sie dafür anlegen?
- Lösung: Barwert-Berechnung mit $K_0 = {}^{K_n}\!/_{q^n}$
- Konkret: $K_0 = {}^{100.000}\!/_{1{,}03^{20}} = {}^{100.000}\!/_{1{,}80611} = 55367{,}58$

Zinseszins

- **Dritter** Fall: Sie hat aber nur 50.000 EUR und beginnt mit der Bank zu verhandeln. Wie hoch müssten die Zinsen sein, damit aus den 50.000 EUR nach 20 Jahren tatsächlich 100.000 EUR werden?
- Lösung: Zinsfaktor-Berechnung mit $q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$
- Konkret: $q = \sqrt[20]{\frac{100.000}{50.000}} = \sqrt[20]{2} = 1{,}035$
- Sie müsste also 3,5% Zinsen aushandeln.
- **Vierter** Fall: Die Bank bietet aber nur 3% Zinsen. Da muss der Enkel eben ein wenig später studieren. Wie lange dauert es, bis aus den 50.000 EUR bei 3% Zinsen 100.000 EUR werden?
- Lösung: Laufzeit-Berechnung mit $n = \frac{\ln K_n - \ln K_0}{\ln q}$
- Konkret: $n = \frac{\ln 100.000 - \ln 50.000}{\ln 1{,}03} = \frac{11{,}5129 - 10{,}8198}{0{,}029559} = 23{,}45$ Jahre

Anteilige Verzinsung

Unsere Großmutter…

- … ärgert sich über die Bank und beschließt, ihr Geld, das sie für 3% Zinsen angelegt hatte, nach einem halben Jahr wieder abzuheben.

Anteilige Verzinsung

- Ein Zinssatz wird auf gesamte Zinsperioden angegeben, meistens als Jahreszins, z.B. 3%.
- Wenn die Laufzeit der Geldanlage keine ganze Zinsperiode dauert, wird der Betrag nur anteilig verzinst.
- Z.B.
  - Bei 3% in einem halben Jahr z.B. nur zu 3% / 2 = 1,5%
  - Bei 3% in einem Vierteljahr z.B. nur zu 3% / 4 = 0,75%
  - Bei 3% in einem Monat z.B. nur zu 3% / 12 = 0,25%
  - Bei 3% in einem Tag z.B. nur zu 3% / 360 = 0,00833%
  - Bei 3,5% in 5 Monaten und 11 Tagen zu $3{,}5\% \cdot \left(5/12 + 11/360\right) = 1{,}565\%$

Anteilige Verzinsung

Anteilige Verzinsung

- Bei einem Jahreszins p (z.B. p = 3%) und einem Zeitraum von nur 1/m Jahr (z.B. 1/4 Jahr) beträgt also
- der Zinssatz p/m (z.B. 3/4 % = 0,75%)
- und der Zinsfaktor $q = 1 + \frac{p}{m}$ (z.B. 1,0075)

Unsere Großmutter…

- … erhält also nach einem halben Jahr (50.000 EUR zu 3%):

$$K_{1/2} = K_0 \cdot q = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{m}\right) = 50.000 \cdot \left(1 + \frac{0{,}03}{2}\right) = 50.000 \cdot 1{,}015$$

$$= 50750 EUR$$

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Unterjährige Verzinsung

Unsere Großmutter…

- … legt das Geld im zweiten Halbjahr bei einer anderen Bank an, bekommt dort aber auch nur 3% Zinsen.
- Nach dem zweiten halben Jahr erhält sie also

$$K_1 = K_{1/2} \cdot q = 50.750 \cdot \left(1 + \frac{0,03}{2}\right) = 51.511,25 EUR$$

- Vergleich: Wäre sie bei der ersten Bank geblieben, hätte sie nur

  bekommen: $K_1 = K_0 \cdot (1 + p) = 50.000 \cdot 1,03 = 51.500 EUR$

Unterjährige Verzinsung

Unterjährige Verzinsung

- Wenn ein Jahr in mehrere Zinsperioden aufgeteilt wird, erhöht sich der Zinsbetrag wegen des Zinseszinseffektes bis zum Ende des Jahres stärker.
- Dies wird unterjährige Verzinsung genannt.
- Die Anzahl der Zinsperioden pro Jahr wird mit m abgekürzt.
- Eine Geldanlage mit unterjähriger Verzinsung kann auch mehrere Jahre dauern. Die Laufzeit in Jahren wird weiterhin mit n bezeichnet.
- Das Prinzip des Zinseszinses gilt weiterhin.
- Auch die Zinseszinsformel $K_n = K_0 \cdot q^n$ gilt weiterhin, allerdings muss der Zinssatz entsprechend der verkürzten Zinsperiode verringert und anstatt n die neue Zahl der Zinsperioden angegeben werden.

Unterjährige Verzinsung

Unterjährige Verzinsung

- Konkret: Wir beginnen mit $K_n = K_0 \cdot q^n$
- Anstatt p verwenden wir p/m
- =>Anstatt q = 1 + p verwenden wir $q = 1 + \frac{p}{m}$
- Anstatt n verwenden wir $n \cdot m$ und erhalten die Zinseszinsformel für unterjährige Verzinsung:

$$\boxed{K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{m}\right)^{n \cdot m}}$$

Unterjährige Verzinsung

Beobachtung:

- Je öfter verzinst wird, desto mehr Geld kommt am Ende zusammen.

Unsere Großmutter…

- … erhält von ihrer ersten Bank das Angebot der quartalsweisen (unterjährigen) Verzinsung bei 2,5% Jahreszinsen. Wieviel Geld kommt nach 20 Jahren zusammen (K_0 = EUR 50.000)?
- Lösung: Bei quartalsweiser Verzinsung ist m = 4. Außerdem ist n = 20 und p = 2,5%. Aus der Formel ergibt sich:

$$K_n = K_{20} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{0{,}025}{4}\right)^{20\cdot 4} = 50.000 \cdot (1 + 0{,}00625)^{80}$$

$$= 50.000 \cdot 1{,}00625^{80} = 50.000 \cdot 1{,}6461578 = 82.307{,}89$$

Unterjährige Verzinsung

Unsere Großmutter…

- … fordert aber eine tägliche Verzinsung!
- und bekommt diese auch (p = 2,5% Jahreszinsen, K_0 = EUR 50.000). Wieviel Geld kommt nach 20 Jahren zusammen?
- Lösung: m = 365, n = 20, p = 2,5

$$K_n = K_{20} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{0{,}025}{365}\right)^{20 \cdot 365} = 50.000 \cdot 1{,}0000684931507^{7300}$$

$$= 50.000 \cdot 1{,}648693 = 82.434{,}65$$

- Übrigens: Bei stündlicher Verzinsung ist $m = 365 \cdot 24 = 8760$
- und

$$K_{20} = K_0 \cdot \left(1 + \frac{0{,}025}{365 \cdot 24}\right)^{20 \cdot 365 \cdot 24} = 82.436{,}00$$

Effektiver Jahreszins

Unsere Großmutter…

- … erhält von einer weiteren Bank das Angebot, auf unterjährige Verzinsung zu verzichten und dafür einen etwas höheren Zinssatz zu bekommen.
- Wie hoch muss der Zinssatz sein, damit derselbe Endbetrag herauskommt, wie bei täglicher Verzinsung, also EUR 82.434,65?
- Lösung: Wir kennen K_0 = 50000, n = 20, K_n = 82.434,65, nach der

Formel $q = \sqrt[n]{\frac{K_n}{K_0}}$ ist $q = \sqrt[20]{\frac{82.434,65}{50000}} = 1,0253$

Bezeichnung

- Der Zins, der bei einer jährlich verzinsten Anlage bezahlt werden müsste, um denselben Wert wie eine bestimmte vorgegebene Anlage zu erreichen, wird <u>effektiver Jahreszins</u> der vorgegebenen Anlage genannt.

Effektiver Jahreszins

Beobachtung

- Für den effektiven Jahreszins p* einer unterjährigen Anlage muss gelten: $$K_0 \cdot (1+p^*)^n = K_0 \cdot \left(1+\frac{p}{m}\right)^{n \cdot m}$$
- und damit $$(1+p^*) = \left(1+\frac{p}{m}\right)^m$$, der effektive Jahreszins ist also

  weder vom Anfangskapital (Barwert) noch von der Laufzeit in Jahren abhängig.

- Hieraus lässt sich p* leicht berechnen: $$\boxed{p^* = \left(1+\frac{p}{m}\right)^m - 1}$$

Stetige Verzinsung

Stetige Verzinsung

- Wenn m riesengroß wird, steigt K_n trotzdem nicht gegen unendlich, sondern gegen
  $$K_n = K_0 \cdot \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{p}{m}\right)^{n\cdot m} = K_0 \cdot \left(e^p\right)^n = K_0 \cdot e^{p\cdot n}$$
- Man nennt dies stetige Verzinsung.
- Bei stetiger Verzinsung vermehrt sich ein Anlagebetrag innerhalb von n Jahren zu $K_n = K_0 \cdot e^{p\cdot n}$

Unsere Großmutter…

- … kommt also durch unterjährige Verzinsung maximal auf den Betrag der stetigen Verzinsung. Bei p = 2,5%, K_0 = EUR 50.000 und n = 20 beträgt dieser also
  $$K_n = K_0 \cdot e^{p\cdot n} = 50.000 \cdot e^{0,025\cdot 20} = 50.000 \cdot 1,64872 = 82.436,06$$

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Effektiver Jahreszins

Anmerkungen

- Stündliche und stetige Verzinsung unterscheiden sich kaum noch.
- Stetige Verzinsung ist in der Praxis nicht relevant aber mathematisch interessant als Obergrenze der unterjährigen Verzinsung.
- Auch für stetige Verzinsung kann der effektive Jahreszins

  bestimmt werden, denn aus $K_0 \cdot (1 + p^*)^n = K_0 \cdot e^{p \cdot n}$

  folgt $1 + p^* = e^p$ und damit $\boxed{p^* = e^p - 1}$

Effektiver Jahreszins

Zusammenfassung

Der effektive Jahreszins einer unterjährig verzinsten Geldanlage beträgt

$$p^* = \left(1 + \frac{p}{m}\right)^m - 1$$

Der effektive Jahreszins einer stetig verzinsten Geldanlage beträgt

$$p^* = e^p - 1$$

Effektiver Jahreszins

Beobachtungen

- Der effektive Jahreszins hängt vom Zinssatz und der Zinsperiode ab.
- Um zu sehen, was unterjährige Verzinsung bringt, hier zwei Tabellen:
  - Was wird aus EUR 50.000 in 20 Jahren?

	K_0 =	50000				
	n =	20				
	p =	2,0%	2,5%	3,0%	3,5%	4,0%
m =	1	74297,37	81930,82	90305,56	99489,44	109556,16
m =	2	74443,19	82180,97	90700,92	100079,87	110401,98
m =	3	74492,29	82265,45	90834,83	100280,49	110690,34
m =	4	74516,93	82307,89	90902,20	100381,53	110835,76
m =	6	74541,63	82350,47	90969,84	100483,07	110982,01
m =	12	74566,40	82393,20	91037,75	100585,10	111129,10
m =	360	74590,41	82434,63	91103,66	100684,21	111272,10
	stetig	74591,23	82436,06	91105,94	100687,64	111277,05

  - Wie hoch ist der effektive Jahreszins?

	p =	2,0%	3,0%	4,0%	5,0%	6,0%	7%	8%
m =	1	2,00%	3,00%	4,00%	5,00%	6,00%	7,00%	8,00%
m =	2	2,01%	3,02%	4,04%	5,06%	6,09%	7,12%	8,16%
m =	3	2,01%	3,03%	4,05%	5,08%	6,12%	7,16%	8,22%
m =	4	2,02%	3,03%	4,06%	5,09%	6,14%	7,19%	8,24%
m =	6	2,02%	3,04%	4,07%	5,11%	6,15%	7,21%	8,27%
m =	12	2,02%	3,04%	4,07%	5,12%	6,17%	7,23%	8,30%
m =	360	2,02%	3,05%	4,08%	5,13%	6,18%	7,25%	8,33%
	stetig	2,02%	3,05%	4,08%	5,13%	6,18%	7,25%	8,33%

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Finanzmathematik

- Zinsrechnung
  - Einfache Verzinsung & Zinseszinsrechnung
  - Aufzinsen und Abzinsen: Endwert & Barwert
  - Unterjährige Verzinsung, stetige Verzinsung & effektiver Jahreszins
- Rentenrechnung
  - Rentenendwert & Rentenbarwert
- Tilgungsrechnung
  - Gesamtfällige Tilgung, Ratentilgung & Annuitätentilgung
- Investitionsrechnung
  - Kapitalwert

Rentenrechnung

Eine Rente ist

- eine Zahlungsreihe, die aus n Raten des Betrags r besteht, die in gleichen Zeitabständen (z.B. Jahren) aufeinanderfolgen.
- Bei einer…
  - …nachschüssigen Rente ist die Zahlung der Rate jeweils am Ende eines Zeitabstands fällig.
  - …vorschüssigen Rente ist die Zahlung der Rate jeweils am Anfang eines Zeitabstands fällig.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Notationen Rentenrechnung

- p: Zinssatz pro Periode
- q: Zinsfaktor, d.h. q=1+p
- n: Laufzeit in Perioden (z.B. Jahre oder Monate)
- R_0: Anfangskapital/Startwert
  (Kapital zu Beginn der Laufzeit)
- R_n: Endkapital/Endwert
  (Kapital nach der n-ten Periode bzw. am Ende der Laufzeit)
- r: Ratenhöhe

Rentenrechnung

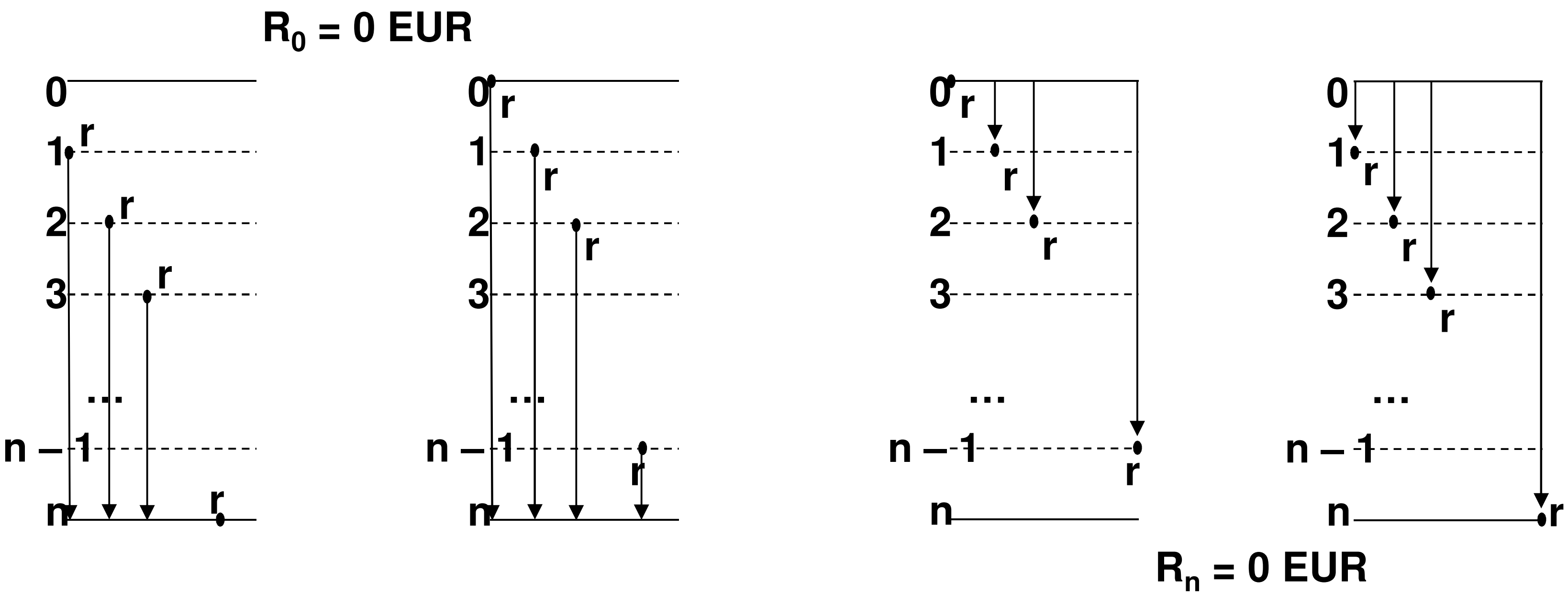
Wir unterscheiden

- die Renteneinzahlung, bei der von R_0 = 0 EUR ausgegangen wird und sich das Kapital mit jeder Rate erhöht.
- die Rentenauszahlung, bei der sich ein Ausgangskapital R_0 mit jeder Rate verringert, in der Regel bis zu R_n = 0 EUR (Kapitalaufzehrung).

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Rentenrechnung

- Alle Raten werden ab ihrer Einzahlung bzw. bis zu ihrer Auszahlung verzinst (in den Skizzen durch Pfeile dargestellt).



Renten-einzahlung nachschüssig

Renten-einzahlung vorschüssig

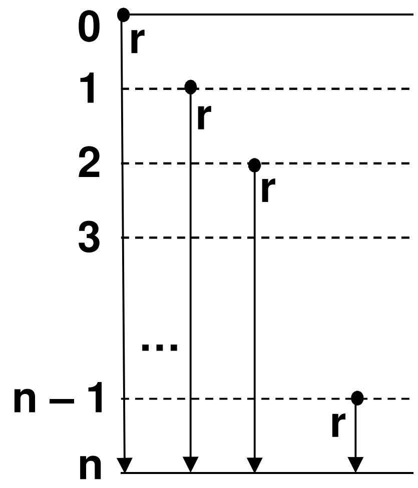
Renten-auszahlung vorschüssig

Renten-auszahlung nachschüssig

Renteneinzahlung

Eine andere Großmutter…

- … möchte auch das Studium ihrer Enkelin finanzieren.
- Sie beginnt mit R_0 = 0 EUR und bezahlt monatlich 400 EUR.
- Sie wählt die vorschüssige Zahlung.
- Sie hat 20 Jahre, also n = 240 Monate, Zeit.
- Sie bekommt einen Zinssatz von 3% p.a., also monatlich $p = 3\%/12 = 0{,}25\% = 0{,}0025$ und $q = 1 + 0{,}0025 = 1{,}0025$.

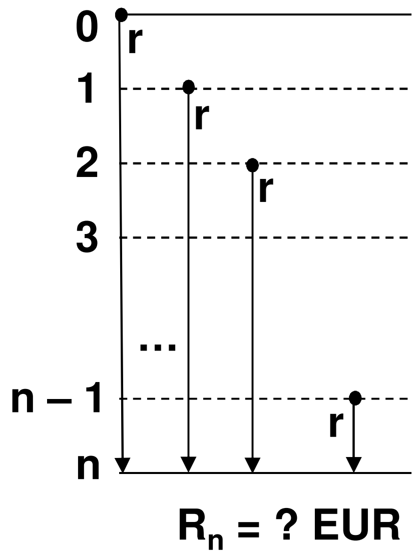


- **Frage**: Wieviel Geld (welches Endkapital R_n) kommt in 20 Jahren zusammen?

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Renteneinzahlung

Beobachtung



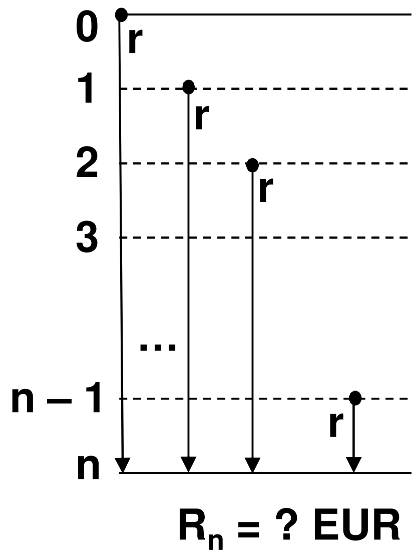
- Die erste Rate wird über die gesamte Laufzeit von n Perioden verzinst.
- Die zweite Rate wird über n – 1 Perioden verzinst.
- Die dritte Rate wird über n – 2 Perioden verzinst.
- …
- Die n-te (letzte) Rate wird über 1 Periode verzinst.

- Die erste Rate trägt also den Betrag $r \cdot q^n$ zum Endwert bei.
- Die zweite Rate entsprechend $r \cdot q^{n-1}$
- …
- Die letzte Rate trägt nur noch $r \cdot q^1$ zum Endwert bei.
- Der Endwert beträgt damit $R_n = r \cdot q^n + r \cdot q^{n-1} + ... + r \cdot q$

Renteneinzahlung

- Der Endwert ist also

$$R_n = r \cdot q^n + r \cdot q^{n-1} + \ldots + r \cdot q$$
$$= r \cdot q \cdot \left(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1\right)$$



- Für große Werte von n ist es mühsam den Endwert mit dieser Formel zu berechnen. Wir möchten deshalb eine einfachere, kompaktere Formel zur Berechnung des Endwertes haben.
- Um uns so eine Formel herleiten zu können, müssen wir uns zuerst mit der <u>geometrischen Reihe</u> beschäftigen.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Geometrische Reihe

- Geometrische Reihe:
  - Für jede Zahl q und jedes n gilt:
    $(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}) \cdot (q - 1)$
    $= q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n - 1 - q - q^2 - \ldots - q^{n-2} - q^{n-1}$
    $= q^n - 1$,
  - also $(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1}) \cdot (q - 1) = q^n - 1$
- Für $q \neq 1$ dürfen wir durch $(q - 1)$ teilen und erhalten:

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-2} + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

- Mit Summenzeichen: $\sum_{i=0}^{n-1} q^i = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}$

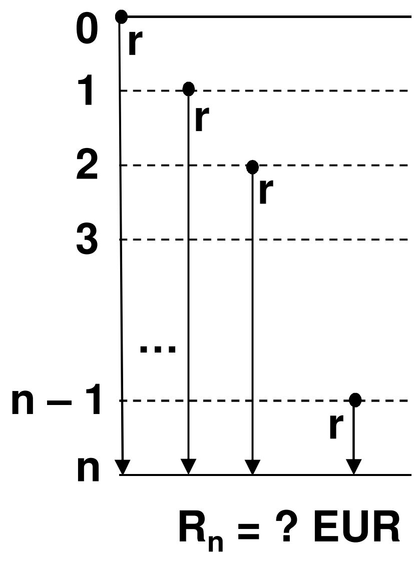
- Zusammengefasst: $\sum_{i=0}^{n-1} q^i = 1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}$

Geometrische Reihe

- Bemerkung zur geometrischen Reihe:
  - Für $-1 < q < 1$ wird q^n mit wachsendem n immer kleiner:
  - Bezeichnung: $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$
  - Deshalb ist dann $\lim\limits_{n\to\infty}(q^n - 1) = -1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n - 1}{q - 1} = \frac{-1}{q-1} = \frac{1}{1-q}$
  - Zusammengefasst: $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = 1 + q + q^2 + \ldots = \frac{1}{1-q}$

Renteneinzahlung

- Zurück zu unserer Berechnung des Endwerts…
- Mit unseren Überlegungen zur geometrischen Reihe können wir uns nun eine einfache und kompakte Formel zur Berechnung des Endwerts herleiten.
- Bisher hatten wir den Endwert folgendermaßen berechnet:



$$R_n = r \cdot q^n + r \cdot q^{n-1} + \ldots + r \cdot q$$
$$= r \cdot q \cdot \left(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1\right)$$

- Indem wir nun den Satz über die geometrische Reihe anwenden, erhalten wir

$$R_n = r \cdot q \cdot \left(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1\right)$$
$$= r \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Renteneinzahlung

- Der <u>Endwert einer vorschüssigen Renteneinzahlung</u> beträgt also

$$\boxed{R_n^{(v)} = rq\frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Unsere Großmutter…

- … erspart also in 20 Jahren einen Betrag von

$$R_n^{(v)} = rq\frac{q^n - 1}{q - 1} = 400 \cdot 1{,}0025 \cdot \frac{1{,}0025^{240} - 1}{1{,}0025 - 1}$$

$$= 401 \cdot \frac{1{,}820755 - 1}{0{,}0025} = 401 \cdot 328{,}302 = 131.649{,}10 EUR$$

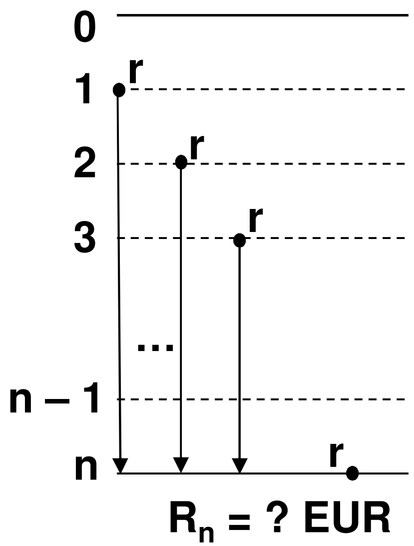
- Zum Vergleich: Die Summe der eingezahlten Raten beträgt nur $240 \cdot 400 = 96.000 EUR$

Renteneinzahlung

Anmerkung

- Bei der nachschüssigen Renteneinzahlung wird jede Rate um eine Periode weniger verzinst.
- Die erste Rate trägt also nur $r \cdot q^{n-1}$ zum Endwert bei.
- Die zweite Rate entsprechend $r \cdot q^{n-2}$
- …
- Die letzte Rate nur $r \cdot q^{0} = r \cdot 1 = r$
- Der Endwert berechnet sich damit als

$$R_n = r \cdot q^{n-1} + r \cdot q^{n-2} + \ldots + r = r \cdot \left(q^{n-1} + q^{n-2} + \ldots + 1\right) = r \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$



Ergebnis

- Der <u>Endwert einer nachschüssigen Renteneinzahlung</u> beträgt

$$\boxed{R_n^{(n)} = r \frac{q^n - 1}{q - 1}}$$

Renteneinzahlung

Unserer Großmutter…

- … hätte es gereicht, in 20 Jahren 100.000 EUR zu erreichen.
- Frage: Mit welcher Rate hätte sie genau 100.000 EUR erreicht?
- Antwort: Löse die Formel nach r auf:

$$R_n^{(v)} = rq\frac{q^n - 1}{q - 1} \Rightarrow r \cdot q = R_n^{(v)} \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} \Rightarrow \boxed{r = R_n^{(v)} \cdot \frac{q-1}{q \cdot \left(q^n - 1\right)}}$$

- Konkret: Es reicht eine monatliche Rate von

$$r = R_n^{(v)} \cdot \frac{q-1}{q \cdot \left(q^n - 1\right)} = 100.000 \cdot \frac{0{,}0025}{1{,}0025 \cdot \left(1{,}0025^{240} - 1\right)}$$

$$= \frac{250}{1{,}0025 \cdot (0{,}820755)} = 303{,}84\,EUR$$

Renteneinzahlung

Anmerkung

- Bei der nachschüssigen Renteneinzahlung kann die Formel

$$R_n^{(n)} = r\frac{q^n - 1}{q - 1}$$

nach r aufgelöst werden: $\boxed{r = R_n^{(n)} \cdot \frac{q-1}{\left(q^n - 1\right)}}$

Ergebnis

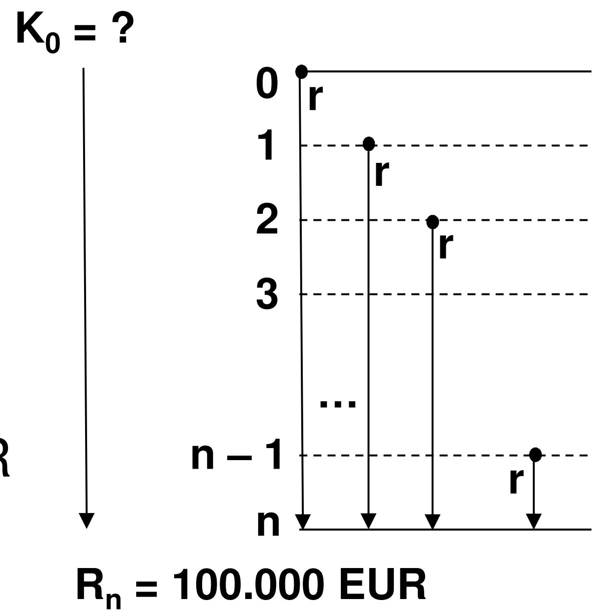
Rate für eine vorschüssige Renteneinzahlung: $r = R_n^{(v)} \cdot \frac{q-1}{q \cdot \left(q^n - 1\right)}$

Rate für eine nachschüssige Renteneinzahlung: $r = R_n^{(n)} \cdot \frac{q-1}{\left(q^n - 1\right)}$

Renteneinzahlung

Unsere Großmutter…

- … bezahlt also insgesamt $240 \cdot 303{,}84 = 72.921{,}60\,EUR$
- und fragt sich jetzt, wieviel Geld K_0 sie zu Beginn des Rentensparvertrags auf einen Schlag hätte anlegen müssen, um ebenfalls auf 100.000 EUR zu kommen.
- K_0 nennt man den <u>Barwert der Rente.</u>



Lösung

- Da wir den Endwert von 100.000 EUR schon kennen, reicht es, diesen abzuzinsen (Erinnerung: $K_n = K_0 \cdot q^n$), also
$$K_0 = K_n / q^n$$
$$= 100.000 / 1{,}0025^{240} = 100.000 / 1{,}820755 = 54.922{,}27\,EUR$$
- <u>Hinweis:</u> K_n entspricht hier R_n .

Renteneinzahlung

Allgemein

- Der Barwert einer Renteneinzahlung kann aus der jeweiligen Formel durch Abzinsen des Endwerts berechnet werden:
- Vorschüssig: $K_0 = R_n^{(v)} / q^n = rq \frac{(q^n - 1)}{q - 1} / q^n = r \frac{(q^n - 1)}{q^{n-1}(q-1)}$
- Nachschüssig: $K_0 = R_n^{(n)} / q^n = r \frac{(q^n - 1)}{q - 1} / q^n = r \frac{(q^n - 1)}{q^n (q-1)}$
- **Ergebnis**

  <u>Barwert der vorschüssigen</u> Renteneinzahlung: $K_0 = r \frac{(q^n - 1)}{q^{n-1}(q-1)}$

  <u>Barwert der nachschüssigen</u> Renteneinzahlung: $K_0 = r \frac{(q^n - 1)}{q^n (q-1)}$

Renteneinzahlung

Aufgabe (8 min Zeit):

Herr Klein möchte für eine Weltreise sparen. Die Reise kostet 15.000 Euro und er möchte sie in 2 Jahren antreten. Bei seiner Bank bekommt er auf sein Sparbuch 1,5% Zinsen im Jahr.

a) Er möchte jeden Monat nachschüssig den gleichen Betrag sparen. Wie viel muss er monatlich auf sein Sparbuch einzahlen?

b) Er möchte zu Beginn einen einmaligen Betrag auf sein Sparbuch einzahlen. Wie hoch muss dieser Betrag bei monatlicher Zinsgutschrift sein?

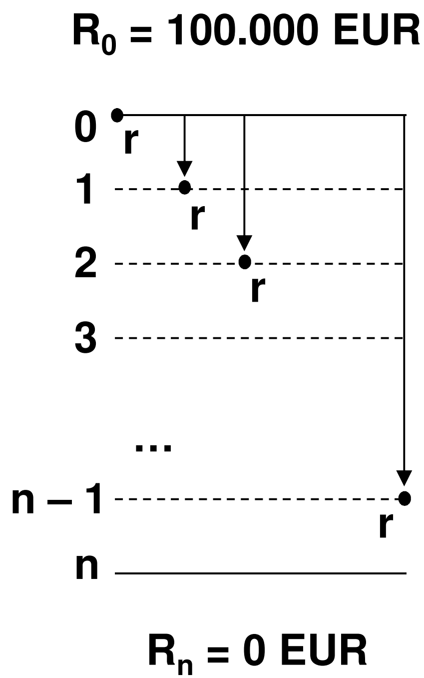
Formeln Renten-einzahlung:

Startwert	0	
Endwert	$R_n^{(v)} = rq\frac{q^n - 1}{q - 1}$	$R_n^{(n)} = r\frac{q^n - 1}{q - 1}$
Rate	$r = R_n^{(v)} \cdot \frac{q - 1}{q \cdot (q^n - 1)}$	$r = R_n^{(n)} \cdot \frac{q - 1}{(q^n - 1)}$
Barwert	$K_0 = r\frac{(q^n - 1)}{q^{n-1}(q - 1)}$	$K_0 = r\frac{(q^n - 1)}{q^n(q - 1)}$

Rentenauszahlung

Das Studium beginnt…

- … und Großmutter hat dafür tatsächlich 100.000 EUR gespart.
- Die Enkelin braucht aber nicht das ganze Geld am Anfang des Studiums, sondern jeden Monat eine Rate (wir rechnen zunächst vorschüssig).
- Frage: Reichen die 100.000 EUR für 10 Semester (Bachelor und Master), wenn die Enkelin jeden Monat 500 EUR verbraucht?



Beobachtung

- n = 60 Monate, p = 0,0025 (pro Monat), q = 1,0025
- Die erste Rate wird 0 Monate verzinst und hat dann den Betrag r.
- Die zweite Rate wird 1 Monat verzinst und hat dann den Betrag r.
- …
- Die letzte Rate wird n – 1 = 59 Monate verzinst und hat dann den Betrag r.

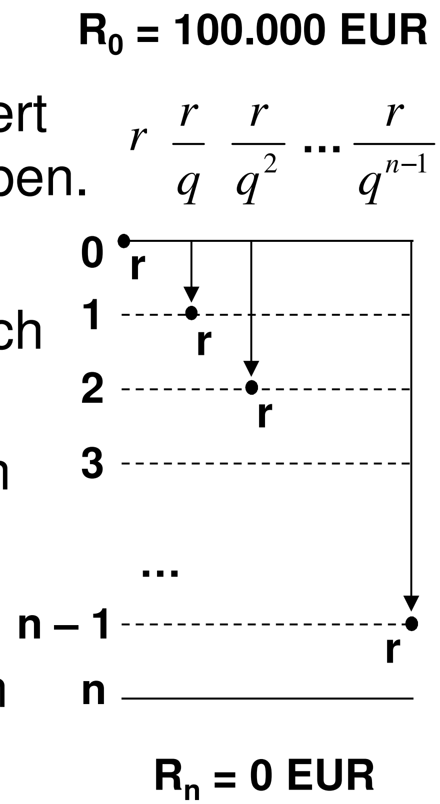
Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Rentenauszahlung

Rechnung

- Wir berechnen durch Abzinsen, welchen Barwert die einzelnen Raten zu Beginn der Laufzeit haben.
- Der Barwert der ersten Rate ist r
- Den Barwert der zweiten Rate erhalten wir durch Abzinsen über 1 Periode, er ist r / q
- Den Barwert der dritten Rate erhalten wir durch Abzinsen über 2 Perioden, er ist r / q^2
- …
- Der Barwert der letzten Rate erhalten wir durch Abzinsen über n – 1 Monate, er ist r / q^{n-1}
- Die Summe aller Barwerte der Raten entspricht dem Barwert der Rente, muss also dem Startkapital R_0 entsprechen. Das heißt:

$$R_0 = r + \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \ldots + \frac{r}{q^{n-1}}$$



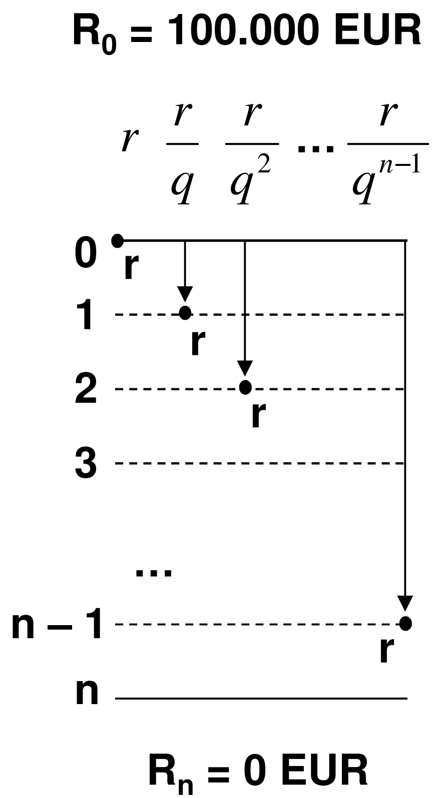
Rentenauszahlung

Rechnung, Fortsetzung:

$$R_0 = r \cdot \left(1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \ldots + \frac{1}{q^{n-1}}\right)$$

$$= \frac{r}{q^{n-1}} \cdot \left(q^{n-1} + q^{n-2} + q^{n-3} + \ldots + 1\right)$$

$$= \frac{r}{q^{n-1}} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n-1} \cdot (q-1)}$$



Ergebnis

Der <u>Startwert einer vorschüssigen Rentenauszahlung</u> beträgt

$$\boxed{R_0^{(v)} = r \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)}}$$

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

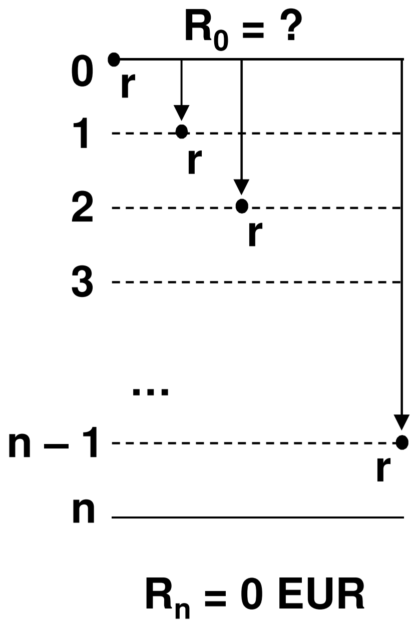
Rentenauszahlung

Anwendung

- Um 60 Monate lang 500 EUR verbrauchen zu können, wird folgendes Startkapital benötigt:

$$R_0^{(v)} = r \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n-1} \cdot (q-1)} = 500 \cdot \frac{1{,}0025^{60} - 1}{1{,}0025^{59} \cdot (1{,}0025 - 1)}$$

$$= 500 \cdot \frac{0{,}16161678}{1{,}15871998 \cdot 0{,}0025} = 27895{,}74 EUR$$



- Die angesparten 100.000 EUR sind also mehr als genug.
- Natürlich möchte die Studentin jetzt wissen, wieviel Geld sie monatlich denn tatsächlich verbrauchen kann (über 5 Jahre mit Kapitalaufzehrung).
- Dazu muss die Formel nach r aufgelöst werden.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Rentenauszahlung

Rechnung

$$R_0^{(v)} = r\frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)} \Rightarrow r = R_0^{(v)} \cdot \frac{q^{n-1}(q-1)}{q^n - 1}$$

Ergebnis

Rate für vorschüssige Rentenauszahlung:

$$\boxed{r = R_0^{(v)} \cdot \frac{q^{n-1}(q-1)}{q^n - 1}}$$

Anwendung

Bei 100.000 EUR Startkapital und 60 Monaten Laufzeit errechnet unsere Studentin die folgende monatliche Rate:

$$r = R_0^{(v)} \cdot \frac{q^{n-1}(q-1)}{q^n - 1} = 100.000 \cdot \frac{1{,}0025^{59}(1{,}0025-1)}{1{,}0025^{60} - 1}$$

$$= 100.000 \cdot \frac{1{,}15871998 \cdot 0{,}0025}{0{,}16161678} = 1.792{,}39\,EUR$$

Rentenauszahlung

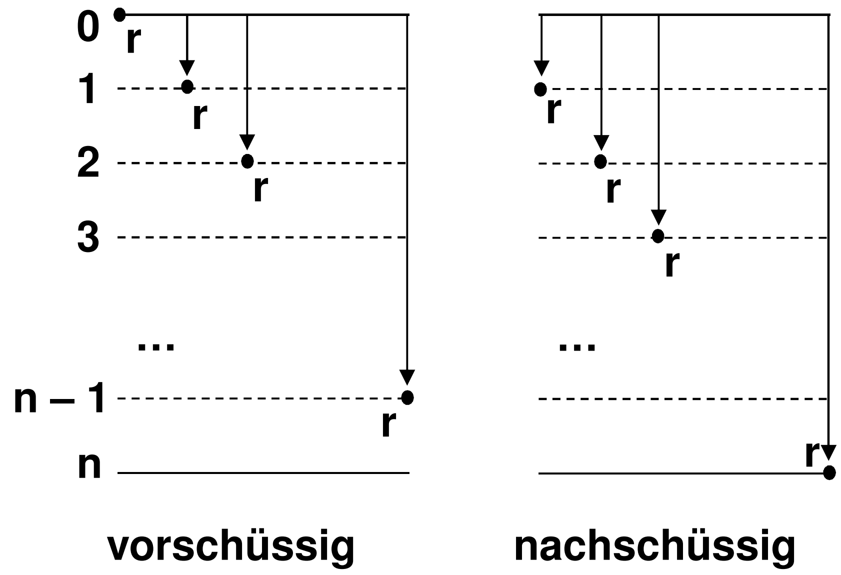
Anmerkung

- Wir haben die Rentenauszahlung bisher nur vorschüssig berechnet.
- Der nachschüssige Fall wird analog berechnet und ergibt auch analoge Formeln (siehe unten).
- Wir führen die Rechnung allerdings nicht im Detail durch.

<u>Startwert der nachschüssigen Rentenauszahlung:</u> $$\boxed{R_0^{(n)} = r \frac{q^n - 1}{q^n (q-1)}}$$

<u>Rate für nachschüssige Rentenauszahlung:</u> $$\boxed{r = R_0^{(n)} \cdot \frac{q^n (q-1)}{q^n - 1}}$$

Rentenauszahlung



Beobachtung

- Bei nachschüssiger Rentenauszahlung liegen alle Raten 1 Monat länger und werden deshalb 1 Monat länger verzinst.
- Für die gleiche Ratenhöhe reicht deshalb ein etwas geringeres Startkapital als bei der vorschüssigen Renten-auszahlung.
- Wo im vorschüssigen Fall q^{n-1} steht, steht im nachschüssigen Fall q^n

Rentenauszahlung

Unsere Studentin ist sparsam…

- … und braucht im Monat keine 1.792,39 EUR.
- Sie überlegt jetzt, wie lange die 100.000 EUR wohl reichen, wenn sie tatsächlich monatlich nur 500 EUR verbraucht.
- Dazu muss sie die Formel nach n auflösen.

Lösung

- Die Formel lautet: $n = 1 + \frac{\ln r - \ln\left(rq - R_0^{(v)} \cdot (q-1)\right)}{\ln q}$
- Auf die Herleitung der Formel wird an dieser Stelle verzichtet.

Anwendung

$$n = 1 + \frac{\ln 500 - \ln\left(500 \cdot 1{,}0025 - 100000 \cdot (1{,}0025 - 1)\right)}{\ln 1{,}0025}$$

$$= 1 + \frac{\ln 500 - \ln(501{,}25 - 250)}{0{,}00249688} = 1 + \frac{0{,}688159639}{0{,}00249688} = 276{,}6 \text{ Monate,}$$

also etwa 23 Jahre.

Rentenauszahlung

Aufgabe (5 min Zeit):

Herr Klein hat 40.000 Euro gespart. Er möchte sich davon von seiner Bank eine monatliche nachschüssige Rente über 8 Jahre auszahlen lassen. Der Zinssatz beträgt 6% p.a.

Welchen Betrag bekommt er monatlich von seiner Bank überwiesen?

Formeln Renten-auszahlung:

Startwert	$R_0^{(v)} = r \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)}$ $\quad R_0^{(n)} = r \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$
Endwert	0
Rate	$r = R_0^{(v)} \cdot \frac{q^{n-1}(q-1)}{q^n - 1}$ $\quad r = R_0^{(n)} \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$
Barwert	entspricht hier dem Startwert

Rentenrechnung

Zusammenfassung

	Renteneinzahlung	Rentenauszahlung
Startwert	0	$R_0^{(v)} = r\dfrac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)}$ $\quad R_0^{(n)} = r\dfrac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$
Endwert	$R_n^{(v)} = rq\dfrac{q^n - 1}{q-1}$ $\quad R_n^{(n)} = r\dfrac{q^n - 1}{q-1}$	0
Rate	$r = R_n^{(v)} \cdot \dfrac{q-1}{q \cdot (q^n - 1)}$ $\quad r = R_n^{(n)} \cdot \dfrac{q-1}{(q^n - 1)}$	$r = R_0^{(v)} \cdot \dfrac{q^{n-1}(q-1)}{q^n - 1}$ $\quad r = R_0^{(n)} \cdot \dfrac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$
Barwert	$K_0 = r\dfrac{(q^n - 1)}{q^{n-1}(q-1)}$ $\quad K_0 = r\dfrac{(q^n - 1)}{q^n(q-1)}$	entspricht hier dem Startwert

Inhalte der Finanzmathematik

- Zinsrechnung
  - Einfache Verzinsung & Zinseszinsrechnung
  - Aufzinsen und Abzinsen: Endwert & Barwert
  - Unterjährige Verzinsung, stetige Verzinsung & effektiver Jahreszins
- Rentenrechnung
  - Rentenendwert & Rentenbarwert
- Tilgungsrechnung
  - Gesamtfällige Tilgung, Ratentilgung & Annuitätentilgung
- Investitionsrechnung
  - Kapitalwert

Tilgungsrechnung

Wenn Sie einen Kredit aufgenommen haben, müssen Sie

- für das geliehene Geld Zinsen bezahlen.
- das geliehene Geld irgendwann zurückzahlen (den Kredit „tilgen").

Sie haben drei Möglichkeiten:

- Gesamtfällige Tilgung: Sie zahlen während der gesamten Laufzeit nur Zinsen und anschließend den gesamten Betrag zurück. Die Zinsen bleiben während der gesamten Laufzeit konstant.
- Ratentilgung: Sie zahlen während der gesamten Laufzeit regelmäßig einen bestimmten Betrag zurück und bezahlen Zinsen auf den jeweils noch nicht getilgten Betrag. Die Tilgung bleibt also konstant Die Zinsen verringern sich aber, weil die Kreditsumme sinkt.
- Annuitätentilgung: Sie zahlen monatlich einen festen Betrag – die Annuität – der einen Zins- und einen Tilgungsanteil enthält.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Annuitätendarlehen

Bei einem Annuitätendarlehen wird

- eine Schuld K_0
- in konstanten Raten A, sogenannten Annuitäten,
- über einen Zeitraum von n Perioden (z.B. Monaten) zurückgezahlt.
- Auf die Restschuld fallen dabei jeweils Zinsen zum Zinssatz p an ($q = 1+p$).
- A enthält dabei einen Zins- und einen Tilgungsanteil.
- Wir gehen von einer nachschüssigen Tilgung aus.

Anmerkungen:

- Die Annuität A muss größer sein als die Anfangszinsen $K_0 \cdot p$, andernfalls wird die Schuld nicht kleiner.
- Wegen des Tilgungsanteils wird die Schuld in jeder Periode kleiner und deshalb wird in A der Zinsanteil kleiner und damit – weil A konstant ist – der Tilgungsanteil größer.

  → Am Anfang bezahlt man viele Zinsen,

  am Ende fast nur noch die Tilgung der Restschuld.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Annuitätendarlehen

Beispiel

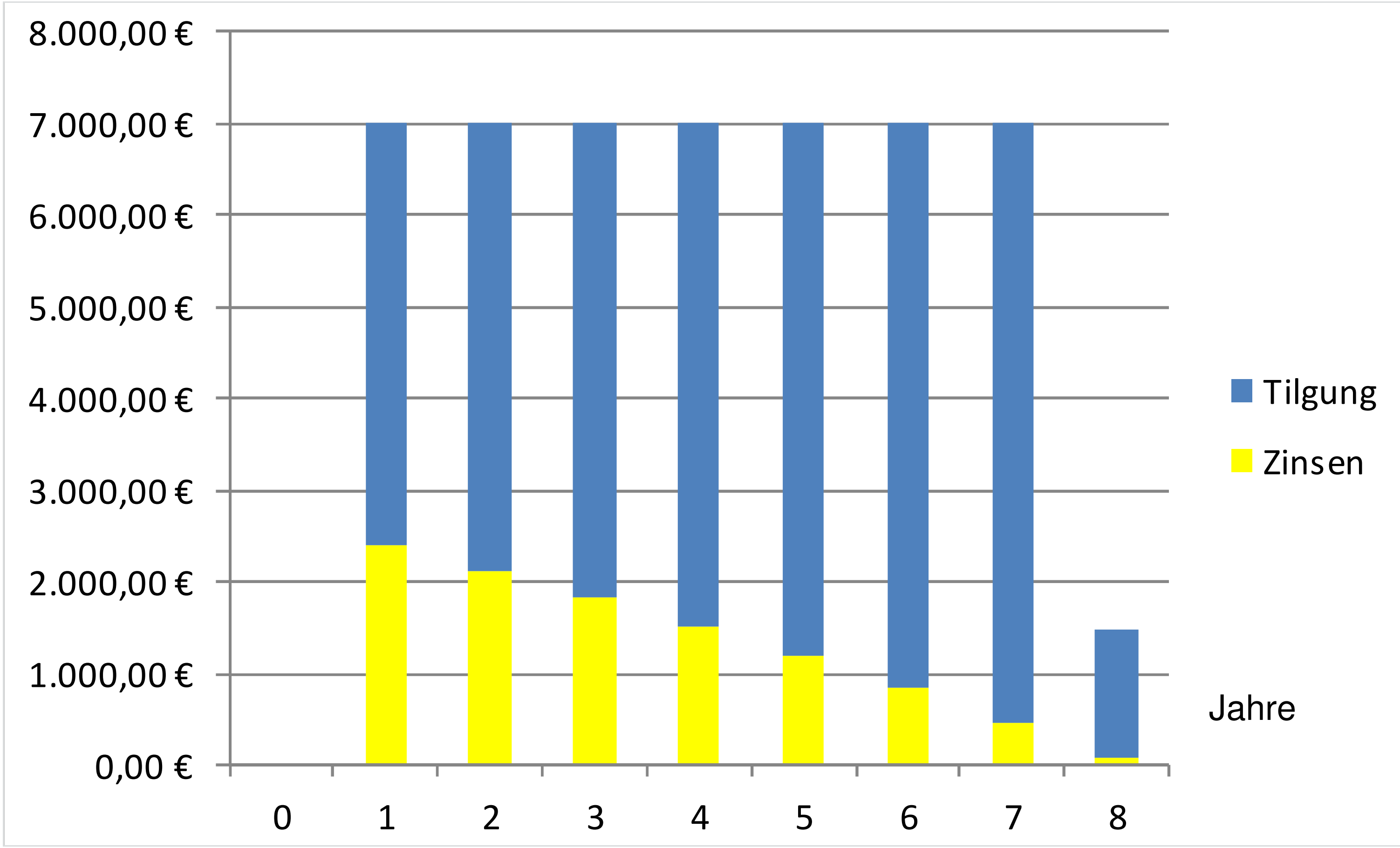
- Sie kommen von der Hochschule und wollen sich selbstständig machen.
- Bei der Bank bekommen Sie einen Annuitätenkredit über EUR 40.000 bei 6% Jahreszins mit jährlichen Raten von EUR 7.000.
- Wie stellt sich die Rückzahlung dar?

Lösungsansatz: Excel

Zinssatz	6,00%	Rate	7000
nach … Jahren	Restschuld	Zinsen	Tilgung
0	40000,00		
1	35400,00	2400,00	4600,00
2	30524,00	2124,00	4876,00
3	25355,44	1831,44	5168,56
4	19876,77	1521,33	5478,67
5	14069,37	1192,61	5807,39
6	7913,53	844,16	6155,84
7	1388,35	474,81	6525,19
8	0,00	83,30	1388,35

Annuitätendarlehen

Beispiel: Fortsetzung



Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Annuitätendarlehen

Aufgabe (8 min Zeit):

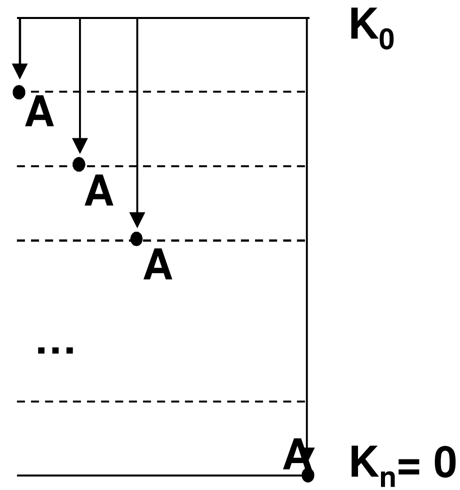
Herr Klein möchte sich eine Eigentumswohnung durch ein Annuitätendarlehen finanzieren. Der Kredit beträgt 150.000 Euro bei 9% Zinsen p.a. Herr Klein zahlt jährlich eine Rate von 40.000 Euro.

Stellen Sie die Rückzahlung in nachfolgender Tabelle dar.

Zinssatz		Rate	
nach … Jahren	Restschuld	Zinsen	Tilgung
0			
1			
2			
3			
4			
5			

Annuitätendarlehen

Beobachtung
Ein Annuitätendarlehen ist die Umkehrung einer nachschüssigen Rentenauszahlung:



	Annuitätendarlehen	**Rentenauszahlung**
Wem gehört das Geld	Bank / Versicherung	Rentennehmer
Wer leiht das Geld	Kreditnehmer	Bank / Versicherung
Ausgangskapital	Kreditsumme K_0	Startkapital R_0
monatliche Zahlung	Annuität A	Rate r
Laufzeit	n	n
Zins	p	p
Zahlungshäufigkeit	jährlich, monatlich,…	jährlich, monatlich,…

Annuitätendarlehen

Folgerung

Mit den entsprechenden Bezeichnungen gelten die Formeln der nachschüssigen Rentenauszahlung auch im Fall von Annuitätendarlehen.

Berechnung der…	**Annuitätendarlehen**	**Rentenauszahlung**
Kreditsumme	$\boxed{K_0 = A\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}}$	$R_0^{(n)} = r\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}$
Annuität	$\boxed{A = K_0 \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}}$	$r = R_0^{(n)} \cdot \frac{q^n(q-1)}{q^n - 1}$

Annuitätendarlehen

Anwendung: Häuslebauerproblem Nr.1

Wie teuer darf meine Immobilie werden, wenn ich in 30 Jahren schuldenfrei sein will, der Zins 5% beträgt und ich im Monat EUR 1.250 bezahlen kann?

Lösung

Wegen monatlicher Rechnung ist

$q = 1 + 0{,}05/12 = 1{,}004166667$ und $n = 30 \cdot 12 = 360$, also ist

$$K_0 = A\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} = 1.250 \cdot \frac{1{,}004166667^{360} - 1}{1{,}004166667^{360}(0{,}004166667)}$$

$$= 1.250 \cdot \frac{4{,}46774485 - 1}{4{,}46774485 \cdot 0{,}004166667} = 232.852{,}01 EUR$$

Annuitätendarlehen

Anwendung: Häuslebauerproblem Nr.2

Wenn das Haus 250.000 EUR kosten soll, wie hoch ist dann die monatliche Annuität, damit ich bei 5% Jahreszins in 30 Jahren schuldenfrei bin?

Lösung

q und n sind wie im vorherigen Fall, damit ist

$$A = K_0 \cdot \frac{q^n (q-1)}{q^n - 1} = 250.000 \cdot \frac{1{,}004166667^{360} \cdot 0{,}004166667}{1{,}004166667^{360} - 1}$$

$$= 250.000 \cdot \frac{4{,}46774485 \cdot 0{,}004166667}{4{,}46774485 - 1} = 1.342{,}05 EUR$$

Annuitätendarlehen

Anwendung: Häuslebauerproblem Nr.3

Wie lange dauert die Rückzahlung meines Kredits, wenn das Haus 200.000 EUR kosten soll und ich bei monatlichen Annuitäten und 5% Jahreszins mit 1% (jährlicher) Tilgung beginne?

Lösungsansatz:

Erst die Annuität berechnen, dann die Kreditformel nach n auflösen.

Rechnung

- die Tilgung beträgt im ersten Monat $1/12\,\%$ der Kreditsumme, also

  $$\frac{200.000}{12 \cdot 100} = 166{,}67\,EUR$$

- die Zinsen betragen im ersten Monat $5/12\,\%$ der Kreditsumme, also

  $$\frac{200.000}{100} \cdot \frac{5}{12} = 833{,}33\,EUR$$

- Die Annuität beträgt demnach $A = 166{,}67 + 833{,}33 = 1.000\,EUR$

Annuitätendarlehen

Berechnung der Laufzeit

- Ausgehend von der Formel zur Kreditsumme erhalten wir

$$K_0 = A\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} \Rightarrow K_0 \cdot q^n(q-1) = A \cdot (q^n - 1) = A \cdot q^n - A$$

$$\Rightarrow A = A \cdot q^n - K_0 \cdot q^n(q-1) = q^n \cdot (A - K_0 \cdot (q-1))$$

$$\Rightarrow q^n = \frac{A}{A - K_0 \cdot (q-1)}$$

Beobachtungen

- Wir werden einen Logarithmus brauchen, um n berechnen zu können.
- A muss größer sein als $K_0 \cdot (q-1)$, sonst wird der Nenner negativ und die Formel sinnlos.
- $K_0 \cdot (q-1)$ ist aber gerade der Zins in der ersten Periode, der natürlich kleiner sein muss als die Annuität, sonst wird die Schuld nie beglichen.

Annuitätendarlehen

Berechnung der Laufzeit: Fortsetzung

$$q^n = \frac{A}{A - K_0 \cdot (q-1)} \Rightarrow \ln q^n = \ln \frac{A}{A - K_0 \cdot (q-1)}$$

$$\Rightarrow n \ln q = \ln A - \ln\left(A - K_0 \cdot (q-1)\right) \Rightarrow n = \frac{\ln A - \ln\left(A - K_0 \cdot (q-1)\right)}{\ln q}$$

Ergebnis

Die Laufzeit eines Annuitätendarlehens beträgt

$$\boxed{n = \frac{\ln A - \ln\left(A - K_0 \cdot (q-1)\right)}{\ln q}}$$

Anmerkungen

Mit den entsprechenden Bezeichnungen gilt diese Formel auch für nachschüssige Rentenauszahlungen.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Annuitätendarlehen

Anwendung auf das Häuslebauerproblem Nr.3

$$n = \frac{\ln A - \ln\left(A - K_0 \cdot (q-1)\right)}{\ln q}$$

$$= \frac{\ln 1.000 - \ln\left(1.000 - 200.000 \cdot 0{,}004166667\right)}{\ln 1{,}004166667}$$

$$= \frac{\ln 1.000 - \ln\left(1.000 - 200.000 \cdot 0{,}004166667\right)}{\ln 1{,}004166667}$$

$$= 430{,}92\,Monate$$

- Die Laufzeit beträgt also $430{,}92 / 12 = 35{,}9\,Jahre$

Annuitätendarlehen

Aufgabe (5 min Zeit):

Herr Klein möchte sich einen neuen Mercedes für 38.000 Euro kaufen. Leider hat er im Moment kein Geld und nimmt deshalb ein Annuitätendarlehen bei seiner Bank auf. Der Zinssatz beträgt 3% p.a. und er möchte in 4 Jahren schuldenfrei sein.

Die Annuitäten sind monatlich fällig. Wie hoch sind sie?

Formeln Annuitäten-darlehen:

Berechnung der…	**Annuitätendarlehen**
Kreditsumme	$K_0 = A \frac{q^n - 1}{q^n (q-1)}$
Annuität	$A = K_0 \cdot \frac{q^n (q-1)}{q^n - 1}$

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Finanzmathematik

- Zinsrechnung
  - Einfache Verzinsung & Zinseszinsrechnung
  - Aufzinsen und Abzinsen: Endwert & Barwert
  - Unterjährige Verzinsung, stetige Verzinsung & effektiver Jahreszins
- Rentenrechnung
  - Rentenendwert & Rentenbarwert
- Tilgungsrechnung
  - Gesamtfällige Tilgung, Ratentilgung & Annuitätentilgung
- Investitionsrechnung
  - Kapitalwert

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Investitionsrechnung

Unternehmen…

- …tätigen Investitionen, weil sie hoffen, dadurch den Gewinn zu steigern.
- Eine Investition erfordert Ausgaben, die kurzfristig getätigt werden müssen und zahlt sich in der Regel erst langfristig aus.
- Aus verschiedenen Investitionsmöglichkeiten müssen die besten (wirtschaftlichsten) zur Umsetzung ausgewählt werden.

Frage

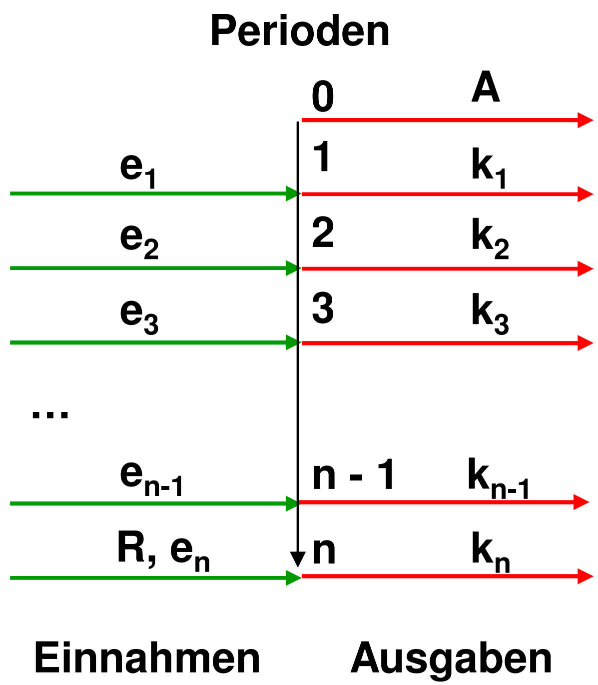
- Mit welchem Rechenverfahren kann man verschiedene Investitionen vergleichbar machen (damit die beste ausgewählt werden kann)?

Lösungsansatz

- Von jeder Investition den Kapitalwert berechnen. Anschließend die Kapitalwerte der einzelnen Investitionen vergleichen.
- Andere Begriffe für Kapitalwert: Nettogegenwartswert oder Net Present Value.

Modell

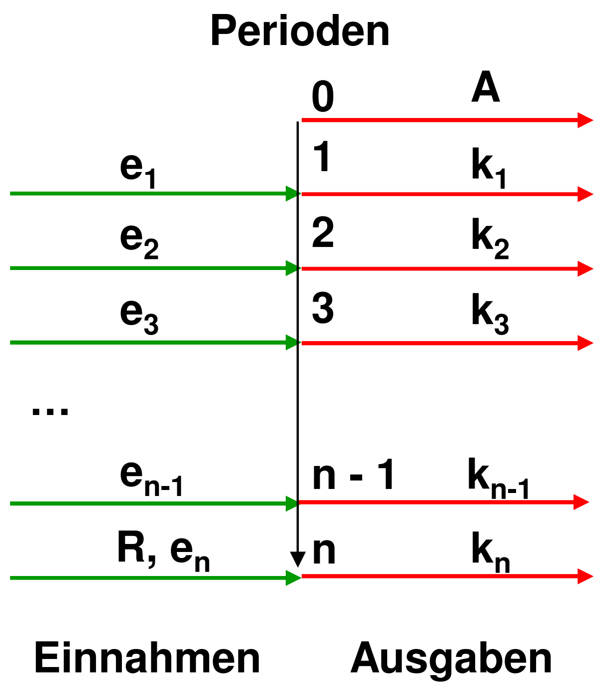
- Ein Investitionsprojekt umfasst Ausgaben und Einnahmen, die zu bestimmten Zeitpunkten auftreten können.
- Zur Vereinfachung gehen wir davon aus, dass finanzielle Ab- und Zuflüsse periodenweise auftreten.
- Es wird von einer beschränkten Betrachtungsdauer ausgegangen. Diese betrage n Zeitperioden.
- Auch p und q seien wie üblich definiert.
- A ist der ursprüngliche Anschaffungspreis.
- $k_1, \dots, k_n$ sind Folgekosten in den jeweiligen Perioden.
- $e_1, \dots, e_n$ sind Einnahmen in den jeweiligen Perioden.
- R ist der Restwert nach der n-ten Periode.



Investitionsrechnung

Modell: Fortsetzung

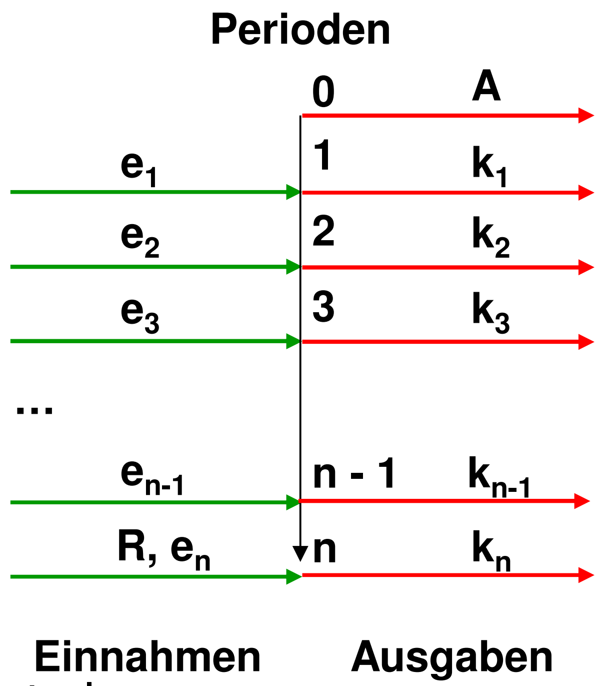
- Da die Zahlungsflüsse zu unterschiedlichen Zeiten auftreten, sind diese zunächst nicht vergleichbar.
- Um sie vergleichbar zu machen, werden diese auf den Zeitpunkt der Investitionsentscheidung zurückgerechnet, also abgezinst.



Der Kapitalwert einer Investition wird berechnet, indem…

- …alle Einnahmen (e_1, …, e_n und R) abgezinst und addiert werden und
- …alle Ausgaben (A und k_1, …, k_n) abgezinst und abgezogen werden.

Investitionsrechnung



Modell: Fortsetzung

- A wird nicht abgezinst (Periode 0)
- Alle k_i werden abgezinst zu k_i / q^i
- Alle e_i werden abgezinst zu e_i / q^i
- R wird abgezinst zu R / q^n
- Der Kapitalwert wird demnach berechnet als

$$C = -A + \frac{e_1}{q} + \frac{e_2}{q^2} + \ldots + \frac{e_n}{q^n} - \frac{k_1}{q} - \frac{k_2}{q^2} - \ldots - \frac{k_n}{q^n} + \frac{R}{q^n}$$

$$= -A + \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i - k_i}{q^i} + \frac{R}{q^n}$$

Investitionsrechnung

Anmerkungen

- Wenn der Kapitalwert größer ist als 0, dann ist die Investition rentabel.
- Der Kapitalwert kann genutzt werden, um mehrere Investitionsideen zu vergleichen.

Eventuelle Schwierigkeiten

- Sollzinssatz und Habenzinssatz sind meistens unterschiedlich.
- Zukünftige Zahlungsströme können nur geschätzt werden.
- Einnahmen und Ausgaben nach Ablauf der Betrachtungsdauer werden nicht (oder höchstens im Zusammenhang mit dem Restwert) berücksichtigt.

Wirtschaftsmathematik

Analysis – Einführung in die Funktionen

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Analysis

- Einführung in die Funktionen
  - Definition & Darstellungsarten
  - Definitionsbereich, Wertebereich, Bildbereich, Intervalle
  - Eineindeutigkeit & Monotonie
  - Umkehrfunktion
  - Preis-Absatz-Funktion
  - Kostenfunktion
- Funktionsarten
  - Ganzrationale Funktionen / Polynomfunktionen
  - Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen
  - Anzahl & Arten von Nullstellen
  - Grenzwerte / Asymptoten
  - Symmetrie
  - Stetigkeit

Inhalte der Analysis

- Differentialrechnung
  - Differenzenquotient, Differentialquotient, Ableitungsfunktion
  - Durchschnittskosten & Grenzkosten
  - Ableitungsregeln: Summationsregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, Umkehrregel
  - Erlösfunktion, Erlösmaximum
  - Lokales / globales Maximum / Minimum / Extremum
  - Rechts-/Linkskrümmung, konvex, konkav
  - Wendepunkt
  - zweite / dritte Ableitung, höhere Ableitungen
  - Funktionsdiskussion mit der Differentialrechnung

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Analysis

- Elastizität und Optimierung
  - (Preis-)elastizität des Absatzes
  - (preis-)elastisch, (preis-)unelastisch
  - Gewinnfunktion
  - Nutzenschwelle, Nutzengrenze
  - Gewinnlinse
  - Cournotscher Punkt
- Integralrechnung
  - Riemann-Integral; Ober- & Untersumme
  - Unbestimmtes Integral
  - Stammfunktion
  - Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
  - Konsumenten- & Produzentenrente

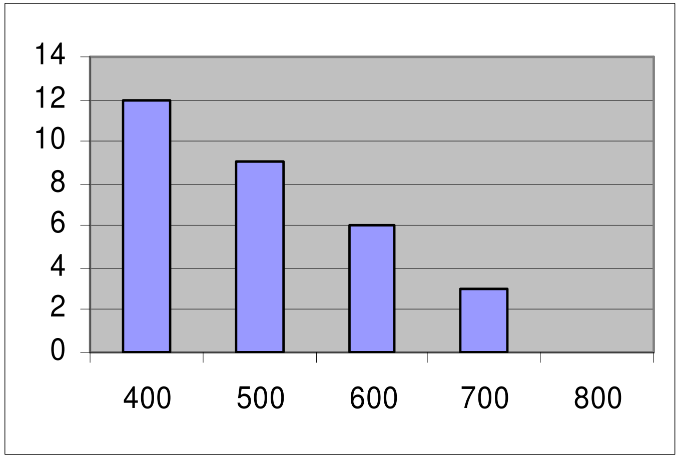
Beispiel: Computerhändler

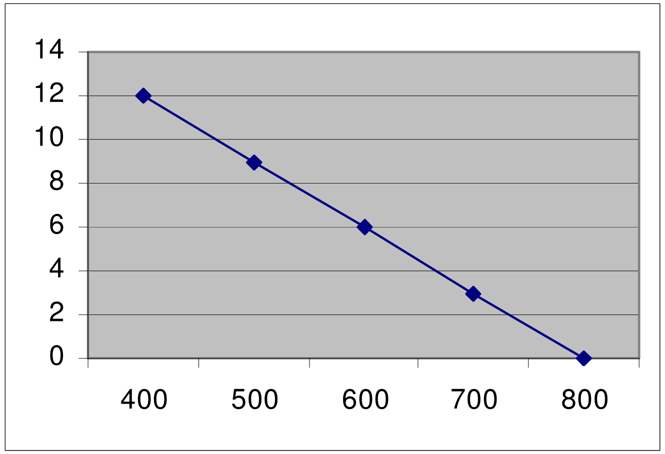
- Ein Computerhändler experimentiert mit Preisen für Laptops vom Typ Lappi XS 2/512. Wenn er das Laptop
  - für 400 EUR anbietet (Werbung in der Tageszeitung), dann verkauft er am Tag 12 Stück.
  - Wenn er es für 500 EUR anbietet, verkauft er 9 Stück.
  - Für 600 EUR verkauft er 6 Stück.
  - Für 700 EUR verkauft er 3 Stück.
  - Für 800 EUR verkauft er 0 Stück.
  - Er fasst dies in einer **<u>Zuordnungstabelle</u>** zusammen:

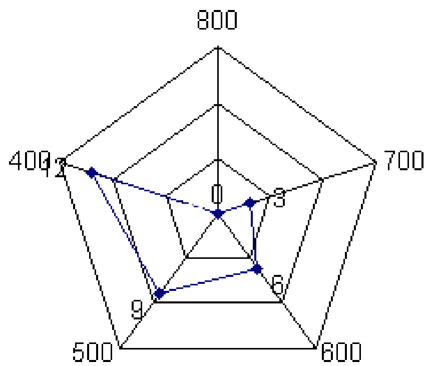
Angebots-preis (EUR)	verkaufte Stückzahl
400	12
500	9
600	6
700	3
800	0

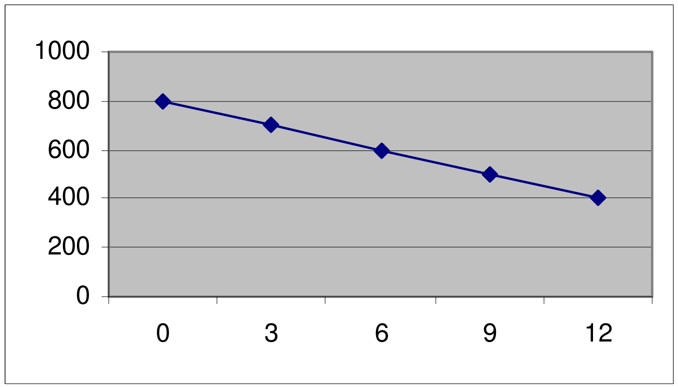
Beispiel: Computerhändler

- Unser Händler möchte gerne die gefundenen Werte in Diagrammen darstellen, z.B.:



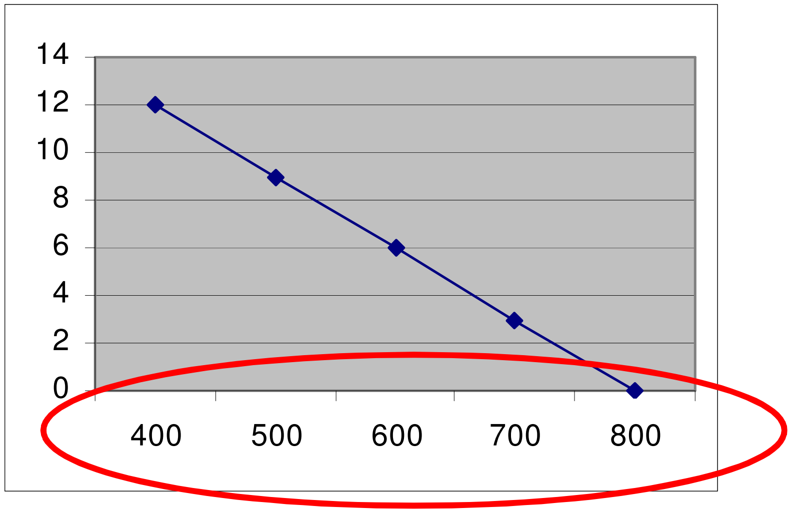






Beispiel: Computerhändler

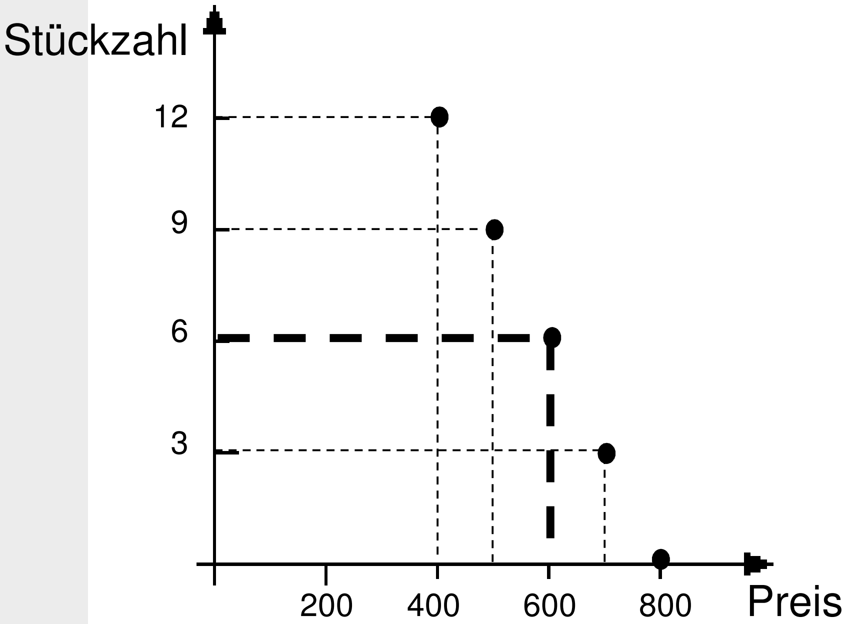
- Welches Diagramm ist am besten geeignet?
- In der Mathematik geht man vor wie folgt:
  - Der Händler kann den Preis unabhängig festlegen, d.h. der Preis ist eine **unabhängige Größe**.
  - Die verkaufte Stückzahl hängt vom Preis ab, d.h. die Stückzahl ist eine **abhängige Größe**.
  - In der Mathematik schreibt man die unabhängigen Größen an die waagrechte Achse (x-Achse):



Angebots-preis (EUR)	verkaufte Stückzahl
400	12
500	9
600	6
700	3
800	0

Beispiel: Computerhändler

- Genauer:
  - Man zeichnet eine waagerechte und eine senkrechte Achse.
  - Auf der waagerechten Achse zeichnet man die unabhängigen Werte ein. Meistens beginnt man bei 0.
  - Zu jedem unabhängigen Wert geht man soweit nach oben, wie es dem abhängigen Wert entspricht. Bsp.:

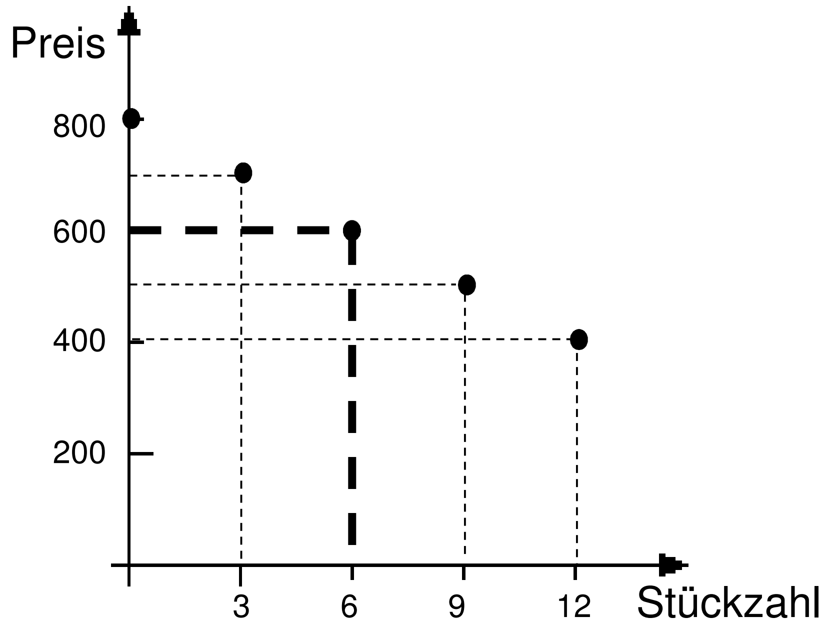


Angebots-preis (EUR)	verkaufte Stückzahl
400	12
500	9
600	6
700	3
800	0

Beispiel: Computerhändler

- In der Wirtschaftsmathematik, z.B. in der Volkswirtschaftslehre schreibt man die Preise (fast immer) an die senkrechte Achse.

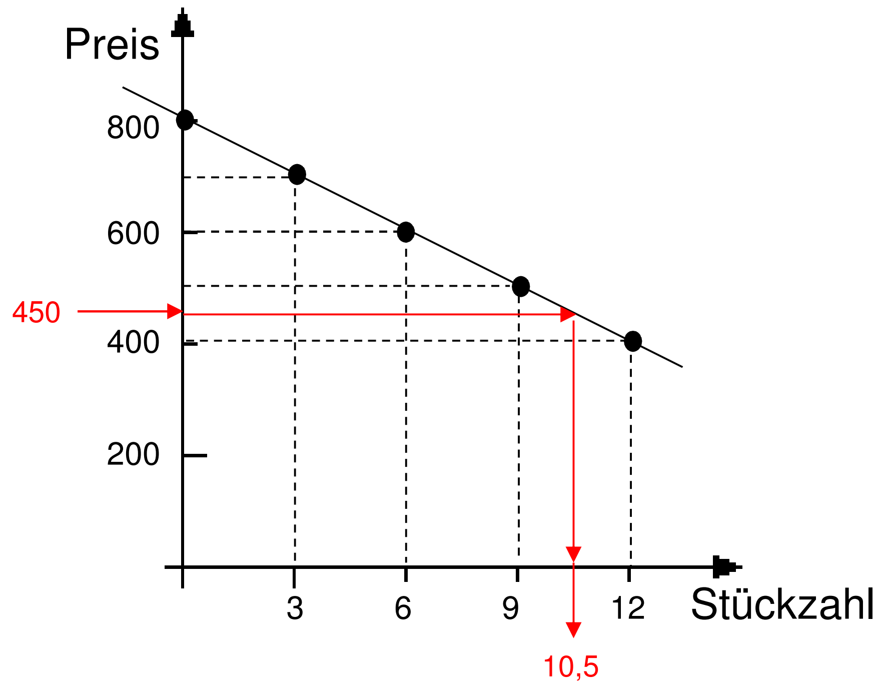
Angebotspreis (EUR)	verkaufte Stückzahl
400	12
500	9
600	6
700	3
800	0



- Beobachtung: Man erhält für dieselben Daten ein anderes Diagramm.

Beispiel: Computerhändler

- Bisher hat unser Händler nur 5 experimentelle Werte
  - Er fragt sich, wie viele Laptops er für EUR 450 verkaufen könnte.
  - Er nimmt das Diagramm und verbindet die Punkte.

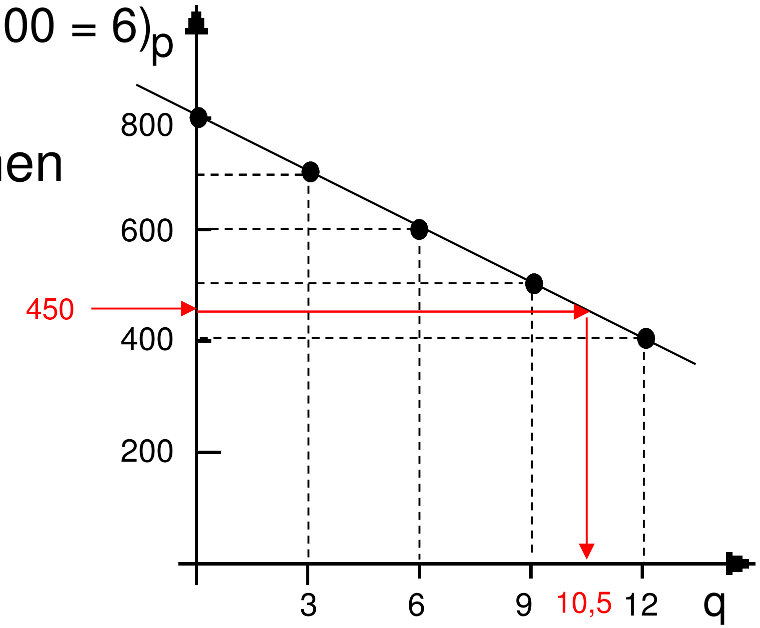


Beispiel: Computerhändler

- Jetzt fragt sich unser Händler, ob er für jeden möglichen Preis p ermitteln kann, wie viele Laptops (Anzahl q) er für diesen Preis verkaufen könnte.
  - Anmerkung: p – price, q – quantity (Menge)
- Er stellt fest, dass q hier immer = $24 - 3 \cdot p/100$ ist

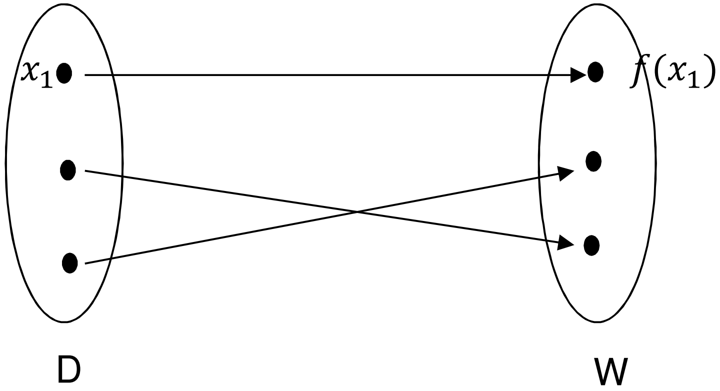
  (für p = 400 ist z.B. $q = 24 - 3 \cdot 400/100 = 12$,

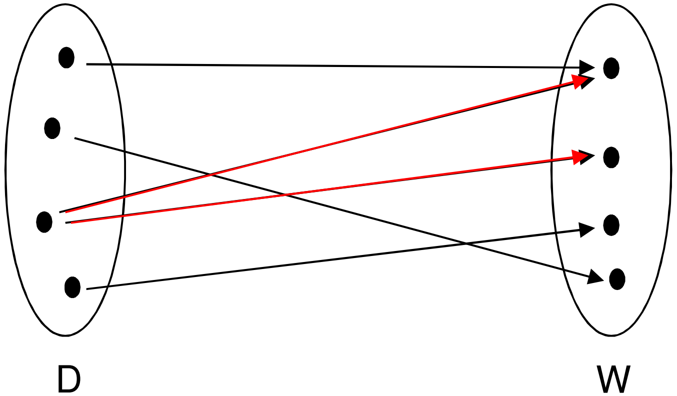
  für p = 600 ist $q = 24 - 3 \cdot 600/100 = 6$)
- Diese Zuordnungsvorschrift erlaubt ihm, zu jedem möglichen Preis die dazu mögliche Verkaufszahl zu ermitteln.



Funktionen

- Eine **<u>Funktion</u>** f ist gegeben, wenn
  - wir eine Menge D **unabhängiger** Größen haben,
  - jedem Element x ∈ D **genau ein Wert** f(x) ∈ W **zugeordnet** wird.





Funktionen

- Eine **<u>Funktion</u>** f ist gegeben, wenn
  - wir eine Menge D **unabhängiger** Größen haben,
  - jedem Element $x \in D$ **genau ein Wert** $f(x) \in W$ **zugeordnet** wird.

- Genauer / symbolisch:
  - $D \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Menge reeller Zahlen – der **<u>Definitionsbereich</u>**
  - $W \subseteq \mathbb{R}$ ist eine Menge reeller Zahlen – der **<u>Wertebereich</u>**
  - Die Funktion $f: D \rightarrow W, x \mapsto f(x)$
    ordnet jedem $x \in D$ genau einen Funktionswert $f(x) \in W$ zu.
  - Oft schreibt man $y = f(x)$, also
    „dem x wird das y zugeordnet“ bzw. „x wird auf y abgebildet".

Funktionen

- Im Beispiel unseres Computerhändlers
  - haben wir bereits zwei verschiedene Funktionen betrachtet
- Im ersten Fall war

  D = {400, 500, 600, 700, 800}

  W = {0, 3, 6, 9, 12}

  Die Zuordnung (Funktion) konnte man vollständig hinschreiben, als **Zuordnungstabelle** bzw. **Wertetabelle**

Angebotspreis (EUR)	verkaufte Stückzahl
400	12
500	9
600	6
700	3
800	0

- Im zweiten Fall war

  $D = \mathbb{R}$, $W = \mathbb{R}$ und die Funktion

  $q: D \rightarrow W$ bzw. $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wurde

  durch eine **Zuordnungsvorschrift** angegeben:

  Für alle $p \in D$ ist $p \mapsto q(p) = 24 - 3 \cdot p/100$

Endlicher Definitionsbereich

- Allgemeiner:
  - Wenn der Definitionsbereich einer Funktion nur endlich viele Elemente besitzt, kann man die Funktion durch eine Wertetabelle festlegen.
  - Bsp.: $D = \{1, 2, 3, 4\}$, $W = \mathbb{R}$

Beispiel

$x \in D$	$f(x)$
1	3
2	2
3	3
4	-1

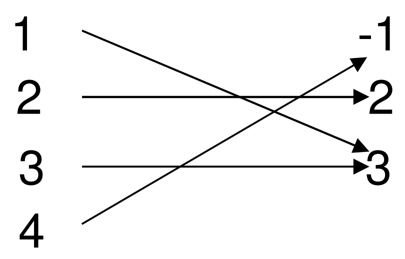
- Weitere Darstellungen für endliche Definitionsbereiche:

$$f(1) = 3 \quad f(2) = 2 \quad f(3) = 3 \quad f(4) = -1$$

oder

$$1 \mapsto 3 \quad 2 \mapsto 2 \quad 3 \mapsto 3 \quad 4 \mapsto -1$$

oder

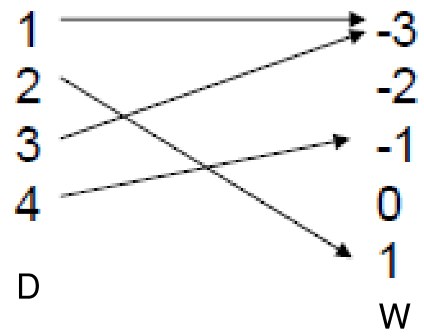


Pfeildarstellung

Funktionen

- Erinnerung:
  - **Jedem** x∈D wird **genau ein** f(x) ∈ W zugeordnet

- Beobachtung:
  - Nicht jedes f(x) ∈W wird von einem Pfeil getroffen
  - Manche f(x) ∈W können von mehr als einem Pfeil getroffen werden



- Achtung:
  - Keine Funktion, da keine eindeutige Zuordnung, da a(1)= -3 und a(1)= -1

Wertetabelle

x	1	2	3	1
a(x)	-3	1	-3	-1

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Übung

Aufgabe (8 min Zeit):

In der Fahrschule lernt man eine Faustregel zur Berechnung des Bremsweges in Metern: „Dividiere die Geschwindigkeit (in $\frac{km}{h}$) durch 10 und multipliziere das Ergebnis mit sich selbst.“

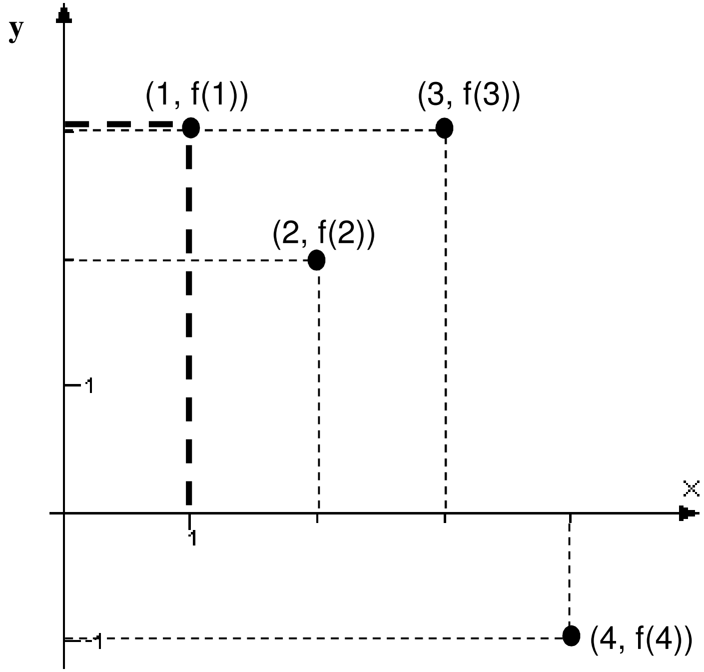
a.) Ist die Zuordnung Geschwindigkeit -> Bremsweg eine Funktion?

b.) Bestimmen Sie einen Term, der diesen Zusammenhang beschreibt (x=Geschwindigkeit; y=Bremsweg).

c.) Finden Sie drei alltägliche Zusammenhänge, bei denen es sich um Funktionen handelt.

Diagrammdarstellung

- Wie im Beispiel des Computerhändlers,
  - können wir eine Funktion f in einem Diagramm darstellen,
  - indem wir für jedes $x \in D$
  - den Punkt (x, f(x)) in einem Diagramm einzeichnen.
- Endlicher Definitionsbereich



Beispiel

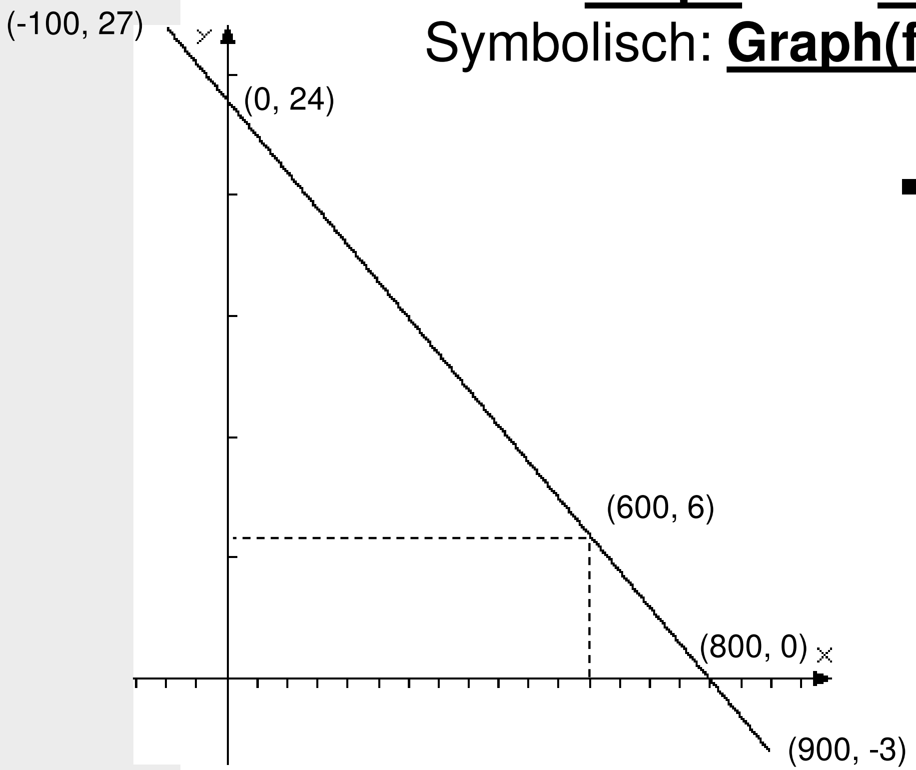
$x \in D$	f(x)
1	3
2	2
3	3
4	-1

Unendlicher Definitionsbereich

- Ein unendlicher Definitionsbereich könnte z.B. sein
  – $D = \mathbb{R}$ oder D = <Intervall> $\subseteq \mathbb{R}$
- Abgeschlossenes Intervall für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \leq b$:
  – **abgeschlossenes Intervall**: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$
    (lies: Menge aller x, für die gilt: $a \leq x$ und $x \leq b$)
  – **offenes Intervall**: $]a, b[= (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
- Anmerkung:
  – Es gibt auch **halboffene Intervalle**: $[a, b)$ und $(a, b]$ und **unendliche Intervalle** $[a, \infty)$, (a, ∞), $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$, $(-\infty, \infty)$

Diagrammdarstellung / Graph

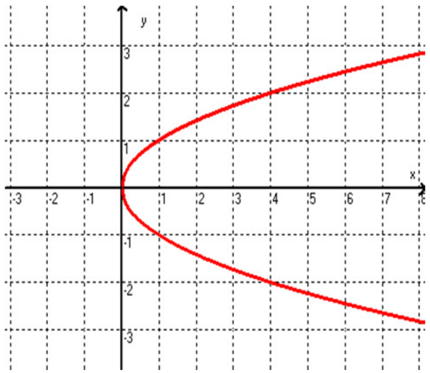
- Beispiel Computerhändler:
  D = [-100, 900], W = ℝ, f(x) = $24 - \frac{3x}{100}$
- Diagrammdarstellung: Die Menge aller Punkte (x, f(x)) mit x ∈ D heißt **<u>Graph</u>** oder **<u>Schaubild</u>** der Funktion f.
  Symbolisch: **<u>Graph(f)</u>**



- Anmerkung:
  - Bei diesem Beispiel handelt es sich um die Zuordnungsvorschrift unseres Computerhändlers
  - allerdings auf einem anderen Definitionsbereich
  - Wir werden das später noch einmal genauer betrachten.

Diagrammdarstellung / Graph

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

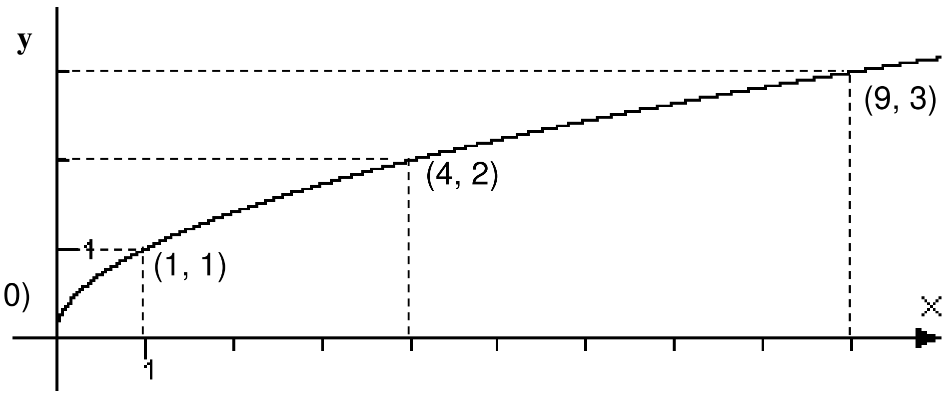


- Beispiel:
- f(x) = $\pm\sqrt{x}$,
  speziell f(1) = +1 und f(1) = -1
  – **Ist keine Funktion!**

Deshalb gilt für die **Wurzelfunktion:**

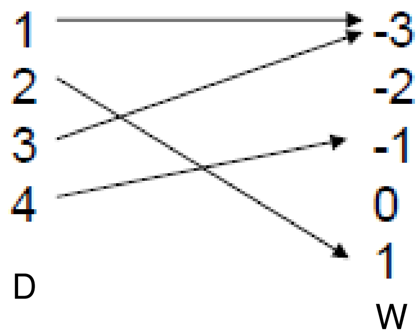
$D = [0, \infty)$, $W = [0, \infty)$, $f(x) = \sqrt{x}$

- Graph(f) = Menge aller Punkte $(x, \sqrt{x})$ mit $x \in D$



Wertebereich und Bildbereich

- Im Wertebereich W einer Funktion f: D → W
  - liegen alle Bildwerte f(x) für $x \in D$
  - und vielleicht noch viel mehr Werte
  - Bsp.:



- Der **<u>Bildbereich</u>** B einer Funktion f: D → W umfasst
  - **nur** die Werte, die auch wirklich als f(x) für ein $x \in D$ angenommen werden, also
  - $B = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{es gibt ein } x \in D \text{ mit } f(x) = y\}$
  - Zum obigen Beispiel: B={-3, -1, 1}

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Wertebereich und Bildbereich

- Grundsätzlich kann eine Funktion f: D → W
  - auch als f: D → B geschrieben werden, d.h.
  - B ist immer der kleinste mögliche Wertebereich von f.
- Anmerkung:
  - Wenn es auf den genauen Bildbereich nicht ankommt, nimmt man als Wertebereich zunächst meistens W = $\mathbb{R}$.
  - Wenn es auf den Bildbereich ankommt, nimmt man W = B.

Übung

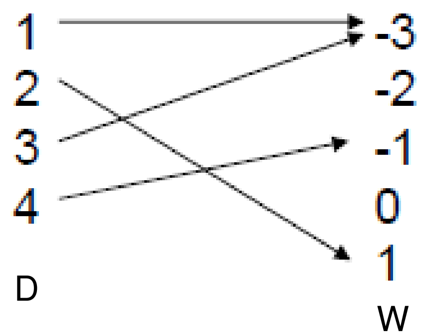
Aufgabe (8 min Zeit):

a.) Zeichnen Sie den Graph der Funktion f mit $f(x)=0{,}5x^2$ für $-4 \leq x \leq 4$.
(Tipp: Fertigen Sie zunächst eine Wertetabelle)

b.) Geben Sie den Definitionsbereich und den Bildbereich an.

Eineindeutige Funktionen

- Funktionen sind eindeutig, weil es zu jedem x genau ein f(x) gibt.
- Funktionen heißen **eineindeutig (oder bijektiv)**, wenn jedes f(x) auch nur genau einmal vorkommt.



Dieses Beispiel ist **nicht** eineindeutig!

Umkehrfunktion

- Wenn eine Funktion eineindeutig ist, dann gibt es zu jedem $f(x) \in W$ genau ein $x \in D$, das auf $f(x)$ abgebildet wird.
- Wird eine solche Abbildung umgekehrt, d.h. $f(x) \rightarrow x$, erhält man dann wieder eine eindeutige Zuordnung und damit eine Funktion.
- Diese Funktion heißt **Umkehrfunktion** von f und wird mit f^{-1} bezeichnet.

- Ergebnis:
  – Durch $f^{-1}: W \rightarrow D$, $y \mapsto f^{-1}(y)$ wird eine weitere Funktion definiert, die wir die **<u>Umkehrfunktion</u>** von f nennen.

Umkehrfunktion

- Beispiel Wertetabelle 1:

$x \in D$	1	2	3	4
$f(x)$	3	2	3	-1

  → f(1)=f(3)=3, also nicht eineindeutig, also nicht umkehrbar

- Beispiel Wertetabelle 2:
  → Eineindeutige Zuordnung
  also umkehrbar mit $f^{-1}: W \to D$

$x \in D$	1	2	3	4
$f(x) \in W$	3	2	0	-1

$y \in W$	-1	0	2	3
$f^{-1}(y) \in D$	4	3	2	1

- Beispiel 2 in Pfeildarstellung:

$$
\begin{array}{ccc}
D & f & W \\
1 & \longrightarrow & 3 \\
2 & \longrightarrow & 2 \\
3 & \longrightarrow & 0 \\
4 & \longrightarrow & -1
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
D & f^{-1} & W \\
1 & \longleftarrow & 3 \\
2 & \longleftarrow & 2 \\
3 & \longleftarrow & 0 \\
4 & \longleftarrow & -1
\end{array}
$$

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Übung

Aufgabe (4 min Zeit):

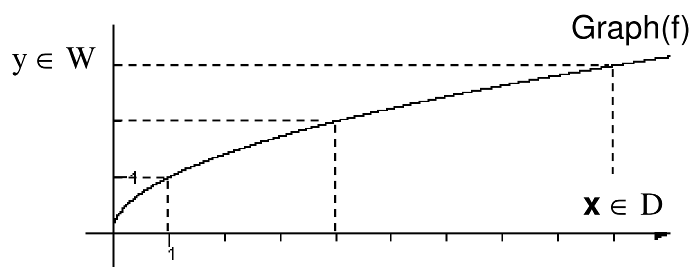
Begründen Sie, ob die Umkehrung der von Ihnen gefundenen Funktionen aus der vorletzten Übung (Folie Nr. 17) auch Funktionen sind.

Umkehrfunktion

- Anmerkung: An der Pfeildarstellung erkennt man
  - Es gilt $y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
  - Für $x \in D$ ist $f^{-1}(f(x)) = x$ und für $y \in W$ ist $f(f^{-1}(y)) = y$

- Beispiel Wurzelfunktion / Quadratfunktion:
  - $f: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), x \mapsto \sqrt{x}$ ist eineindeutig, also umkehrbar.
  - Die Umkehrfunktion ist $f^{-1}: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty), y \mapsto y^2$ denn

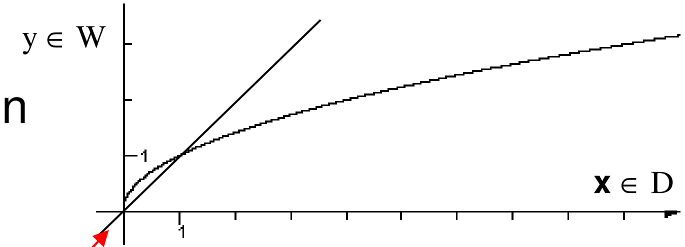
$$f(x) = y \Leftrightarrow \sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2 \Leftrightarrow x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow f^{-1}(y) = y^2$$



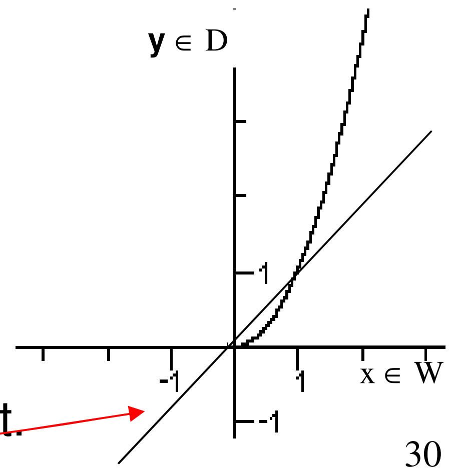
Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Graph der Umkehrfunktion

- Anmerkung:
  - Der Graph von f ist die Menge der Punkte (x, f(x)) mit $x \in D$.
  - Dieser entspricht der Menge der Punkte $(f^{-1}(y), y)$ mit $y \in W$.
- Häufig werden aber
  - beim Übergang zur Umkehrfunktion
  - die Variablen x und y vertauscht.

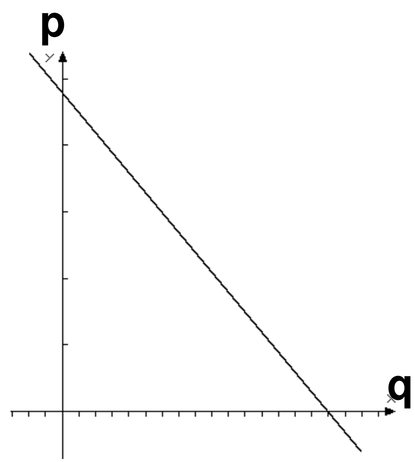


- Anstatt
  $f^{-1}: W \rightarrow D, y \mapsto x = y^2$ wird dann geschrieben
  $f^{-1}: W \rightarrow D, x \mapsto y = x^2$
- Durch diesen Variablentausch
  - wird die Rolle von x und y im Graph von f vertauscht.
  - Der Graph wird dadurch an der Diagonalen (1. Winkelhalbierenden) gespiegelt.



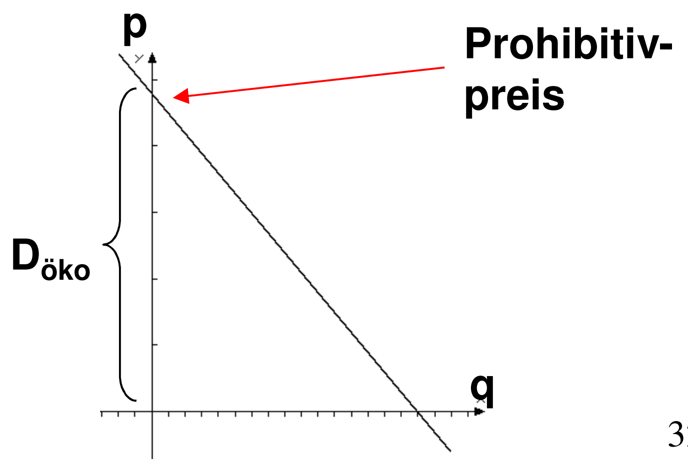
Preis-Absatz-Funktion

- Erinnerung:
  - Der Computerhändler hat den Zusammenhang $q = 24 - 3 \cdot p/100$ heraus gefunden und kann damit zu jedem möglichen Preis die dazu mögliche Verkaufszahl ermitteln.
- Damit ist eine Funktion definiert, denn
  - jedem Preis p ist **genau eine** Verkaufszahl q zugeordnet
  - Man nennt diese die **<u>Preis-Absatz-Funktion</u>** des Computerhändlers.
  - In der Volkswirtschaftslehre ist das die **Nachfragefunktion**.
- Erinnerung / Konvention in der VWL:
  - Der Preis (price, p) steht immer an der senkrechten Achse,
  - der Absatz (quantity, q) steht an der waagerechten Achse



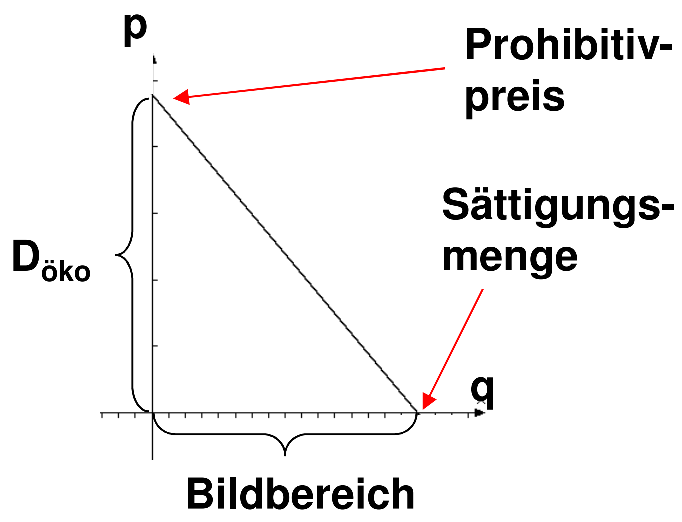
Preis-Absatz-Funktion

- Erinnerung:
  - Jede Funktion braucht Definitionsbereich und Wertebereich.
- Was ist der Definitionsbereich der Preis-Absatz-Funktion?
  - Ein Preis von unter 0 EUR ist nicht sinnvoll. Die Menge, die bei einem Preis von 0 EUR „verkauft“ wird, ist die **Sättigungsmenge**.
  - Es ist auch nicht sinnvoll, einen Preis zu verlangen, zu dem kein einziges Stück mehr verkauft wird. Den kleinsten Preis, bei dem nichts mehr verkauft wird, nennt man **Prohibitivpreis**
  - Der **ökonomisch sinnvolle Definitionsbereich $D_{öko}$** der Preis-Absatz-Funktion ist das abgeschlossene Intervall von 0 bis zum Prohibitivpreis, also [0, <Prohibitivpreis>].



Preis-Absatz-Funktion

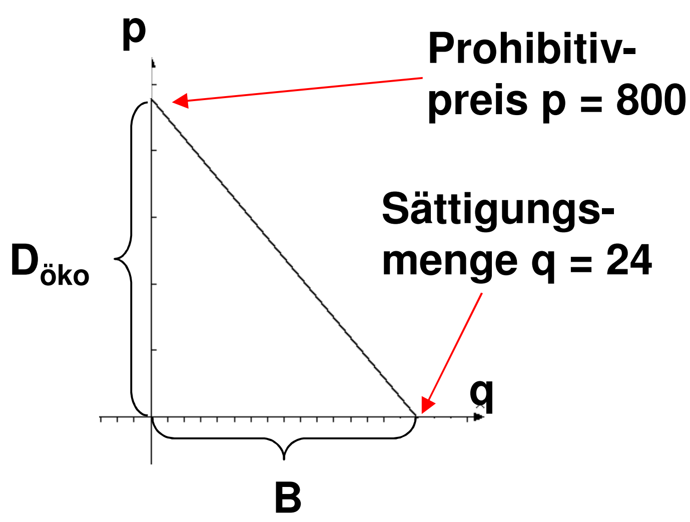
- Was ist der Wertebereich der Preis-Absatz-Funktion?
  - Grundsätzlich möglich: $\mathbb{R}$
- Erinnerung:
  - Der kleinste mögliche Werte-bereich ist der Bildbereich.
- Betrachte den Graph:
  - Wenn p den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich durchläuft,
  - nimmt q jeden Wert an, der zwischen 0 und der Sättigungsmenge liegt.



- Ergebnis:
  - Der (ökonomisch sinnvolle) Bildbereich der Preis-Absatz-Funktion ist das abgeschlossene Intervall [0, <Sättigungsmenge>]

Beispiel: Computerhändler

- Anwendung:
  - Unser Computerhändler hat die Preis-Absatz-Funktion
    $q: D \rightarrow W,\ p \mapsto q(p) = 24 - 3 \cdot p/100$
  - Für $p = 800$ ist $q(p) = q(800) = 24 - 3 \cdot 800/100 = 0$, also ist 800 EUR der Prohibitivpreis.
  - Für $p = 0$ ist $q(p) = q(0) = 24 - 3 \cdot 0/100 = 24$, also ist 24 die Sättigungsmenge dieses Marktes.
  - Deshalb ist der ökonomisch sinnvolle Definitions- bzw. Bildbereich der Funktion
    $D_{öko} = [0, 800]$ bzw. $B = [0, 24]$.



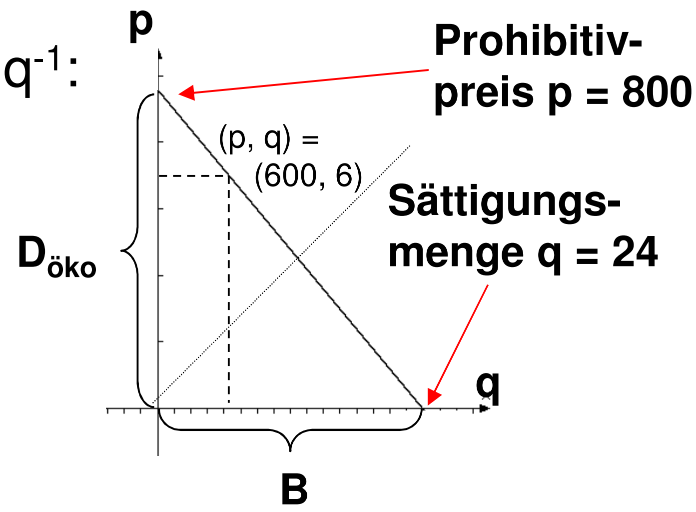
Beispiel: Computerhändler

- Anwendung:
  - Die Preis-Absatz-Funktion ist eineindeutig, also umkehrbar.

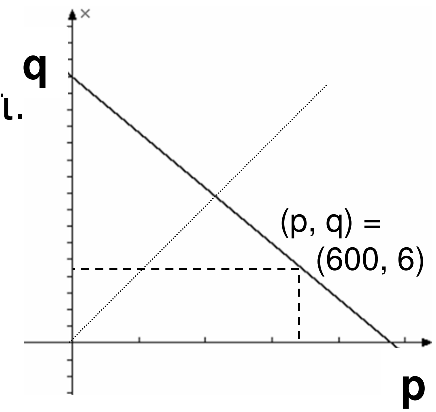
- Umkehrfunktion:
  - Aus $q = 24 – 3p/100$ folgt $3p/100 = 24 – q$, also $p = (100 / 3)\cdot(24 – q) = 800 – 100\cdot q / 3$
  - Also ist $q^{-1}(q)= p = 800 – 100q / 3$
  - bzw. $q^{-1}: B \rightarrow D_{öko}$, $q \mapsto 800 – 100q / 3$

Beispiel: Computerhändler

- Betrachte die Graphen von q bzw. q^{-1}:
  - Solange p an der senkrechten und q an der waagerechten Achse eingezeichnet wird, sind die Graphen von $q(p) = 24 – 3 \cdot p/100$ und $p(q) = 800 – 100q / 3$ identisch.

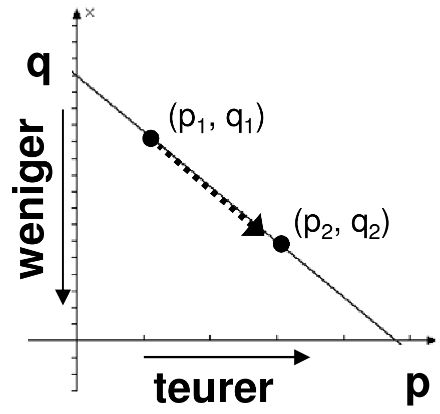


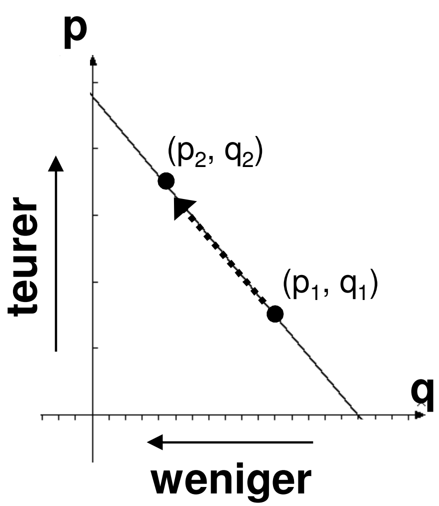
  - Test: Betrachte jeweils (p, q) = (0, 24), (800, 0) und (600, 6)
- Wenn die p- und die q-Achse vertauscht werden,
  - wird der Graph an der Diagonalen gespiegelt.



Beispiel: Computerhändler

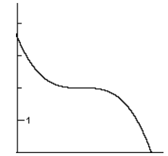
- Beobachtungen:
  - Je teurer der Händler verkauft, desto weniger verkauft er.
  - Mit anderen Worten:
    Wenn $p_2 > p_1$, dann ist $q_2 < q_1$.
  - Wenn man p an der waagerechten Achse einzeichnet, bildet der Graph eine absteigende (fallende) Linie.
  - Man spricht hier von Monotonie.
- Weitere Beobachtung:
  - Wenn man p an der senkrechten Achse einzeichnet, fällt der Graph ebenfalls.
  - Darauf kommen wir gleich nochmal zurück.



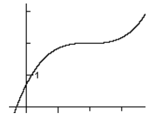


Monotonie

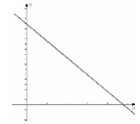
- Allgemein heißt eine Funktion f: D → W
  - **monoton fallend**,
    wenn für alle x_1, $x_2 \in$ D mit $x_1 > x_2$ immer gilt: $f(x_1) \leq f(x_2)$,



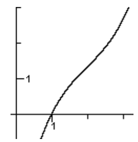
  - **monoton wachsend (steigend)**,
    wenn für x_1, $x_2 \in$ D mit $x_1 > x_2$ immer gilt: $f(x_1) \geq f(x_2)$,



  - **streng monoton fallend**,
    wenn für alle x_1, $x_2 \in$ D mit $x_1 > x_2$ immer gilt: $f(x_1) < f(x_2)$,

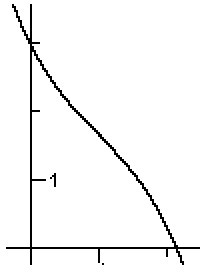


  - **streng monoton wachsend (steigend)**,
    wenn für x_1, $x_2 \in$ D mit $x_1 > x_2$ immer gilt: $f(x_1) > f(x_2)$,



- Anmerkung:
  - Man kann z.B. die Eigenschaft „monoton fallend“ auch kürzer darstellen durch: $\forall\ x_1, x_2 \in D: x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$

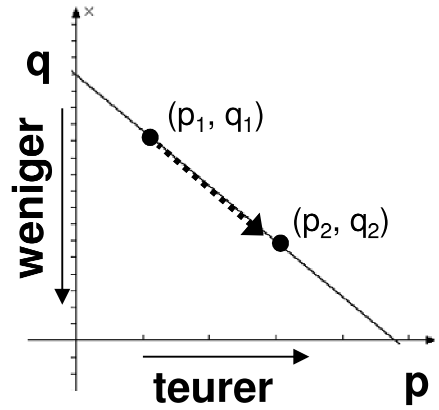
Monotonie



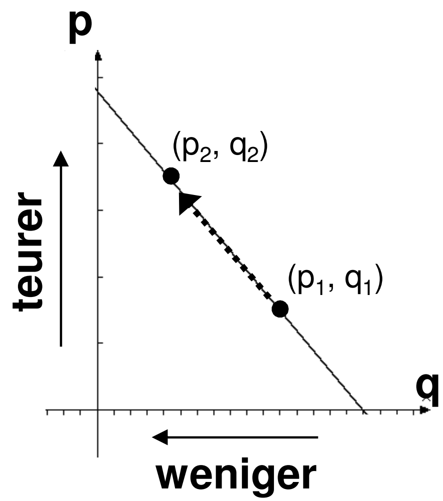
- Satz:
  a) Eine streng monotone Funktion f: D → B (B ist der Bildbereich) ist eineindeutig.
  b) Dann besitzt f: D → B also eine Umkehrfunktion
     $f^{-1}: B \to D$
  c) f^{-1} ist ebenfalls streng monoton.
- Begründung zu c.):
  – Zu y_1, y_2 (aus B) gibt es wegen der Eineindeutigkeit eindeutig x_1, x_2 (aus D), so dass $y_1 = f(x_1)$ und $y_2 = f(x_2)$ bzw. $x_1 = f^{-1}(y_1)$ und $x_2 = f^{-1}(y_2)$.
    Ist $y_1 < y_2$, also $f(x_1) < f(x_2)$, dann kann x_1 weder kleiner noch gleich x_2 sein, also ist $f^{-1}(y_1) = x_1 > x_2 = f^{-1}(y_2)$.

Beispiel: Computerhändler

- Erinnerung:
  - Eine Preis-Absatz-Funktion ist normalerweise monoton fallend.
  - Der Graph ist deshalb eine absteigende Kurve (oder Gerade).
  - Das gilt zunächst nur, wenn man den Preis auf der waagerechten Achse einträgt.

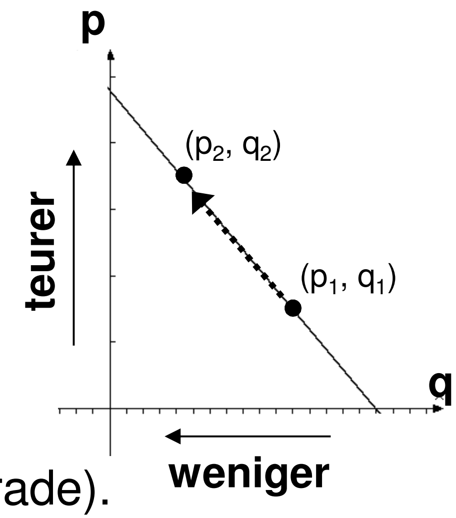


- Beobachtung:
  - Wenn man den Preis auf der senkrechten Achse einträgt, wird der Graph an der Diagonale gespiegelt.
  - Dies entspricht dem Graph der Umkehrfunktion (nachdem man die Variablen vertauscht hat).

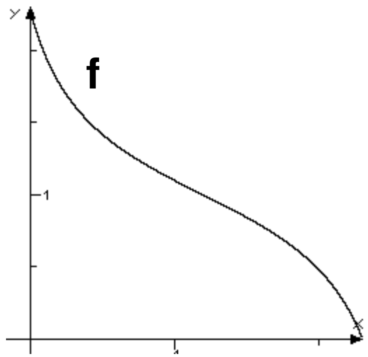


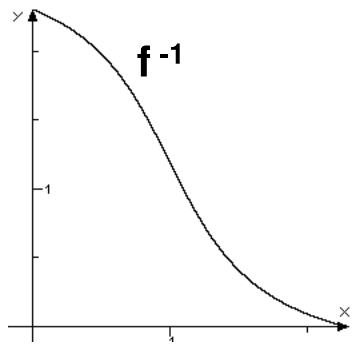
Beispiel: Computerhändler

- Anwendung des Satzes:
  - Wenn die Preis-Absatz-Funktion sogar streng monoton fällt, dann gibt es eine Umkehrfunktion, die ebenfalls streng monoton fällt.
  - Der Graph der Umkehrfunktion ist also ebenfalls eine absteigende Kurve (oder Gerade).



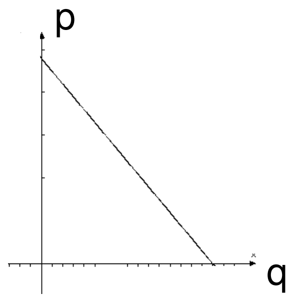
- Graphisches Beispiel für eine nicht-lineare Funktion:



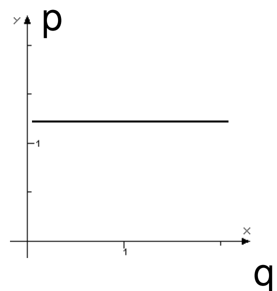


Preis-Absatz-Funktion

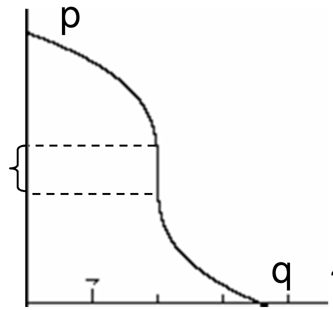
- In einem Monopol-Markt
  - geht man von streng monoton fallenden Preis-Absatz-Funktionen aus: Nur der Preis entscheidet über den Absatz



- Bei vollständiger Konkurrenz
  - geht man von einem festen Preis p_0 aus, so dass der Absatz nicht vom Preis abhängt.
  - Beobachtung: Zu p_0 gibt es also mehrere Absatzwerte $q_1 = q(p_0)$, $q_2 = q(p_0)$, etc.
  - Es gibt also **keine Preis-Absatz-Funktion** $q: D \rightarrow W, p \mapsto q(p)$



- Bei einem (z.B. lebensnotwendigen) Gut reagiert der Absatz
  - in einem bestimmten Bereich evtl. gar nicht auf eine Preisänderung.
  - In dem Fall ist die Preis-Absatz-Funktion nicht streng monoton, es gibt also keine Umkehrfunktion.

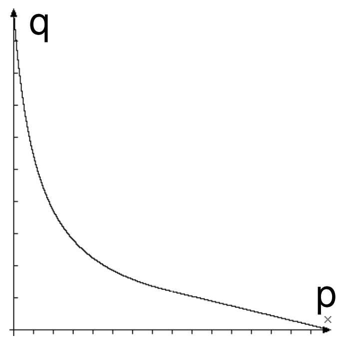


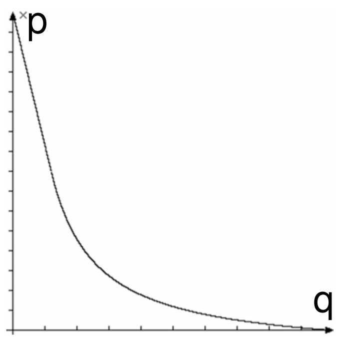
Beispiel: Computerhändler

- Unser Computerhändler
  - hatte ursprünglich nur die nebenstehenden Werte.

Angebots-preis (EUR)	verkaufte Stückzahl
400	12
500	9
600	6
700	3
800	0

- Es ist davon auszugehen, dass er
  - für sehr niedrige Preise wesentlich mehr (allerdings unprofitablen) Absatz erzielt, dass die Preis-Absatz-Funktion also eher folgendermaßen aussieht:





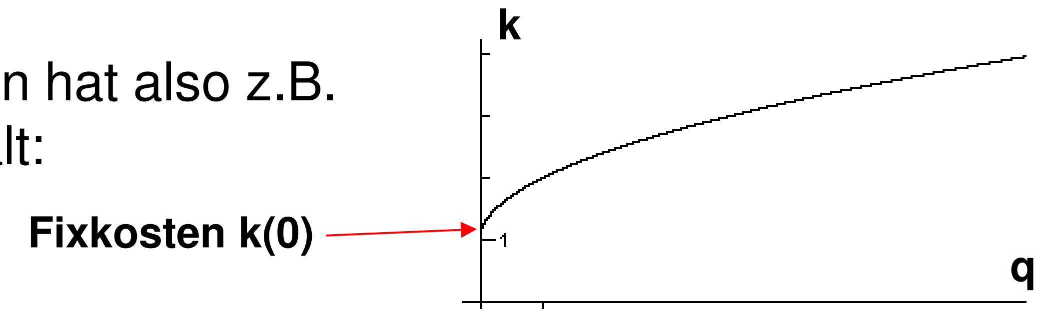
Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Kostenfunktion

- Eine weitere betriebswirtschaftlich wichtige Funktion ist die **Kostenfunktion k**: $D \rightarrow [0, \infty)$, $q \mapsto k(q)$, die
  - zu jeder produzierten Menge q angibt, wie hoch die Produktionskosten k(q) sind.
- Überlegungen:
  - Es ist nicht sinnvoll, von negativen Stückzahlen auszugehen, der Definitionsbereich ist also ein Intervall [0, M], wenn maximal M Stück produziert werden können.
  - Kosten sind in der Regel nicht negativ, der Wertebereich ist also ebenfalls ein Intervall [0, K], wenn K die maximal zur Verfügung stehende Menge Geld ist.
  - Es ist teurer q+1 Stück zu produzieren als q Stück zu produzieren. Kostenfunktionen sind also (in aller Regel) streng monoton wachsend.
  - Auch wenn nichts produziert wird, fallen Kosten an (z.B. Miete). Es fallen also bereits für $q = 0$ die **Fixkosten** $k(0) \geq 0$ an.

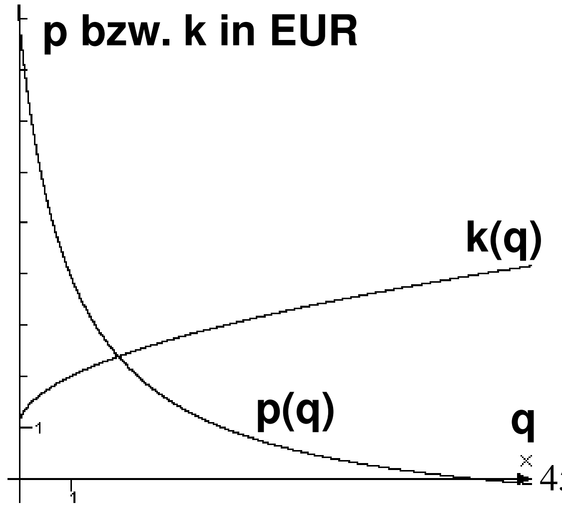
Kostenfunktion

- Eine Kostenfunktion hat also z.B. die folgende Gestalt:



- Anmerkung:
  – Die **Angebotsfunktion** der Volkswirtschaftslehre besitzt einige Analogien zur betriebswirtschaftlichen Kostenfunktion.
  – Für Kostenfunktionen ist es uneingeschränkt sinnvoll, die Stückzahlen auf der waagerechten Achse einzuzeichnen.
  – Das ist auch der Grund, warum man auch für Preis-Absatz-Funktionen die Stückzahlen auf der waagerechten Achse einzeichnet:

  → Man möchte beide Funktionen in dasselbe Schaubild zeichnen.



Wirtschaftsmathematik

Analysis: Arten und Eigenschaften von Funktionen

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Analysis

- Einführung in die Funktionen
  - Definition & Darstellungsarten
  - Definitionsbereich, Wertebereich, Bildbereich, Intervalle
  - Eineindeutigkeit & Monotonie
  - Umkehrfunktion
  - Preis-Absatz-Funktion
  - Kostenfunktion
- Funktionsarten
  - Ganzrationale Funktionen / Polynomfunktionen
  - Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen
  - Anzahl & Arten von Nullstellen
  - Grenzwerte / Asymptoten
  - Symmetrie
  - Stetigkeit

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Analysis

- Differentialrechnung
  - Differenzenquotient, Differentialquotient, Ableitungsfunktion
  - Durchschnittskosten & Grenzkosten
  - Ableitungsregeln: Summationsregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, Umkehrregel
  - Erlösfunktion, Erlösmaximum
  - Lokales / globales Maximum / Minimum / Extremum
  - Rechts-/Linkskrümmung, konvex, konkav
  - Wendepunkt
  - zweite / dritte Ableitung, höhere Ableitungen
  - Funktionsdiskussion mit der Differentialrechnung

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Analysis

- Elastizität und Optimierung
  - (Preis-)elastizität des Absatzes
  - (preis-)elastisch, (preis-)unelastisch
  - Gewinnfunktion
  - Nutzenschwelle, Nutzengrenze
  - Gewinnlinse
  - Cournotscher Punkt
- Integralrechnung
  - Riemann-Integral; Ober- & Untersumme
  - Unbestimmtes Integral
  - Stammfunktion
  - Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
  - Konsumenten- & Produzentenrente

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Erinnerung

- Als Handwerkszeug
  – müssen wir einige verschiedene Arten von Funktionen kennen.
- Erinnerung:
  – Die allgemeine Schreibweise ist $f: D \rightarrow W$, $x \mapsto f(x)$, mit $D \subseteq \mathbb{R}$ und $W \subseteq \mathbb{R}$ (Definitions- und Wertebereich)
- Als Definitionsbereich D
  – betrachten wir den mathematisch größtmöglichen Definitionsbereich (in $\mathbb{R}$),
  – denken aber daran, dass aus betriebswirtschaftlichen Gründen häufig ein viel kleinerer Definitionsbereich sinnvoll ist.
- Als Wertebereich
  – nehmen wir eine Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}$, die alle Funktionswerte enthält.
  – Der kleinstmögliche Wertebereich heißt Bildbereich $B = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{es gibt ein } x \in D \text{ mit } f(x) = y\}$

Ganzrationale Funktionen

- Eine **ganzrationale Funktion** (oder **Polynomfunktion**) vom **Grad n** ist
  - eine Funktion f: ℝ→ℝ, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$ mit reellen Zahlen a_0, a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, wobei $a_n \neq 0$
  - Diese ist auf ganz ℝ definiert.

- Beispiele:

$f(x) = 3x + 8$

(Funktion 1. Grades oder lineare Funktion)

$g(x) = -5x^2 + 0{,}068x - 4$

(Funktion 2. Grades oder quadratische Funktion)

$h(x) = -123x^5 + 8x^4 - 3x + 0{,}01$

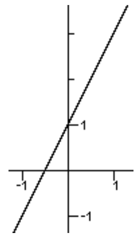
(Funktion 5. Grades)

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Lineare Funktionen

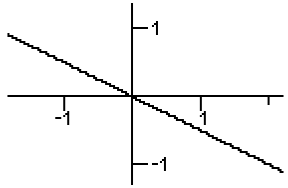
- **<u>Lineare Funktionen</u>** sind ganzrationale Funktionen (höchstens) 1. Grades:
  - f: ℝ→ℝ, f(x) = ax + b mit reellen Zahlen a und b.
- Beispiele:

$$f(x) = 2x + 1$$



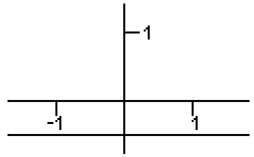
a=2, b=1

$$f(x) = -\frac{1}{2}x$$



a=-1/2, b=0

$$f(x) = -\frac{1}{2}$$



a=0, b=-1/2

- Beobachtungen:
  - Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade (wenn man zwei Punkte kennt, kann man den Graph zeichnen).
  - a ist die Steigung dieser Geraden.
    - a > 0: streng monoton wachsend, a < 0: streng monoton fallend
    - a groß → steil, a klein → flach
    - Der Graph kann niemals senkrecht werden (das wäre keine Funktion).
  - Für a = 0 haben wir den Sonderfall „konstante Funktion" (Parallele zur x-Achse).

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

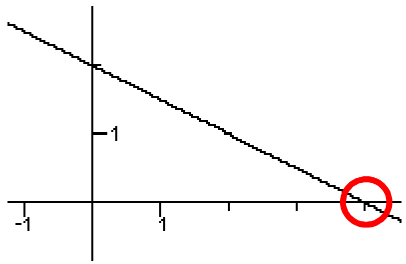
Nullstellen

- Der Graph schneidet die y-Achse im Punkt (0|b).
- Wo schneidet der Graph die x-Achse?
- Ein $x \in D$ mit $f(x) = 0$ heißt **<u>Nullstelle</u>** von f
- Beispiel:

  $a = -1/2$, $b = 2$, also $f(x) = -x/2 + 2$

  Für eine Nullstelle x muss gelten $f(x) = 0$,

  also $-x/2 + 2 = 0$, also $x/2 = 2$, also $x = 4$ (eindeutig).



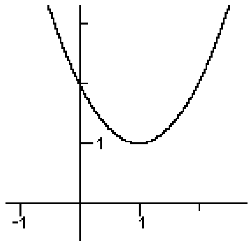
- Ergebnis:
  – Der Graph von f schneidet die x-Achse im Punkt N(4|0)
- Allgemeines Ergebnis für lineare Funktionen $f(x) = ax + b$:
  – Für $a \neq 0$ besitzt f genau eine Nullstelle, nämlich $x = -b / a$.
  – Für $a = 0$ und $b = 0$ ist jedes $x \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von f (der Graph von f verläuft auf der x-Achse).
  – Für $a = 0$ und $b \neq 0$ besitzt f keine Nullstelle.

Quadratische Funktionen

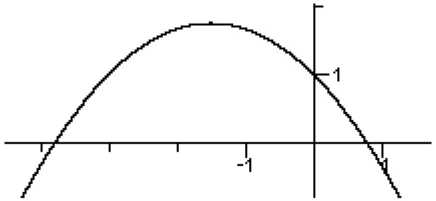
- **<u>Quadratische Funktionen</u>** sind ganzrationale Funktionen 2. Grades:
  - f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f(x) = ax² + bx + c mit reellen Zahlen a, b, c.
  - f(x) = ax² + bx + c nennt man Hauptform.
  - Es muss a $\neq$ 0 sein, sonst wäre es eine lineare Funktion.

- Beispiele:

$$f(x) = x^2 - 2x + 2$$



$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 - x + 1$$



- Der Graph ist immer eine **<u>Parabel</u>**.
  - Für a > 0 nach oben geöffnet, für a < 0 nach unten geöffnet.
  - Für betragsmäßig große a „eng“ für betragsmäßig kleine a „breit“.

Nullstellen

- Nullstellenberechnung (f(x)=0) mit Hilfe der
  - abc-Formel: $ax^2 + bx + c = 0$

    $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

  - pq-Formel: $x^2 + px + q = 0$

    $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

- Beobachtung:
  - **Diskriminante** D = b² - 4ac
  - 2 reelle Nullstellen für D > 0, eine für D = 0, keine für D < 0.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Übung

Aufgabe (8 min Zeit):

Bestimmen Sie den Schnittpunkt mit der y-Achse sowie die Nullstellen folgender Funktionen:

a.) $f(x) = \frac{3}{5}x - 3$

b.) $g(x) = \frac{1}{8}(4x^2 - 4x + 1)$

c.) $h(x) = -0{,}5x^2 + 2x$

– abc-Formel: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

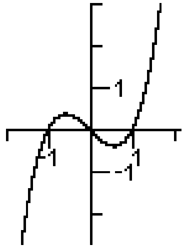
– pq-Formel: $x^2 + px + q = 0$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Ganzrationale Funktionen höheren Grades

- Ganzrationale Funktionen 3. Grades (kubische Funktionen):
- Beispiel 1:

  $f(x) = x^3 - x$

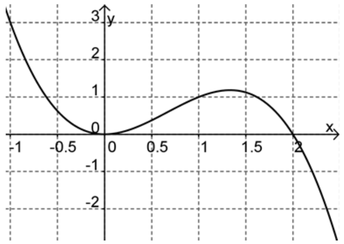


- Beobachtung:

  Der Graph von f kommt von unten und verläuft nach oben.
- Man sagt:
  - Der Graph von f kommt vom III. und verläuft in den I. Quadranten.
  - Oder: Der Graph von f geht gegen unendlich, wenn x gegen unendlich geht und er geht gegen Minus unendlich, wenn x gegen Minus unendlich geht.
  - Oder: Der **Grenzwert** von f ist unendlich für x gegen unendlich und minus unendlich für x gegen minus unendlich.
  - Oder: „$\lim f(x) = \infty$ für $x \to \infty$ und $\lim f(x) = -\infty$ für $x \to -\infty$“
  - Bzw. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Ganzrationale Funktionen höheren Grades

- Beispiel 2:
  $g(x) = -x^3 + 2x^2$



- $\lim_{x \to \infty} g(x) = -\infty; \ \lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty$

- Allgemein:

Das Verhalten für x → +∞ und x → -∞ richtet sich nach n und a_n

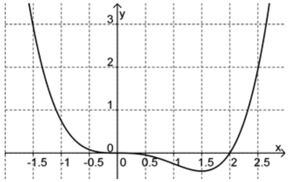
Für n ungerade und $a_n > 0$: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty; \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Für n ungerade und $a_n < 0$: $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty; \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

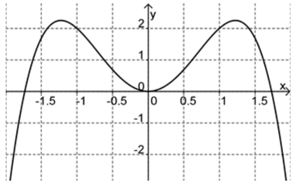
Ganzrationale Funktionen höheren Grades

- Ganzrationale Funktionen 4. Grades (quartische Funktionen):
- Beispiele:

$$f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^3$$



$$g(x) = -x^4 + 3x^2$$



- $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty;\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

  $\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty;\ \lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$

- Allgemein:

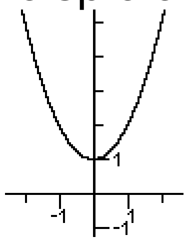
Das Verhalten für x → +∞ und x → -∞ richtet sich nach n und a_n

Für n gerade und $a_n>0$: $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty;\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

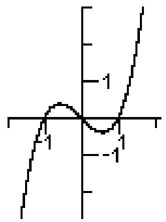
Für n gerade und $a_n<0$: $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty;\ \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Ganzrationale Funktionen

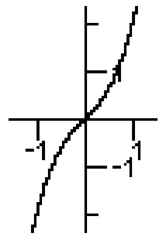
- Nullstellen
  - Eine ganzrationale Funktion kann <u>maximal n Nullstellen</u> haben (Erinnerung: n steht für den Grad der Funktion)
  - Eine ganzrationale Funktion mit ungeradem Grad hat mindestens 1 Nullstelle, eine ganzrationale Funktion geraden Grades muss keine Nullstelle haben.
  - Beispiele:



$f(x) = x^2 + 1$
keine Nullstelle



$g(x) = x^3 - x$
drei unterschiedliche Nullstellen



$i(x) = x^3 + x$
eine Nullstelle

  - Wenn f mehrere Nullstellen hat, kann man diese so lange ausklammern: $f(x) = a_n(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_k) \cdot (x^{n-k} + \ldots + c_0)$

    bis der Rest $x^{n-k} + \ldots + c_0$ keine Nullstelle mehr hat.
  - Im Extremfall bis zu $f(x) = a_n(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)$

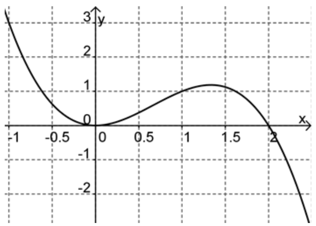
  Diese Darstellungsform heißt Produktform.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

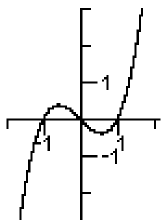
Ganzrationale Funktionen

- x_1 heißt **k-fache Nullstelle** von f , wenn
  - x_1 in der ausgeklammerten Form genau k-mal vorkommt ($1 \leq k \leq n$)

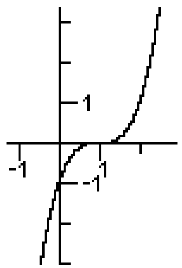
- Beispiele:



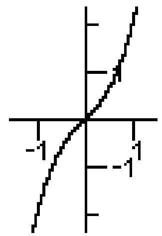
$f(x) = -x^3 + 2x^2$
$= x^2(2-x)$
Eine doppelte & eine einfache Nullstelle



$g(x) = x^3 - x$
$= x(x - 1)(x + 1)$
drei einfache Nullstellen



$h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
$= (x-1)^3$
eine dreifache Nullstelle

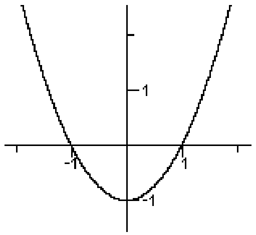


$i(x) = x^3 + x$
$= x(x^2 + 1)$
eine einfache Nullstelle

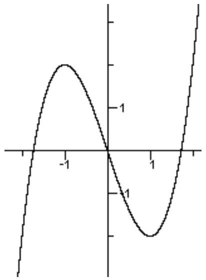
Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Symmetrie

- $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt
  - **gerade Funktion** oder **symmetrisch zur y-Achse**, wenn für alle $x \in D$ auch $-x \in D$ und es gilt $f(-x) = f(x)$



  - **ungerade Funktion** oder **punktsymmetrisch zu (0|0)**, wenn für alle $x \in D$ auch $-x \in D$ und es gilt $f(-x) = -f(x)$



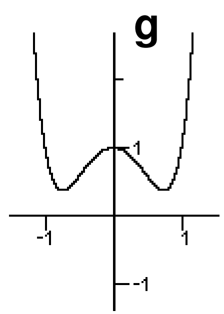
- Beispiele:

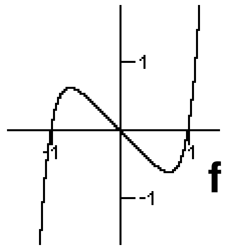
$f(x) = x^3 - 3x \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 - 3\cdot(-x)$
$= -x^3 + 3x = -f(x) \Rightarrow$ ungerade Funktion

$g(x) = x^2 - 1 \Rightarrow g(-x) = (-x)^2 - 1$
$= x^2 - 1 = g(x) \Rightarrow$ gerade Funktion

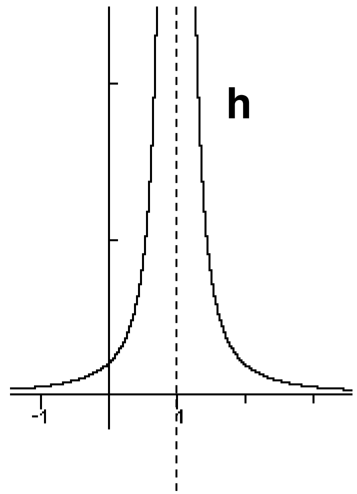
Symmetrie

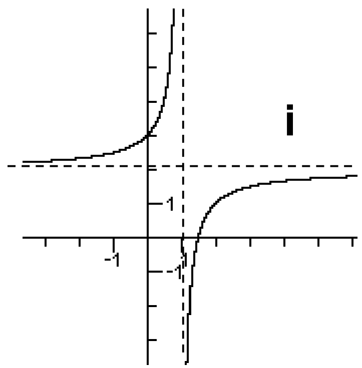
- Anmerkung: Eine ganzrationale Funktion (ein Polynom) ist,
  - gerade, wenn nur gerade Potenzen von x auftreten, z.B.: $g(x) = x^6 + x^4 - 2x^2 + 1$
  - ungerade, wenn nur ungerade Potenzen von x auftreten, z.B. $f(x) = x^7 - x$





- Anmerkung: Es gibt noch weitere Symmetrien, z.B.
  - Symmetrien zu anderen senkrechten Geraden, Bsp.: $h(x) = 1/(x-1)^2$
  - Symmetrien zu anderen Punkten, Bsp.: $i(x) = 2 - 1/(x-1)$





Übung

Aufgabe (8 min Zeit):

Untersuchen Sie die Schaubilder folgender Funktionen für $x \to \pm\infty$ sowie auf Symmetrie zur y-Achse und Punktsymmetrie zum Ursprung.

a.) $f(x) = -\frac{3}{5}x^5 - 3x$

b.) $g(x) = \frac{1}{8}(-4x^6 - 4x^3 + 3)$

c.) $h(x) = 0{,}5x^2 + 1$

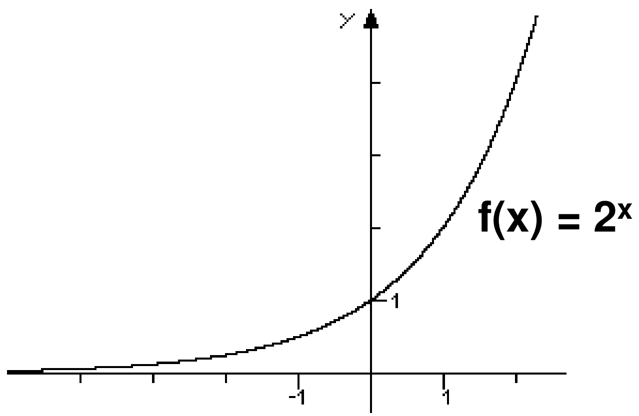
d.) $i(x) = 2(x-1)(x+2)(x+4)$

<u>Zusatzaufgabe:</u>

Geben Sie die Nullstellen der Funktion aus Aufgabe d.) an.

Exponentialfunktionen

- Eine Funktion f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$, wobei $a > 0$ und $a \neq 1$ heißt **Exponentialfunktion mit der Basis a**.
- Bei Exponentialfunktionen steht also die Variable x im Exponenten.
- Bsp.: a = 2



Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Exponentialfunktionen

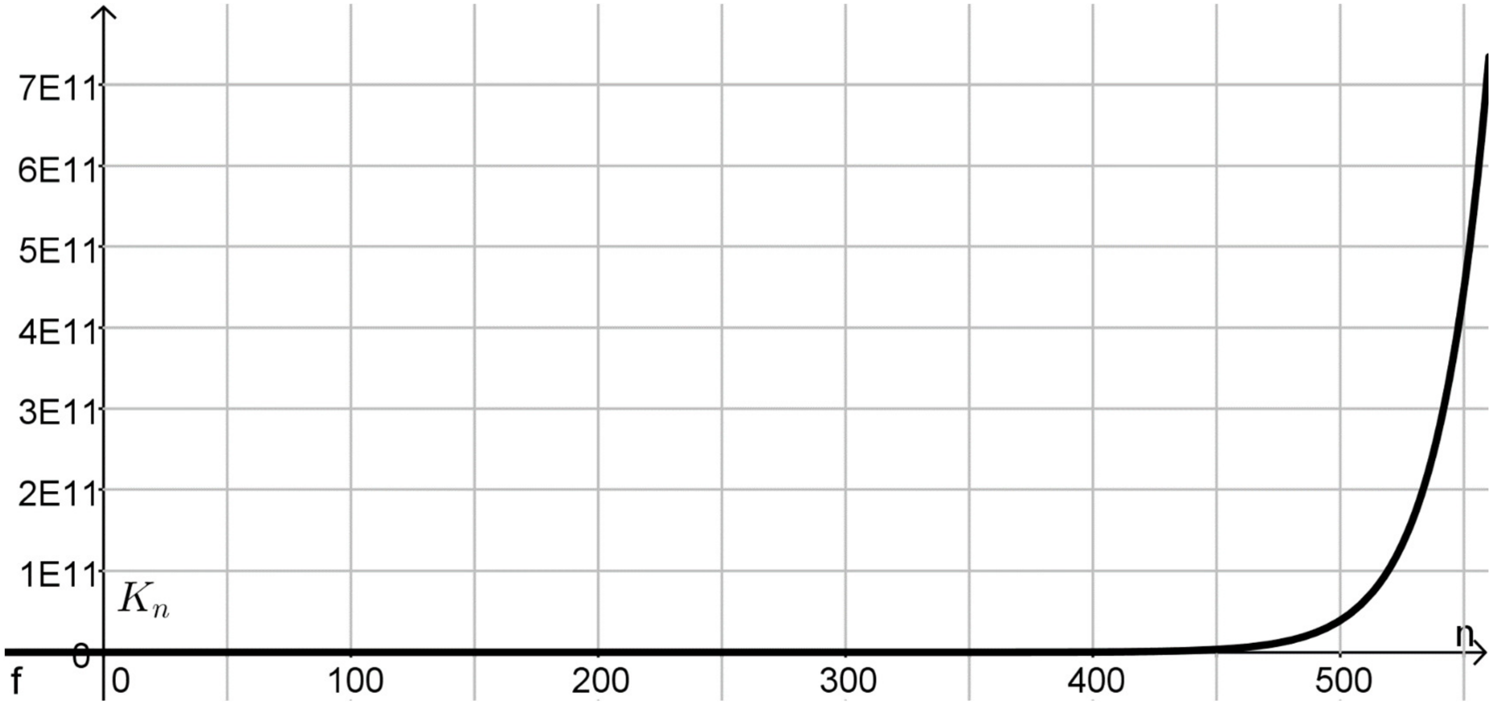
- Beispiel
  - Die Schlacht bei Seckenheim 1462 war eine Entscheidungsschlacht im Badisch-Pfälzischen Krieg.
  - Angenommen, man hätte damals einen „Euro" bei einer Bank zu 5% Zinsen p.a. angelegt.
  - Wie viel Geld wäre dann bis 2014 zusammengekommen?

$$
\begin{aligned}
K_n &= K_0 \cdot q^n \\
&= 1€ \cdot (1{,}05)^{552} \\
&\approx 497.156.459.600€
\end{aligned}
$$

  - $K_\mathrm{n} = K_0 \cdot q^n$ ist eine Exponentialfunktion.

Exponentialfunktionen

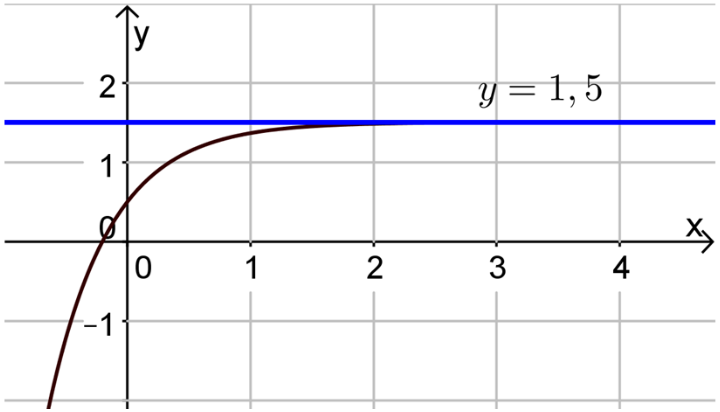
- Das Schaubild der Exponentialfunktion $K_n = K_0 \cdot q^n$



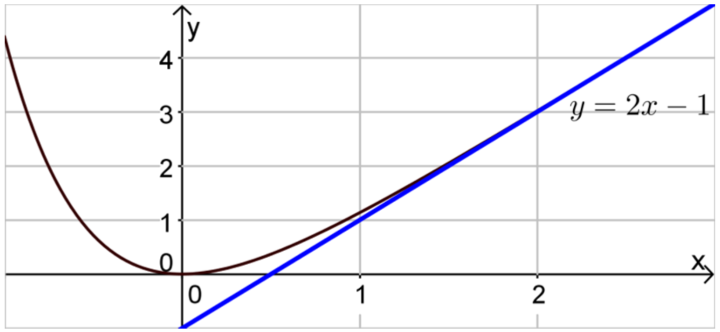
- Anmerkung: $7E11 = 7 \cdot 10^{11} = 700.000.000.000$
  (7 mit 11 Nullen!)

Asymptoten

- Eine **Asymptote** ist eine Gerade, die sich dem Graphen einer gegebenen Funktion beliebig weit annähert (ohne ihn jemals zu erreichen).



Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = -e^{-2x} + 1{,}5$ hat eine **waagrechte Asymptote** mit der Gleichung $y = 1{,}5$.



Das Schaubild der Funktion f mit $f(x) = e^{-2x} + 2x - 1$ hat eine **schiefe Asymptote** mit der Gleichung $y = 2x - 1$.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Grenzwerte von Exponentialfunktionen

- Für **a > 1** (z.B. a = 2) gilt:
  - a^{100} ist sehr groß!

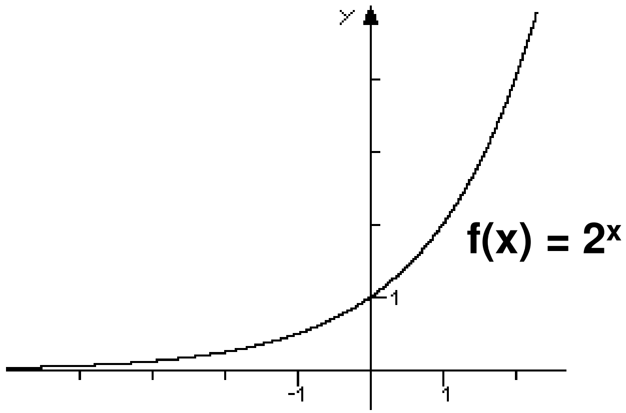
    Bsp.: $2^{100} \approx 1{,}27 \cdot 10^{30}$ (30 Stellen hinter dem Komma!)

    Also gilt: $\lim\limits_{x \to \infty} 2^x = \infty$
  - $a^{-100} = 1/a^{100}$ ist sehr nahe an Null!

    Bsp.: $2^{-100} \approx 7{,}89 \cdot 10^{-31}$ (31 Stellen vor dem Komma!)

    Also gilt: $\lim\limits_{x \to -\infty} 2^x = 0$

    Die x-Achse ist Asymptote für $x \to -\infty$.



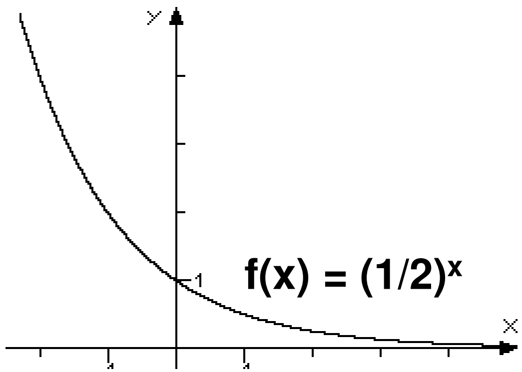
Grenzwerte von Exponentialfunktionen

- Für **a < 1** (z.B. a = $\frac{1}{2}$) gilt:
  - a^{100} ist sehr nahe an Null!

    Bsp.: $\left(\frac{1}{2}\right)^{100} = \frac{1}{2^{100}} \approx 7{,}89 \cdot 10^{-31}$ (31 Stellen vor dem Komma!)

    Also gilt: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$

    Die x-Achse ist Asymptote für $x \to \infty$.

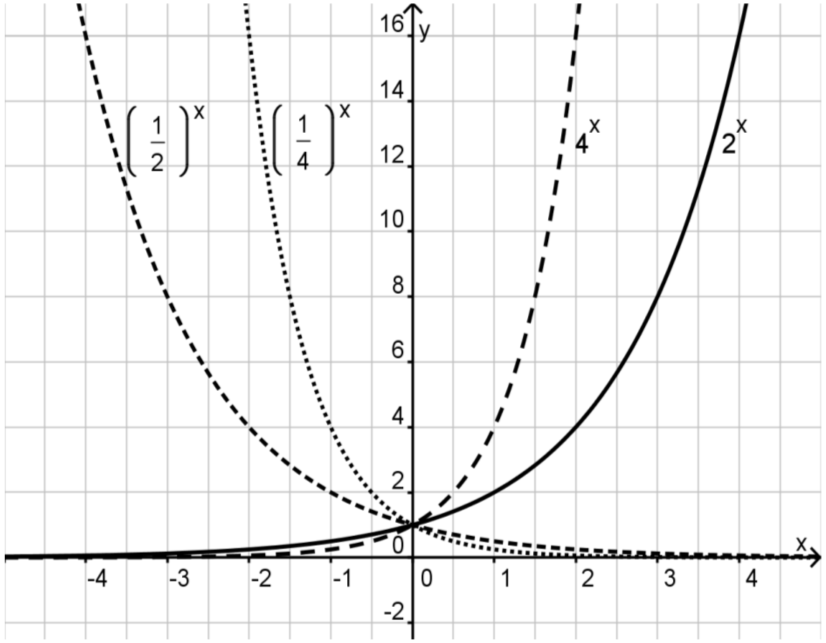


  - $a^{-100} = 1/a^{100}$ ist sehr groß!

    Bsp.: $\left(\frac{1}{2}\right)^{-100} = 2^{100} \approx 1{,}27 \cdot 10^{30}$ (30 Stellen hinter dem Komma!)

    Also gilt: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^x = \infty$

Exponentialfunktionen



- Für $a > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ ist immer $a^x > 0$.

  Die Schaubilder von Funktionen f mit $f(x) = a^x$ verlaufen deshalb oberhalb der x-Achse (die x-Achse ist Asymptote). Insbesondere hat eine Exponentialfunktion der Form $f(x) = a^x$ also keine Nullstelle.
- Wegen $a^0 = 1$ gehen die Schaubilder durch den Punkt $P(0|1)$.
- Die Schaubilder der Funktionen $f(x) = a^x$ und $g(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ liegen zueinander symmetrisch bzgl. der y-Achse.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Rechenregeln für Potenzen

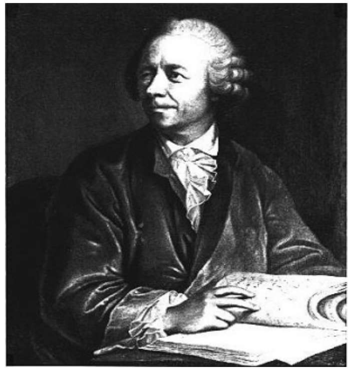
- Beim Rechnen mit Exponentialfunktionen braucht man die Potenzgesetze:
  - $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
  - $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
  - $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
  - $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
  - $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
- Weiterhin gilt
  - $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

    Deshalb ist die Funktion f mit $f(x) = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ identisch mit

    $f(x) = a^{-x}$.

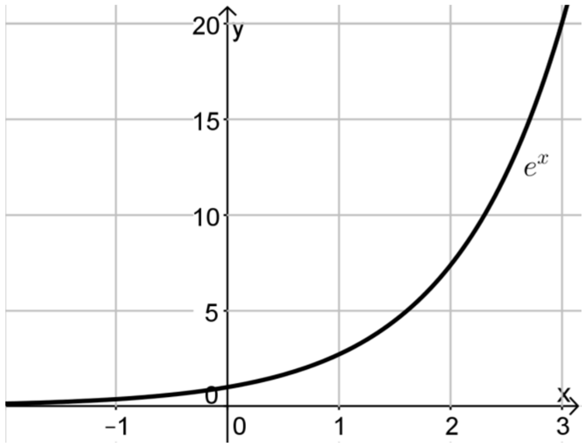
Natürliche Exponentialfunktion

- Die **<u>eulersche Zahl e</u>** (benannt nach dem schweizer Mathematiker Leonhard Euler) ist eine irrationale Zahl. Die ersten Stellen von e lauten 2,71828182…



Leonhard Euler (*1707; †1783)

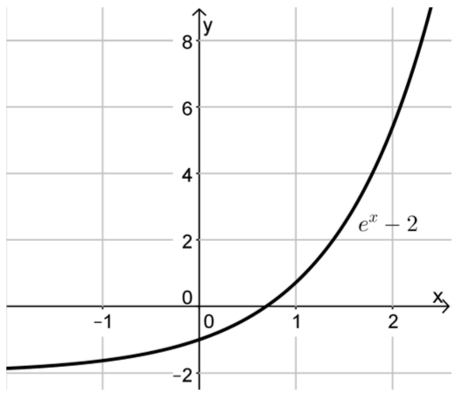
- f mit $f(x) = e^x$ wird **<u>natürliche Exponentialfunktion</u>** genannt.
- Das besondere an der natürlichen Exponentialfunktion ist, dass sie identisch mit ihrer Ableitung ist. Das bedeutet, dass an jeder Stelle der Funktionswert gleich dem Steigungswert ist.
- Jede Exponentialfunktion (egal zu welcher Basis) lässt sich zu einer natürlichen Exponentialfunktion umschreiben.



Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Natürlicher Logarithmus

- Aufgabe: Berechne die Nullstelle der Funktion f mit $f(x) = e^x - 2$.



  – Ansatz: $f(x) = 0$

  $e^x - 2 = 0 \quad | + 2$

  $e^x = 2$

  – Um die Gleichung zu lösen, brauchen wir den Logarithmus zur Basis e.
  Dieser Logarithmus wird auch **natürlicher Logarithmus** genannt.

  – $e^x = 2 \quad | ln$

  $\ln(e^x) = \ln(2)$

  $x = \ln(2)$

  $x \approx 0{,}69$

- Allgemein: Ist bei einer Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ ein Funktionswert b gegeben und ist der zugehörige x-Wert gesucht, so ist die Exponentialgleichung $e^x = b$ zu lösen.
  Die gesuchte Hochzahl x heißt natürlicher Logarithmus von b oder kurz $\ln(b)$.

Rechenregeln für Logarithmen

- Es gelten folgende Rechenregeln für natürliche Logarithmen:
  - $\ln(x \cdot y) = \ln(x) + \ln(y)$
  - $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
  - $\ln(x^y) = y \cdot \ln(x)$
- Aufgrund der Regel $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ gilt auch $\log_a x = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.

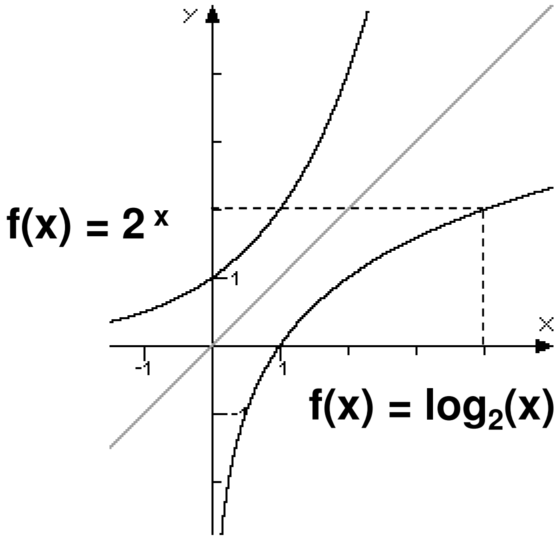
  Mit Hilfe dieser Formel können Logarithmen zu jeder Basis a mit Hilfe des natürlichen Logarithmus berechnet werden.

Logarithmusfunktion

- Die natürliche Exponentialfunktion f mit $f(x) = e^x$ ist eineindeutig und somit umkehrbar.

  Ihre Umkehrfunktion heißt natürliche Logarithmusfunktion

  $\ln: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x)$
- Allgemein sind alle Exponentialfunktionen f mit $f(x) = a^x$ umkehrbar. Die entsprechende Logarithmusfunktion lautet dann $\log_a: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \log_a(x)$
- Graph der Logarithmusfunktion im Fall a=2:



Exponentialfunktionen

Aufgabe (5 min Zeit):

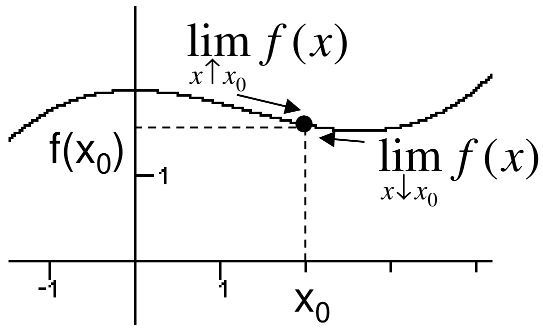
Herr Klein legt 100 Euro bei seiner Bank zu einem Zinssatz von 3% an.

Die Entwicklung seines Kaptials wird folglich durch die Exponentialfunktion $K_n = K_0 \cdot q^n$ beschrieben.

Nach wie vielen Jahren ist sein Kapital auf 500 Euro angewachsen?

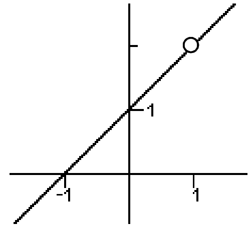
Stetigkeit

- Eine Funktion f: D → ℝ ist **<u>stetig an einem Punkt x_0</u>** $\in \mathbb{R}$, wenn
  - $x_0 \in D$, d.h. $f(x_0)$ existiert **<u>und</u>**
  - falls für ein $\varepsilon > 0$ auch $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subseteq D$, dann ist $\lim\limits_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ **<u>und</u>**
  - falls für ein $\varepsilon > 0$ auch $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subseteq D$, dann ist $\lim\limits_{x \uparrow x_0} f(x) = f(x_0)$
- Kurz gesagt:
  - Wenn x_0 im Inneren des Definitionsbereichs liegt, müssen an x_0 der rechtsseitige Grenzwert, der linksseitige Grenzwert und der Funktionswert übereinstimmen.
- Anschaulich:
  - f macht an x_0 keinen Sprung bzw.
  - kleine Änderungen in x verursachen auch nur kleine Änderungen in y.

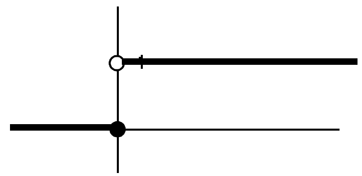


Beispiele für Unstetigkeit

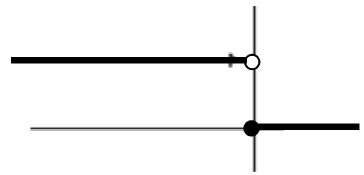
- Unstetigkeit an x_0 könnte also dadurch entstehen, dass
  - entweder f an x_0 nicht definiert ist ($x_0 \notin D$)



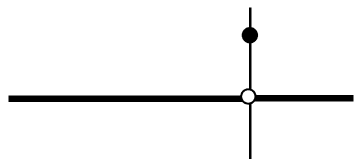
  - oder $(x_0, x_0 + \varepsilon) \subseteq D$ aber der rechtsseitige Grenzwert ist $\neq f(x_0)$



  - oder $(x_0 - \varepsilon, x_0) \subseteq D$ aber der linksseitige Grenzwert ist $\neq f(x_0)$.



  - oder: Grenzwerte von rechts und links existieren und sind gleich, aber der Funktionswert nicht.



Stetigkeit

- Übrigens:
  - f heißt **<u>auf D stetig</u>**, wenn es an jedem $x \in D$ stetig ist.
- Anmerkung:
  - Bei Funktionen ist oft die Veränderung an einer Stelle wichtiger als der Wert an einer Stelle.
  - Stetigkeit bedeutet, dass die Veränderung „stetig" ist und nicht lückenhaft oder sprunghaft.
  - Die meisten Naturprozesse (freier Fall, etc.) sind stetig: „Die Natur macht keine Sprünge".
- Alle Funktionen, die wir bisher kennengelernt haben, sind auf ihrem Definitionsbereich stetig:
  - lineare, quadratische und alle anderen ganzrationalen Funktionen,
  - die Wurzelfunktion,
  - und Exponentialfunktionen.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Kurvendiskussion

- Wenn eine bestimmte Funktion f: D → ℝ gegeben ist, umfasst eine **einfache Funktions-** bzw. **Kurvendiskussion** die Ermittlung der bisher genannten Eigenschaften für eine bestimmte Funktion:
  - Bildbereich, Eineindeutigkeit
  - Nullstellen, ggfs. Vielfachheit der Nullstellen
  - Schnittpunkt mit der y-Achse
  - Verhalten (Grenzwerte) und ggfs. Asymptoten für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$
  - Symmetrie
  - Stetigkeit

Wirtschaftsmathematik

Analysis - Differentialrechnung

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Analysis

- Einführung in die Funktionen
  - Definition & Darstellungsarten
  - Definitionsbereich, Wertebereich, Bildbereich, Intervalle
  - Eineindeutigkeit & Monotonie
  - Umkehrfunktion
  - Preis-Absatz-Funktion
  - Kostenfunktion
- Funktionsarten
  - Ganzrationale Funktionen / Polynomfunktionen
  - Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen
  - Anzahl & Arten von Nullstellen
  - Grenzwerte / Asymptoten
  - Symmetrie
  - Stetigkeit

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Analysis

- Differentialrechnung
  - Differenzenquotient, Differentialquotient, Ableitungsfunktion
  - Durchschnittskosten & Grenzkosten
  - Ableitungsregeln: Summationsregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, Umkehrregel
  - Erlösfunktion, Erlösmaximum
  - Lokales / globales Maximum / Minimum / Extremum
  - Rechts-/Linkskrümmung, konvex, konkav
  - Wendepunkt
  - zweite / dritte Ableitung, höhere Ableitungen
  - Funktionsdiskussion mit der Differentialrechnung

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Analysis

- Elastizität und Optimierung
  - (Preis-)elastizität des Absatzes
  - (preis-)elastisch, (preis-)unelastisch
  - Gewinnfunktion
  - Nutzenschwelle, Nutzengrenze
  - Gewinnlinse
  - Cournotscher Punkt
- Integralrechnung
  - Riemann-Integral; Ober- & Untersumme
  - Unbestimmtes Integral
  - Stammfunktion
  - Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
  - Konsumenten- & Produzentenrente

Veränderung

- Für viele betriebswirtschaftliche Fragestellungen muss man sich mit der Veränderung einer Funktion an einer bestimmten Stelle x_1 beschäftigen.

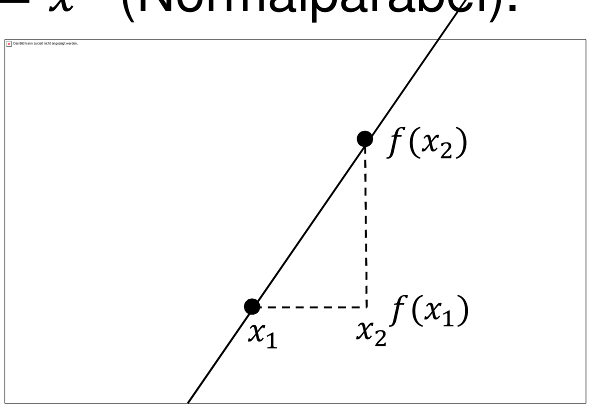
- Graphisch gesprochen heißt das, dass die Steigung des Graphen der Funktion an der Stelle x_1 berechnet werden muss.

- Deshalb werden wir uns im Folgenden anschauen, wie man die Steigung eines Graphen an einer solchen Stelle x_1 berechnen kann.

Steigung

- Gegeben ist das Schaubild von f mit $f(x) = x^2$ (Normalparabel).
- <u>Ziel:</u>

  Berechnung der Steigung der Normalparabel im Punkt P (1|1).



1.) <u>Näherungsweise Berechnung der Steigung der Parabel im Punkt P(1|1):</u>

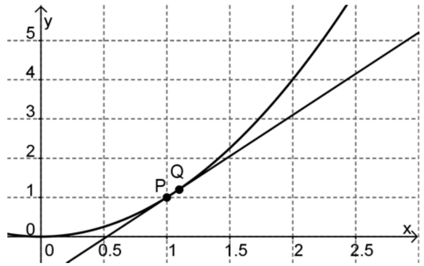
Idee: Zeichne eine Gerade durch P(1|1) und einem zweiten Punkt Q, der sich in der Nähe von P befindet, z.B. Q(2|4).

Die Steigung der Geraden entspricht der <u>**Durchschnittssteigung**</u> der Parabel **zwischen** $\boldsymbol{x_1 = 1}$ **und** $\boldsymbol{x_2 = 2}$. Eine solche Gerade nennt man <u>**Sekante**</u>.

Berechnung der Sekantensteigung: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{4-1}{2-1} = 3$

Steigung

- Verbesserung der Genauigkeit, indem man den Punkt Q näher an P heranschiebt, z. B. Wahl von Q$(1{,}1|1{,}21)$.



- Berechnung der neuen Sekantensteigung:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{1{,}21-1}{1{,}1-1}=2{,}1.$$

- Problem: Nur näherungsweise und keine exakte Berechnung der Steigung in P$(1|1)$, da nur Durchschnittssteigung für $1 \leq x \leq 1{,}1$.

Definition:
Eine Gerade, die durch die Punkte P$(x_1|f(x_1))$ und Q$(x_2|f(x_2))$ verläuft, hat die Steigung

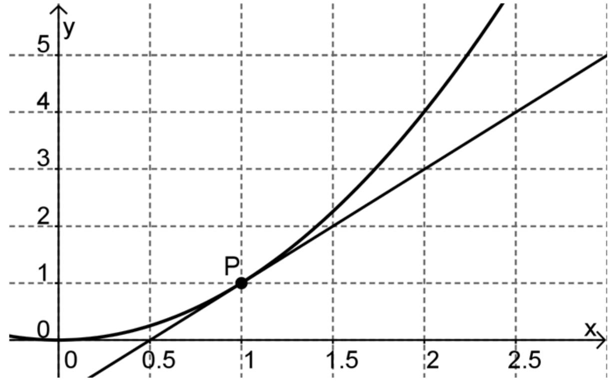
$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$$

Dies nennt man den **Differenzenquotient** oder die **mittlere Änderungsrate** im Intervall $[x_1; x_2]$.

Steigung

2.) Exakte Berechnung der Steigung der Parabel im Punkt P(1|1):

Idee: Lasse den Punkt Q immer näher an den Punkt P wandern.
Ist der Punkt Q „unendlich Nahe“ am Punkt P, schneidet die **Gerade** die Parabel nicht mehr, sondern **berührt** sie **im Punkt P.**



Eine solche Gerade nennt man **Tangente**. Die **Steigung der Tangenten entspricht der Steigung der Parabel im Punkt P.**

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Steigung

- Frage: Wie kann der Punkt Q „unendlich Nahe“ an den Punkt P(1|1) wandern?
- Idee: Definiere den Punkt Q als $(1+h|f(1+h))$ für ein ganz kleines h.

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{x_1+h-x_1}=\frac{(1+h)^2-1}{h}=\frac{1+2h+h^2-1}{h}$$
$$=\frac{h(2+h)}{h}=2+h$$

- Jetzt lassen wir h unendlich klein werden:

$$\lim_{h\to 0}(2+h)=2$$

- <u>Ergebnis:</u>

  Die Parabel hat im Punkt P(1|1) die Steigung 2.

<u>Definition:</u>

Wenn der Grenzwert

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{x_1+h-x_1}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

existiert, sagt man, dass f **<u>differenzierbar</u> an x_1** ist.

Steigung

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

- Wir haben die Steigung der Parabel im Punkt P(1|1) berechnet. Jetzt wollen wir die Steigung der Parabel in einem beliebigen Punkt P$(x_1|f(x_1))$ berechnen.
- P$(x_1|f(x_1))$; Q$(x_1+h|f(x_1+h))$

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{x_1+h-x_1}=\frac{(x_1+h)^2-x_1^2}{h}=\frac{x_1^2+2x_1h+h^2-{x_1}^2}{h}$$

$$=\frac{2x_1h+h^2}{h}=\frac{h(2x_1+h)}{h}=2x_1+h$$

$$\lim_{h\to 0}(2x_1+h)=\boldsymbol{2x_1}$$

- Mit dem Ergebnis $\boldsymbol{2x_1}$ kann die Steigung der Parabel in einem beliebigen Punkt ganz einfach berechnet werden.
- Bsp.: Die Steigung in P(1|1): $2\cdot 1=2$

  Die Steigung in P(3|f(3)): $2\cdot 3=6$

Ableitung

- Mathematiker nennen die Steigung einer Funktion f an einer Stelle x_1 die **<u>Ableitung</u>** von f an x_1 und schreiben dafür $f'(x_1)$
- Ersetzt man x_1 durch x, gilt für alle $x \in \mathrm{IR}$:

$$\boldsymbol{f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x}.$$

<u>Definition:</u>
Der Grenzwert des Differenzenquotienten heißt **<u>Differential-quotient</u>.**

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{x+h-x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

<u>Beachten Sie:</u>
Wenn f an jedem $x \in \mathrm{ID}$ differenzierbar ist, dann ordnet $\boldsymbol{f'}$ jedem x-Wert die Steigung der Kurve an dieser Stelle zu.
Man sagt dann, f ist **<u>differenzierbar</u> auf $\mathbf{ID}$** und nennt $f': x \to f'(x)$ die **<u>Ableitungsfunktion</u>** von f.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

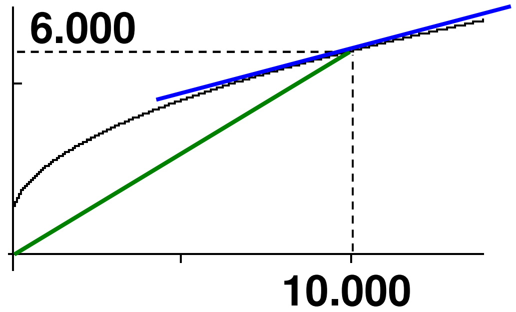
Grenzkosten & Durchschnittskosten

- Beispiel (Erinnerung):
  – Die Kostenfunktion k: [0, M] → ℝ, q ↦ k(q) gibt an, wie hoch die Produktionskosten für eine bestimmte Stückzahl q (quantity) sind.
- Fragestellungen:
  – **Durchschnittskosten**: Was kostet uns eine Einheit durchschnittlich?
  – **Grenzkosten**: Was kostet eine zusätzliche Einheit?

    Genauer: Wenn wir seither eine Menge von q_0 Einheiten produziert haben, was würde es uns (zusätzlich) kosten, die Produktion von q_0 auf $q_0 + 1$ Einheiten zu erhöhen?

Grenzkosten & Durchschnittskosten

- Beispiel Kugelschreiber:
  - k: [0, ∞] → $\mathbb{R}$, $k(q) = 1.000 + 50\sqrt{q}$
  - seither wurden q_0 = 10.000 Einheiten zum Preis von EUR 6.000 produziert.
  - Der Durchschnittspreis beträgt also 6.000 / 10.000 = 0,60 EUR
  - Die nächste Einheit kostet



$$k(q_0+1) - k(q_0) = 1.000 + 50\sqrt{10001} - 1000 - 50\sqrt{10000}$$
$$= 50\left(\sqrt{10001} - \sqrt{10000}\right) = 50 \cdot (100{,}005 - 100)$$
$$= 0{,}25$$

- Beobachtung: Bei q_0 = 10.000 entsprechen
  - die Durchschnittskosten der Steigung der grünen Linie
  - die Grenzkosten der Steigung der blauen Linie

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

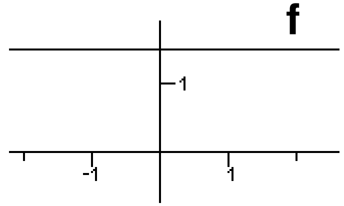
Grenzkosten

- Die Grenzkosten geben die Veränderung der Kosten an, wenn die Produktion ganz minimal erhöht wird.
- Mit anderen Worten geben die Grenzkosten an, um wie viel die Kosten steigen wenn die Produktion ganz minimal erhöht wird.
- Grafisch gesprochen stellen also die Grenzkosten die Steigung des Graphen der Kostenfunktion dar.
- Die **Grenzkostenfunktion ist** deshalb die **Ableitung der Kostenfunktion**.

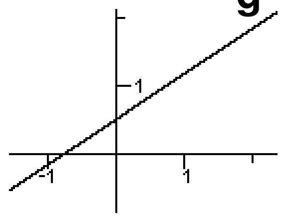
- Die Grenzkostenfunktion lautet: $k'(q) = 25/\sqrt{q}$
  (Die Grenzkostenfunktion kann auch mit Hilfe des Differential-quotienten bestimmt werden. Dies ist jedoch etwas kompliziert-er.)
- Probe: Grenzkosten für q = 10.000: $k'(10.000) = 25/\sqrt{10.000} = 0{,}25$
  → stimmt!

Ableitungen einfacher Funktionen

- Wie ermitteln wir die Ableitung einer Funktion?
  - Mit etwas Mathematik kann man für einige Funktionen den Differentialquotienten einfach ausrechnen.
- Bsp.1: konstante Funktion f(x) = b mit b $\in \mathbb{R}$.
  - Offensichtlich ist die Steigung von f immer 0.
  - Wir rechnen nach:
  - $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{b-b}{h} = 0$



- Bsp.2: lineare Funktion g(x) = ax + b mit a, b $\in \mathbb{R}$.
  - Offensichtlich ist die Steigung von g immer gleich (nämlich a).
  - Stimmt auch mathematisch, denn
  - $$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}$$
    $$= \lim_{h \to 0} \frac{ax + ah + b - ax - b}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{ah}{h} = a$$



Weitere Ableitungen

- Weitere Ableitungen:
  - Hier werden die Rechnungen schon ziemlich schwierig:
  - $f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$ und $g(x) = \cos x \Rightarrow g'(x) = -\sin x$
  - $h(x) = a^x \Rightarrow h'(x) = \ln(a) \cdot a^x$ und $i(x) = \log_a x \Rightarrow i'(x) = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)}$
- Schreibweise:
  - (sinx)‘ = cos x und (cos x)‘ = -sinx
  - (a^x)‘ = ln(a) · a^x und $(\log_a(x))$‘ = 1/(x · ln(a))
- Anmerkungen:
  - Für a = e (Eulersche Zahl) ist ln(a) = ln(e) = 1, also
  - (e^x)‘ = e^x und (ln(x))‘ = 1/x
  - Das ist der Grund, warum die Eulersche Zahl so wichtig ist.
  - Die Ableitungen auf dieser Folie sollte man wissen (auswendig).

Ableitungsregeln

- Sind u: $D_u \rightarrow \mathbb{R}$ und v: $D_v \rightarrow \mathbb{R}$ beide differenzierbar, dann gilt
  - für jede Stelle x, die in D_u und D_v liegt und jedes $a \in \mathbb{R}$:
- Linearität
  - **Summationsregel**: $(u + v)'(x) = u'(x) + v'(x)$
  - **Produktregel**: $(u \cdot v)'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$
- Deshalb gilt auch:
  - $(a \cdot u)'(x) = a \cdot u'(x)$, (Skalarmultiplikation)
  - $(u - v)'(x) = u'(x) - v'(x)$ (Subtraktionsregel)
- Anmerkung:
  - Die hier genannten Regeln kann man durch Betrachtung des Differentialquotienten relativ einfach beweisen.

Weitere Ableitungen

- Mit den genannten Regeln können wir weitere Ableitungen berechnen:
- Bsp.3: Quadratfunktion $f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$
  - Denn wir wissen bereits aus Bsp.2, dass $(x)' = 1$
  - Produktregel: $(x^2)' = (x \cdot x)' = (x)' \cdot x + x \cdot (x)' = 1 \cdot x + x \cdot 1 = 2x$
- Bsp.4: Potenzfunktion $g(x) = x^n$ für $n = 1, 2, \ldots \Rightarrow g'(x) = n \cdot x^{n-1}$
  - Dies ist die Verallgemeinerung der in den Beispielen 2 und 3 betrachteten Fälle. Der Beweis funktioniert analog.
  - Aus dieser Ableitungsregel für Potenzfunktionen lässt sich durch Anwendung der Summationsregel leicht die Ableitungsregel für Polynome/ganzrationale Funktionen herleiten (siehe nächste Seite).

Weitere Ableitungen

- Beispiel „Polynom“: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0$

  $\Rightarrow f'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \ldots + 2 a_2 x + a_1$

- Beispiel mit Zahlen: $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 2 \quad \Rightarrow f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$

- Bsp.5: $g(x) = x^a$ mit beliebigem $a \in \mathbb{R} \Rightarrow g'(x) = a \cdot x^{a-1}$
- Bsp. „Kugelschreiber“ (wie oben): $k(q) = 1.000 + 50\sqrt{q}$

$$k(q) = 1.000 + 50\sqrt{q} = 1000 + 50 \cdot q^{1/2}$$

$$\Rightarrow k'(q) = (1000)' + 50 \cdot (q^{1/2})' = 0 + 50 \cdot (1/2)(q^{-1/2}) = 25/\sqrt{q}$$

Übung

Aufgaben (12 min Zeit):

Bilden Sie jeweils die erste Ableitung.

Aufgabe 1:

a.) $f(x) = x^4 + x^8$

b.) $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{2} + x$

c.) $f(x) = \frac{1}{x} + x$

d.) $f(x) = 4\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{20}x^{-3} - \frac{1}{10x^{10}}$

Aufgabe 2:

a.) $f(x) = (x+1)e^x$

b.) $f(x) = (3 + x^2)e^x$

c.) $f(x) = x^3 \cdot e^x$

Produktregel: (u·v)‘(x) = u‘(x)·v(x) + u(x)·v‘(x)

Quotientenregel

- Ist $v(x) \neq 0$, dann gilt die:
  - **Quotientenregel** $\left(\left(\frac{u}{v}\right)(x)\right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$
  - und mit u = 1 auch speziell $\left(\left(\frac{1}{v}\right)(x)\right)' = -\frac{v'(x)}{v(x)^2}$
- Bsp.6: $f(x) = 1/x^n = x^{-n}$ für $n = 1, 2, \ldots$
  $\Rightarrow f'(x) = -n \cdot x^{-n-1} = -n/x^{n+1}$
  - Denn aus der Quotientenregel mit u = 1 und $v(x) = x^n$ erhalten wir

$$\left((1/x^n)\right)' = \frac{0 \cdot v(x) - 1 \cdot (x^n)'}{(x^n)^2} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -\frac{n}{x^{n+1}}$$

Übung

Aufgabe (5 min Zeit):

Bilden Sie jeweils die erste Ableitung.

a.) $f(x) = \frac{x^2-4}{x}$

b.) $f(x) = \frac{x^2+1}{e^x}$

c.) $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$

Quotientenregel: $\left(\left(\frac{u}{v}\right)(x)\right)' = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}$

Kettenregel

- Ist u an v(x) differenzierbar, dann gilt die
  - **Kettenregel**: $[u(v(x))]' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$
- Anmerkung:
  - $u'(v(x))$ wird **äußere Ableitung** genannt.
  - Damit ist die Ableitung von u gemeint, die
    - zunächst ohne Kenntnis von v ermittelt werden kann und
    - in die dann der Wert v(x) eingesetzt wird.
  - $v'(x)$ wird **innere Ableitung** genannt.
- Bsp.7: $f(x) = \sqrt[3]{(1+x^2)} = (1+x^2)^{\frac{1}{3}}$
  - Setze $u(y) = y^{1/3}$ und $v(x) = 1+x^2$, dann ist $f(x) = u(v(x))$
  - Wegen $u'(y) = (1/3)y^{-2/3}$ und $v'(x) = 2x$ gilt:

$$f'(x) = \frac{1}{3}(1+x^2)^{-\frac{2}{3}} \cdot (2x) = \frac{2}{3}\frac{x}{\sqrt[3]{(1+x^2)^2}}$$

Übung

Aufgaben:

Bilden Sie jeweils die erste Ableitung.

Aufgabe 1:

a.) $f(x) = \frac{3}{2}e^{-5x^2-3x}$

b.) $f(x) = \sqrt{4x-2}$

c.) $f(x) = (e^{2x} + e^{-x})^2$

d.) $f(x) = (3-2x)e^{-0,5x}$

Aufgabe 2 (5 min Zeit):

a.) $f(x) = e^{-4x} - e^{4x}$

b.) $f(x) = (2x+1)^3$

c.) $f(x) = x - xe^{-x+1}$

Kettenregel: [u(v(x))]‘ = u‘(v(x))·v‘(x)

Produktregel: (u·v)‘(x) = u‘(x)·v(x) + u(x)·v‘(x)

Umkehrregel

- Sei $f: D \rightarrow B$ eineindeutig, also umkehrbar mit $f^{-1}: B \rightarrow D$.
  - Für jedes $x \in B$ (Vertauschung der Variablen) ist $f(f^{-1}(x)) = x$, deshalb ist $(f(f^{-1}(x)))' = (x)' = 1$
  - Wegen der Kettenregel gilt deshalb $1 = f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x)$ und damit die **Umkehrregel**: $(f^{-1})'(x) = 1 / f'(f^{-1}(x))$
- Anwendung / Bsp.:
  - $f(x) = e^x$, wir wissen bereits $f'(x) = f(x) = e^x$
  - $f^{-1}(x) = \ln x$, wir erhalten: $(\ln x)' = (f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$
- Anmerkung:
  - Wegen der Kettenregel gilt deshalb für $f \neq 0$ auch: $(\ln f(x))' = \dfrac{f'(x)}{f(x)}$

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Zusammenfassung

- $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
- Spezielle Ableitungen:
  - $(x^a)' = ax^{a-1}$ für alle $a \in \mathbb{R}$, z.B. a = 1, 2, 8, -3, ½, -103/17, etc.
  - (sin x)' = cos x
  - (cos x)' = - sin x
  - $(a^x)' = (\ln a) \cdot a^x$, speziell $(e^x)' = e^x$
  - $(\log_a(x))' = 1/(x \cdot \ln a)$, speziell $(\ln x)' = 1/x$
- Summationsregel: (u(x) + v(x))' = u'(x) + v'(x)
- Skalarmultiplikation: (a · u(x))' = a · u'(x)
- Produktregel: (u·v)'(x) = u'(x)·v(x) + u(x)·v'(x)
- Quotienten-regeln: $((u/v)(x))' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2}$ $\quad ((1/v)(x))' = -\frac{v'(x)}{v(x)^2}$
- Kettenregel: [u(v(x))]' = u'(v(x))·v'(x) und $(\ln f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$
- Umkehrregel: $(f^{-1})'(x) = 1 / f'(f^{-1}(x))$

Merkhilfen

- Anmerkung:
  - Wer sich zwar $(e^x)' = e^x$ merken kann, aber nicht $(a^x)'$, der rechnet mit der Kettenregel:

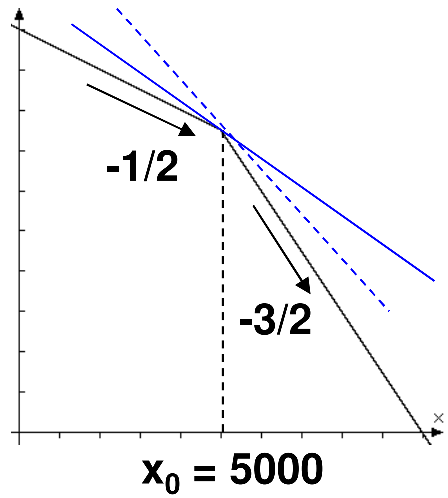
$$(a^x)' = (e^{\ln a^x})' = (e^{x \ln a})' = (e^{x \ln a}) \cdot \ln a = \ln a \cdot a^x$$

  - Wer sich $(\ln x)' = 1/x$ merken kann aber nicht $(\log_a(x))'$, der rechnet

$$(\log_a(x))' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{\ln a}(\ln x)' = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$$

Gegenbeispiel

- Achtung: Nicht alle Funktionen sind auf ihrem Definitionsbereich differenzierbar.
- Beispiel: Preis-Absatz-Funktion im Duopol:
  - $f: [0, 10000] \rightarrow \mathbb{R}$,
  - für $x \in [0, 5.000]$ ist $f(x) = 10.000 - (1/2) \cdot x$
  - für $x \in [5.000, 10.000]$ ist $f(x) = 15.000 - (3/2) \cdot x$



- Wie groß ist die Steigung an $x_0 = 5.000$?
  - von links: $-1/2$
  - nach rechts: $-3/2$
- Beobachtung:
  - Die Tangente (blaue Linien) könnte jede Steigung zwischen -1/2 und -3/2 haben → Ableitung ist nicht eindeutig → existiert nicht.
- Mathematisch:
  - Rechts- und linksseitiger Grenzwert des Differenzenquotienten sind unterschiedlich → Grenzwert existiert nicht.

Erlösfunktion

- Anwendung / Aufgabe:
  - Im (Monopol-)Markt für einen bestimmten Kugelschreiber besteht folgende Preis-Absatz Funktion, d.h. folgender Zusammenhang zwischen Preis und Absatz:

    $q(p) = 25.000 - 2.500p$
- Grundlegende Fragestellung:

  a) Bestimmen Sie die Umkehrfunktion. D.h. bestimmen Sie die Funktion, die jedem Absatz einen Preis zuordnet. Bestimmen Sie den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich und den Bildbereich dieser Funktion.

  b) Ermitteln Sie, bei welcher Absatzmenge welcher Erlös (Umsatz) erzielt werden kann und stellen Sie das Ergebnis als Funktion dar → **<u>Erlösfunktion</u>**.

Erlösfunktion

- Lösung a) Umkehrfunktion:
  - Aus $q = 25.000 - 2.500p$ ergibt sich $p(q) = 10 - q / 2.500$
  - Für $p = 0$ erhalten wir die Sättigungsmenge $q_0 = 25.000$ Stück.
  - Für $q = 0$ erhalten wir den Prohibitivpreis $p_0 =$ EUR 10.
  - Also ist $D_{öko} = [0, 25.000]$ und $B = [0, 10]$
- Lösung b) Erlösfunktion:
  - Wenn q Stück Kugelschreiber zum Preis von p(q) verkauft werden, ergibt sich daraus ein Erlös von $q \cdot p(q)$ EUR.
  - Zusammen mit $D_{öko}$ ergibt sich daraus direkt die Erlösfunktion $E: [0, 25.000] \rightarrow \mathbb{R}$,
    $E(q) = q \cdot p(q) = q\cdot(10 - q / 2.500) = - q^2 / 2.500 + 10q$
- Anmerkung:
  - Hierbei wird jedem sinnvollen Absatz q ein Erlös E(q) zugeordnet. Natürlich könnte alternativ auch jedem Preis p ein Erlös E(p) zugeordnet werden.

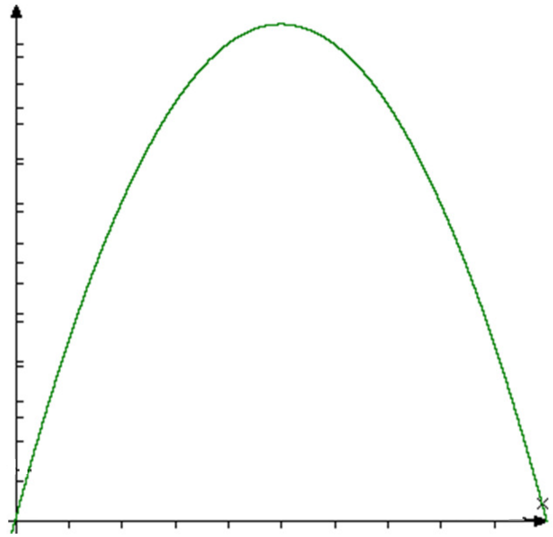
Erlösfunktion

- Weitere Fragestellungen:
  c) Wie sieht der Graph der Erlösfunktion aus? Genauer:
  d) In welchem Absatzbereich steigt die Erlösfunktion?
  e) In welchem Absatzbereich fällt die Erlösfunktion?
  f) Bei welchem Absatz können wir den maximalen Erlös erzielen?
  g) Wie hoch ist bei diesem Absatz der Preis?
  h) Wie hoch ist der maximale Erlös?
- Lösungsansatz c):
  – q liegt in $D_{öko}$ = [0, 25.000] und p in B = [0, 10]. Demnach sind p und q beide ≥ 0. Also muss auch E = p·q ≥ 0 sein.
  – Aus der Darstellung E(q) = q·(10 – q / 2.500) ergibt sich, dass E(q) genau dann 0 ist, wenn q = 0 oder q = 25.000 ist.
  – Aus der Darstellung E(q) = – q^2 / 2.500 + 10q ergibt sich, dass der Graph von E eine nach unten geöffnete Parabel ist.

Erlösfunktion

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

- Lösungsansatz d) – h):
  - Wir zeichnen das Schaubild mit Hilfe einer Wertetabelle .



  - Wir lesen aus dem Schaubild ab:

  ⇒ Der Graph von E hat seinen Scheitelpunkt in (12.500, 62.500).

  ⇒ Die Erlöskurve steigt in [0, 12.500), sie fällt in (12.500, 25.000].
  - Sie erreicht ihr Maximum bei einem Absatz q_m, wenn sie vor dem Absatz q_m gestiegen ist und nach dem Absatz q_m fällt, also beim Absatz q_m = 12.500 (am Scheitelpunkt).
  - Bestimmung des Preises mit p(q) = 10 – q / 2.500:

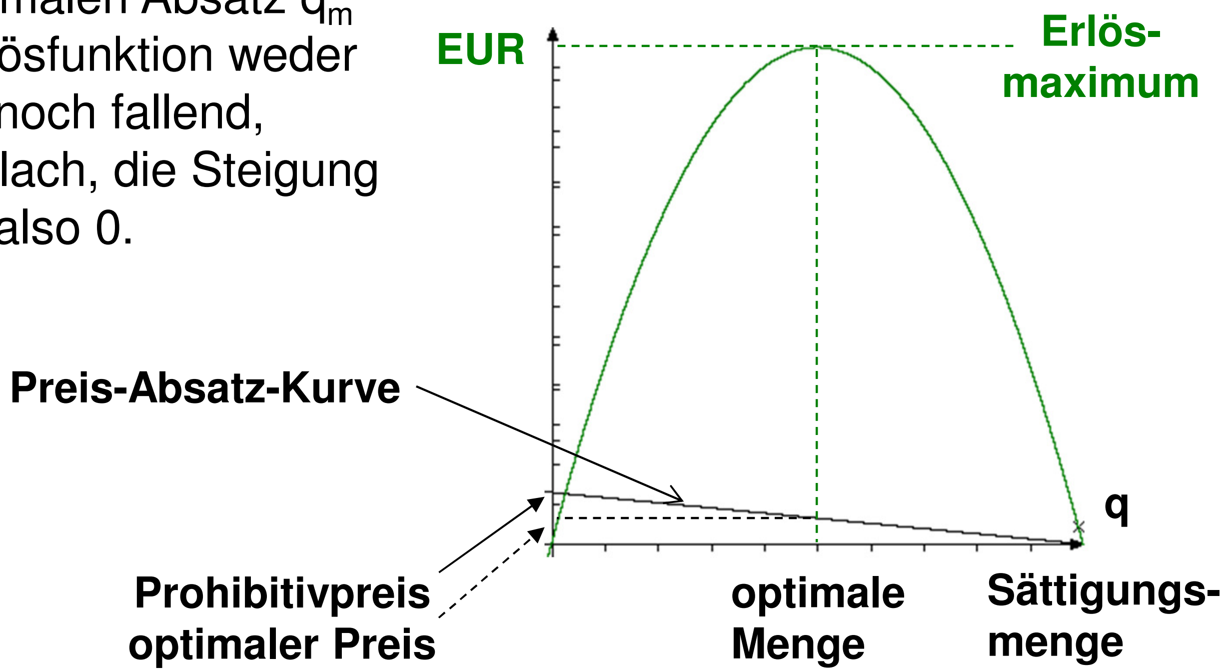
    p(12.500) = 10 – 12.500 / 2.500 = 5 EUR

    oder: 62.500 / 12.500 = 5 EUR

Erlösfunktion

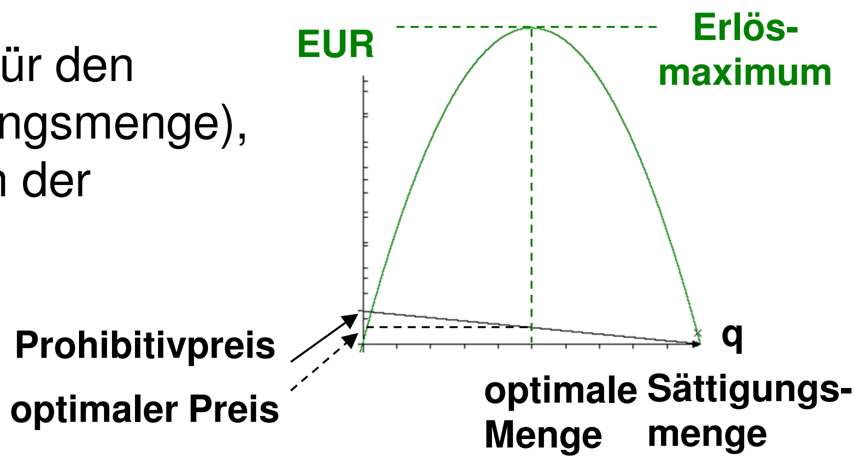
- Ergebnis:
  - Die (Erlös-)optimale Absatzmenge beträgt q_m = 12.500 Stück.
  - Das **Erlösmaximum** beträgt $E(q_m)$ = EUR 62.500.

- Beobachtung:
  - Beim optimalen Absatz q_m ist die Erlösfunktion weder steigend noch fallend, sondern flach, die Steigung an q_m ist also 0.



Erlösfunktion

- Kontrollfrage:
  - Warum ist es nicht so, dass man mehr verdient, wenn man mehr verkauft?
- Antwort:
  - Wir befinden uns hier im Modell eines Monopolmarktes, wo steigender Absatz immer mit fallenden Preisen erkauft werden muss.
  - Wenn der Preis eine bestimmte Marke unterschreitet, geht mehr verloren als durch den gestiegenen Absatz gewonnen werden kann.
  - Am deutlichsten wird dies für den maximalen Absatz (Sättigungsmenge), wo der Preis = 0, also auch der Erlös = 0 ist.



Monotonie

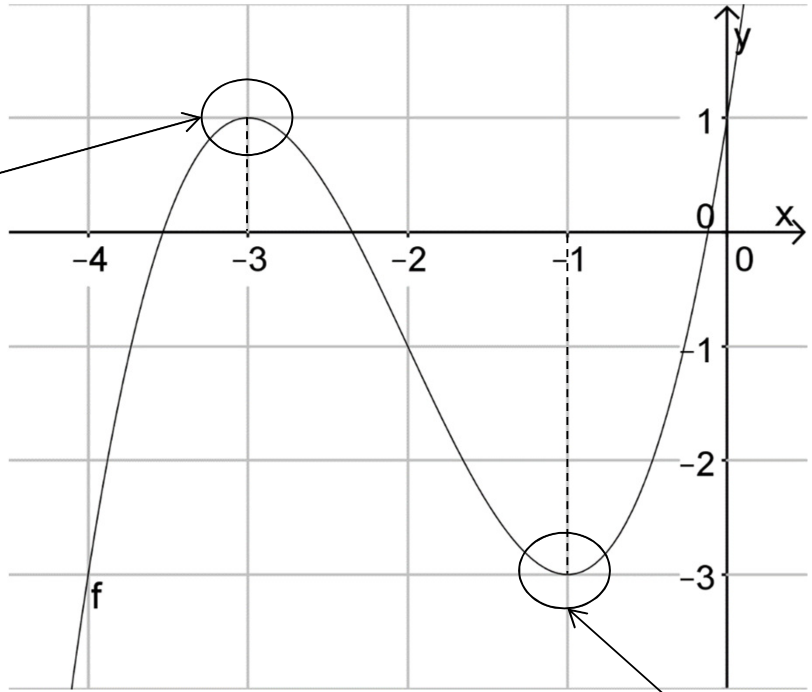
- Beobachtung:
  - Aus der Ableitung einer Funktion kann man einige Eigenschaften der Funktion ermitteln.
- Genauer: Wenn f: [a, b] → ℝ auf [a, b] differenzierbar ist, dann gilt:
  - Wenn $f'(x) \geq 0$ für alle x $\in$ [a, b], dann ist f monoton wachsend.
  - Wenn $f'(x) \leq 0$ für alle x $\in$ [a, b], dann ist f monoton fallend.
  - Wenn $f'(x) > 0$ für alle x $\in$ [a, b], dann ist f streng monoton wachsend.
  - Wenn $f'(x) < 0$ für alle x $\in$ [a, b], dann ist f streng monoton fallend.

Lokale Extrema

- Wir sagen, f hat an x_0 ein **<u>lokales Maximum</u>**, wenn
  – für alle x in einer kleinen Umgebung von x_0 gilt: $f(x_0) \geq f(x)$
- f hat an x_0 ein **<u>lokales Minimum</u>**, wenn
  – für alle x in einer kleinen Umgebung von x_0 gilt: $f(x_0) \leq f(x)$
- In beiden Fällen sagen wir,
  – f hat an x_0 ein **<u>lokales Extremum</u>** bzw. x_0 ist eine lokale Extremstelle von f.
- Wenn die Bedingung nicht nur in einer Umgebung gilt, sondern auf dem ganzen Definitionsbereich, dann sprechen wir von einem **<u>globalen Maximum</u>** bzw. **<u>globalen Minimum</u>** bzw. **<u>globalen Extremum</u>** bzw. einer globalen Extremstelle.

Lokale Extrema

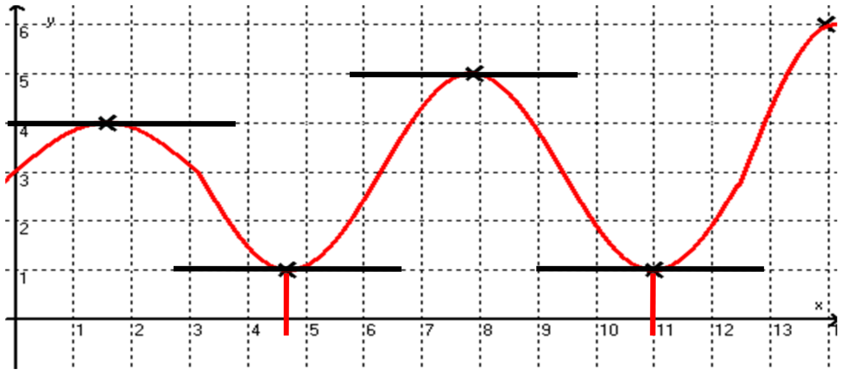
f hat an der Stelle $x_0 = -3$ ein lokales Maximum, da für alle x in einer kleinen Umgebung von x_0 gilt: $f(x_0) \geq f(x)$



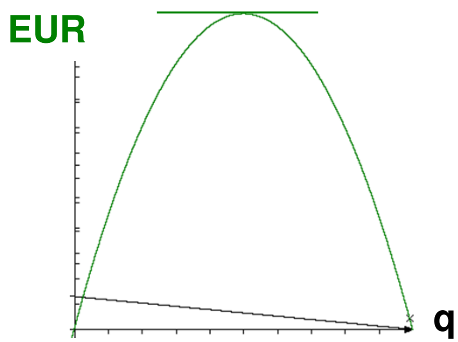
f hat an der Stelle $x_1 = -1$ ein lokales Minimum, da für alle x in einer kleinen Umgebung von x_1 gilt: $f(x_1) \leq f(x)$

Lokale Extrema

- Anmerkung:
  - f kann mehrere lokale Maxima haben aber nur ein globales Maximum.
  - Ein Maximum kann auch am Rand des Definitionsbereichs liegen.



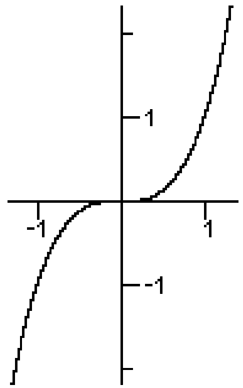
- Satz:
  - Wenn f: D → ℝ differenzierbar ist, dann ist für jede Extremstelle x_0, die im Inneren von D liegt, $f'(x_0) = 0$.
- Beobachtung:
  - Bei der Kugelschreiber-Erlösfunktion gilt dies für das Erlösmaximum 62.500 an der Stelle q=12.500.
  - Beim Erlösminimum 0 an den Stellen q=0 und q=25.000 gilt es nicht (Randwerte).



Lokale Extrema

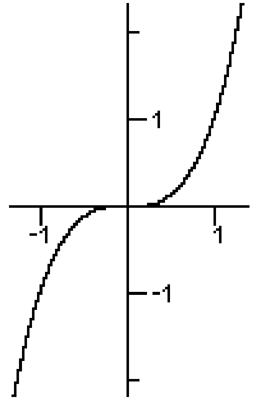
Hochschule Ludwigshafen am Rhein

- Anmerkung:
  - Dieser Satz ist sehr wichtig, um Extrema zu finden,
  - aber nicht jedes x_0 mit $f'(x_0) = 0$ ist eine Extremstelle.
  - Bsp.: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(0) = 0$

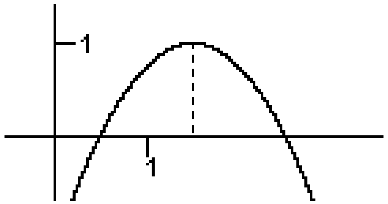


- Anmerkung:
  - Damit x_0 mit $f'(x_0)$ tatsächlich eine Maximalstelle ist, muss (wie im Kugelschreiber-Beispiel)
  - f links von x_0 wachsen, also $f'(x) \geq 0$
  - und rechts von x_0 fallen, also $f'(x) \leq 0$
  - für eine Minimalstelle natürlich anders herum
- Beobachtung:
  - für $f(x) = x^3$ klappt das nicht, weil die Funktion links und rechts von $x_0 = 0$ wächst.
  - Der Punkt $P(0|0)$ ist hier ein sogenannter **Sattelpunkt**.

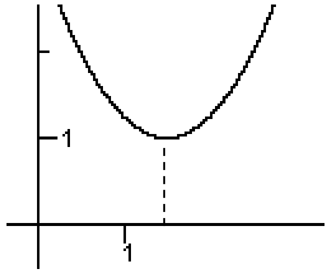
Krümmung



- Beobachtungen:
  - Der Graph der Funktion $f(x) = x^3$ ist
  - links von $x_0 = 0$ **rechtsgekrümmt**,
  - rechts von $x_0 = 0$ **linksgekrümmt**.
- Regel:
  - Wenn an einer Stelle x_0 gilt $f'(x_0) = 0$
  - **und** die Krümmungsart ändert sich nicht,
  - dann ist es ein Extrempunkt.



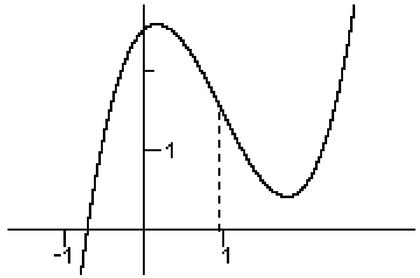
f bleibt an x_0 rechtsgekrümmt → lokales Maximum



f bleibt an x_0 linksgekrümmt → lokales Minimum

Krümmung

- Die Steigung einer Funktion
  - nimmt bei Linkskrümmung zu, das nennen wir **konvex**,
  - nimmt bei Rechtskrümmung ab, das nennen wir **konkav**.
- Ein Punkt $P(x_0, f(x_0))$,
  - an dem der Graph einer Funktion seine Krümmungsart ändert,
    heißt **Wendepunkt**.
  - Am Wendepunkt selbst ist die Krümmung 0.



x_0 Wendepunkt

Höhere Ableitungen

- Krümmung:
  - Wenn eine Funktion linksgekrümmt (konvex) ist,
  - dann nimmt ihre Steigung zu,
  - d.h. die Steigung steigt,
  - d.h. die Steigung der Steigung ist positiv
  - d.h. die Ableitung der Ableitungsfunktion ist positiv.
- Mathematisch:
  - Die Ableitung der Ableitungsfunktion nennen wir **zweite Ableitung** f“. Diese entspricht der Krümmung der Funktion.
  - Die Ableitung der zweiten Ableitung(-sfunktion) nennen wir **dritte Ableitung** f“‘
  - Entsprechend für **höhere Ableitungen** $f^{(4)}$, $f^{(5)}$, etc.

Zusammenfassung

Wenn f: [a, b] → $\mathbb{R}$ auf [a, b] zweimal differenzierbar ist, dann gilt:

- $f'(x) \geq 0$ bzw. $f'(x) > 0 \Rightarrow$ f (streng) monoton wachsend
- $f'(x) \leq 0$ bzw. $f'(x) < 0 \Rightarrow$ f (streng) monoton fallend
- $f''(x) > 0 \Rightarrow$ f linksgekrümmt, also konvex.
- $f''(x) < 0 \Rightarrow$ f rechtsgekrümmt, also konkav.
- x_0 ist innere Extremstelle von f $\Rightarrow f'(x_0) = 0$
- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ ist Extremstelle von f
- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ f hat lokales Minimum an x_0
- $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0 \Rightarrow$ f hat lokales Maximum an x_0
- f hat Wendepunkt an $x_0 \Rightarrow f''(x_0) = 0$
- $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow$ f hat Wendepunkt an x_0

Erlösfunktion

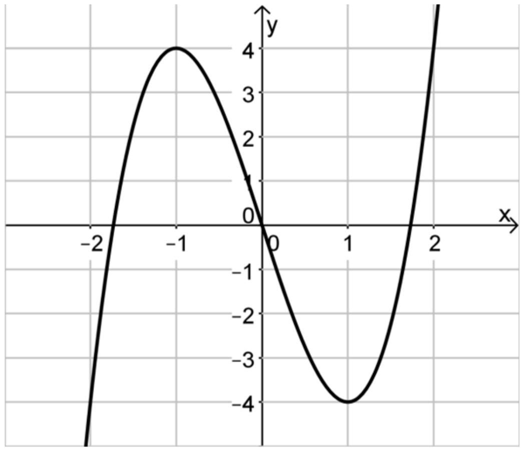
- Wir wollen nun noch einmal das Maximum unserer vorher betrachteten Erlösfunktion, diesmal durch Anwendung der Differentialrechnung, ermitteln:
  – Erinnerung: Erlösfunktion $E(q) = -\frac{q^2}{2.500} + 10q$
  – Wir bilden die 1. und 2. Ableitung:
    $E'(q) = -\frac{q}{1250} + 10; \quad E''(q) = -\frac{1}{1.250}$
  – 1. Ableitung Null setzen: $-\frac{q}{1.250} + 10 = 0$ => $q = 12.500$
  – In 2. Ableitung einsetzen: $E''(12.500) = -\frac{1}{1.250} < 0$ => Maximum
    => Die (Erlös-)optimale Absatzmenge beträgt q_m = 12.500 Stück.
  – Das Erlösmaximum berechnen wir durch Einsetzen von q_m in die Erlösfunktion: $E(12.500) = 62.500$
    => Das Erlösmaximum beträgt 62.500 Euro.
- Anmerkung:
  – Wir erhalten also das selbe Ergebnis wie bei unserer grafischen Betrachtung vorher.

Kurvendiskussion

- Eine vollständige Kurvendiskussion unter Zuhilfenahme der Differentialrechnung umfasst damit die Ermittlung der folgenden Eigenschaften für eine bestimmte Funktion f:
  – Eigenschaften, die bereits im vorigen Foliensatz genannt wurden,
  – Menge aller $x \in D$, an denen f differenzierbar ist und Berechnung der Ableitung(-sfunktion)
  – Existenzprüfung und Berechnung der höheren Ableitungen
  – Ermittlung von lokalen Extrema, globalen Extrema und Wendepunkten
  – Bereiche bzw. Intervalle, in denen f (streng) monoton wächst / fällt,
  – Bereiche bzw. Intervalle in denen f rechts-/linksgekrümmt ist.
- Anmerkung:
  – Bei der Ermittlung von Extrema sind auch die Ränder des Definitionsbereichs zu berücksichtigen.

Beispiel

- $f(x) = 2x^3 - 6x$
  - $f(x) = 2x \cdot (x^2 - 3)$, also sind die Nullstellen:
    $x_1 = 0; \quad x_{2|3} = \pm\sqrt{3}$
  - Schnittpunkt mit y-Achse: $S_y(0, 0)$
  - für $x \to -\infty$ bzw. $x \to +\infty$ geht
    $f(x) \to -\infty$ bzw $f(x) \to +\infty$
  - keine Asymptoten
  - Punktsymmetrisch zu $S_y(0, 0)$, denn $f(-x) = -f(x)$
  - stetig und differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$
  - $f'(x) = 6x^2 - 6$, $f''(x) = 12x$, $f'''(x) = 12$, $f^{(k)}(x) = 0$ für $k > 3$
  - $f'(x) = 0$ für $x = -1$ und $x = +1$, $f''(1) = 12 > 0$, $f''(-1) = -12 < 0$,
    $f(1) = -4$, $f(-1) = 4$, also Hochpunkt $H(-1, 4)$, Tiefpunkt $T(1,-4)$
  - $f''(x) = 0$ für $x = 0$, $f'''(0) = 12 \neq 0$, also Wendepunkt $W(0,0)$
  - wachsend auf $(-\infty,-1]$ und $[1, +\infty)$, fallend auf $[-1, +1]$
  - konvex (linksgekrümmt) auf $[0, +\infty)$, konkav (rechtsgekrümmt) auf $(-\infty, 0]$



Wirtschaftsmathematik

Elastizität und Optimierung

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Analysis

- Einführung in die Funktionen
  - Definition & Darstellungsarten
  - Definitionsbereich, Wertebereich, Bildbereich, Intervalle
  - Eineindeutigkeit & Monotonie
  - Umkehrfunktion
  - Preis-Absatz-Funktion
  - Kostenfunktion
- Funktionsarten
  - Ganzrationale Funktionen / Polynomfunktionen
  - Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen
  - Anzahl & Arten von Nullstellen
  - Grenzwerte / Asymptoten
  - Symmetrie
  - Stetigkeit

Inhalte der Analysis

- Differentialrechnung
  - Differenzenquotient, Differentialquotient, Ableitungsfunktion
  - Durchschnittskosten & Grenzkosten
  - Ableitungsregeln: Summationsregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, Umkehrregel
  - Erlösfunktion, Erlösmaximum
  - Lokales / globales Maximum / Minimum / Extremum
  - Rechts-/Linkskrümmung, konvex, konkav
  - Wendepunkt
  - zweite / dritte Ableitung, höhere Ableitungen
  - Funktionsdiskussion mit der Differentialrechnung

Inhalte der Analysis

- Elastizität und Optimierung
  - (Preis-)elastizität des Absatzes
  - (preis-)elastisch, (preis-)unelastisch
  - Gewinnfunktion
  - Nutzenschwelle, Nutzengrenze
  - Gewinnlinse
  - Cournotscher Punkt
- Integralrechnung
  - Riemann-Integral; Ober- & Untersumme
  - Unbestimmtes Integral
  - Stammfunktion
  - Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
  - Konsumenten- & Produzentenrente

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Veränderung

- Erinnerung:
  - Laut Definition ist $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$
  - Die Ableitung f ‘(x) einer Funktion f: D → ℝ gibt die Veränderung der Funktion f an einer Stelle x ∈ D an.
  - f ‘ ist also (etwa) die Änderung von f, wenn sich x um 1 ändert.

Prozentuale Veränderung

- Betriebswirtschaftliches Beispiel:
  - Ein High-Tech Betrieb entwickelt und fertigt Magnetschwebe-bahnen. Der weltweite Markt beträgt maximal 100 Stück, der Prohibitivpreis beträgt 1 Mrd. EUR.
- Fragestellung:
  - Wie lautet die Preis-Absatz Funktion (falls sie linear ist)?
  - Wie verändert sich der Absatz q, wenn der Preis p um 1 EUR steigt oder fällt?
- Antwort:
  - $q(p) = 100 – p / 10.000.000$
  - Für $\Delta p = 1$ ist $\Delta q = –1/10.000.000$,
für $\Delta p = –1$ ist $\Delta q = 1/10.000.000$
- Beobachtung:
  - Für $\Delta p = 1$ ist die Absatzänderung kaum wahrnehmbar. Das Ergebnis ($\Delta q = –1/10.000.000$) ist also betriebswirtschaftlich nicht besonders aussagekräftig.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Prozentuale Veränderung

- Betriebswirtschaftlich interessantere Fragestellung:
  - Um wie viel Prozent verändert sich der Absatz q, wenn der Preis p um 1 Prozent steigt?
  - Wir gehen zunächst von einem Preis von p = 500 Mio. EUR aus.
  - Erinnerung: $q(p) = 100 - p / 10.000.000$
- Rechnung:
  - Für p = 500 Mio. ist $q(p) = 100 - 50 = 50$ Stück.

  Prozentuale Veränderung von q: $\Delta q/q \cdot 100\%$

  $$\begin{aligned}\Delta q &= q(p + 1\% \text{ von } p) - q(p) = q(p + p/100) - q(p)\\ &= q(505 \text{ Mio.}) - q(500 \text{ Mio.}) = 100 - 505/10 - (100 - 500/10)\\ &= 49{,}5 - 50 = -0{,}5\end{aligned}$$

  Wegen $\Delta q = -0{,}5$ und $q = 50$ ist die prozentuale Veränderung von q: $-0{,}5/50 \cdot 100\% = -1\%$
- Beobachtung:
  - Diese Aussage ist betriebswirtschaftlich interessanter.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Prozentuale Veränderung

- Weitere Fragestellung:
  - Wie groß ist die prozentuale Absatzveränderung bei einem Preis von 200 Mio. bzw. 800 Mio., wenn der Preis um 1% steigt (Erinnerung: q(p) = 100 – p / 10.000.000)?
- Lösung:
  - q(200 Mio.) = 80, q(800 Mio.) = 20, Δq = q(p + 1% von p) – q(p)
  - Δq(200 Mio.+1%) = q(202 Mio.) – q(200 Mio.) = 79,8 – 80 = – 0,2
    => Prozentuale Veränderung von q: Δq / q · 100%
    = – 0,2 / 80 · 100% = – 0,25%
  - Δq(800 Mio.+1%) = q(808 Mio.) – q(800 Mio.) = 19,2 – 20 = – 0,8
    => Prozentuale Veränderung von q = Δq / q · 100%
    = – 0,8 / 20 · 100% = – 4%
- Beobachtungen:
  - Die prozentuale Veränderung ist nicht für alle Ausgangspreise gleich.
  - In diesem Beispiel ist die Auswirkung prozentual stärker, wenn der Ausgangspreis höher ist.

Elastizität

- Aufgabenstellung:
  - Wir haben für verschiedene Preise berechnet, um wie viel Prozent sich der Absatz verändert, wenn sich der Preis um 1 Prozent verändert.
  - Allgemein wollen wir nun eine Formel, die die relative Änderung der Menge bei einer relativen Änderung des Preises angibt.
- Lösung:

$$= \frac{\text{prozentuale Veränderung der abgesetzten Menge}}{\text{prozentuale Veränderung des Preises}}$$

  - Wir rechnen: Δq in % / Δp in %

$$= \left(\frac{\Delta q}{q}\cdot 100\right) \Big/ \left(\frac{\Delta p}{p}\cdot 100\right) = \frac{\Delta q \cdot 100 \cdot p}{q \cdot \Delta p \cdot 100} = \frac{\Delta q}{\Delta p}\cdot\frac{p}{q}$$

- Beobachtung:

  Δq / Δp ist für kleine Δp gerade die Ableitung q'(p).

$\eta(p) = q'(p) \cdot p / q$ heißt die **<u>(Preis-)Elastizität des Absatzes q</u>**

Ableitung und Elastizität

- Elastizität ist nicht gleich Ableitung:
  - Die Ableitung $q'(p)$ beschreibt das Verhältnis zwischen der Änderung das Absatzes und der Änderung des Preises
  - Die Preiselastizität $\eta(p) = q'(p) \cdot p / q$ beschreibt das Verhältnis zwischen der prozentualen Änderung des Absatzes und der prozentualen Änderung des Preises.
- Beobachtungen:
  - Wenn der Preis steigt, sinkt der Absatz, d.h. eine Preis-Absatz-Funktion ist fallend $\Rightarrow q'(p) \leq 0$
  - Hinzukommt, dass Preis und Absatz immer ≥ 0 sind, also ist auch $p/q \geq 0$.

  $\Rightarrow$ Für die Elastizität $\eta(p) = q'(p) \cdot p / q$ gilt $\eta(p) \leq 0$

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Magnetschwebebahn

- Erinnerung:
  – Preis-Absatz Funktion: $q(p) = 100 - p / 10.000.000$
  – Elastizität $\eta(p) = q'(p) \cdot p / q$
- Beispiel Magnetschwebebahn:
  – $q'(p) = -1 / 10.000.000$
  – Dann gilt:

$$\eta(p) = -\frac{1}{10.000.000} \cdot \frac{p}{100 - \frac{p}{10.000.000}}$$

$$= -\frac{p}{1.000.000.000 - p}$$

  – Kontrolle (vgl. Folie 8): $\eta(200.000.000) = -\frac{200.000.000}{800.000.000} = \mathbf{-0,25}$

$\eta(800.000.000) = -\frac{800.000.000}{200.000.000} = \mathbf{-4}$

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Übung

Aufgabe (7 min Zeit):

Gegeben sei folgende Preis-Absatz Funktion:

$q(p) = 24 - 3 \cdot p/100$

a.) Berechnen Sie allgemein die (Preis-)Elastizität des Absatzes q.

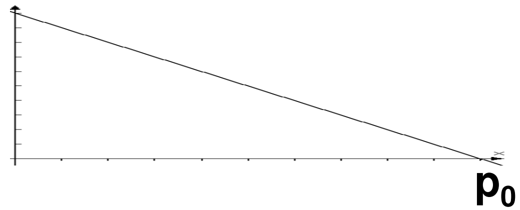
b.) Berechnen Sie die prozentuale Absatzveränderung bei einem Preis von 200 EUR, wenn der Preis um 1% steigt.

c.) Berechnen Sie die prozentuale Absatzveränderung bei einem Preis von 600 EUR, wenn der Preis um 1% steigt.

(Preis-)Elastizität des Absatzes q: $\eta(p) = q'(p) \cdot p / q$

Magnetschwebebahn

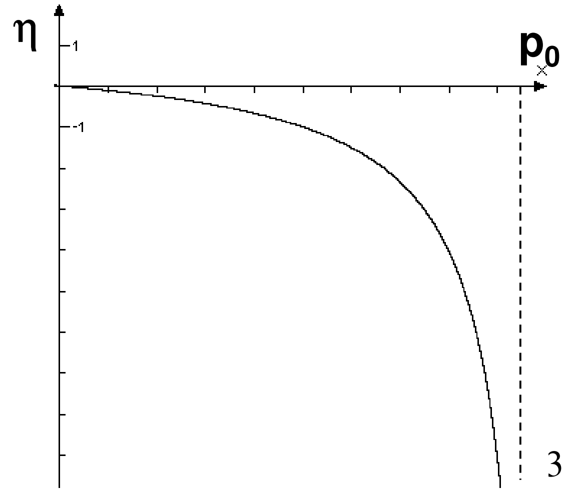
- Beispiel Magnetschwebebahn:
  - Erinnerung: $q(p) = 100 - p / 10.000.000$



- Allgemeiner:
  - Lineare Preis-Absatzfunktion mit Sättigungsmenge m_0 und Prohibitivpreis p_0.
  - Dann gilt $q(p) = m_0 - (m_0 / p_0) \cdot p$, also $q'(p) = -(m_0 / p_0)$, also

$$\eta(p) = q'(p) \cdot \frac{p}{q} = -\frac{m_0}{p_0} \cdot \frac{p}{m_0 - \frac{m_0}{p_0} \cdot p} = \frac{-p}{p_0 - p} = \frac{p_0 - p - p_0}{p_0 - p} = 1 - \frac{p_0}{p_0 - p}$$

- Beobachtungen:
  - $\eta(0) = 0$
  - für $p \in (0, p_0)$ ist $\eta(p) < 0$
  - für $p \in (0, p_0)$ ist η monoton fallend
  - für $p \rightarrow p_0$ gilt $\eta(p) \rightarrow -\infty$

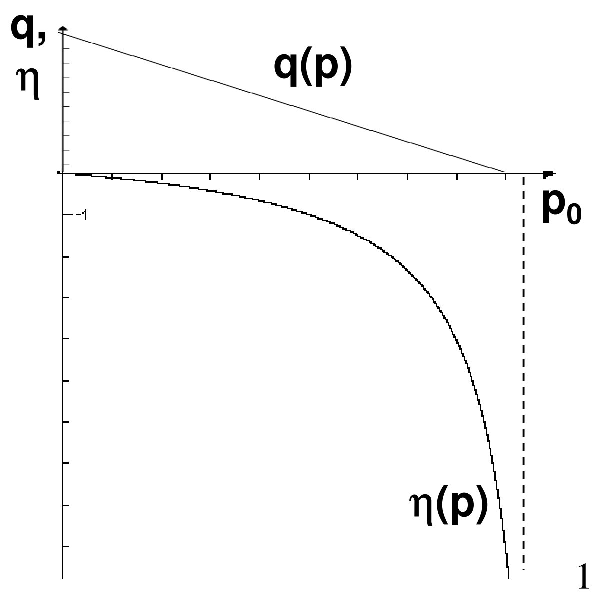


Nichtlineare Absatzfunktionen

- Beobachtungen:
  - Das gilt meistens auch für nichtlineare Absatzfunktionen:
  - Für $p = 0$ (und $q > 0$) ist $\eta(0) = q'(0) \cdot 0 / q = 0$, (außer wenn $q'(0) = -\infty$)
  - Wenn p wächst, fällt q, also wächst p / q
  - Für $p \rightarrow p_0$ geht $q \rightarrow 0$, also $p / q \rightarrow +\infty$

    $\Rightarrow \eta(p) = q'(p) \cdot p / q \rightarrow -\infty$

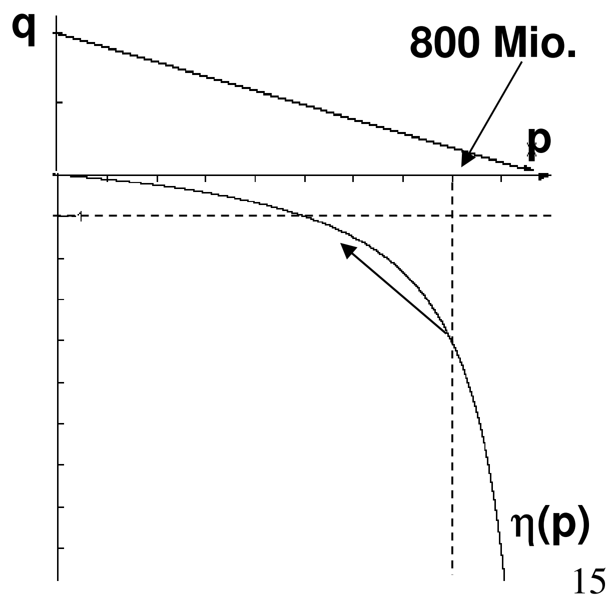
    (außer wenn $q'(p_0) = 0$)
- Achtung:
  - Im Schaubild ist der Preis auf der waagerechten Achse eingetragen.
  - Absatz und Elastizität sind auf der senkrechten Achse eingetragen.



(un-)elastisch

- Überlegung:
  - Wenn bei einer Preisänderung von 1% eine Absatzänderung von mehr als 1% eintritt, dann reagiert der Absatz stärker als der Preis.
  - Man sagt, der Absatz ist an dieser Stelle **(preis-)elastisch**.
  - Im Beispiel der Magnetschwebebahn war dies z.B. bei einem Preis von 800 Mio. EUR der Fall.
- Als Formel:

  Elastischer Bereich: $-\infty < \eta(p) < -1$
- Betriebswirtschaftlich:
  - Wenn wir billiger werden, können wir den Absatz überproportional steigern, d.h. es ist in diesem Fall vorteilhaft, den Preis zu senken.

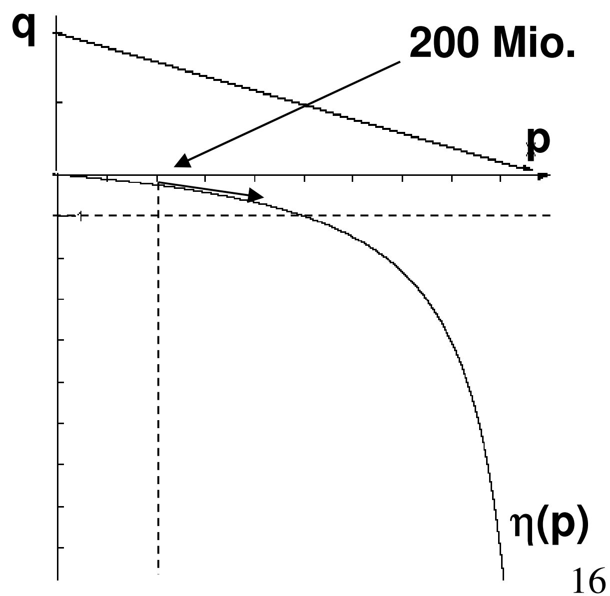


(un-)elastisch

- Überlegung:
  - Wenn bei einer Preisänderung von 1% eine Absatzänderung von weniger als 1% eintritt, dann reagiert der Absatz weniger stark als der Preis.
  - Man sagt, der Absatz ist an dieser Stelle **(preis-)unelastisch**.
  - Im Beispiel der Magnetschwebebahn war dies z.B. bei einem Preis von 200 Mio. EUR der Fall.
- In Formeln:

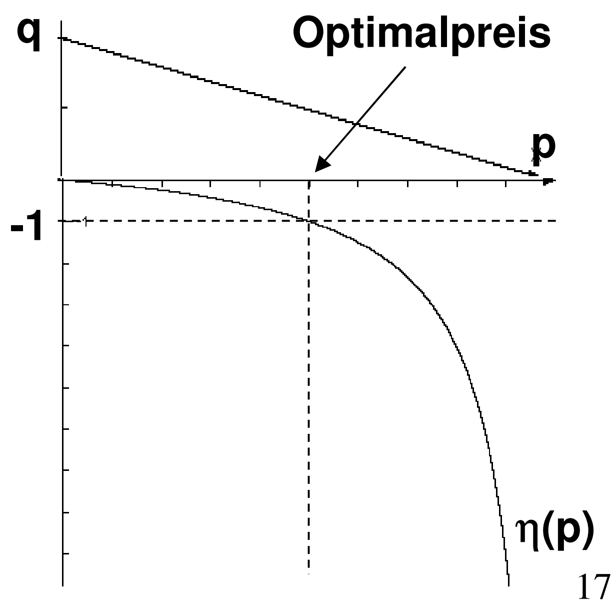
  Unelastischer Bereich: $-1 < \eta(p) \leq 0$
- Betriebswirtschaftlich:
  - Wenn wir teurer werden, sinkt der Absatz unterproportional, d.h. es ist in diesem Fall vorteilhaft,

    den Preis zu erhöhen.



Erlösoptimierung

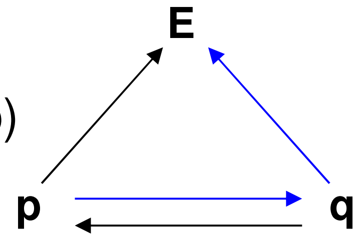
- Zusammenfassung:
  - Wenn der Absatz q an einem bestimmten Preis p elastisch ist, ist es vorteilhaft, billiger zu werden.
  - Wenn der Absatz q an p unelastisch ist, ist es vorteilhaft, teurer zu werden.
  - Der optimale Erlös kann also mit einem Preis p erreicht werden, für den gilt $\eta(p) = -1$.
- Anmerkung:
  - Der Erlös ist in dem Schaubild bisher nicht eingetragen!



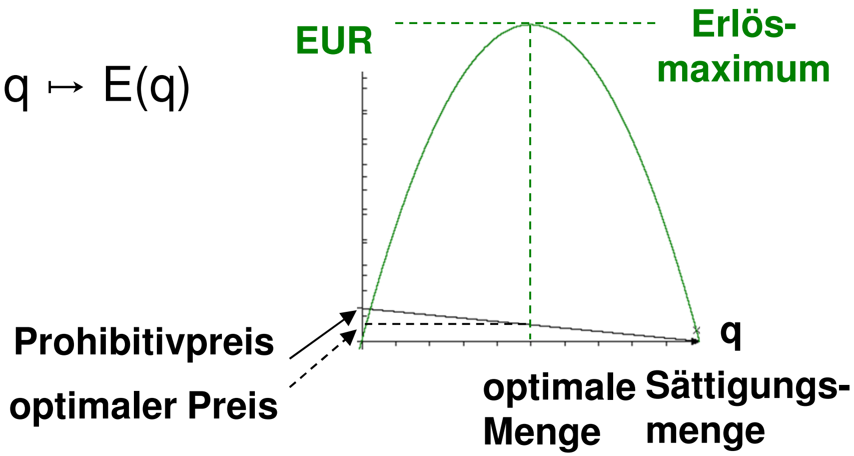
Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Erlösfunktion

- Anmerkung:
  - Im Zusammenhang mit der Differentialrechnung haben wir (Absatz-)Erlösfunktionen $q \mapsto E(q)$ analysiert.
  - Unter Berücksichtigung der Elastizität ist es zweckmäßiger, (Preis-)Erlösfunktionen $p \mapsto E(p)$ zu analysieren.
  - Wenn $q = q(p)$ umkehrbar ist (z.B. im Modell eines Monopolisten), dann ist es sowieso egal, ob man bei p oder q beginnt.



- Erinnerung:
  - (Absatz-)Erlösfunktion $q \mapsto E(q)$ im Monopolmarkt

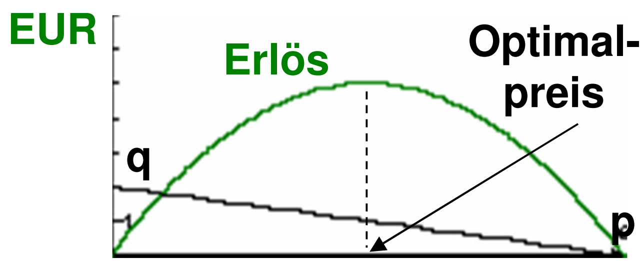


Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Erlösfunktion

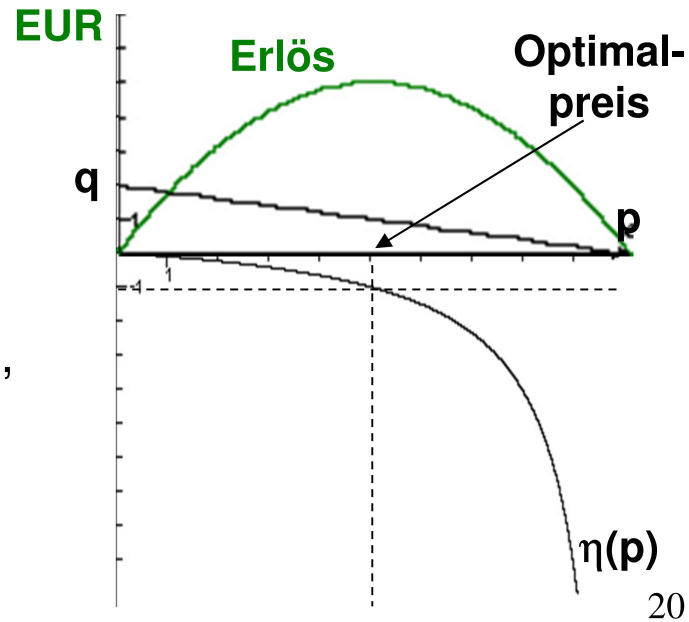
- Beispiel der Magnetschwebebahn:
  - $q(p) = 100 - p / 10.000.000$
  - (Preis-)Erlösfunktion $E(p) = p \cdot q(p) = 100p - p^2 / 10.000.000$
  - Durch Optimierung ($E'(p)=0$) ergibt sich

  $\Rightarrow$ Optimalpreis: 500 Mio.,
  Erlösmaximum: 25.000 Mio.
  Absatz beim Optimalpreis: 50 Stück.



Erlösoptimierung

- Im Zusammenhang mit der Differentialrechnung haben wir
  - bereits festgestellt, dass für einen Preis, an dem die Erlösfunktion $E: D_{öko} \rightarrow \mathbb{R}$ ihr Maximum erreicht, gelten muss: $E'(p) = 0$
  - Wegen $E(p) = p \cdot q(p)$ und der Produktregel ist $E'(p) = 1 \cdot q(p) + p \cdot q'(p)$.
  - Für das Erlösmaximum muss also gelten:
    $q(p) + p \cdot q'(p) = 0$
    $\Rightarrow -q(p) = p \cdot q'(p)$
    $\Rightarrow -1 = q'(p) \cdot p \,/\, q(p)$
    $\Rightarrow -1 = \eta(p)$
  - Unser vorhin betrachtetes Resultat, dass im Erlösoptimum die Preis-elastizität des Absatzes -1 sein muss, wird somit bestätigt!



Elastizität – Zusammenfassung

Bezeich-nung	**Bei 1% Preisstei-gerung**	**Bei 1% Preis-senkung**	**Formel**	**Wo passiert das?**	**Für Erlös-maximie-rung:**
(preis-) **unelastisch**	fällt der Absatz weniger stark als 1%	steigt der Absatz weniger stark als 1%	$0 > \eta(p) > -1$	niedrige Preise	teurer werden
(preis-) **elastisch**	fällt der Absatz stärker als 1%	steigt der Absatz stärker als 1%	$\eta(p) < -1$	hohe Preise	billiger werden
„Gleichge-wicht“	fällt der Absatz um genau 1%	steigt der Absatz um genau 1%	$\eta(p) = -1$	optimaler Preis	diesen Preis wählen

Gewinnoptimierung

- Zur Optimierung des Gewinns müssen wir
  - außer dem Erlös auch die Kosten betrachten, die in der Regel von der produzierten Stückzahl abhängen.
  - Wir gehen also aus von einer Kostenfunktion $q \mapsto k(q)$.
- Demzufolge müssen wir
  - auch die Preis-Absatz-Funktion in der Form $q \mapsto p(q)$ und
  - die (Absatz-)Erlösfunktion in der Form $q \mapsto E(q) = q \cdot p(q)$ heranziehen.
- Definitionsbereich:
  - Aus der Preis-Absatz-Funktion erhalten wir den ökonomisch sinnvollen Definitionsbereich $D_{öko}$.
  - diesen verwenden wir auch für die Kostenfunktion, denn wir brauchen nicht mehr zu produzieren, als wir verkaufen können.

Gewinnoptimierung

- Zusammenfassung: Wir haben bisher drei Funktionen:
  - Preis-Absatz-Funktion p: $D_{öko} \rightarrow \mathbb{R}$, $q \mapsto p(q)$
  - Kostenfunktion k: $D_{öko} \rightarrow \mathbb{R}$, $q \mapsto k(q)$
  - Erlösfunktion in der Form E: $D_{öko} \rightarrow \mathbb{R}$, $q \mapsto E(q) = q \cdot p(q)$
- Neu ist jetzt die:
  - **Gewinnfunktion** G: $D_{öko} \rightarrow \mathbb{R}$, $q \mapsto G(q) = E(q) - k(q)$, also $G(q) = q \cdot p(q) - k(q)$
- Fragestellungen:
  - Bei welchem Preis bzw. Absatz erzielen wir den maximalen Gewinn? Wie hoch ist dieser?
  - In welchem Absatzbereich machen wir überhaupt Gewinn?

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Gewinnoptimierung

- Beispiel: $p(q) = 5000 - 100\sqrt{q}$ und k(q) = 1.234.800 + 100q
  - Für q = 0 ist p = 5.000 (Prohibitivpreis)
  - p = 0, wenn q = 2.500 (Sättigungsmenge), also
  - $D_{öko}$ = [0, 2.500]
  - Die Erlösfunktion ist $E(q) = q \cdot p(q) = 5000q - 100q^{3/2}$
  - Die Gewinnfunktion ist $G(q) = E(q) - k(q) = 4900q - 100q^{3/2} - 1234800$
- Beobachtungen:
  - Für q = 0 ist G(q) = – 1.234.800, also negativ wegen der Fixkosten.
  - für q = 2500 ist G(q) = – k(2500) = – 1.484800
  - In [0, 2.500] ist $G'(q) = 4900 - \frac{3}{2} \cdot 100q^{1/2} = 4900 - 150\sqrt{q}$
  - G'(q) = 0 für $q_0 \approx 1.067{,}11$
  - Wegen $G''(q) = -75/\sqrt{q} < 0$ besitzt G ein Maximum an q_0

Gewinnoptimierung

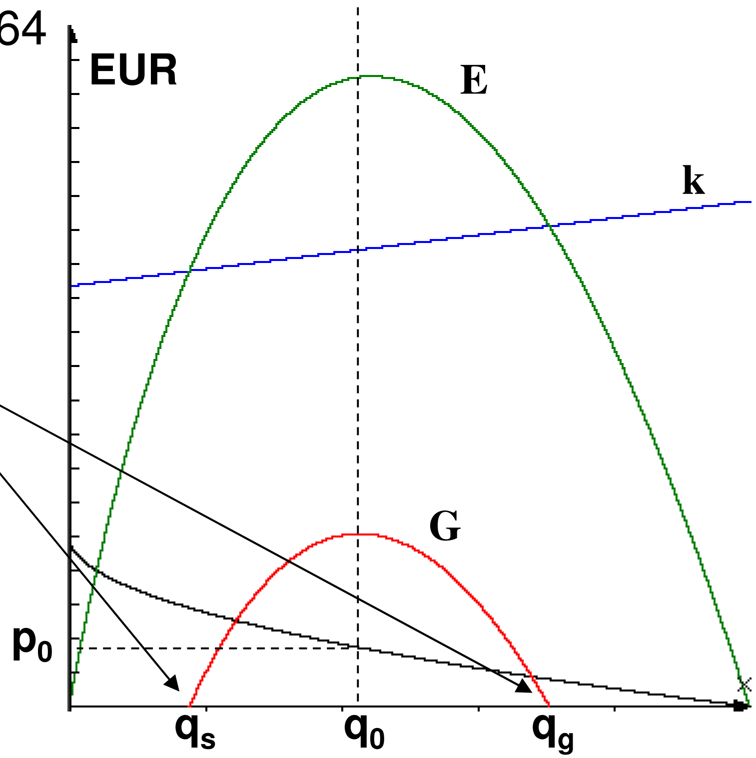
- Weitere Beobachtungen:
  - G' ist zunächst positiv und ab q_0 negativ. G'' ist immer negativ.
  - Die Gewinnkurve ist also rechtsgekrümmt (konkav), steigt zunächst und fällt dann nur noch. Sie hat also höchstens zwei Nullstellen.
  - Diese sind $q_s = 441$ und $q_g = 1764$
  - Die kleinere dieser Nullstellen heißt **<u>Nutzenschwelle</u>**
  - Die größere dieser Nullstellen heißt **<u>Nutzengrenze</u>**
- Berechnungen ($q_0 = 1.067,11$):

  $p_0 = p(q_0) = 1.733,33$ EUR

  $E(q_0) = 1.849.659,26$ EUR

  $k(q_0) = 1.341.511,11$ EUR

  $G(q_0) = 508.148,15$ EUR



Übung

Aufgabe (12 min Zeit):

Für ein Unternehmen gelten die Preis-Absatz Funktion p und die Kostenfunktion k mit

$$p(q) = 600 - \frac{1}{10}q$$

$$k(q) = 586q + 330$$

a.) Bestimmen Sie die Gewinnfunktion (Tipp: Bestimmen Sie zuerst die Erlösunktion).

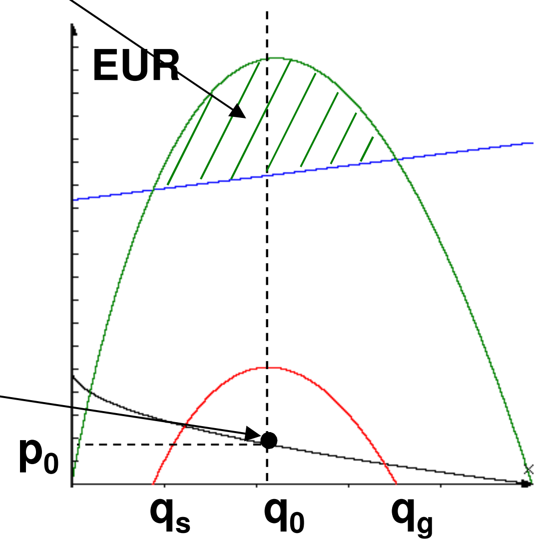
b.) Berechnen Sie Nutzenschwelle und Nutzengrenze.

c.) Ermitteln Sie, bei welchem Preis bzw. Absatz der maximale Gewinn erzielt wird und dessen Höhe.

Gewinnoptimierung

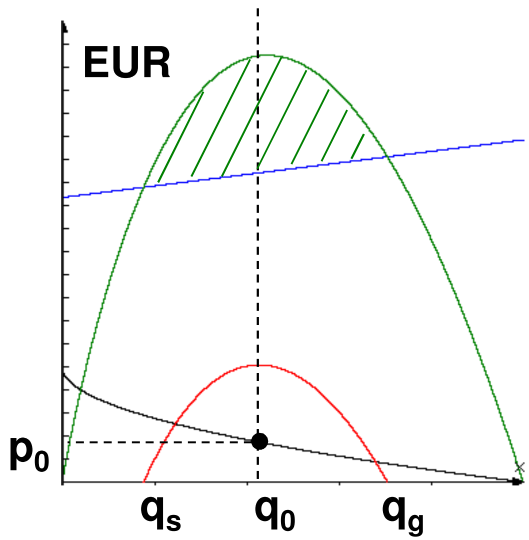
- Weitere Beobachtungen:
  - Der Gewinnbereich ist der Absatzbereich zwischen Nutzenschwelle und Nutzengrenze.
  - Dies ist der Bereich, in dem der Erlös größer ist als die Kosten. Im Schaubild: **Gewinnlinse**

- Anmerkung:
  - Um den optimalen Absatz zu erzielen, muss man den optimalen Preis verlangen. Dieser ist $p_0 = p(q_0)$
  - Der Punkt (q_0, p_0) liegt auf dem Graph der Preis-Absatz-Funktion. Er heißt **Cournotscher Punkt**



Gewinnoptimierung

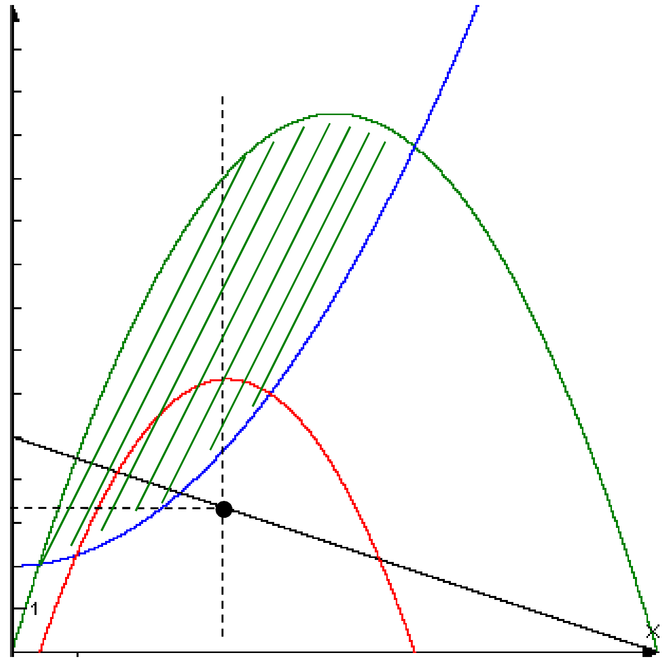
- Weitere Beobachtungen:
  - Wegen G(q) = E(q) – k(q) gilt auch G'(q) = E'(q) – k'(q). Dabei sind k'(q) die Grenzkosten, E'(q) der Grenzerlös und G'(q) der Grenzgewinn beim Absatz q.
  - Der Gewinn steigt solange G'(q) positiv ist, also solange der Grenzerlös die Grenzkosten übersteigt.
  - Am Punkt des maximalen Erlöses ist der Grenzerlös = 0, es wird aber davon ausgegangen, dass die Grenzkosten immer positiv sind, dass also die Kostenfunktion immer steigt. Deshalb ist am Punkt des maximalen Erlöses der Gewinn bereits wieder rückläufig.



- Ergebnis:
  - Das Gewinnmaximum kommt früher als das Erlösmaximum.

Gewinnoptimierung

- Weiteres Beispiel: $p(q) = 5 - q/2$ und $k(q) = q^2/4 + 2$
  - Für $q = 0$ ist $p = 5$ (Prohibitivpreis)
  - $p = 0$, wenn $q = 10$ (Sättigungsmenge), also
  - $D_{öko} = [0, 10]$
  - Die Erlösfunktion ist $E(q) = q \cdot p(q) = 5q - q^2/2$
  - Die Gewinnfunktion ist $G(q) = E(q) - k(q) = 5q - 3/4 \cdot q^2 - 2$
- Berechnungen:
  - $G(0) = -2$, $G(10) = -27$
  - $G'(q) = 5 - 3/2 \cdot q$, $G''(q) = -3/2$
  - $G'(q) = 0$ für $\mathbf{q_0 = 10/3 = 3{,}33}$.
    Wegen $G'' < 0$ ist q_0 Maximalstelle.
  - $p(q_0) = 10/3 = 3{,}33$
  - $E(q_0) = 100/9 = 11{,}11$
  - $k(q_0) = 43/9 = 4{,}77$
  - $G(q_0) = 19/3 = 6{,}33$



Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Gewinnoptimierung

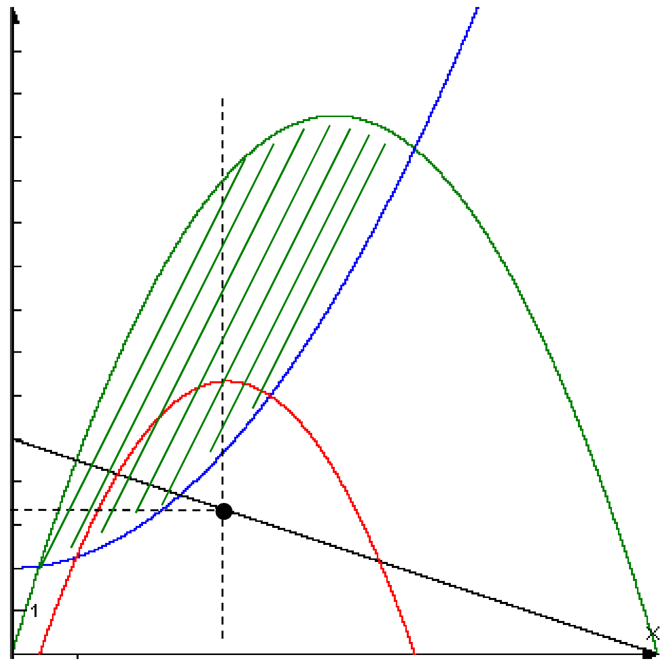
- Weitere Berechnungen:

  G(q) = 0: 5q – 3/4·q² – 2 = 0 ⇒ 3q² – 20 q + 8 = 0

  $$\Rightarrow \quad q_{s|g} = \frac{(20 \pm \sqrt{20^2 - 4 \cdot 3 \cdot 8})}{6} \quad \text{(abc-Formel)}$$

  $$\Rightarrow \quad q_s = 0{,}43 \text{ und } q_g = 6{,}24$$

- Ergebnis:
  - Nutzenschwelle: 0,43
  - Nutzengrenze: 6,24
  - Cournotscher Punkt: (3,33, 3,33)
- Übrigens:
  - Maximalerlös 12,5 für q = 5
  - Erlös am Cournotschen Punkt, also an q = 3,33: nur 11,11



Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Gewinnoptimierung

- Anmerkungen:
  - Dies waren typische Modelle für monopolistische Preis-Absatz-Funktionen.
  - Genauer: Modelle, in denen die Preis-Absatz-Funktion streng monoton fällt bis auf 0.
- Bei einem Polypol im vollkommenen Markt
  - ist der Preis fest und deshalb die Preis-Absatz-Funktion konstant, d.h. $p(q) = p_0$ für alle sinnvollen q.
  - Die Sättigungsmenge entspricht der Größe des Gesamtmarkts. Hieraus ergibt sich $D_{öko}$
  - Die Erlösfunktion ist $E(q) = p_0 \cdot q$, d.h. je mehr verkauft wird, umso größer ist der Erlös. Der Grenzerlös ist $E'(q) = p_0$
  - Die Gewinnfunktion ist $G(q) = E(q) - k(q) = p_0 \cdot q - k(q)$. Diese steigt, solange die Grenzkosten geringer sind als der Grenzerlös, also solange gilt $k'(q) < p_0$.

Gewinnoptimierung

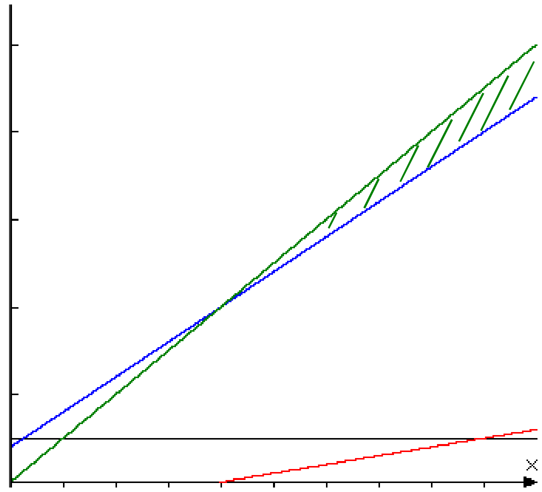
- Beispiel1 :
  - $p = 2{,}5$ und $k(q) = 2q + 2$
  - $E(q) = p \cdot q = 2{,}5q$, $G(q) = 0{,}5q - 2$
  - $k'(q) = 2$, $E'(q) = 2{,}5$

  $\Rightarrow$ $G'(q) = E'(q) - k'(q) = 0{,}5 > 0$

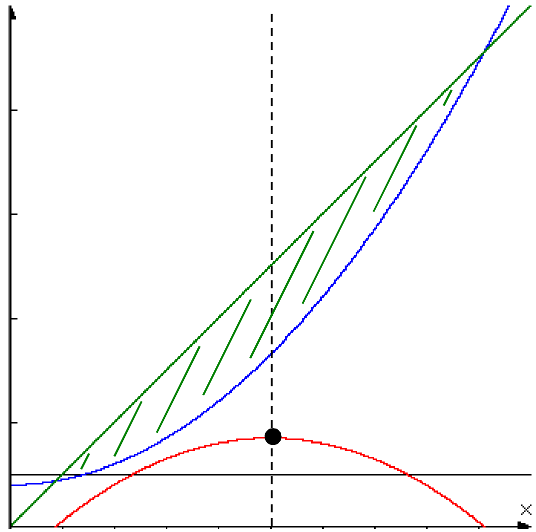
  $\Rightarrow$ G steigt im gesamten Definitionsbereich

  $\Rightarrow$ je größer der Absatz ist, desto größer ist der Gewinn,

  $\Rightarrow$ kein Cournotscher Punkt, keine Nutzengrenze
  - Nutzenschwelle: $G(q) = 0 \Rightarrow q = 4$



Gewinnoptimierung



- Beispiel 2:
  - p = 2,5 und $k(q) = q^2/4 + 2$
  - $E(q) = 2{,}5q$
  - $G(q) = 2{,}5q - q^2/4 - 2$

- Berechnungen
  - $G'(q) = -q/2 + 5/2$, $G''(q) = -1/2 < 0$

  ⇒ Der Gewinn wird maximal für $q_0 = 5$
  - $p(q_0) = 2{,}5$, $E(q_0) = 12{,}5$, $k(q_0) = 8{,}25$, $G(q_0) = 4{,}25$
  - Cournotscher Punkt: (5 | 2,5)
  - Nutzenschwelle: $q_s \approx 0{,}877$
  - Nutzengrenze: $q_g \approx 9{,}12$

  → Es kann doch ein Maximum geben

Wirtschaftsmathematik

Integralrechnung

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Analysis

- Einführung in die Funktionen
  - Definition & Darstellungsarten
  - Definitionsbereich, Wertebereich, Bildbereich, Intervalle
  - Eineindeutigkeit & Monotonie
  - Umkehrfunktion
  - Preis-Absatz-Funktion
  - Kostenfunktion
- Funktionsarten
  - Ganzrationale Funktionen / Polynomfunktionen
  - Exponentialfunktionen
- Eigenschaften von Funktionen
  - Anzahl & Arten von Nullstellen
  - Grenzwerte / Asymptoten
  - Symmetrie
  - Stetigkeit

Inhalte der Analysis

- Differentialrechnung
  - Differenzenquotient, Differentialquotient, Ableitungsfunktion
  - Durchschnittskosten & Grenzkosten
  - Ableitungsregeln: Summationsregel, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel, Umkehrregel
  - Erlösfunktion, Erlösmaximum
  - Lokales / globales Maximum / Minimum / Extremum
  - Rechts-/Linkskrümmung, konvex, konkav
  - Wendepunkt
  - zweite / dritte Ableitung, höhere Ableitungen
  - Funktionsdiskussion mit der Differentialrechnung

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Analysis

- Elastizität und Optimierung
  - (Preis-)elastizität des Absatzes
  - (preis-)elastisch, (preis-)unelastisch
  - Gewinnfunktion
  - Nutzenschwelle, Nutzengrenze
  - Gewinnlinse
  - Cournotscher Punkt
- Integralrechnung
  - Riemann-Integral; Ober- & Untersumme
  - Unbestimmtes Integral
  - Stammfunktion
  - Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
  - Konsumenten- & Produzentenrente

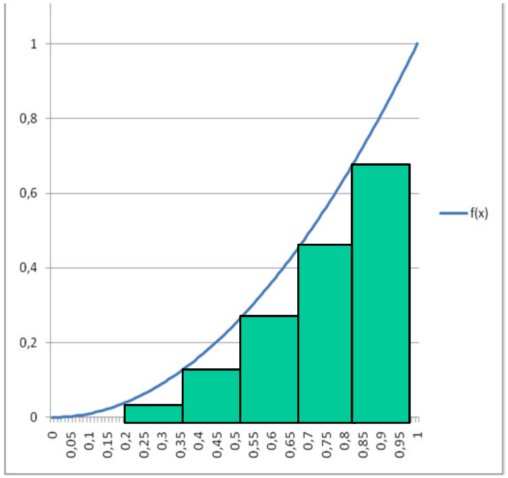
Integralrechnung

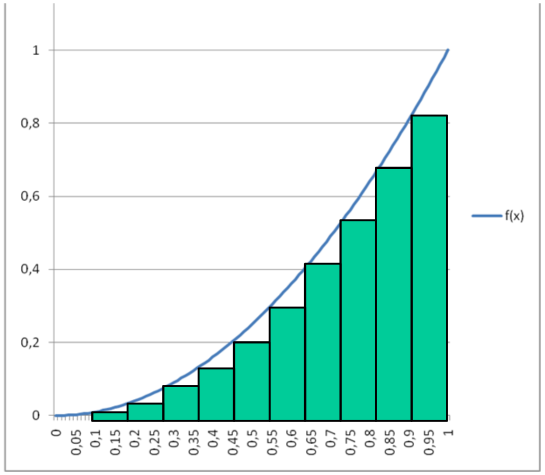
- In den Wirtschaftswissenschaften gibt es verschiedene Bereiche, in denen die Integralrechnung eine wichtige Rolle spielt (z.B. die Statistik, siehe 2.Semester).

- Das Integral einer Funktion ist ein Maß für die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion (Annahme vorerst: die Funktion verläuft oberhalb der x-Achse).

Integralrechnung

- Ziel: In einem bestimmten Intervall soll die Fläche zwischen Graph und x-Achse berechnet werden.
- Das Integral hilft, indem es einen Grenzübergang darstellt:
  – Das betrachtete Intervall wird in kleine Teilstücke zerlegt (Breite *Δx*).
  – Es wird ein Rechteck mit Breite *Δx* und Höhe des Funktionswerts gebildet.
  – Die Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke approximiert die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse.
  – Nun werden die *Δx* kleiner gewählt (z.B. halbiert).





Riemann-Integral

- Sei *f* eine stetige Funktion auf einem Intervall [a,b]
- *f* sei außerdem beschränkt
- Wir definieren eine Zerlegung des Intervall [a,b]. Der Einfachheit halber nehmen wir eine äquidistante Zerlegung an: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

  mit $x_i = a + i \cdot \Delta x \quad \text{für } i = 0,\ldots,n \quad \text{wobei } \Delta x = \dfrac{b-a}{n}$

- Dann wird die <u>Obersumme</u> definiert als:

$$\overline{S_f} = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \cdot \max_{x \in (x_i, x_{i+1})} \left(f(x) \right)$$

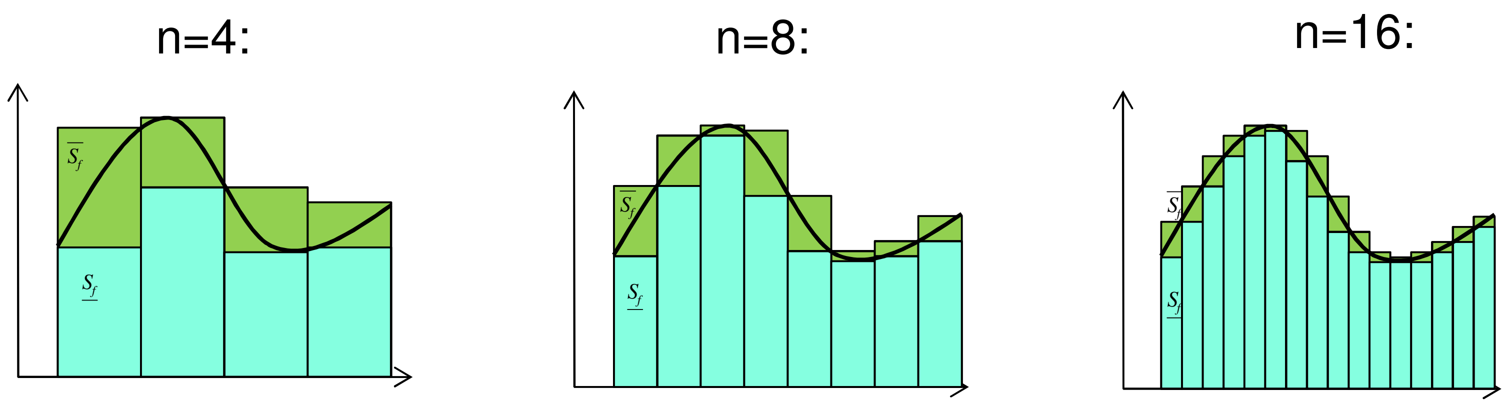
- Und die <u>Untersumme</u> als:

$$\underline{S_f} = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \cdot \min_{x \in (x_i, x_{i+1})} \left(f(x) \right)$$

Georg Riemann
(* 1826 Breselenz (D);
† 1866 in Italien)

Riemann-Integral – Ober- und Untersumme

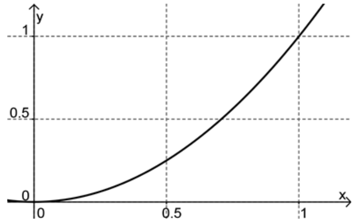
- Grafische Veranschaulichung von Obersumme und Untersumme für…



- Je größer n, d.h. je mehr Rechtecke gebildet werden, desto mehr nähern sich sowohl Obersumme als auch Untersumme dem tatsächlichen Wert des Flächeninhalts zwischen Graph und x-Achse an.

Riemann-Integral - Beispiel

- Gegeben sei die Funktion f durch $f(x) = x^2$.
- Wie groß ist die Fläche, die der Graph von f und die x-Achse im Intervall [0;1] einschließen?



- f ist stetig und für $x \in [0; 1]$ streng monoton wachsend. Deshalb befindet sich das Maximum auf jedem Teilintervall immer am rechten Rand.
- Also gilt für die Obersumme (mit $x_i = 0 + \Delta x \cdot i = \Delta x \cdot i$)

$$\overline{S_f} = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \cdot \max\big(f(x)\big) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \cdot f(\Delta x \cdot (i+1))$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \cdot (\Delta x \cdot (i+1))^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x \cdot \Delta x^2 \cdot (i+1)^2 = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta x^3 \cdot (i+1)^2$$

$$= \Delta x^3 \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^2 = \Delta x^3 \sum_{j=1}^{n} j^2 = \Delta x^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Riemann-Integral - Beispiel

- Also: $$\overline{S_f} = \Delta x^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
- Wobei $$\Delta x = \frac{1}{n}$$
- Insgesamt:

$$\overline{S_f} = \Delta x^3 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n^2+n)(2n+1)}{6n^3}$$

$$= \frac{(2n^3+n^2+2n^2+n)}{6n^3} = \frac{1}{6}\frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \frac{1}{6}\left(2+3\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)$$

- Nun führen wir den Grenzübergang für $n \to \infty$ durch

$$\lim_{n\to\infty}\overline{S_f} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(2+3\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

- Damit schließen der Graph von f(x)=x² und die x-Achse im Intervall [0;1] eine Fläche mit einem Flächeninhalt von $\frac{1}{3}$ Flächeneinheiten ein.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Riemann-Integral - Beispiel

- Erinnerung an die Schulzeit:
  Bestimmen Sie eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$.

- Stammfunktion: $F(x) = \frac{x^3}{3} + c$

- Also

$$\int_0^1 f(x)dx = \left[\frac{x^3}{3} + c\right]_0^1 = F(1) - F(0) = \frac{1^3}{3} + c - \left(\frac{0^3}{3} + c\right) = \mathbf{\frac{1}{3}}$$

$\Rightarrow$ Der Wert des Integrals $\int_0^1 f(x)dx$ entspricht dem Flächeninhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse im Intervall [0;1] eingeschlossen wird.

(Da die Funktion f stetig ist und ihr Graph für das ganze Intervall [0;1] oberhalb der x-Achse verläuft.)

Riemann-Integral - Definition

- *f* sei eine stetige und beschränkte Funktion auf dem Intervall [a,b] mit Werten innerhalb der Menge der reellen Zahlen
- Es sei eine Unterteilung des Intervalls [a,b] gegeben:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

mit

$$x_i = a + i \cdot \Delta x \quad \text{für } i = 0,\ldots,n \quad \text{wobei } \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

- Dann heißt

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(z_i) \cdot \Delta x \quad \text{mit } z_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

<u>Riemann-Summe</u> der Feinheit *Δx* mit Stützstellen z_i

- Falls die Summe für *Δx→0* konvergiert (unabhängig von den Stützstellen), so heißt die Funktion <u>Riemann-integrierbar</u>
- Der Grenzwert heißt <u>**Riemann-Integral**</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(z_i) \cdot \Delta x \quad \text{mit} \quad z_i \in [x_i, x_{i+1}]$$

Unbestimmtes Integral

- Eine differenzierbare Funktion *F: D →R* heißt Stammfunktion von f, wenn

$$F'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in D$$

- Schon hier sieht man, dass Stammfunktionen nur bis auf eine Konstante bestimmbar sind. Zählt man zu *F(x)* noch eine Konstante hinzu, so fällt diese bei der Ableitung weg und die obige Gleichung stimmt noch immer.

- Die Familie aller Stammfunktionen heißt das unbestimmte Integral und wird mit

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

bezeichnet (*c* ist eine reelle Zahl).

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

- *f* sei eine stetige Funktion auf einem Intervall [a,b]
- *F* sei eine Stammfunktion von *f*
- Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Stammfunktionen

Funktion f(x)	Stammfunktion F(x) (jeweils „+c“)
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x \rvert)$
$x^n \quad (n \in R, n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
e^x	e^x

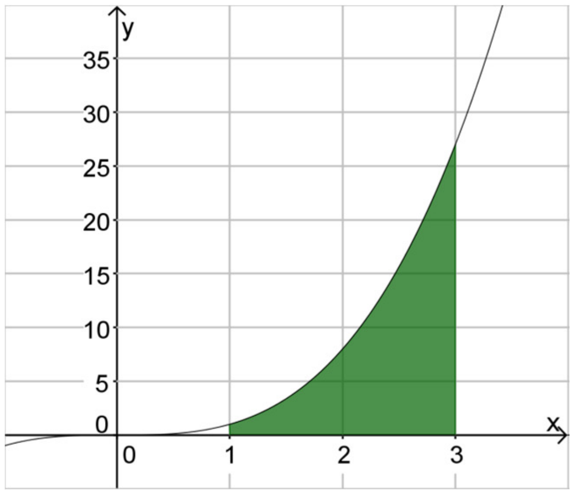
integrieren

differenzieren

Beispiel

- Es soll das folgende bestimmte Integral berechnet werden: $\int_1^3 x^3 dx$
- Lösung:

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$



20 FE

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Übung

Aufgabe (8 min Zeit):

Bestimmen Sie die folgenden Integrale.

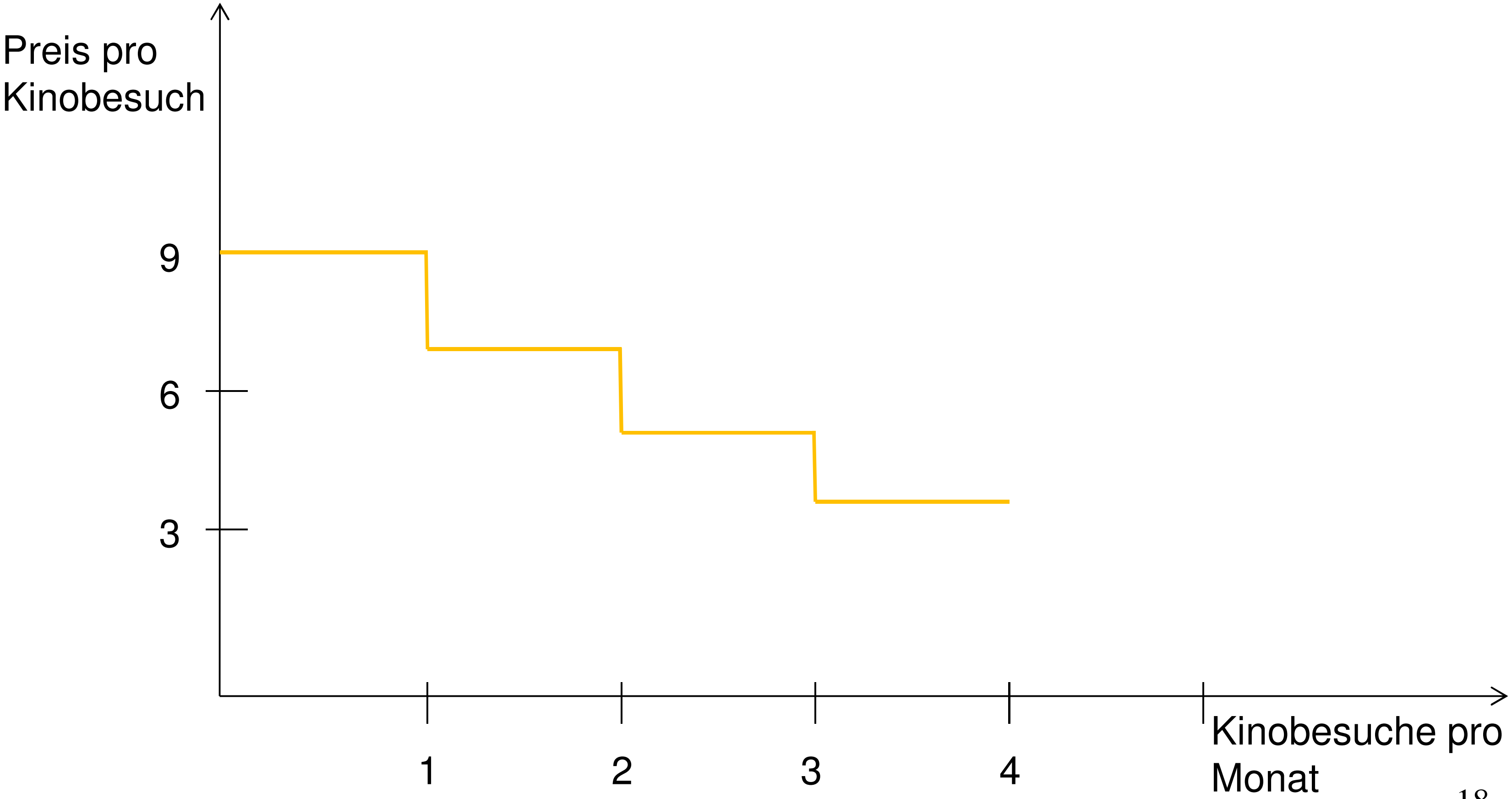
a.) $\int_0^4 (-2x^3 + 1{,}5x^2 + x - 1)dx$

b.) $\int_0^3 \left(e^{\frac{1}{3}x} - 2\right)dx$

c.) $\int_{-2}^{a} (-x^2 - 2x)dx$

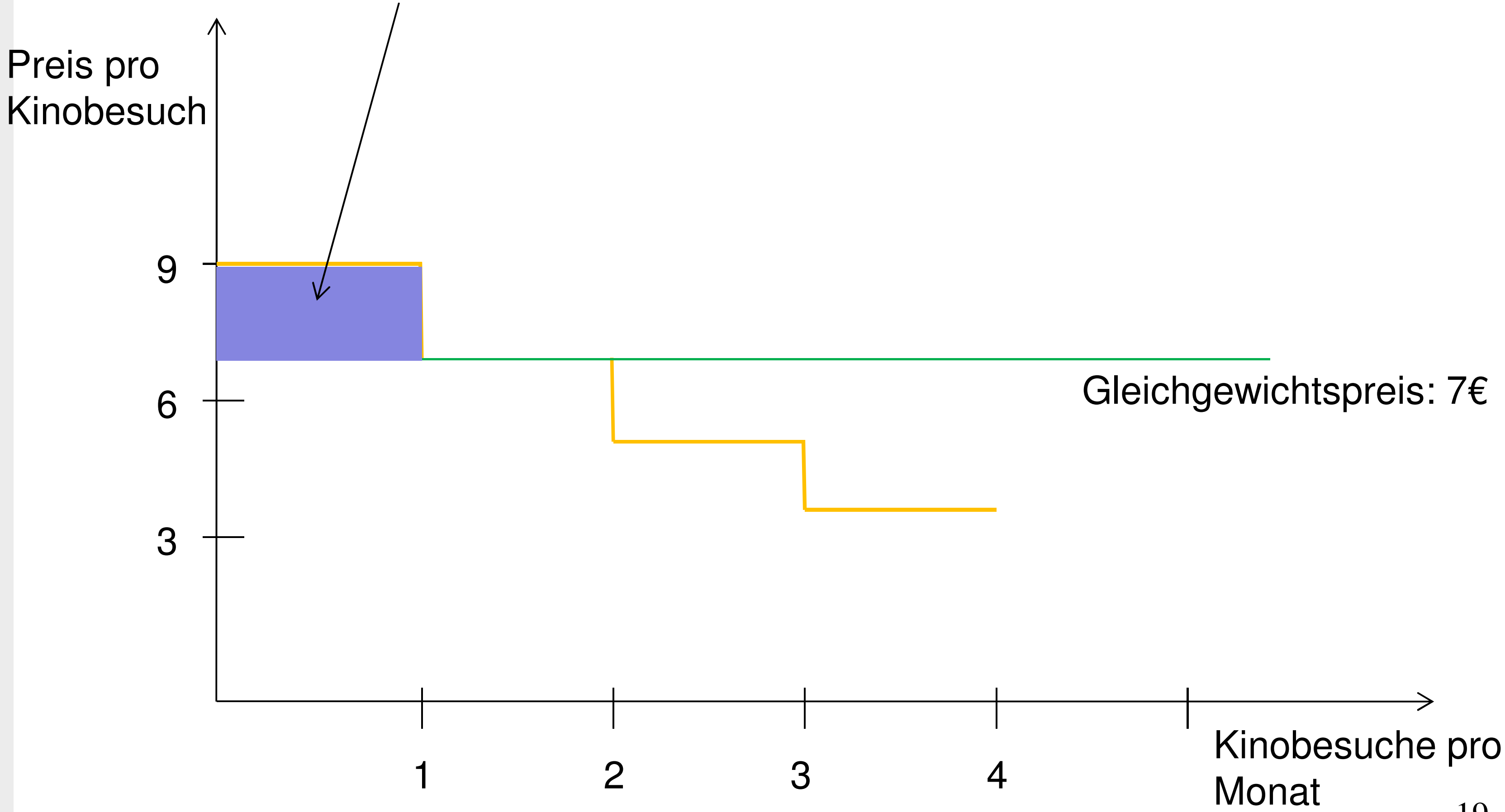
Konsumentenrente

- Für den Kinobesuch ist jeder Mensch bereit einen anderen Preis zu zahlen,
- Annahme: folgender Verlauf der Zahlungsbereitschaft



Konsumentenrente

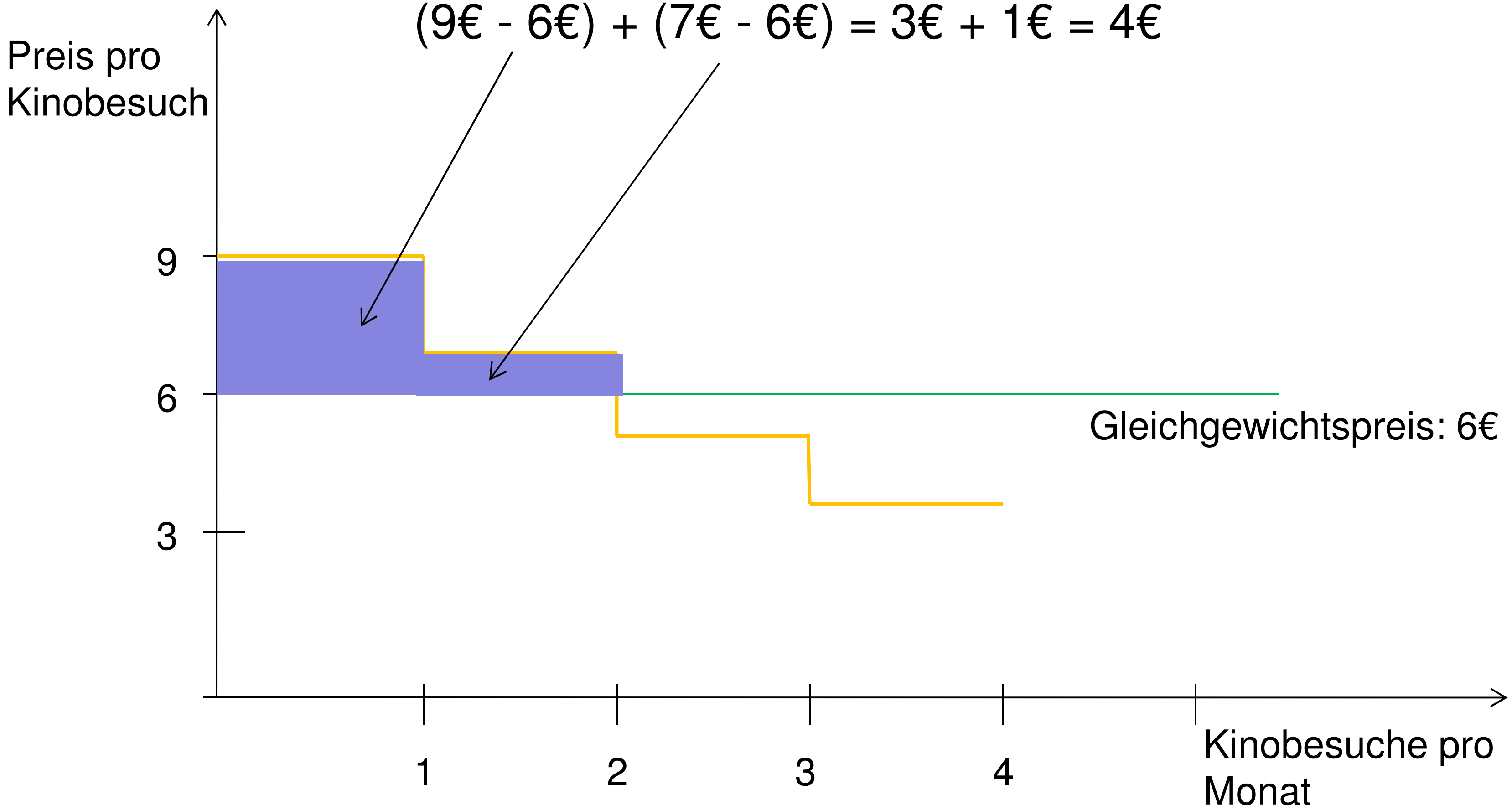
- Falls der Preis für einen Kinobesuch (durch den Betreiber festgelegt) bei 7€ liegt, ergibt sich bei einem Kinobesuch eine <u>Konsumentenrente</u> von 9€ - 7€ = 2€



Konsumentenrente

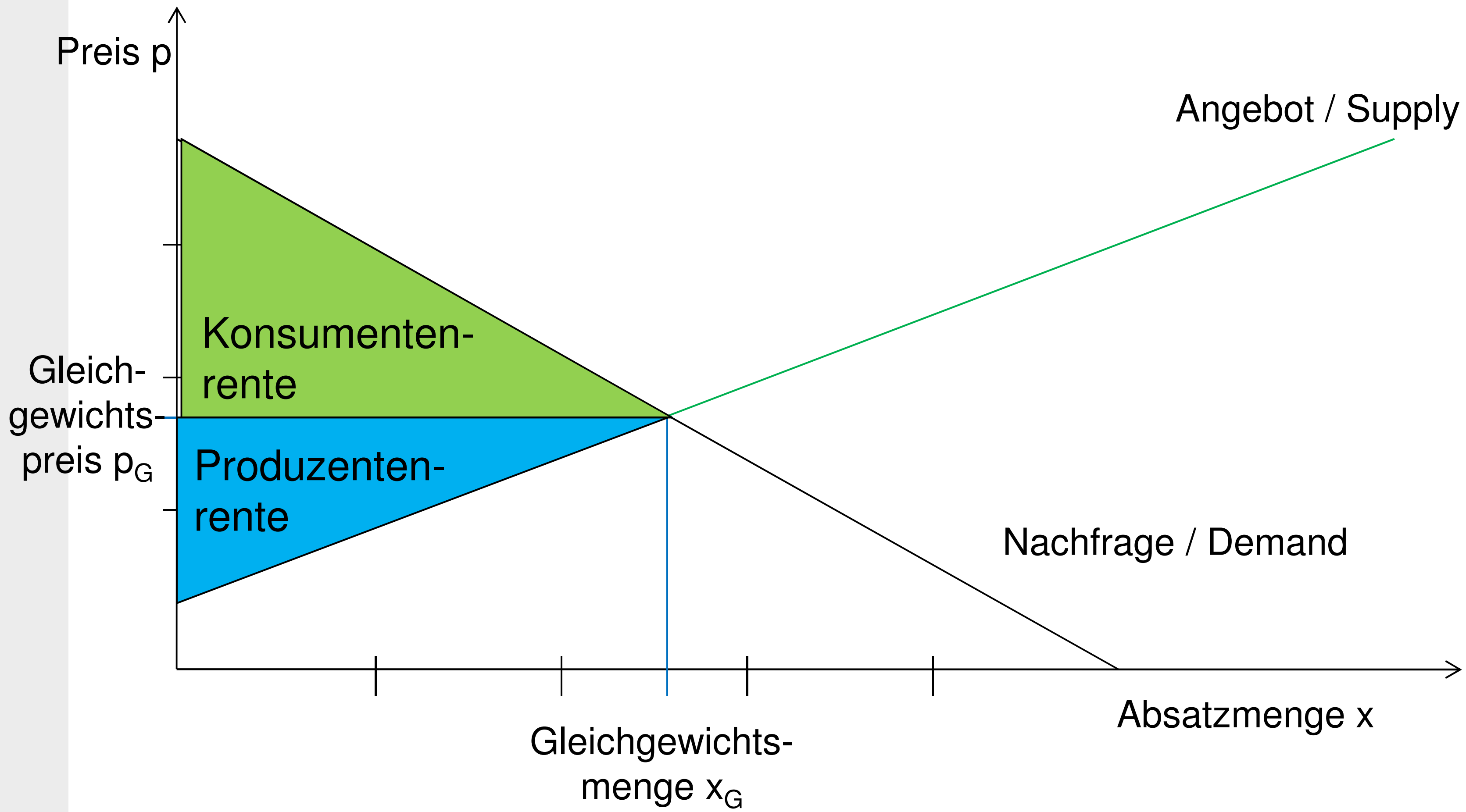
- Falls der Preis für einen Kinobesuch (durch den Betreiber festgelegt) auf 6€ gesenkt wird, ergibt sich eine Konsumentenrente von

(9€ - 6€) + (7€ - 6€) = 3€ + 1€ = 4€



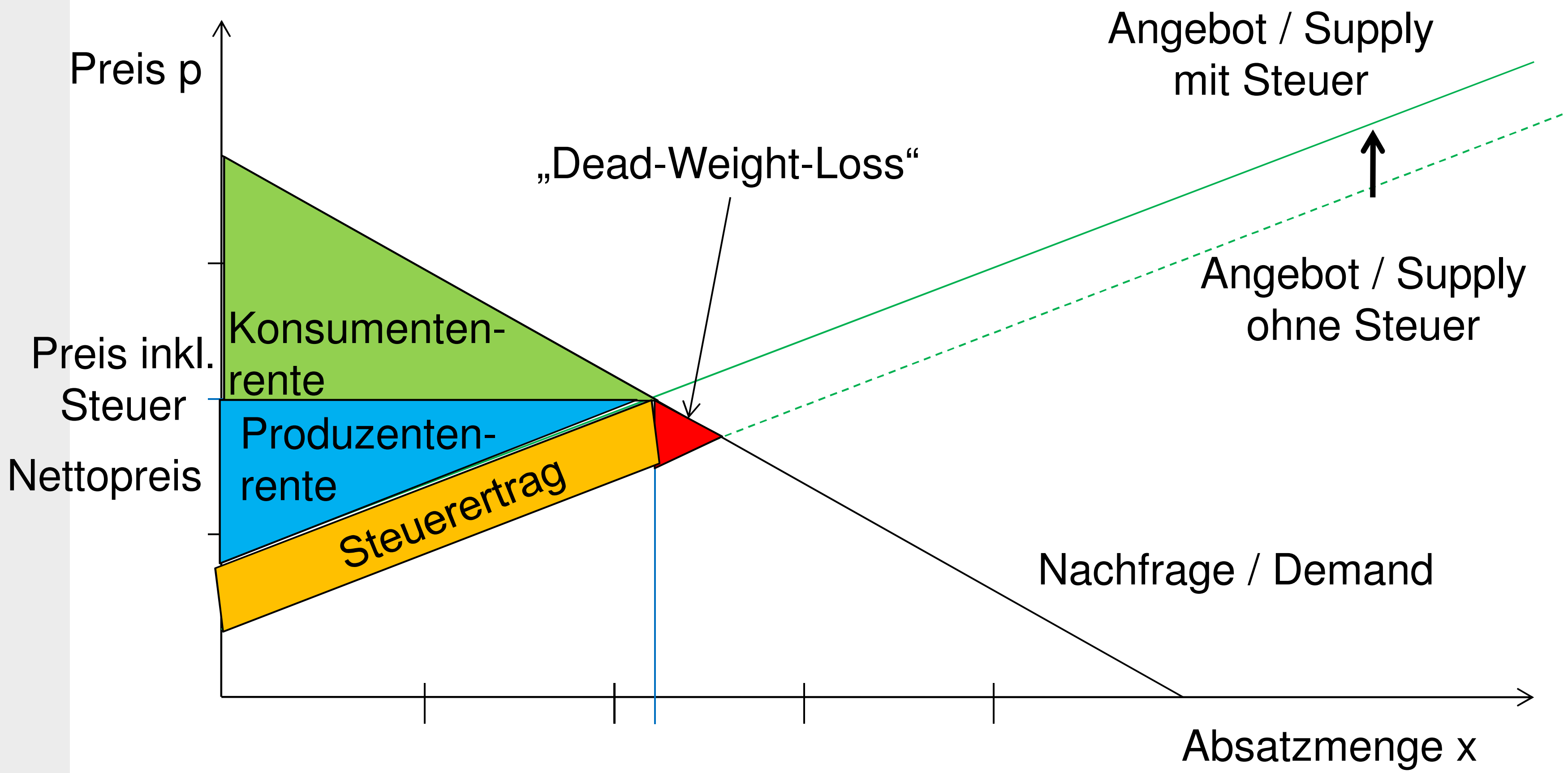
Konsumenten- und Produzentenrente

- Allgemeines Modell:



Konsumenten- und Produzentenrente: Steuer

- Annahme: der Staat erhebt eine neue Konsumsteuer (Mengensteuer)



Konsumentenrente (Bsp. 2)

- Angenommen, wir haben folgende Preis-Absatz-Funktion

$$p(x) = \frac{1.000}{x+1} - 1; \quad x \in [0;999]$$

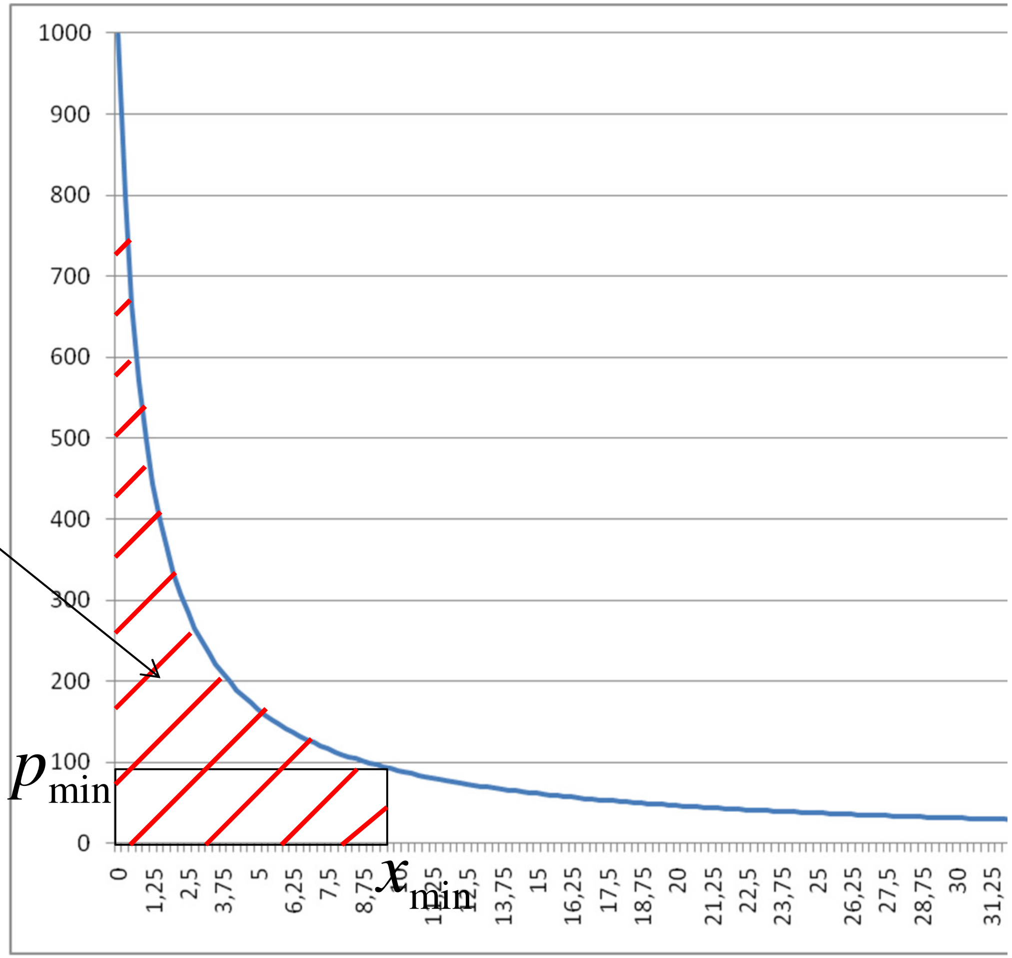
- Falls wir eine sehr feine Marktspaltung vornehmen, wäre der Erlös:

$$E_{\max} = \int_0^{x_{\min}} p(x)dx$$

- Wobei x_{min} die Absatzmenge zum niedrigsten Preis von 99€ ist:

$$p_{\min} = 99€$$

$$x_{\min} = 9$$



Konsumentenrente (Bsp. 2)

- Wie hoch ist die Konsumentenrente in diesem Falle?

$$E_{\max} = \int_0^{x_{\min}} p(x)dx$$

- Falls zu 9€ verkauft wird, so beträgt der Erlös:

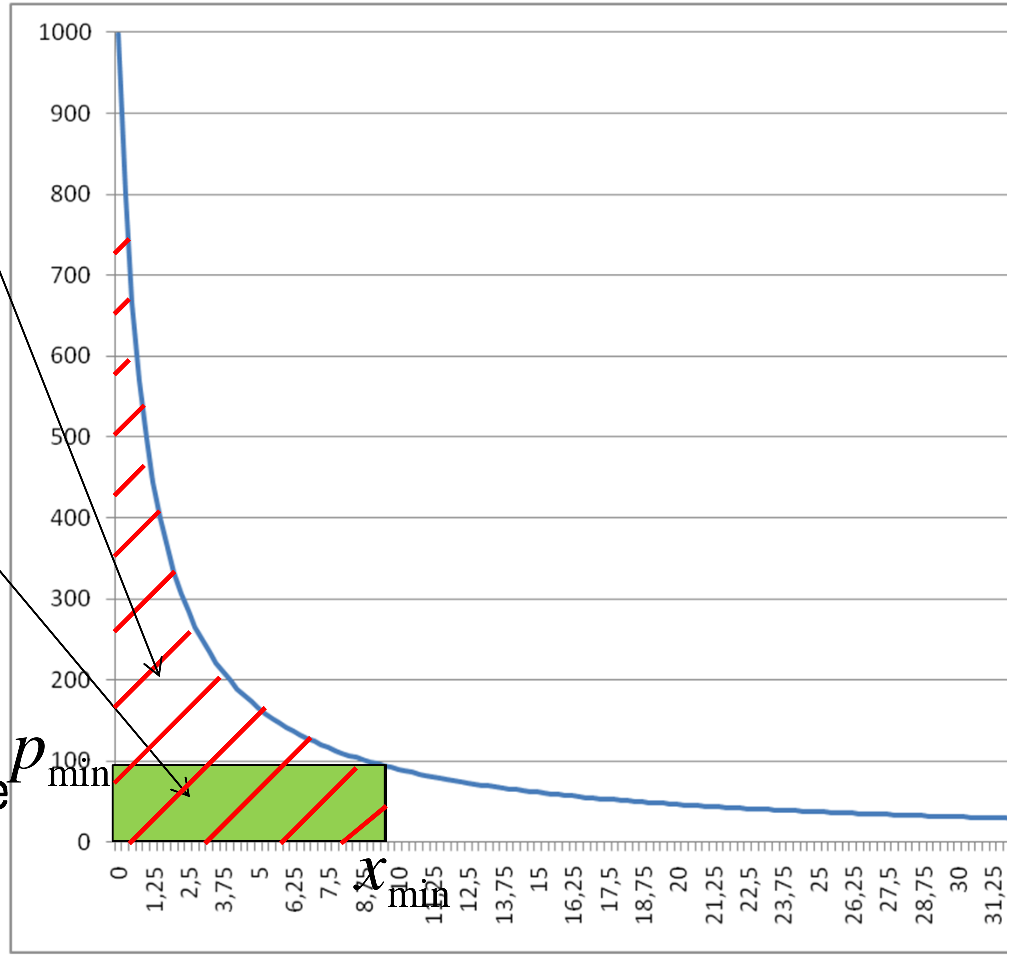
$$E_{\min} = x_{\min} \cdot p_{\min}$$

$$p_{\min} = 99€$$

$$x_{\min} = 9$$

- Die Konsumentenrente ist die Differenz

$$KR = E_{\max} - E_{\min}$$



Konsumentenrente (Bsp. 2)

- Die Konsumentenrente beträgt also:

$$KR = E_{\max} - E_{\min} = \int_0^{x_{\min}} p(x)dx - x_{\min} \cdot p_{\min} =$$

$$= \int_0^9 \left(\frac{1.000}{x+1} - 1 \right) dx - 99 \cdot 9 =$$

$$= \left[1.000 \ln(x+1) - x \right]_0^9 - 891 =$$

$$= (1.000 \ln(10) - 9) - (1.000 \ln(1) - 0) - 891 =$$

$$= (1.000 \ln(10) - 9) - 891 =$$

$$= 1.000 \cdot 2{,}3026 - 9 - 891 = 2.302{,}6 - 9 - 891 =$$

$$= 1.402{,}6$$

Hochschule
Ludwigshafen am Rhein

Wirtschaftsmathematik

Lineare Algebra: Lineare Gleichungssysteme

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Linearen Algebra

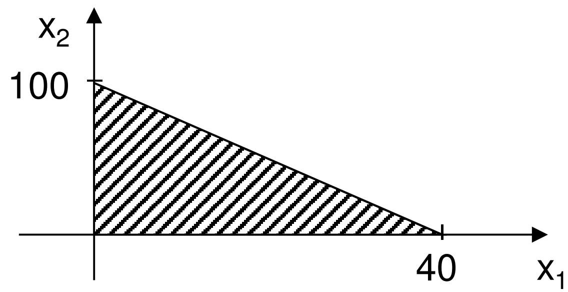
- Lineare Gleichungssysteme (LGS)
  - Matrizen
  - Gauß-Algorithmus
  - homogene & inhomogene LGS
  - Lösbarkeit
  - Anwendungen
- Matrizen
  - Spezielle Matrizen
  - Matrizenoperationen
  - Matrizenmultiplikation
  - Anwendung: Materialverflechtung
  - Matrizen invertieren

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Anwendung: Budget, Teil 1

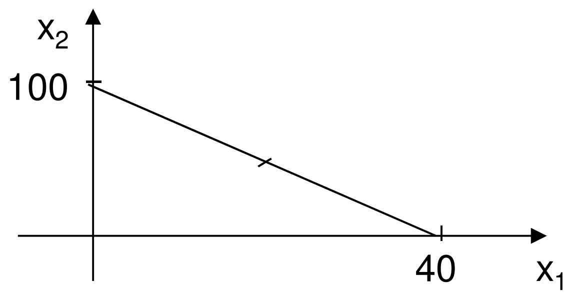
- Beispiel
  - Ein Unternehmen produziert Güter G_1, G_2 mit einem Gesamtbudget von EUR 2000. Die Herstellung kostet
    - 50 EUR für 1 Einheit (Stück, kg, …) von G_1
    - 20 EUR für 1 Einheit (Stück, kg, …) von G_2
  - Wie viele Einheiten von G_1 und G_2 kann das Unternehmen höchstens herstellen?
- Lösungsansatz: Sei
  - x_1 die Anzahl hergestellter Einheiten von G_1
  - x_2 die Anzahl hergestellter Einheiten von G_2
  - Die Herstellungskosten dürfen das Budget nicht übersteigen:

  → $50\, x_1 + 20\, x_2 \leq 2000$



Anwendung: Budget, Teil 1

- Beispiel (Fortsetzung):
  - Die möglichen Höchstmengen liegen bei $50\ x_1 + 20\ x_2 = 2000$, z.B.
    - $x_1 = 40$, $x_2 = 0$ oder
    - $x_1 = 0$, $x_2 = 100$ oder
    - $x_1 = 20$, $x_2 = 50$ oder
    - $x_1 = 36$, $x_2 = 10$, etc.



- Erweiterung:
  - Der Kunde verlangt G_1 und G_2 immer im Verhältnis 4:10, d.h. auf 4 Einheiten von G_1 kommen 10 Einheiten von G_2
  - → $10\ x_1 = 4\ x_2$ bzw. $10\ x_1 - 4\ x_2 = 0$
  - Wieviel x_1 und x_2 kann in diesem Verhältnis höchstens produziert werden?
- Lösungsansatz: Lineares Gleichungssystem

$$(I)\quad 50\ x_1 + 20\ x_2 = 2000$$
$$(II)\quad 10\ x_1 - 4\ x_2 = 0$$

Lineares Gleichungssystem

- Als lineares Gleichungssystem (LGS)
  - mit m Zeilen und n Variablen bezeichnet man Gleichungen

$$
\begin{array}{ll}
(\mathrm{I}) & a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\
(\mathrm{II}) & a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\
 & \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \\
(m) & a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m
\end{array}
$$

  - wenn a_{ij} und b_i feste reelle Zahlen sind
    für alle Zeilen i = 1, ..., m und Spalten j = 1, ..., n
  - Man sagt, das LGS hat die Ordnung (m,n)
- Ein LGS heißt
  - **homogen**, wenn alle $b_i = 0$ sind (i = 1, 2, ..., m),
  - **inhomogen**, wenn es nicht homogen ist, wenn also mindestens ein $b_i \neq 0$

Anwendung: Budget, Teil 2

- Finde die Lösungen des LGS aus unserem Beispiel:

$$\begin{aligned}(I)\quad & 50\,x_1 + 20\,x_2 = 2000\\ (II)\quad & 10\,x_1 - 4\,x_2 = 0\end{aligned}$$

- 1. Schritt:
  – Teile Gleichung (I) durch 5, lasse Gleichung (II) unverändert:

$$\begin{aligned}(I')\quad & 10\,x_1 + 4\,x_2 = 400\\ (II')\quad & 10\,x_1 - 4\,x_2 = 0\end{aligned}$$

- 2. Schritt:
  – Lasse (I') unverändert, ziehe (I') von (II') ab ((II')-(I')):

$$\begin{aligned}(I'')\quad & 10\,x_1 + 4\,x_2 = 400\\ (II'')\quad & 0 - 8\,x_2 = -400\end{aligned}$$

- 3. Schritt:
  – Lasse (I'') unverändert, teile (II'') durch -2:

$$\begin{aligned}(I''')\quad & 10\,x_1 + 4\,x_2 = 400\\ (II''')\quad & 0 + 4\,x_2 = 200\end{aligned}$$

Anwendung: Budget, Teil 2

- 4. Schritt:
  - Lasse (II‴) unverändert, ziehe (II‴) von (I‴) ab ((I‴)- (II‴)):

(I⁗) $10\ x_1 + 0 = 200$

(II⁗) $0 + 4\ x_2 = 200$

- 5. Schritt:
  - Teile (I⁗) durch 10 und (II⁗) durch 4:

(I“““““) $1\ x_1 + 0 = 20$

(II“““““) $0 + 1\ x_2 = 50$

- Probe (nicht unbedingt nötig, aber sehr sinnvoll):
  - Setze $x_1 = 20$ und $x_2 = 50$ in die ursprünglichen Gleichungen (I) und (II) ein:

(I) $50\ x_1 + 20\ x_2 = 2000$

(II) $10\ x_1 - 4\ x_2 = 0$

  - Eingesetzt:

(I) $50 \cdot 20 + 20 \cdot 50 = 2000$

$2000 = 2000$

(II) $10 \cdot 20 - 4 \cdot 50 = 0$

$0 = 0$

  - Ergebnis: Stimmt!

Anwendung: Budget, Teil 2

- Anmerkung:
  - Das durchgeführte Lösungsverfahren war eine Anwendung des **Gauß-Algorithmus**.
  - Die Rechenschritte 1. – 4. ändern zwar das LGS, aber nicht die Lösungsmenge des LGS: Alle (x_1, x_2, …, x_n), die das LGS vor der Umformung lösen, lösen es auch nach der Umformung.
  - Die Rechenschritte sind umkehrbar: Aus dem umgeformten LGS kann man durch „Rückwärtsrechnen“ wieder das originale LGS erhalten.
  - Deshalb bilden diese Schritte einen Lösungsalgorithmus.
- Übrigens: grafische Lösung:

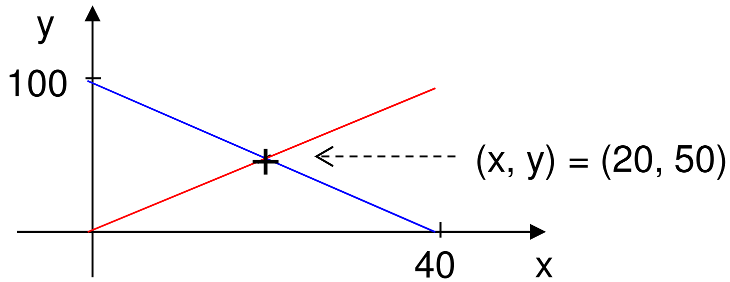
(I) $50\ x_1 + 20\ x_2 = 2000$

(II) $10\ x_1 - 4\ x_2 = 0$

- Entspricht:

(I) $y = 100 - 5/2\ x$

(II) $y = 5/2\ x$



Lösung eines Linearen Gleichungssystems

- Als Lösung des LGS

$$
\begin{array}{ll}
(I) & a_{11}\,x_1 + a_{12}\,x_2 + \ldots + a_{1n}\,x_n = b_1 \\
(II) & a_{21}\,x_1 + a_{22}\,x_2 + \ldots + a_{2n}\,x_n = b_2 \\
 & \quad \ldots \qquad\qquad\qquad \ldots \\
(m) & a_{m1}\,x_1 + a_{m2}\,x_2 + \ldots + a_{mn}\,x_n = b_m
\end{array}
$$

- bezeichnet man ein Tupel $(l_1, l_2, \ldots, l_n)$,
  - wenn durch das Einsetzen dieser Zahlen in $x_1 = l_1$, $x_2 = l_2$, … $x_n = l_n$ alle m Gleichungen erfüllt sind.
- Zunächst weiß man nicht,
  - ob ein LGS eine Lösung hat.
  - Hat es keine Lösung, ist das auch ein gültiges Ergebnis

Matrix / Matrizen

- Ob wir die Variablen in einem LGS (x_j) oder (u_j) oder ganz anders nennen ist eigentlich egal.

→ Wichtig sind die Koeffizienten (a_{ij}) und (b_i) (jeweils i = 1, …, m und j = 1, …, n)

- Damit kommen wir zu der folgenden Definition:
  - Eine **m x n Matrix** ist eine rechteckige Anordnung reeller Zahlen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  - Eine 1 x n Matrix ist ein **Zeilenvektor**: $\vec{a} = (a_1 \;\; a_2 \;\; \dots \;\; a_n)$
  - Eine m x 1 Matrix ist ein **Spaltenvektor**: $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$

LGS ←→ Matrix

- Zu dem LGS

$$
\begin{array}{ll}
(I) & a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\
(II) & a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\
& \quad \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
(m) & a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n = b_m
\end{array}
$$

- gehören die Matrix A und der Spaltenvektor $\vec{b}$ mit:

$$
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ & & \ldots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}
$$

- Umgekehrt gehört zu jeder m x n Matrix A und m x 1 Spaltenvektor $\vec{b}$ ein LGS wie oben (weil es ja egal ist, wie die Variablen heißen).

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Anwendung: Budget, Teil 3

- Im Beispiel „Budget“ haben wir ein LGS gelöst, indem wir einige Umformungen angewendet haben
- Dieselben Umformungen können wir stattdessen
  - auf die Matrix A und den Spaltenvektor $\vec{b}$ anwenden und
  - sparen Schreibarbeit und
  - gewinnen Übersicht

		Matrix		Spaltenvektor	
(I)	$50x_1 + 20\,x_2 = 2000$	50	20	2000	:5
(II)	$10x_1 - 4\,x_2 = 0$	10	−4	0	
(I‘)	$10x_1 + 4\,x_2 = 400$	10	4	400	
(II‘)	$10x_1 - 4\,x_2 = 0$	10	−4	0	−(I‘)
(I“)	$10x_1 + 4\,x_2 = 40$	10	4	400	
(II“)	$0 - 8\,x_2 = -400$	0	−8	−400	:(−2)
(I“‘)	$10x_1 + 4\,x_2 = 40$	10	4	400	−(II“‘)
(II“‘)	$0 + 4\,x_2 = 200$	0	4	200	
(I““)	$10x_1 + 0 = 200$	10	0	200	:10
(II““)	$0 + 4\,x_2 = 200$	0	4	200	:4
(I“““)	$x_1 + 0 = 20$	1	0	20	
(II“““)	$0 + x_2 = 50$	0	1	50	

Anwendung: Budget, Teil 3

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

- Beobachtung: Der letzte Zustand war

(I““““)	$x_1 +$	$0 = 20$	1	0	20
(II““““)	$0 +$	$x_2 = 50$	0	1	50

- Am Ende können wir also
  - von der umgeformten Matrix / Spaltenvektor
  - wieder zurückgehen zum LGS und
  - bekommen direkt die Lösung.
- Die Lösung können wir auch als Spaltenvektor schreiben

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Gauß-Algorithmus

- Wir erklären den Gauß-Algorithmus anhand einiger Beispiele:

Zustand — Aktion

$$\begin{aligned} 2\,x_1 + 2\,x_2 + 2x_3 &= 14\\ 1\,x_1 \qquad\quad - 3x_3 &= 1\\ 2\,x_1 - 2\,x_2 + 5x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Übergang zu Matrix / Spaltenvektor

				Aktion	
2	2	2	14	:2	(diese Zeile wird durch 2 geteilt)
1	0	−3	1		
2	−2	5	9		
1	1	1	7		
1	0	−3	1	−(I)	(erste Zeile abziehen)
2	−2	5	9	−2·(I)	(erste Zeile 2 mal abziehen)
1	1	1	7		
0	−1	−4	−6	·(−1)	(Zeile mit -1 mal nehmen)
0	−4	3	−5		

Gauß-Algorithmus

Zustand				Aktion	
1	1	1	7		
0	1	4	6		
0	−4	3	−5	+4·(II)	(4 mal Zeile (II) addieren))
1	1	1	7		
0	1	4	6		
0	0	19	19	:19	(Zeile durch 19 teilen)
1	1	1	7		
0	1	4	6		
0	0	1	1		

- Zwischenstand:
  - Die Matrix hat Dreiecksform, d.h. alle Zahlen unterhalb der Diagonale sind 0.
  - Die erste Variable sieht man jetzt schon: $x_3 = 1$

Gauß-Algorithmus

- Bisher haben wir
  - Matrixeinträge nach unten hin eliminiert (auf Null gebracht)
  - Jetzt machen wir von unten nach oben weiter
  - Der letzte Zwischenstand war

Zustand				Aktion	
1	1	1	7	−(III)	(1 mal Zeile (III) abziehen)
0	1	4	6	−4·(III)	(4 mal Zeile (III) abziehen)
0	0	1	1		
1	1	0	6	−(II)	(1 mal Zeile (II) abziehen)
0	1	0	2		
0	0	1	1		
1	0	0	4		
0	1	0	2		
0	0	1	1		

Gauß-Algorithmus

- Erreichter Zustand:
  - Die Matrix hat Diagonalform: Alle Zahlen außerhalb der Diagonalen sind 0,
  - der Spaltenvektor enthält direkt die Lösung.

Zustand

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Aktion

Übergang zum LGS

$$\begin{array}{l} 1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 4 \\ 0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 2 \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 1 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Anmerkung:
  - Es gibt hier nur eine Lösung, weil sich x_1, x_2 und x_3 mit dem Gauß-Algorithmus eindeutig berechnen lassen.
  - Das ist nicht immer so!

Gauß-Algorithmus

- Nächstes Beispiel:

Zustand	Aktion
$-1 \cdot x_2 - 4 \cdot x_3 = -6$	Übergang zu Matrix / Vektor
$2 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 14$	
$1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 = 13$	

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & -4 & -6 \\ 2 & 2 & 2 & 14 \\ 1 & 2 & 5 & 13 \end{array}\right)$$

- Beobachtung:
  - Weil die erste Zeile ganz links eine Null hat, kann diese nicht genutzt werden, um die anderen Zeilen zu 0 zu machen
  - → Die Zeilen müssen umsortiert werden. Das ändert auch nichts an der Lösungsmenge, also der Menge an Vektoren, die das LGS lösen.

Gauß-Algorithmus

- Nach der Umsortierung:

Zustand				Aktion
2	2	2	14	:2
0	−1	−4	−6	
1	2	5	13	-(1/2)·(Zeile (I), bevor diese durch 2 geteilt wird)
1	1	1	7	
0	−1	−4	−6	· (−1)
0	1	4	6	+(Zeile (II), bevor diese mal -1 genommen wird)
1	1	1	7	-(Zeile (II), natürlich die Zeile (II) aus diesem Block)
0	1	4	6	
0	0	0	0	
1	0	−3	1	Übergang zum LGS
0	1	4	6	
0	0	0	0	

$$1 \cdot x_1 \qquad - 3 \cdot x_3 = 1$$

$$1 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 = 6$$

Gauß-Algorithmus

- Beobachtung:
  - Nachdem in der dritten Zeile nur noch 0 steht, hilft uns diese Zeile nicht mehr beim Lösungen finden.
  - Wir haben keine Gleichung, die x_3 festlegt
  - Damit ist x_3 eine freie Variable, die jeden Wert annehmen kann.
  - Für jeden Wert von x_3 finden wir eindeutige Werte x_1 und x_2, so dass $\vec{x}= (x_1, x_2, x_3)$ eine Lösung des LGS ist,
  - Damit hat das LGS unendlich viele Lösungen, nämlich für jede reelle Zahl x_3 eine passende Lösung.
- Bsp.:
  - $x_3 = 0 \rightarrow \vec{x} = (1, 6, 0)$ ist Lösung
  - $x_3 = 1 \rightarrow \vec{x} = (4, 2, 1)$ ist Lösung
  - $x_3 = -1 \rightarrow \vec{x} = (-2, 10, -1)$ ist Lösung

Gauß-Algorithmus

- Nächstes Beispiel:

Zustand | Aktion

$$\begin{aligned} 2\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + 5\cdot x_3 &= 9 \\ x_1 \qquad\quad - 3\cdot x_3 &= 1 \\ 3\cdot x_1 - 2\cdot x_2 + 2\cdot x_3 &= 8 \end{aligned}$$

Übergang zu Matrix / Vektor

2	−2	5	9	:2
1	0	−3	1	-(1/2)·(Zeile (I))
3	−2	2	8	-(3/2)·(Zeile (I))
1	−1	5/2	9/2	
0	1	−11/2	−7/2	
0	1	−11/2	−11/2	-(Zeile (II))
1	−1	5/2	9/2	
0	1	−11/2	−7/2	
0	0	0	−2	

Gauß-Algorithmus

- Beobachtung:
  - Bedeutung der dritten Zeile im LGS: 0 = -2.
  - Das ist für kein x lösbar (x spielt hier gar keine Rolle mehr).
  - → Das LGS besitzt keine Lösung.
- Zusammengefasst:

Situation	**Lösbarkeit**	**Skizze**
Alle Variablen sind bestimmt	eindeutig lösbar, genau eine Lösung	$\begin{array}{ccc;c} 1 & 0 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & X \\ 0 & 0 & 1 & X \end{array}$
Es gibt freie Variablen aber keinen Widerspruch	Mehrdeutig lösbar, unendlich viele Lösungen	$\begin{array}{ccc;c} 1 & 0 & X & X \\ 0 & 1 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$
Es gibt einen Widerspruch	nicht lösbar, keine Lösung	$\begin{array}{ccc;c} 1 & 0 & X & X \\ 0 & 1 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X \end{array}$

Übungen

Aufgabe (8 min Zeit):

Beurteilen Sie, ob das LGS eindeutig, mehrdeutig oder unlösbar ist. Bestimmen Sie ggf. die Lösung. (Tipp: Überführen Sie das LGS zuerst in Matrixschreibweise.)

a.)
$$\begin{aligned} 1x_1 - 2x_2 + 1x_3 &= -2 \\ 1x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 4x_3 &= 22 \end{aligned}$$

b.)
$$\begin{aligned} -1x_1 + 2x_2 \qquad &= 4 \\ 2x_3 &= 4 \\ 4x_3 &= 8 \end{aligned}$$

c.)
$$\begin{aligned} -1x_1 + 2x_2 \qquad &= 4 \\ 2x_3 &= 4 \\ 4x_3 &= 9 \end{aligned}$$

Gauß-Algorithmus

- Beispiel m < n: Weniger Zeilen als Variablen
  - Die Dreiecksform kann nicht erreicht werden ohne freie Variablen, z.B.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & x & x \\ 0 & 1 & 0 & x & x \\ 0 & 0 & 1 & x & x \end{array}\right) \quad \text{oder} \quad \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & x & 0 & x \\ 0 & 1 & x & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{array}\right)$$

x_4 ist freie Variable

x_3 ist freie Variable

→ Das LGS kann nicht eindeutig lösbar sein

  - Ein Widerspruch ist aber trotzdem möglich

→ Das LGS kann unlösbar sein

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & x & x & x \\ 0 & 1 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x \end{array}\right)$$

Widerspruch

Gauß-Algorithmus

- Beispiel m > n: Mehr Zeilen als Variablen
  - Das LGS ist „überbestimmt“. Nachdem die Dreiecksform erreicht ist, müssen noch leere Zeilen übrig sein.
  - Wenn es keinen Widerspruch gibt, kann man diese Zeilen getrost vergessen und wir haben dieselbe Situation wie für $m \leq n$.
  - Wenn es einen Widerspruch gibt, ist das LGS nicht lösbar,
  - Z.B.

$$\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 1 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

letzte Gleichung ist überflüssig
→ eindeutig lösbar

$$\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & X & X \\ 0 & 1 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & 1 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

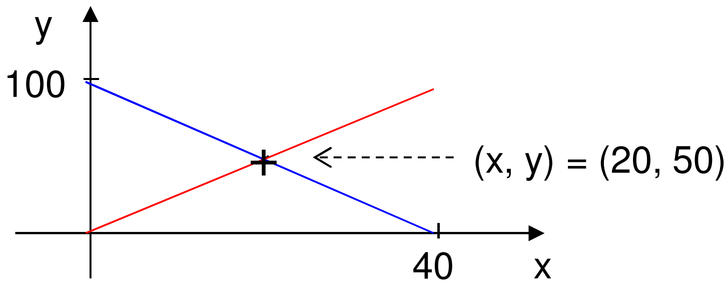
letzte 2 Gleichungen sind überflüssig,
x_4 ist freie Variable
→ unendl. viele Lösungen

$$\begin{array}{cccc:c} 1 & 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 1 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 1 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 1 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 & X \end{array}$$

letzte Gleichung liefert Widerspruch
→ keine Lösung

Geometrische Interpretation

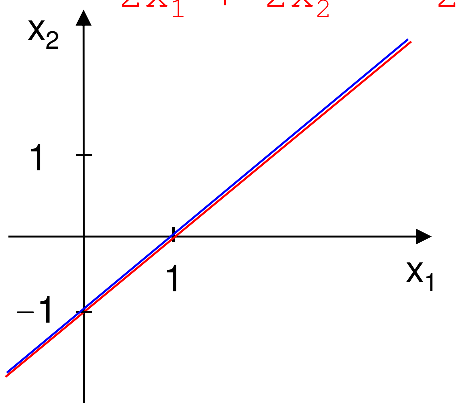
- Für n = m = 2
  - entspricht das LGS zwei Geraden (vgl. Beispiel Budget)
  - 1. Fall: Eindeutige Lösung: Vgl. Beispiel „Budget“



  - 2. Fall: Unendlich viele Lösungen:

    Beide Geraden sind identisch, z.B.

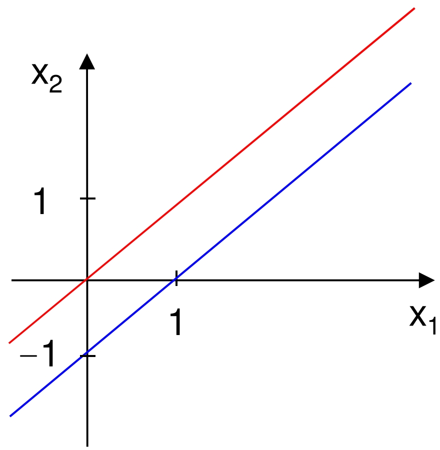
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 &= -2 \end{aligned}$$



  - 3. Fall: Keine Lösung:

    Die Geraden sind parallel, z.B.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 1 \\ -2x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$



Geometrische Interpretation

- Anmerkung: Für $n = 3$
  - entspricht jede Gleichung einer Ebene im Raum.
  - Experten können das auch zeichnen
  - Folgende Möglichkeiten können auftreten:

  1. Alle Ebenen sind identisch: Unendlich viele Lösungen, 2-dimensionale Lösungsmenge
  2. Alle Ebenen sind parallel aber nicht identisch: Keine Lösung
  3. Zwei Ebenen schneiden sich in einer Geraden: 1-dimensionale Lösungsmenge
  4. Die Gerade aus 3. schneidet eine weitere Ebene in einem Punkt: Eindeutige Lösung ($m = n = 3$)
  5. Eine 4. Ebene ($m > n$)

     a) geht an dem Punkt vorbei: Keine Lösung

     b) geht durch den Punkt durch: Überflüssige Gleichung

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Homogene LGS

- Wiederholung: In einem homogenen LGS sind alle $b_i = 0$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array}\right)$$

- Man sagt: Zu einem inhomogenen LGS gehört das homogene LGS mit denselben a_{ij}

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array}\right)$$

- Ein homogenes LGS hat
  - immer mindestens die triviale Lösung (0, 0, ..., 0)
  - Denn für alle i = 1, …, m ist $a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \dots + a_{in} \cdot 0 = 0$

Homogene LGS

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array}$$

- Satz 1:

  a) Sei $l = (l_1, l_2, \dots, l_n)$ eine Lösung des inhomogenen LGS und $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ eine Lösung des homogenen LGS
  $\Rightarrow l + \vec{x} = (l_1+x_1, l_2+x_2, \dots, l_n+x_n)$ ist ebenfalls eine Lösung des inhomogenen LGS

  b) Sei
  (i) L_H die Lösungsmenge des hom. LGS, also
  $L_H = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ist Lösung des hom. LGS$\}$,
  (ii) L_I die Lösungsmenge des inhom. LGS und
  (iii) $(l_1, l_2, \dots, l_n)$ eine spezielle Lösung des inhom. LGS
  $\Rightarrow L_I = L_H + (l_1, l_2, \dots, l_n) =$
  $\{(x_1+l_1, x_2+l_2, \dots, x_n+l_n) \mid (x_1, x_2, \dots, x_n) \in L_H\}$

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Homogene LGS

$$\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \qquad \begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & 0 \end{array}$$

- Satz 2 (Folgerung):
  - Wenn das inhomogene LGS lösbar ist, dann gilt ($\Rightarrow$) das zugehörige homogene LGS hat gleich viele Lösungen wie das inhomogene LGS (genau eine oder unendlich viele).
- Satz 3:
  - Wenn das homogene LGS ausschließlich trivial lösbar ist und $n = m$ ist, dann gilt ($\Rightarrow$) das inhomogene LGS ist eindeutig lösbar
- Anmerkung:
  - Satz 3 leuchtet ein, wenn man sich das Gauß-Schema vorstellt.
  - In den Fällen „$n \neq m$“ oder „das homogene LGS besitzt nicht-triviale Lösungen“, könnte es sein, dass das inhom. LGS nicht lösbar ist.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Anwendung: Materialverbrauch

- Beispiel: Ein Unternehmen
  - verwendet Materialien M_1 und M_2 um Produkte (Erzeugnisse) E_1, E_2, E_3 herzustellen.
  - Die Materialvorräte sind in unterschiedlichen Mengen vorrätig:
    - Von M_1 haben wir 50 Einheiten
    - Von M_2 haben wir 90 Einheiten
  - Zur Produktion werden unterschiedliche Materialmengen verbraucht:
    - Für E_1 braucht man 2 Einheiten von M_1 und 4 Einheiten von M_2,
    - Für E_2 braucht man 6 Einheiten von M_1 und 2 Einheiten von M_2,
    - Für E_3 braucht man 1 Einheit von M_1 und 5 Einheiten von M_2.
- Frage: Wieviele E_1, E_2, E_3 können produziert werden, wenn das Material vollständig verbraucht werden soll?

	E_1	E_2	E_3	Vorräte
M_1	2	6	1	50
M_2	4	2	5	90

Anwendung: Materialverbrauch

- Lösungsansatz:
  - Wenn wir herstellen
    - x_1 Einheiten von E_1
    - x_2 Einheiten von E_2
    - x_3 Einheiten von E_3,
  - dann verbrauchen wir
    - von M_1 insgesamt $2x_1 + 6x_2 + x_3$ Einheiten
    - von M_2 insgesamt $4x_1 + 2x_2 + 5x_3$ Einheiten
  - Um die Materialvorräte vollständig zu verbrauchen muss also gelten

$$
\begin{aligned}
2x_1 + 6x_2 + x_3 &= 50 \\
4x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= 90
\end{aligned}
$$

Anwendung: Materialverbrauch

- Lösung:

2	6	1	50	:2
4	2	5	90	−2·(Zeile I)
1	3	1/2	25	+(3/10)·(Zeile II)
0	−10	3	−10	:(−10)
1	0	14/10	22	
0	1	−3/10	1	

- Ergebnis: Wir haben x_3 als freie Variable
  → es gibt unendlich viele Lösungen, z.B.
  – Für $x_3 = 0$ ist $x_2 = 1$, $x_1 = 22$, also ist die Lösung (22, 1, 0)
  – Für $x_3 = 10$ ist $x_2 = 4$, $x_1 = 8$, also ist die Lösung (8, 4, 10)
  – Für $x_3 = 20$ ist $x_2 = 7$, $x_1 = -6$, also ist die Lösung (-6, 7, 20)
- Beobachtung:
  – Die letzte dieser Lösungen ist mathematisch ok, aber ökonomisch sinnlos, weil wir keine negativen Stückzahlen produzieren können.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Anwendung: Maschinenlaufzeit

- Beispiel: Ein Unternehmen
  - verwendet Maschinen M_1, M_2, M_3, um Produkte (Erzeugnisse) E_1, E_2, E_3 herzustellen.
  - Jede Maschine soll im Monat 200 Stunden laufen.
  - Die folgende Matrix zeigt die Belegzeit der Maschinen für jeweils 1 Einheit der Erzeugnisse E_i.

	M_1	M_2	M_3
E_1	2	3	1
E_2	1	2	2
E_3	4	1	3
	200	200	200

Beispiel: Für eine Einheit von E_1 muss M_1 2 Stunden laufen, M_2 3 Stunden und M_3 1 Stunden

- Frage: Wieviele E_1, E_2, E_3 können produziert werden, wenn die Maschinen vollständig ausgelastet werden sollen?

Anwendung: Maschinenlaufzeit

- Lösung: Seien x_i die produzierten Mengen der E_i (i = 1, 2, 3)
  - Für jede Maschine erhalten wir eine Gleichung:

$$2x_1 + 1x_2 + 4x_3 = 200$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 200$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 200$$

2	1	4	200	:2
3	2	1	200	−(3/2)·(Zeile I)
1	2	3	200	−(1/2)·(Zeile I)
1	1/2	2	100	
0	1/2	−5	−100	·2
0	3/2	1	100	−3·(Zeile II)
1	1/2	2	100	−(1/8)·(Zeile III)
0	1	−10	−200	+(10/16)·(Zeile III)
0	0	16	400	:16
1	1/2	0	50	−(1/2)·(Zeile II)
0	1	0	50	
0	0	1	25	

Anwendung: Maschinenlaufzeit

- Letzter Zustand:

1	0	0	25
0	1	0	50
0	0	1	25

- Ergebnis: Es gibt eine eindeutige Lösung, die auch ökonomisch sinnvoll ist.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Anwendung: Mischungsproblem

- Ein Unternehmen, z.B. ein chemischer Betrieb,
  - besitzt Ausgangsstoffe A, B, C aber leider nicht in Reinform, sondern gemischt wie folgt:
  - Gemisch G_1: 25% von Stoff A, 25% von Stoff B und 50% von Stoff C
  - Gemisch G_2: 30% von Stoff A, 40% von Stoff B und 30% von Stoff C
  - Gemisch G_3: 50% von Stoff A, 30% von Stoff B und 20% von Stoff C
- Es soll eine Mischung Z hergestellt werden wie folgt:
  - Z (Zielstoff):
    40% von Stoff A, 40% von Stoff B und 20% von Stoff C
- Frage: Wie müssen G_1, G_2, G_3 kombiniert werden, so dass Z entsteht?

Anwendung: Mischungsproblem

- Lösungsansatz
  - Wenn wir jeweils x_i Einheiten der G_i mischen, dann erhalten wir eine Mischung mit
    - Anteil A = $25/100\ x_1 + 30/100\ x_2 + 50/100\ x_3$ Einheiten
    - Anteil B = $25/100\ x_1 + 40/100\ x_2 + 30/100\ x_3$ Einheiten
    - Anteil C = $50/100\ x_1 + 30/100\ x_2 + 20/100\ x_3$ Einheiten
  - Insgesamt haben wir dann $z = x_1 + x_2 + x_3$ Einheiten gemischt.
  - Aus der Zielmischung ergibt sich
    - Anteil A = $40/100\ (x_1 + x_2 + x_3)$
    - Anteil B = $40/100\ (x_1 + x_2 + x_3)$
    - Anteil C = $20/100\ (x_1 + x_2 + x_3)$
  - und daraus das LGS

$$25x_1 + 30x_2 + 50x_3 = 40x_1 + 40x_2 + 40x_3$$
$$25x_1 + 40x_2 + 30x_3 = 40x_1 + 40x_2 + 40x_3$$
$$50x_1 + 30x_2 + 20x_3 = 20x_1 + 20x_2 + 20x_3$$

Anwendung: Mischungsproblem

- Lösung:

-15	-10	10	0	:(-15)
-15	0	-10	0	-(Zeile I)
30	10	0	0	+2·(Zeile I)
1	2/3	-2/3	0	-(2/30)·(Zeile II)
0	10	-20	0	·(1/10)
0	-10	20	0	+(Zeile II)
1	0	2/3	0	
0	1	-2	0	
0	0	0	0	

- Ergebnis:
  - x_3 ist freie Variable: Das ist kein Wunder, weil es beim Mischungsverhältnis nicht auf die Gesamtmenge ankommt.
  - $x_2 = 2x_3$
  - $x_1 = -2/3\ x_3$. Das ist ökonomisch nicht sinnvoll, weil entweder x_1 oder x_3 negativ eingemischt werden müsste.

  → keine ökonomisch sinnvolle Lösung.

Übungen

Aufgabe:

Lösen Sie das folgende LGS mit dem Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & 6x_2 & - & 2x_3 & = & -15 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & + & -5x_3 & = & -23 \end{array}$$

Wirtschaftsmathematik

Lineare Algebra: Matrizen

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Inhalte der Linearen Algebra

- Lineare Gleichungssysteme (LGS)
  - Matrizen
  - Gauß-Algorithmus
  - homogene & inhomogene LGS
  - Lösbarkeit
  - Anwendungen
- Matrizen
  - Spezielle Matrizen
  - Matrizenoperationen
  - Matrizenmultiplikation
  - Anwendung: Materialverflechtung
  - Matrizen invertieren

Anwendung: Materialverflechtung

- Beispiel: Ein Unternehmen verwendet
  - Rohstoffe R_1, R_2, R_3 um
  - Zwischenprodukte Z_1, Z_2, Z_3 herzustellen, aus denen dann
  - Endprodukte E_1, E_2, E_3 hergestellt werden.
- Der Bedarf
  - an R_i, um Z_j herzustellen, bzw.
  - an Z_j, um E_k herzustellen,
  - findet sich in den nebenstehenden „Bedarfsmatrizen“ analog zum Beispiel „Materialverbrauch“.

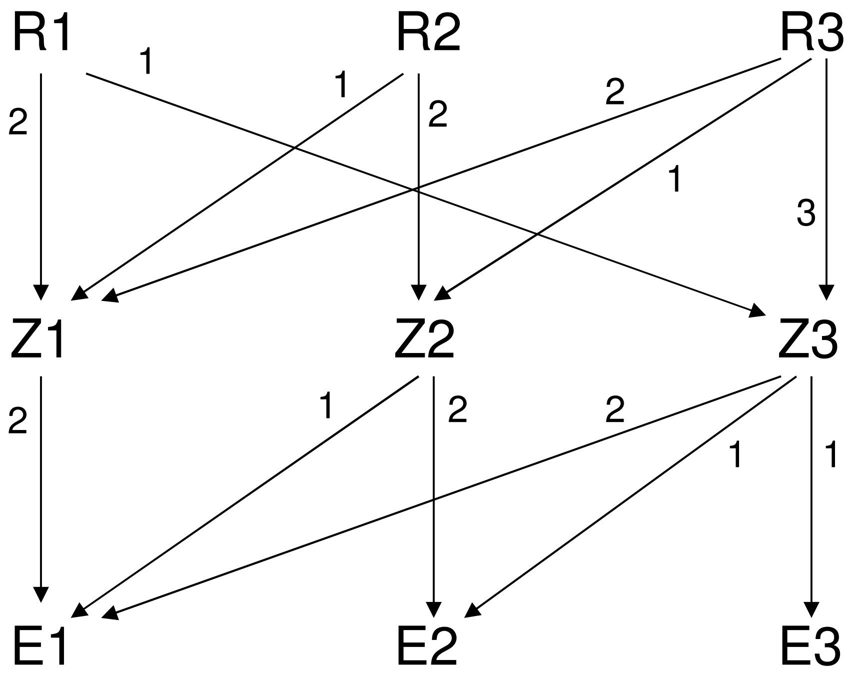
	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	0	1
R_2	1	2	0
R_3	2	1	3

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	0	0
Z_2	1	2	0
Z_3	2	1	1

- Das ist z.B. zu lesen als:
  - um eine Einheit von Z_1 herzustellen, benötigen wir 2 Einheiten R_1, 1 Einheit R_2 und 2 Einheiten R_3 und
  - um eine Einheit von E_2 herzustellen, benötigen wir 0 Einheiten Z_1, 2 Einheiten Z_2 und 1 Einheit Z_3

Anwendung: Materialverflechtung

- Das heißt übrigens Materialverflechtung, weil die Produktionsprozesse verflochten sind:



	Z_1	Z_2	Z_3
R_1	2	0	1
R_2	1	2	0
R_3	2	1	3

	E_1	E_2	E_3
Z_1	2	0	0
Z_2	1	2	0
Z_3	2	1	1

Matrix / Matrizen

- Bevor wir diese Anwendung ausführlich vertiefen, müssen wir noch mehr über Matrizen – speziell Matrizenmultiplikation – wissen.
- Wiederholung:
  – Eine **m x n Matrix** ist eine rechteckige Anordnung reeller Zahlen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

  – Eine 1 x n Matrix ist ein **Zeilenvektor**: $\vec{a} = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$

  – Eine m x 1 Matrix ist ein **Spaltenvektor**: $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$

Matrix / Matrizen

- Einige Begriffe:
  - **Nullmatrix (m x n)**: $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$
  - n x n Matrizen heißen **quadratisch** (m = n):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  - Die **n x n Einheitsmatrix E_n**: $a_{ii} = 1$ für alle i = 1, 2, …, n
    $a_{ij} = 0$ für alle i, j = 1, 2, …, n mit $i \neq j$

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Matrix / Matrizen

- Mehr Begriffe:
  - n x n **Diagonalmatrix**: $a_{ij} = 0$ für alle i, j = 1, 2, …, n mit $i \neq j$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  - **Obere** bzw. **untere** n x n **Dreicksmatrix**:
    $a_{ij} = 0$ für alle i, j = 1, 2, …, n mit i > j bzw. mit i < j

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{21} \\ & \ldots & & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ & \ldots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

  - Eine n x m – Matrix heißt **positiv** bzw. **nicht-negativ**, wenn für alle i = 1,2,…, m und j = 1,2,…, n gilt: $a_{ij} > 0$ bzw. $a_{ij} \geq 0$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0{,}1 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

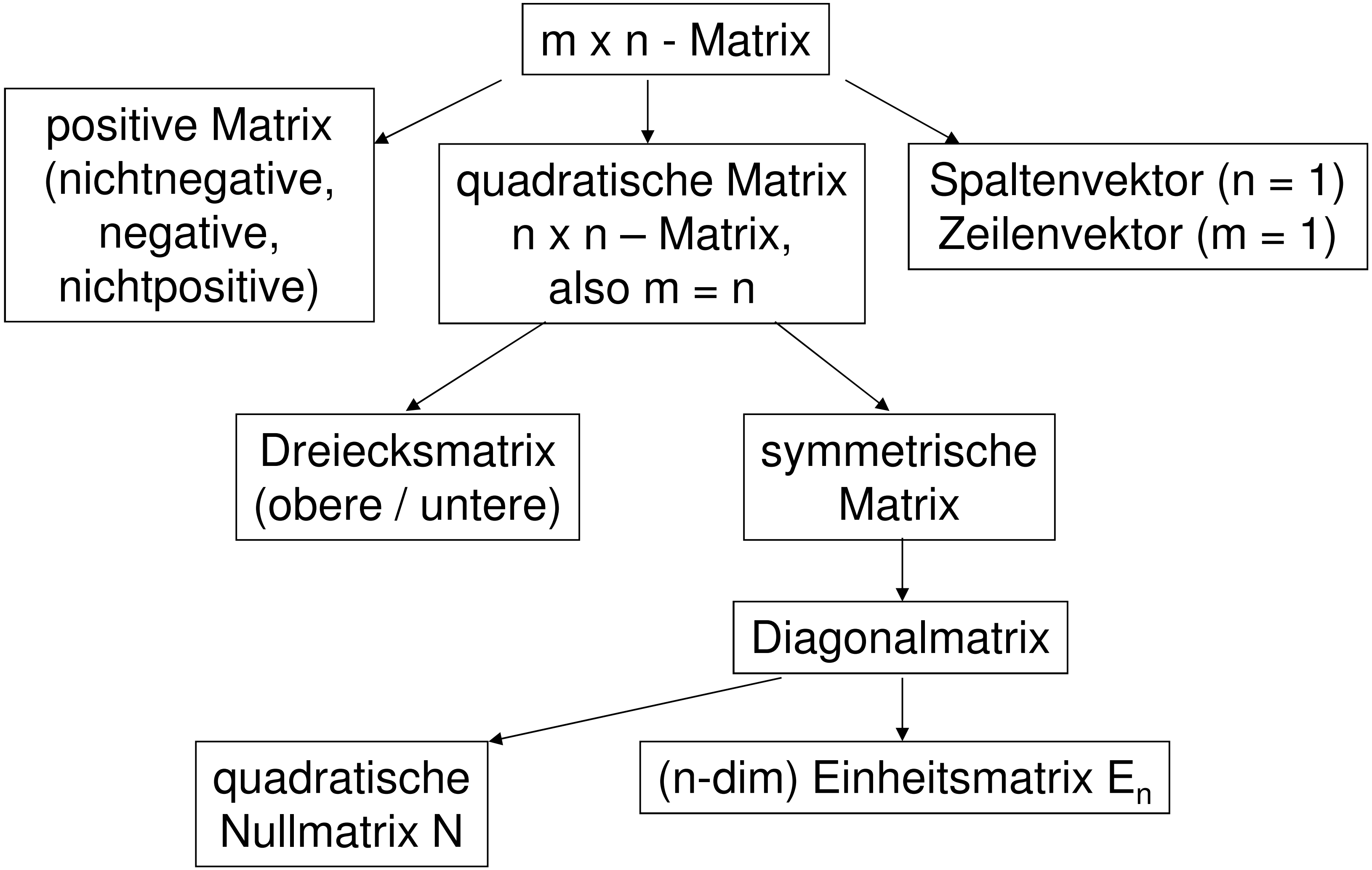
Matrix / Matrizen

- Mehr Begriffe:
  - Eine quadratische Matrix heißt **symmetrisch**, wenn für alle i,j=1,2,…,n gilt $a_{ij} = a_{ji}$, d. h. wenn Sie spiegelsymmetrisch zur Diagonalen ist.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Zusammenfassung: Bezeichnungen



Matrizenoperationen

- Sei c eine reelle Zahl und A, B zwei m x n-Matrizen wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & \dots & & \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

- Dann definieren wir die Matrizenaddition und –subtraktion:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \dots & a_{2n}+b_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \dots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m, \\ j=1,2,\dots,n}}$$

$$A - B = (a_{ij}-b_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m, \\ j=1,2,\dots,n}}$$

$$-A = (-1)\cdot A = (-a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m, \\ j=1,2,\dots,n}}$$

- sowie die skalare Multiplikation:

$$c\cdot A = \begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} & \dots & ca_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & & & \\ ca_{m1} & ca_{m2} & \dots & ca_{mn} \end{pmatrix} = (ca_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m, \\ j=1,2,\dots,\ n}}$$

Matrizenoperationen

- Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \quad A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \end{bmatrix} \quad A - B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$$

- Anmerkungen:
  - Die Matrizenaddition ist assoziativ: $(A + B) + C = A + (B + C)$
  - kommutativ: $A + B = B + A$
  - und distributiv: $c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B$
  - Die Matrizenaddition hat ein Neutralelement, nämlich die Nullmatrix N. Jede Matrix hat die additive inverse Matrix –A, denn $A + N = A$ und $A + (-A) = N$

Matrizenoperationen

- Vektoren können auch als Matrizen betrachtet werden,
  - Im folgenden Fall von Spaltenvektoren als 3 x 1 – Matrizen:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \vec{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} - \vec{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$3\vec{x} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Matrizenoperationen

- Sei A eine m x n - Matrix, z.B. m = 3, n = 4,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m,\\ j=1,2,\dots,n}}$$

- Als transponierte Matrix bzw. Transposition von A bezeichnen wir die n x m - Matrix A^t mit (Achtung: m und n vertauscht):

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = (a'_{ji})_{\substack{j=1,2,\dots,n,\\ i=1,2,\dots,m}} \text{ mit } a'_{ji} = a_{ij}$$

- Anm.: Manchmal wird statt A^t auch A' geschrieben
- Weiteres Beispiel:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \rightarrow \vec{x}^t = (1 \quad 2 \quad 3)$$

Matrizenoperationen

- Für jede Matrix A gilt: $(A^t)^t = A$
- Im Fall einer quadratischen (n x n -) Matrix
  - handelt es sich bei der Transposition um die Spiegelung an der Diagonalen.
  - Die Diagonale selbst bleibt dabei unverändert.
- Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

- Erinnerung: Eine quadratische Matrix heißt symmetrisch,
  - wenn für alle i,j=1,2,…,n gilt $a_{ij} = a_{ji}$ (wenn sie also spiegelsymmetrisch zur Diagonalen ist).
  - wenn also $A^t = A$ gilt.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Matrizenmultiplikation

- Sei A eine m x r - Matrix und B eine r x n - Matrix. Dann ist als Produkt C = A·B eine m x n - Matrix C, definiert wie folgt:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ \hdashline a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \hdashline & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ & \dots & & \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \left(\textstyle\sum_{k=1}^{r} a_{ik} \cdot b_{kj}\right)_{\substack{i=1,2,\dots,m, \\ j=1,2,\dots,n}}$$

- D.h.: C ist eine m x n - Matrix $(c_{ij})_{\substack{i=1,2,\dots,m, \\ j=1,2,\dots,n}}$
- und für alle i = 1, 2, …, m und j = 1, 2, …, n ist $c_{ij} = \sum a_{ik} \cdot b_{kj}$, wobei über k = 1, 2, …, r summiert wird.
- Die oben markierte Zeile und markierte Spalte dienen z.B. zur Berechnung von c_{22}.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Matrizenmultiplikation

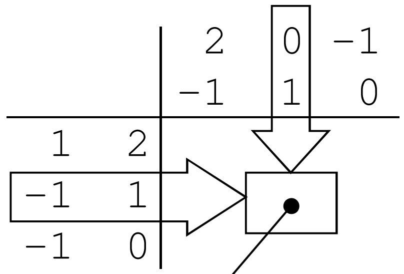
- Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- A ist 3 x 2, B ist 2 x 3
  → $C = A \cdot B$ ist 3 x 3
- Für alle i,j = 1, 2, 3 ist
  $c_{ij} = \sum a_{ik} \cdot b_{kj}$, summiert über k = 1, 2
- Ergebnis:

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Rechenschema



$c_{11} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 0$

$c_{12} = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 2$

$c_{13} = 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 = -1$

$c_{21} = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot (-1) = -3$

$c_{22} = (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 1 = 1$

$c_{23} = (-1) \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = 1$

$c_{31} = (-1) \cdot 2 + 0 \cdot (-1) = -2$

$c_{32} = (-1) \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

$c_{33} = (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 1$

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Matrizenmultiplikation

- Beispiel, Forts.:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- B ist 2 x 3, A ist 3 x 2 → D = B · A ist 2 x 2
- Für alle i,j = 1, 2 ist $c_{ij} = \sum b_{ik} \cdot a_{kj}$, summiert über k = 1, 2, 3
- Ergebnis:

$$D = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$d_{11} = 2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1) = 3$

$d_{12} = 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 = 4$

$d_{21} = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot (-1) = -2$

$d_{22} = (-1) \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = -1$

- Beobachtung: $A \cdot B \neq B \cdot A$

  → Die Matrizenmultiplikation ist nicht kommutativ
- Anm.: Sie ist aber assoziativ: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Matrizenmultiplikation

- Beispiel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- A ist 2 x 2, B ist 2 x 3 → C = A·B ist 2 x 3
- Ergebnis:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Außerdem: B ist 2 x 3, A ist 2 x 2 → B·A geht nicht!!!

  → Auch wenn A·B existiert, kann es sein, dass B·A nicht existiert bzw. nicht definiert ist.

müssten gleich sein!

Matrizenmultiplikation

- Noch 2 Beispiele:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

- A ist 1 x 3, B ist 3 x 1 → A·B ist 1 x 1, B·A ist 3 x 3
- Ergebnis:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 32 \end{bmatrix} \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 5 & 10 & 15 \\ 6 & 12 & 18 \end{pmatrix}$$

$$= 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 6$$

Rechenschema

	1	2	3
4	4	8	12
5	5	10	15
6	6	12	18

Anwendung: Materialverflechtung

- Fragen:
  - Wieviel Rohstoffe werden benötigt, um 50 Einheiten von E_1, 10 Einheiten von E_2 und 20 Einheiten von E_3 herzustellen?
  - Wie sieht die (direkte) Bedarfsmatrix zwischen Rohstoffen und Endprodukten aus?

$$M_{R,Z} = \begin{array}{c|ccc} & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \hline R_1 & 2 & 0 & 1 \\ R_2 & 1 & 2 & 0 \\ R_3 & 2 & 1 & 3 \end{array}$$

$$M_{Z,E} = \begin{array}{c|ccc} & E_1 & E_2 & E_3 \\ \hline Z_1 & 2 & 0 & 0 \\ Z_2 & 1 & 2 & 0 \\ Z_3 & 2 & 1 & 1 \end{array}$$

- Lösungsansatz: Matrix-/Vektormultiplikation
  - Sei $\vec{e}$ der Vektor, der das Erzeugnisziel darstellt.
  - Sei $\vec{z}$ der Vektor der benötigten Zwischenprodukte, dann gilt: $\vec{z} = M_{Z,E} \cdot \vec{e}$,
  - denn für j = 1, 2, 3 ist $Z_j = \Sigma$<Z_j-Bedarf pro Erzeugnis E_k>$\cdot$<Zielzahl für dieses Erzeugnis> summiert über k = 1, 2, 3.

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Anwendung: Materialverflechtung

- Lösungsansatz, Forts.
  - Sei R der Vektor der benötigten Rohstoffe, dann gilt: $\vec{r} = M_{R,Z} \cdot \vec{z}$,
  - denn für i = 1, 2, 3 ist
    $R_i = \Sigma$<R_i-Bedarf pro Zwischenprodukt Z_j>$\cdot$
    <Zielzahl für dieses Zwischenprodukt>
    summiert über die Zwischenprodukte j = 1, 2, 3.

$$M_{R,Z} = \begin{array}{c|ccc} & Z_1 & Z_2 & Z_3 \\ \hline R_1 & 2 & 0 & 1 \\ R_2 & 1 & 2 & 0 \\ R_3 & 2 & 1 & 3 \end{array} \qquad M_{Z,E} = \begin{array}{c|ccc} & E_1 & E_2 & E_3 \\ \hline Z_1 & 2 & 0 & 0 \\ Z_2 & 1 & 2 & 0 \\ Z_3 & 2 & 1 & 1 \end{array} \qquad \vec{e} = \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix}$$

- Ergebnis zum Bedarf an Zwischenprodukten / Rohstoffen:

$$\vec{z} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \\ 130 \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} 330 \\ 240 \\ 660 \end{pmatrix}$$

Anwendung: Materialverflechtung

- Lösung zur Bedarfsmatrix:
  - Wegen $\vec{r} = M_{R,Z} \cdot \vec{z}$ und $\vec{z} = M_{Z,E} \cdot \vec{e}$, gilt
  - $\vec{r} = M_{R,Z} \cdot M_{Z,E} \cdot \vec{e}$
- Die Bedarfsmatrix zwischen Rohstoffen und Endprodukten ist also
  - $M_{R,E} = M_{R,Z} \cdot M_{Z,E}$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 11 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- Probe:
  - $\vec{r} = M_{R,E} \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ 11 & 5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50 \\ 10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 330 \\ 240 \\ 660 \end{pmatrix}$ → stimmt!
- Anmerkung: Oben brauchen wir das Assoziativgesetz:

$$\vec{r} = M_{R,Z} \cdot \vec{z} = M_{R,Z} \cdot (M_{Z,E} \cdot \vec{e}) = (M_{R,Z} \cdot M_{Z,E}) \cdot \vec{e} = M_{R,E} \cdot \vec{e}$$

Anwendung: Materialverflechtung

- Nächstes Beispiel:
  - Gegeben: Verflechtungsmatrizen

	Z_1	Z_2
R_1	2	1
R_2	1	3
R_3	2	2

	Z_1	Z_2
E_1	10	10
E_2	20	30
E_3	30	40

- Fragen:
  - Berechnen Sie die Bedarfsmatrix zwischen Rohstoffen und Endprodukten.
  - Wieviel Rohstoffe werden benötigt, bei folgendem Bedarfsvektor für Endprodukte, (d.h um 5 Einheiten von E_1, 2 Einheiten von E_2 und 10 Einheiten von E_3 herzustellen)?

$$\vec{e} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 10 \end{pmatrix}$$

  - Wieviel Rohstoffe werden zusätzlich benötigt, um außerdem 100 Einheiten Z_1 und 200 Einheiten Z_2 (als Ersatzteile) herzustellen?
  - Was kosten all diese Rohstoffe zusammen bei folgendem Preisvektor, (d.h. 1 Einheit R_1 kostet EUR 0,5, 1 Einheit R_2 kostet EUR 1,0 und 1 Einheit R_3 kostet EUR 0,5)?

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1{,}0 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$$

Anwendung: Materialverflechtung

- Lösung:
  - So wie die Matrizen da stehen, kann man sie nicht multiplizieren.
  - Wir müssen $M_{E,Z}$ transponieren zu $M_{Z,E}$
  - Dann können wir die Bedarfsmatrix zwischen Rohstoffen und Endprodukten ausrechnen:

$$M_{R,Z} = \begin{array}{c|cc} & Z_1 & Z_2 \\ \hline R_1 & 2 & 1 \\ R_2 & 1 & 3 \\ R_3 & 2 & 2 \end{array}$$

$$M_{E,Z} = \begin{array}{c|cc} & Z_1 & Z_2 \\ \hline E_1 & 10 & 10 \\ E_2 & 20 & 30 \\ E_3 & 30 & 40 \end{array}$$

$$M_{Z,E} = \begin{array}{c|ccc} & E_1 & E_2 & E_2 \\ \hline Z_1 & 10 & 20 & 30 \\ Z_2 & 10 & 30 & 40 \end{array}$$

$$M_{R,E} = M_{R,Z} \cdot M_{Z,E}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 10 & 30 & 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 & 70 & 100 \\ 40 & 110 & 150 \\ 40 & 100 & 140 \end{pmatrix}$$

Anwendung: Materialverflechtung

- Lösung, Forts.:
  - Der Rohstoffbedarf zum Bedarfsvektor beträgt dann $\vec{r_1} = M_{R,E} \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 1290 \\ 1920 \\ 1800 \end{pmatrix}$
  - Der zusätzliche Rohstoffbedarf zum Ersatzteilbedarf $\vec{z} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \end{pmatrix}$ beträgt dann $\vec{r_2} = M_{R,Z} \cdot \vec{z} = \begin{pmatrix} 400 \\ 700 \\ 600 \end{pmatrix}$
  - Der gesamte Rohstoffbedarf beträgt also $\vec{r} = \vec{r_1} + \vec{r_2} = \begin{pmatrix} 1690 \\ 2620 \\ 2400 \end{pmatrix}$
  - Der Gesamtpreis bei einem Preisvektor von $\vec{p} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1,0 \\ 0,5 \end{pmatrix}$ ist p_{ges} = 1690 · 0,5 + 2620 · 1 + 2400 · 0,5 = 4665 Euro

$$M_{R,Z} = \begin{array}{c|cc} & Z_1 & Z_2 \\ \hline R_1 & 2 & 1 \\ R_2 & 1 & 3 \\ R_3 & 2 & 2 \end{array}$$

$$M_{Z,E} = \begin{array}{c|ccc} & E_1 & E_2 & E_2 \\ \hline Z_1 & 10 & 20 & 30 \\ Z_2 & 10 & 30 & 40 \end{array}$$

$$M_{R,E} = \begin{pmatrix} 30 & 70 & 100 \\ 40 & 110 & 150 \\ 40 & 100 & 140 \end{pmatrix}$$

Übungsaufgabe

Aufgabe (10 min Zeit):

Ein Betrieb produziert in einem zweistufigen Produktionsprozess aus den Rohstoffen R_1, R_2 und R_3 die Zwischenprodukte Z_1, Z_2 und Z_3 und daraus die Endprodukte E_1, E_2 und E_3.

Gegeben ist die Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Wie viele Zwischenprodukte werden benötigt, um 6 ME von E_1, 7 ME von E_2 und 5 ME von E_3 herzustellen?

Mehr Matrizenmultiplikation

- Beobachtung:
  - Für die Multiplikation von n x n – Matrizen ist die Einheitsmatrix E_n das Neutralelement, denn für jede n x n – Matrix A gilt: $A \cdot E_n = A$ und $E_n \cdot A = A$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Matrizen invertieren

- Eine n x n – Matrix heißt invertierbar, wenn
  - es eine multiplikativ inverse Matrix X gibt, d.h.
  - eine n x n – Matrix X mit $A \cdot X = X \cdot A = E_n$.
  - Diese inverse Matrix nennen wir dann A^{-1}
- Anmerkung:
  - Wir werden bald sehen, dass nicht jede Matrix invertierbar ist.
- Um zu sehen,
  - wann es eine solche inverse Matrix gibt und
  - wie man sie berechnen kann,
  - betrachten wir als Beispiel die folgende Matrix A und nehmen an, es gibt eine Inverse X:

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{X}{\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}} = \underset{E_n}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Matrizen invertieren

- Jetzt betrachten wir erstmal nur die erste Spalte von X und E_n,
  - Mit $\overrightarrow{x_1}$ bzw. $\overrightarrow{e_1}$ bezeichnen wir den ersten Spaltenvektor der Matrix X bzw. E_n
  - Aus der Darstellung von $A \cdot X = E_n$ erhalten wir

$$A \cdot \overrightarrow{x_1} = \overrightarrow{e_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_{11} \\ x_{21} \\ x_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

  - Dabei handelt es sich im Prinzip um ein LGS:

1	2	0	1	<irgendwelche Zeilenumformungen>
0	4	2	0	<irgendwelche Zeilenumformungen>
4	0	1	0	<irgendwelche Zeilenumformungen>

  - Auf das LGS können wir den Gauß-Algorithmus anwenden und erhalten die folgende Form mit irgendwelchen konkret ausgerechneten y_1, y_2, y_3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & y_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 & y_3 \end{array}\right)$$

Matrizen invertieren

- Durch den Rück-Übergang zum LGS sehen wir
  - $x_{11} = y_1$, $x_{21} = y_2$, $x_{31} = y_3$,
  - wir wissen jetzt also, wie die erste Spalte von X aussehen muss.
- Für die zweite (und dritte) Spalte machen wir dasselbe:

$$\left.\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} \texttt{<irgendwelche Zeilenumformungen>} \\ \texttt{<irgendwelche Zeilenumformungen>} \\ \texttt{<irgendwelche Zeilenumformungen>} \end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{array}{ccc:c} 1 & 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 1 & 0 & u_2 \\ 0 & 0 & 1 & u_3 \end{array}$$

- Beobachtung:
  - Die Schritte, die wir im Gauß-Algorithmus unternehmen, um links vom ¦ zur Dreiecksform zu kommen, hängen nur von der Matrix A ab.

Matrizen invertieren

- Wir können deshalb alle Spalten von X auf einmal berechnen, indem wir schreiben:

$$
\begin{array}{ccc|ccc|l}
1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & \text{<irgendwelche Zeilenumformungen>} \\
0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & \text{<irgendwelche Zeilenumformungen>} \\
4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \text{<irgendwelche Zeilenumformungen>}
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 0 & y_1 & u_1 & \ldots \\
0 & 1 & 0 & y_2 & u_2 & \ldots \\
0 & 0 & 1 & y_3 & u_3 & \ldots
\end{array}
$$

- und erhalten deshalb X direkt aus dem Gauß-Algorithmus.

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Matrizen invertieren

- Beispiel durchrechnen:

1	2	0	1	0	0	<irgendwelche Zeilenumformungen>
0	4	2	0	1	0	
4	0	1	0	0	1	−4·(Zeile I)
1	2	0	1	0	0	
0	4	2	0	1	0	:4
0	−8	1	−4	0	1	+2·(Zeile II)
1	2	0	1	0	0	
0	1	1/2	0	1/4	0	−(1/10)·(Zeile III)
0	0	5	−4	2	1	:5
1	2	0	1	0	0	−2·(Zeile II)
0	1	0	2/5	1/20	−1/10	
0	0	1	−4/5	2/5	1/5	
1	0	0	1/5	−1/10	1/5	
0	1	0	2/5	1/20	−1/10	
0	0	1	−4/5	2/5	1/5	

Matrizen invertieren

- Ergebnis:

$$X = A^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & -1/10 & 1/5 \\ 2/5 & 1/20 & -1/10 \\ -4/5 & 2/5 & 1/5 \end{bmatrix} = 1/20 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 8 & 1 & -2 \\ -16 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

- Probe:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot 1/20 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 8 & 1 & -2 \\ -16 & 8 & 4 \end{bmatrix} = 1/20 \cdot \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- und

$$1/20 \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 8 & 1 & -2 \\ -16 & 8 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1/20 \cdot \begin{bmatrix} 20 & 0 & 0 \\ 0 & 20 & 0 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizen invertieren

- Hat denn jede Matrix (außer der Nullmatrix) ein Inverses?
- Überlegung:
  - Was ist, wenn im Gauß-Algorithmus eine Nullzeile (freie Variable) rauskommt:

$$
\begin{array}{ccc:ccc|l}
2 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & \texttt{<irgendwelche Zeilenumformungen>} \\
1 & 0 & -3 & 0 & 1 & 0 & \texttt{<irgendwelche Zeilenumformungen>} \\
4 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 & \texttt{<irgendwelche Zeilenumformungen>}
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$
\begin{array}{ccc:ccc}
1 & 0 & 0 & y_1 & u_1 & \dots \\
0 & 1 & X & y_2 & u_2 & \dots \\
0 & 0 & 0 & y_3 & u_3 & \dots
\end{array}
$$

- Beobachtung:
  - In dem Fall klappt die Invertierung nicht → dann gibt es keine Inverse!

Hochschule Ludwigshafen am Rhein

Matrizen invertieren

- Noch ein paar Kleinigkeiten zur n x n – Matrix A:
- A heißt
  - **regulär**, wenn A invertierbar ist,
  - andernfalls **singulär**
- Wenn
  - A eine Inverse A^{-1} besitzt und $k \in \mathbf{R}$ mit $k \neq 0$,
  - dann ist $k \cdot A$ invertierbar und
    $(k \cdot A)^{-1} = 1/k \cdot A^{-1}$
- Wenn
  - A eine Inverse A^{-1} besitzt,
  - dann besitzt auch die transponierte Matrix A^t eine Inverse und
    $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

Verknüpfungen

- Für alle invertierbaren n x n – Matrizen A und B gilt:
  - A^{-1} ist invertierbar und $(A^{-1})^{-1} = A$
  - $A \cdot B$ ist invertierbar und es gilt: $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

Matrizen invertieren

- Ein „quadratisches“ LGS:

$$
\begin{array}{l}
a_{11}\ x_1 + a_{12}\ x_2 + \ldots + a_{1n}\ x_n = b_1 \\
a_{21}\ x_1 + a_{22}\ x_2 + \ldots + a_{2n}\ x_n = b_2 \\
\quad\ldots \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\
a_{n1}\ x_1 + a_{n2}\ x_2 + \ldots + a_{nn}\ x_n = b_n
\end{array}
$$

- lässt sich schreiben als $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, mit den Spaltenvektoren $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

- Ist die Matrix A invertierbar, dann ist
  - das LGS eindeutig lösbar und
  - $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$ die eindeutige Lösung.

Übungsaufgabe

Aufgabe (7 min Zeit):

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie A^{-1}.

Materialverflechtung / Mehrstufige Produktionsprozesse

- **Prozessdarstellung**

m Rohstoffe → p Zwischenprodukte → n Endprodukte

- **Verflechtungsmatrizen:**

$M_{R,Z}$	Gibt den Bedarf an Rohstoffen pro Mengeneinheit der Zwischenprodukte an
$M_{Z,E}$	Gibt den Bedarf an Zwischenprodukten pro Mengeneinheit der Endprodukte an
$M_{R,E}$	Gibt den Bedarf an Rohstoffen pro Mengeneinheit der Endprodukte an

Es gilt: $M_{R,Z} \cdot M_{Z,E} = M_{R,E}$

- **Verbrauchs- und Produktionsvektoren (als Spaltenvektoren definiert):**

$\vec{r}$	für die Rohstoffe
$\vec{z}$	für die Zwischenprodukte
$\vec{e}$	für die Endprodukte

Es gilt:

$\vec{r} = M_{R,Z} \cdot \vec{z}$
$\vec{z} = M_{Z,E} \cdot \vec{e}$
$\vec{r} = M_{R,E} \cdot \vec{e}$