

Neste trabalho, terá de responder a perguntas e simular circuitos quânticos.

As respostas às perguntas devem ser entregues num documento PDF, que pode escrito a computador (utilizando Microsoft Word, LaTeX, ou semelhantes) ou escrito à mão e digitalizado.

Para escrever os circuitos, deve preencher o notebook Jupyter disponibilizado (também disponível em <https://tinyurl.com/quc-avaliacao-final>) e entregar uma cópia do ficheiro `.ipynb` resolvido. Em alternativa, poderá implementar os circuitos utilizando o IBM Quantum Composer. Nesse caso, terá de mostrar uma cópia da imagem do circuito e do código OpenQASM/Qiskit que é gerado automaticamente. Inclua estes elementos no PDF a entregar.

O trabalho deverá ser submetido usando a opção do Inforestudante “Submissão de Trabalhos”. Terão um prazo de duas semanas para entregar o trabalho, com início a 16 de Dezembro e final a 30 de Janeiro.

Resolva os seguintes problemas e explique o seu raciocínio sempre que necessário.

(1) Estados quânticos.

- (a) Considere o estado seguinte. Qual é a amplitude associada a  $|1\rangle$ ? E a probabilidade de medir  $|1\rangle$ ?

$$|\psi\rangle = \frac{8}{17} |0\rangle - \frac{15}{17} |1\rangle$$

- (b) Mostre que o estado  $|\psi\rangle$  é normalizado, isto é, que a soma das probabilidades associadas a  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  é igual a 1.
- (c) Que estado se obtém ao aplicar  $X$  a  $|\psi\rangle$ ? Qual é a probabilidade de medir  $|1\rangle$  após a aplicação?
- (d) Cinco pessoas têm, cada uma, um qubit. De quantas amplitudes precisamos para descrever o estado colectivo dos cinco qubits?

(2) Operações quânticas

- (a) Calcule os estados

$$|a\rangle = H|0\rangle$$

$$|b\rangle = H|1\rangle$$

$$|c\rangle = \sqrt{Y}|0\rangle$$

$$|d\rangle = \sqrt{Y}|1\rangle$$

sabendo que

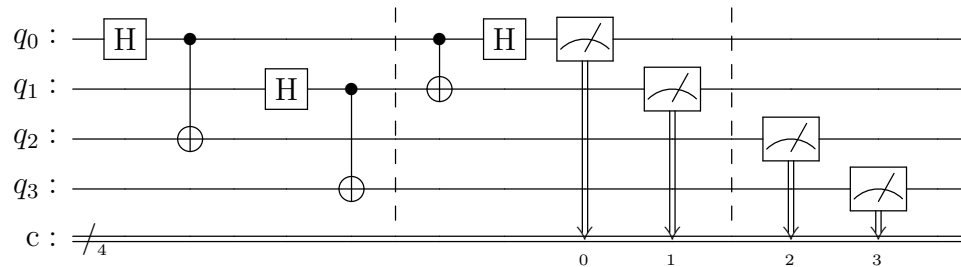
$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \sqrt{Y} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) É possível distinguir experimentalmente o estado  $|a\rangle$  do estado  $|b\rangle$ ? E o estado  $|c\rangle$  de  $|d\rangle$ ?
- (c) Quantas vezes tem de aplicar  $H$  a  $|0\rangle$  para voltar a ter 100% de probabilidade de medir  $|0\rangle$ ? Quantas vezes tem de aplicar  $\sqrt{Y}$ ?

(3) Entrelaçamento e *entanglement swapping*

Se no futuro existir uma central de telecomunicações quânticas, então será possível criar entrelaçamento entre dois qubits à distância sem que os clientes. Vamos supor que os clientes são a Alice e o Bob. Cada um tem um qubit que está entrelaçado com outro qubit na central. Há, portanto, quatro qubits: um par partilhado entre a Alice e a central, e outro par partilhado entre o Bob e a central. Vamos ver como a central pode entrelaçar os qubits da Alice e do Bob, sem a Alice e o Bob terem de comunicar entre si.

- (a) Dê um exemplo de um estado entrelaçado de Bell e desenhe o circuito para o gerar.
- (b) Crie um circuito com quatro qubits: os dois de cima pertencem à central ( $q_0, q_1$ ), o terceiro pertence à Alice ( $q_2$ ) e o último pertence ao Bob ( $q_3$ ). Crie um circuito com as seguintes duas etapas:
- Uma parte preliminar em que se cria entrelaçamento entre a central e os clientes: aplique o circuito de Bell aos qubits  $q_0$  e  $q_2$  (central e Alice) e também aos qubits  $q_1$  e  $q_3$  (central e Bob).
  - Para criar entrelaçamento entre a Alice e o Bob, a central aplica o circuito de Bell inverso aos seus qubits ( $q_0$  e  $q_1$ ) e mede-os.
  - Para facilitar a análise, a Alice e o Bob também medem os seus qubits.
- O circuito resultante é o seguinte:



- Simule o circuito 1024 vezes e apresente um histograma dos resultados.
- Observe agora apenas os resultados em que a central mede  $|0\rangle$  nos seus dois qubits (lembre-se que, nos resultados, os qubits da central são os da direita). Nessa condição, existe alguma correlação entre as medições da Alice e do Bob? Conclua se os seus qubits estão ou não entrelaçados.
- Demonstre que a resposta da alínea anterior está correcta calculando analiticamente o estado dos quatro qubits antes das medições. Qual é o estado dos qubits da Alice e do Bob se a central medir  $|00\rangle$ ?