Inf. e Comp. Quânticas

1ª Avaliação para Casa

Nov. 2025

Neste trabalho, terá de responder a perguntas e simular circuitos quânticos.

As respostas às perguntas devem ser entregues num documento PDF, que pode escrito a computador (utilizando Microsoft Word, LaTeX, ou semelhantes) ou escrito à mão e digitalizado.

Para escrever os circuitos, deve preencher o notebook Jupyter disponibilizado (também disponível em `https://tinyurl.com/quc-avaliacao1`) e entregar uma cópia do ficheiro `.ipynb` resolvido. Em alternativa, poderá implementar os circuitos utilizando o IBM Quantum Composer. Nesse caso, terá de mostrar uma cópia da imagem do circuito e do código OpenQASM/Qiskit que é gerado automaticamente. Inclua estes elementos no PDF a entregar.

O trabalho deverá ser submetido usando a opção do Inforestudante "Submissão de Trabalhos". Terão um prazo de uma semana para entregar o trabalho, com início a 12 de Novembro e final a 19 de Novembro.

Neste problema, vamos demonstrar uma propriedade importante da mecânica quântica: os resultados das medições não existem necessariamente antes do acto de medir, a não ser que aceitemos comunicação mais rápida que a luz. Responda às questões que se seguem.

(1) **Preparação de um estado partilhado**

A Alice (A), o Bob (B) e o Charlie (C) estão separados entre si por uma distância considerável. Uma fonte (S) preparou três qubits no chamado estado $|\mathrm{GHZ}\rangle$, de acordo com o circuito em baixo, e enviou um qubit a cada um. Como sempre, os qubits começam todos no estado $|0\rangle$ antes de passarem pelo circuito.

Figura 1. A fonte S enviou qubits à Alice, Bob e Charlie, entrelaçados de acordo com o circuito à direita.

(a) Indique o estado do sistema de três qubits: i. na barra vertical do circuito; ii. no final do circuito (que será o estado $|\mathrm{GHZ}\rangle$).

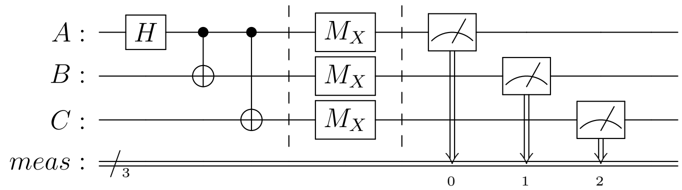
(b) Se a Alice medir o seu qubit, isso afectará os resultados das medições do Bob e do Charlie?

(c) Implemente e simule o circuito da Figura 1. Corra o circuito para 1024 *shots* e visualize o resultado das medições com um histograma. Não se esqueça de medir os qubits, com o método `.measure_all()`.

(2) **Operações independentes.**
Depois de receberem o seu qubit, a Alice, o Bob e o Charlie aplicam uma de duas operações ao seu qubit: ou $M_X = H$ ou $M_Y = HS^\dagger$. Imediatamente a seguir, cada um mede o seu qubit. (Importante: ao aplicar M_Y lembre-se que $S^\dagger$ (em Qiskit, `qc.sdg`) se aplica antes de H.)

(a) Considere primeiro o caso em que todos escolheram aplicar M_X. Implemente e simule o seguinte circuito. Corra o circuito com 1024 *shots* e crie um histograma para visualizar a frequência de resultados observados.

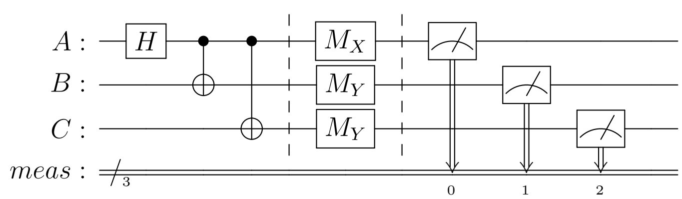
(Circuito XXX)



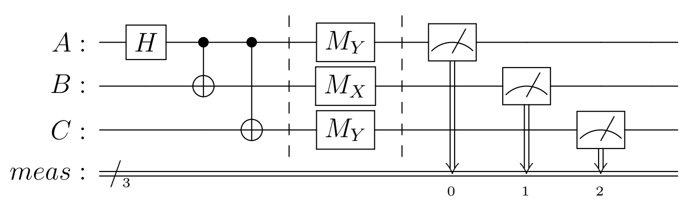
(b) Quais são os resultados possíveis (c, b, a), sendo c, b e a os resultados observados pelo Charlie, Bob e Alice, respectivamente? (Note que no Qiskit os resultados são escritos da direita para a esquerda. Por exemplo, se o resultado de um *shot* for "`100`", então o Charlie, o Bob e a Alice observaram 1, 1, 0, respectivamente, e teremos $c = 1$, $b = 1$ e $a = 0$.)
Observe que a soma $a + b + c$ é sempre par!

(c) Construa os circuitos em baixo, em que apenas uma das pessoas aplica M_X e os restantes aplicam M_Y. Simule os resultados para 1024 *shots* e visualize a frequência dos resultados com um histograma.

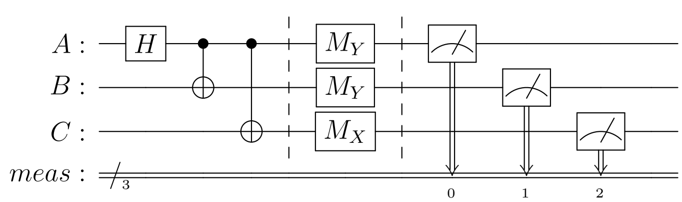
(Circuito YYX)



(Circuito YXY)



(Circuito XYY)



(d) Para cada um dos circuitos YYX, YXY e XXY, indique que valores (c, b, a) é que o Charlie, o Bob e a Alice observam. **Note que a soma $a+b+c$ é sempre ímpar!**

(3) **Comentário**

Na teoria quântica, como vimos pela simulação dos circuitos, o resultado de cada experiência é aleatório e imprevisível: a teoria só nos permite prever probabilidades de observações. Mas o mesmo é verdade quando atiramos uma moeda ao ar, porque nunca conseguimos controlar todas as variáveis que nos permitem prever se vamos observar cara ou coroa.

Isto leva-nos a perguntar se a mecânica quântica é uma teoria incompleta. Isto é, **haverá *variáveis escondidas* que nós não estamos a observar**, e por isso é que as experiências nos parecem aleatórias? Einstein, em conjunto com Podolsky e Rosen, propuseram uma maneira de responder a esta pergunta: uma tal variável escondida existe se conseguirmos prever o seu valor *antes* de uma medição.

Pensemos então no circuito XXX da alínea (2.a). Como a soma dos resultados $a+b+c$ tem de ser par, basta saber o resultado do Charlie e do Bob para prever o resultado da Alice. Assim, se o Charlie e o Bob enviarem os seus resultados à fonte S, então S consegue prever o resultado da Alice mesmo antes de ela medir. [1] Logo, de acordo com Einstein, o resultado da Alice no circuito XXX tem de corresponder a uma variável escondida, a que chamamos a_x.

Todo este raciocínio funciona se trocarmos o papel da Alice com o Bob ou com o Charlie, pelo que existem variáveis escondidas c_x, b_x, a_x que prevêem o resultado de cada um no circuito XXX. De acordo com a alínea (2.a), a soma destas variáveis escondidas, $S_{XXX} = c_x + b_x + a_x$, tem de ser par.

Por outro lado, no caso do circuito YXY da alínea (2.c), a soma das medições $a+b+c$ tem de ser ímpar. Novamente, basta saber os resultados do Charlie e do Bob para prever o resultado da Alice. Mas, neste caso, a Alice aplica M_Y e não M_X. Como estamos numa situação diferente, tem de haver uma outra variável escondida a_y para prever o resultado da medição neste caso também. De igual modo, utilizando os circuitos YXX e XXY, terão de existir variáveis b_y e c_y para prever os resultados do Bob e do Charlie. Assim, concluímos que todos os resultados das medições estão definidos à partida (possivelmente estabelecidos quando a fonte S preparou o estado entrelaçado para enviar).

De acordo com a alínea (2.c), as somas $S_{YYX} = c_y + b_y + a_x$, $S_{YXY} = c_y + b_x + a_y$ e $S_{XYY} = c_x + b_y + a_y$ são todas ímpares. Logo, $S_{YYX} + S_{YXY} + S_{XYY}$ tem de ser ímpar também. Mas nós podemos rearranjar a soma da seguinte maneira

$$\underbrace{S_{YYX} + S_{YXY} + S_{XYY}}_{\text{ímpar}} = \underbrace{c_x + b_x + a_x}_{S_{XXX}\text{: par}} + \underbrace{2(c_y + b_y + a_y)}_{\text{par}},$$

o que é matematicamente impossível: a soma de dois números pares não pode ser ímpar. Assim concluimos que não podemos atribuir valores aos resultados das medições *a priori*. Parece que, de facto, os resultados das experiências estão indeterminados até alguém fazer a primeira observação. A não ser que, de alguma maneira, as medições do Charlie e do Bob afectem instantaneamente as medições da Alice, o que parece ser contra a nossa experiência.

[1] Este passo de enviar os resultados à fonte S é necessário porque alguém tem de reunir a informação suficiente para fazer a previsão. A informação do Bob e do Charlie consegue chegar à fonte antes de chegar a Alice, porque a fonte está fisicamente mais perto (podemos assumir que a Alice, o Bob e o Charlie formam um triângulo equilátero do tamanho da Galáxia, e que a fonte S está no centro). Assim, a fonte consegue prever o resultado da Alice antes do Bob e do Charlie conseguirem influenciar o resultado da Alice.