Ficha de exercícios: Operações com vários qubits

Exercício 1 (Porta SWAP). Neste exercício vamos derivar a forma da porta lógica SWAP.

1. Suponha que tem duas variáveis (p.e. em Python ou na sua linguagem preferida) onde guardou dois valores A e B, respectivamente. Por exemplo, pode ter guardado $A = 5$ e $B = 17$. Sem utilizar uma terceira variável, que operações se podem fazer de maneira a que, no final, a variável a tenha o valor B e a variável b tenha o valor A? Por exemplo,

a	b	Operação
5	17	
5	22	$b \leftarrow a + b$
$\vdots$	$\vdots$	?
17	5	?

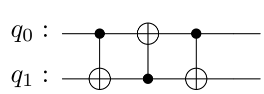
2. Suponha agora que as variáveis a e b são binárias. Re-escreva as operações que encontrou utilizando as simplificações que vimos (por exemplo, em binário, $-a = a$ e $a^2 = a$).

3. Escreva o circuito quântico correspondente às operações da alínea anterior.

4. (Extra: XOR trick) Para dois números não-binários, operações como a soma $a + b$ podem resultar em números demasiado grandes para serem representados num computador. No entanto, é possível trocar os dois números na mesma escrevendo-os em binário e aplicando o truque anterior. Como?

Exercício 2. 1. Qual é a probabilidade de observar um qubit no estado $|0\rangle$ se aplicar a porta R_Y com um ângulo de 90°? Verifique em Qiskit ou no IBM Composer.

2. No Qiskit/IBM composer, aplique uma porta de rotação $R_Y(\theta)$ ao primeiro qubit (para $\theta = 15°$, $30°$, $45°$, $90°$, $120°$), seguido do seguinte circuito.



Ddepois, meça apenas o seguindo qubit. As probabilidades de medição de $|0\rangle$ são alteradas? Se sim, como?

Exercício 3. Mostre que o circuito seguinte da alínea anterior troca efetivamente os estados de dois qubits. Isto é, mostre que o circuito transforma os estados da seguinte maneira:

$$|\psi\rangle = (a\,|0\rangle + b\,|1\rangle)\,(c\,|0\rangle + d\,|1\rangle). \tag{1}$$

$$\longrightarrow |\psi'\rangle = (c\,|0\rangle + d\,|1\rangle)\,(a\,|0\rangle + b\,|1\rangle). \tag{2}$$

Exercício 4 (SWAP test). É possível estimar o produto escalar entre dois estados utilizando a porta CSWAP. Imagine que tem um circuito de três qubits. O primeiro é um controlo que começa no estado $|0\rangle$, e os outros dois qubits estão nos estados

$$|u\rangle = a\,|0\rangle + b\,|1\rangle\,, \qquad |v\rangle = c\,|0\rangle + d\,|1\rangle \tag{3}$$

Mostre que a probabilidade de medir o qubit de cima em $|0\rangle$ no seguinte circuito é $(1 + |\langle u|v\rangle|^2)/2$.