

PROBLEMS ON NUMERICAL SEMIGROUPS

MANUEL DELGADO

ABSTRACT. This note contains problems on numerical semigroups that are potentially adequate for undergraduate or young graduate students

1. INTRODUCTION

Um semigrupo numérico S é um subconjunto de \mathbb{N} (o conjunto dos inteiros não negativos) tal que $0 \in S$, S é estável para a adição e o seu complemento em \mathbb{N} é finito.

Uma boa introdução aos semigrupos numéricos é um livro de Rosales e García-Sánchez [RosalesGarcia2004]. Lá encontramos a generalidade da notação e terminologia usada neste plano.

Ao longo deste plano de trabalhos, S representa um semigrupo numérico arbitrário.

Um semigrupo numérico S tem um único conjunto de geradores que é minimal para a inclusão. Esse conjunto é finito e designamos os seus elementos por *elementos primitivos*. Denotamos o conjunto dos elementos primitivos de S por P . A sua cardinalidade, dita *dimensão de imersão* de S denota-se por $|P|$.

A *multiplicidade* de S é o mais pequeno inteiro positivo de S e denota-se por m . O *número de Frobenius* de S é o maior inteiro que não pertence a S e denota-se por F . O *condutor* de S é $c = F + 1$. O conjunto dos *elementos esquerdos* de S consiste dos elementos de S mais pequenos que F . Denota-se por L .

2. THE GRAPH OF NUMERICAL SEMIGROUPS AND GENERATING TREES

3. CONJETURA DE WILF

A um semigrupo numérico S associamos o número seguinte a que chamamos *número de Wilf* de S :

$$W = |P||L| - c.$$

Um dos problemas que mais interesse tem despertado nos investigadores da área de semigrupos numéricos é devido a Wilf [Wilf1978AMM-circle], é hoje em dia conhecido por *conjetura de Wilf* e pode ser enunciado como segue:

Conjetura (Wilf, 1978) Todo o semigrupo numérico tem número de Wilf não negativo.

Date: October 22, 2025.

2020 Mathematics Subject Classification. 20M14, 05A16.

Key words and phrases. Numerical semigroup, Frobenius number, Maximum primitive, Counting numerical semigroups, Wilf's conjecture.

The authors were partially supported by CMUP, a member of LASI, which is financed by national funds through FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia, I.P., under the projects with reference UID/00144/2025.

São conhecidas diversas famílias grandes de semigrupos numéricos que satisfazem a conjectura de Wilf. Em [Delgado2020-survey] encontra-se uma síntese e [DelgadoKumarMarion2025pp-co contém resultados recentes. As técnicas usadas são diversas, sendo de referir que resultados e técnicas de Combinatória Aditiva (algumas apresentadas em [TaoVu2006Book-Additive]) parece poderem ser mais exploradas.

O número de inteiros positivos que não pertencem a um semigrupo numérico diz-se o seu *género*. Recentemente (ver [DelgadoEliahouFromentin2025JoA-verification]) foi provado que a família de mais de 42×10^{20} (valor estimado) semigrupos numéricos de género até 100 consiste de semigrupos que satisfazem a conjectura de Wilf. Este resultado é consequência de vários resultados teóricos aliados a uma forma eficaz de evitar uma verificação exaustiva bem como o uso intensivo de meios computacionais.

Como qualquer problema que atrai o interesse de um grande número de investigadores, a conjectura de Wilf gera problemas com interesse por si mesmos. A título de exemplo, Eliahou [Eliahou2018JEMS-Wilfs] põe o problema de caraterizar a família de semigrupos numéricos que satisfaz

$$|P \cap L||L| - \lceil c/m \rceil |D| + \lceil c/m \rceil m - c \geq 0.$$

Deve registar-se que esta família de semigrupos satisfaz a conjectura de Wilf, facto que Eliahou [Eliahou2018JEMS-Wilfs] usou para mostrar que a família de semigrupos numéricos satisfazendo $c \geq 3m$ satisfaz a conjectura de Wilf (o que, aliado a outros resultados, constitui uma prova de que assintoticamente, num certo sentido, todos os semigrupos numéricos satisfazem a conjectura de Wilf). O problema proposto por Eliahou antes referido deu já origem a diversos trabalhos de investigação (por exemplo, [Delgado2018MZ-question, EliahouFromentin2019SF-misses]) e está provavelmente longe de estar resolvido.

O que aconteceria a este plano de trabalhos se fosse encontrado um semigrupo numérico com número de Wilf negativo? Novos problemas surgiriam, a exemplo do problema proposto por Eliahou referido antes: caraterizar os semigrupos numéricos com número de Wilf negativo. Ou mesmo algo menos ambicioso (em analogia com os trabalhos [Delgado2018MZ-question, EliahouFromentin2019SF-misses]): encontrar famílias infinitas de semigrupos numéricos com número de Wilf negativo.

Referimos ainda a existência de software que ajudará na escolha das pistas a seguir na investigação, descartando outras. O pacote `numerigalsgps` [NumericalSgps1.4.0], escrito na linguagem GAP [GAP4.14.0] e distribuído com o sistema computacional com o mesmo nome, destina-se a cálculos com semigrupos numéricos. Algoritmos desenvolvidos no decurso da investigação poderão ser implementados em GAP e adicionados ao pacote referido, o qual aceita contribuições.

Porto, 2 de Setembro de 2025

José Castro

Manuel Delgado

CMUP—CENTRO DE MATEMÁTICA DA UNIVERSIDADE DO PORTO, DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA, FACULDADE DE CIÊNCIAS, UNIVERSIDADE DO PORTO, RUA DO CAMPO ALEGRE S/N, 4169- 007 PORTO, PORTUGAL

Email address: mdelgado@fc.up.pt