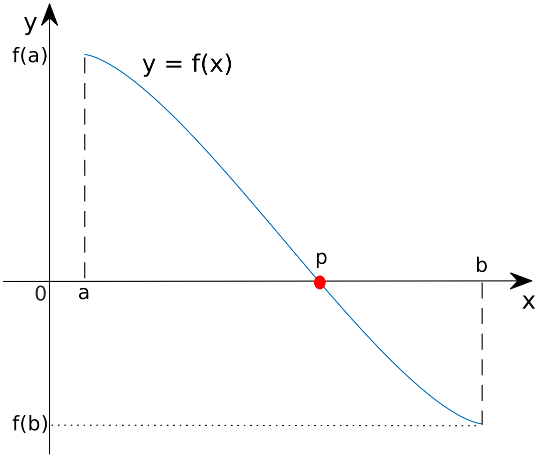
Solución de ecuaciones no lineales

Dr. Manuel Adrian Acuña Zegarra

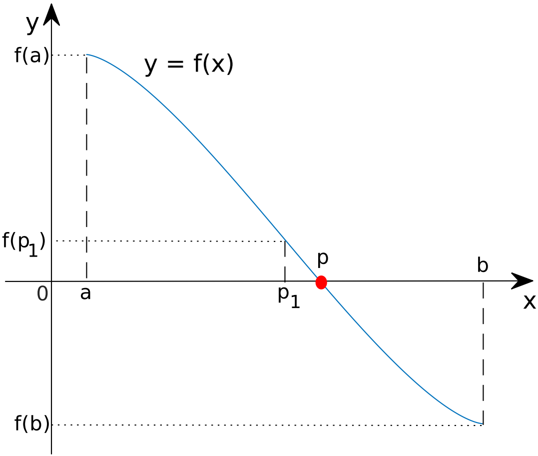
Método de bisección

- Se emplea para obtener una aproximación de una raíz, o solución, de una ecuación de la forma $f(x) = 0$.
- El método se basa en emplear iterativamente el teorema de Bolzano, el cual garantiza que dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$, tal que $f(a) \times f(b) < 0$, entonces existe al menos un número $p \in (a, b)$ tal que $f(p) = 0$.

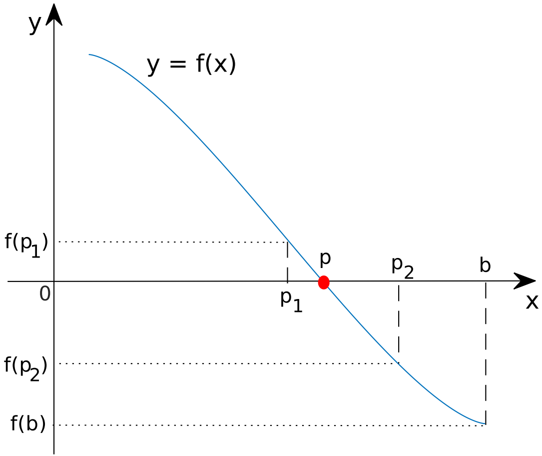
Método de bisección



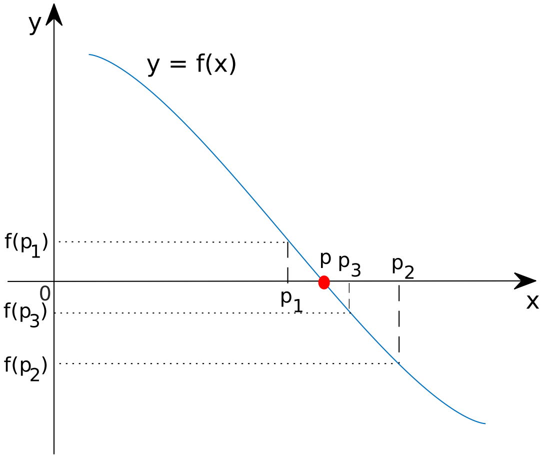
Método de bisección



Método de bisección



Método de bisección



Método de bisección

Para llevar a cabo este método, se siguen los siguientes pasos:

- Paso 1: Verificar que la función f cumpla las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo propuesto $[a, b]$.
- Paso 2: Encontrar el punto medio del intervalo $[a, b]$ y escoger el subintervalo que contenga a la raíz buscada. Para hacer esto último, aplicaremos nuevamente el teorema de Bolzano sobre este nuevo intervalo.
- Paso 3: Aplicar el paso 2 a nuestro nuevo intervalo y proseguir con este procedimiento en cada nuevo intervalo generado.

Método de bisección

Definimos a la tolerancia como un valor $\epsilon > 0$, tal que

$$
\begin{aligned}
&|p_n - p_{n-1}| < \epsilon, \\
&\frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \epsilon, \quad p_n \neq 0, \quad \text{o} \\
&|f(p_n)| < \epsilon.
\end{aligned}
$$

donde p_n es el valor obtenido en el n-ésima iteración al aplicar el método de bisección. En el caso de que se conozca la solución exacta, en las dos primeras desigualdades se sustituirá el valor de p_n por p y el de p_{n-1} por p_n.

Método de bisección

Es importante mencionar que usualmente se considera que el error relativo es un mejor criterio para relacionar con el valor de tolerancia, puesto que existen casos en donde:

i) $p_n - p_{n-1}$ tienda a cero, pero la aproximación difiera mucho de la raíz exacta, o

ii) $f(p_n)$ sea muy cercano a cero, pero la aproximación aún se encuentra lejos de la raíz buscada.

Ejemplos

1. Aplique el método de bisección para aproximar la solución de $x^2 = 2$ cuando $x \in [1, 2]$. Considere una tolerancia igual a 0.0001.

Ejemplos

1. Aplique el método de bisección para aproximar la solución de $x^2 = 2$ cuando $x \in [1, 2]$. Considere una tolerancia igual a 0.0001.
2. Aplique el método de bisección para aproximar la solución de $cos(x) - \sqrt{x} = 0$ cuando $x \in [0, \pi/4]$. Considere una tolerancia igual a 0.0005.

Iteración de punto fijo

Sea la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Es claro que si y es solución de $f(x)$ significa que:

$$y^2 - 2y + 3 = 0,$$

lo cual es equivalente a decir que

$$y = \frac{y^2 + 3}{2} \ .$$

Por lo tanto, si denotamos al lado derecho de la ecuación anterior por $g(y)$, tenemos

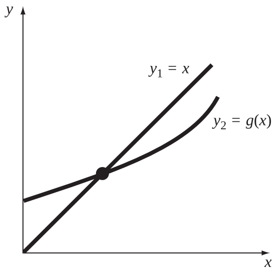
$$g(y) = y \ .$$

Iteración de punto fijo

- Un punto fijo de una función g es un número x tal que $g(x) = x$.

Iteración de punto fijo

- Un punto fijo de una función g es un número x tal que $g(x) = x$.
- Gráficamente se puede interpretar lo anterior de la siguiente manera:



Iteración de punto fijo

Observemos los siguientes ejemplos:

1. $g(x) = x^2 - 2$ cuando $x \in [-2, 3]$.

Iteración de punto fijo

Observemos los siguientes ejemplos:

1. $g(x) = x^2 - 2$ cuando $x \in [-2, 3]$.
2. $g(x) = \sin(x) - x$ para $x \in [-\pi/4, \pi/4]$

Iteración de punto fijo

Observemos los siguientes ejemplos:

1. $g(x) = x^2 - 2$ cuando $x \in [-2, 3]$.
2. $g(x) = \sin(x) - x$ para $x \in [-\pi/4, \pi/4]$
3. $g(x) = e^x - 1$ cuando $x \in [-1, 1]$.

Iteración de punto fijo

El siguiente teorema da condiciones suficientes para la existencia y unicidad del punto fijo.

Teorema

a) *Si $f \in C[a,b]$ y $f(x) \in [a,b]$, para todo $x \in [a,b]$, entonces f tiene al menos un punto fijo en $[a,b]$.*

b) *Y si además $f'(x)$ existe para todo $x \in (a,b)$ y existe una constante positiva $k < 1$ con*

$$|f'(x)| \leq k, \quad \textit{para todo } x \in (a,b),$$

entonces el punto fijo en $[a,b]$ es único.

Iteración de punto fijo

Sea la función $g(x) = \frac{x^2-2}{4}$ definida para $x \in [-1, 1]$.

Iteración de punto fijo

Sea la función $g(x) = \frac{x^2-2}{4}$ definida para $x \in [-1, 1]$.

- Es claro que $g(x)$ es una función continua en $x \in [-1, 1]$.

Iteración de punto fijo

Sea la función $g(x) = \frac{x^2-2}{4}$ definida para $x \in [-1, 1]$.

- Es claro que $g(x)$ es una función continua en $x \in [-1, 1]$.
- Para garantizar que $g(x) \in [-1, 1]$ para todo $x \in [-1, 1]$, podemos aplicar los criterios de las derivadas.

Iteración de punto fijo

Sea la función $g(x) = \frac{x^2-2}{4}$ definida para $x \in [-1, 1]$.

- Es claro que $g(x)$ es una función continua en $x \in [-1, 1]$.
- Para garantizar que $g(x) \in [-1, 1]$ para todo $x \in [-1, 1]$, podemos aplicar los criterios de las derivadas.
- Finalmente, tras observar las características de la primera derivada de $g(x)$ es claro que existe $k < 1$ tal que

$$|g'(x)| \leq k, \quad \text{para todo } x \in (a, b).$$