Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Dr. Manuel Adrian Acuña Zegarra

Introducción

Un sistema de ecuaciones lineales de dos variables puede ser expresado de la siguiente manera:

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2,$$

donde a_{ij} son los coeficientes y b_i son los términos independientes. Ambos velores son constantes. Asimismo, x y y son las incógnitas a encontrar.

Introducción

En general, un sistema de n ecuaciones lineales con m variables se expresa de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 & + \cdots + a_{1m}x_m & = b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 & + \cdots + a_{2m}x_m & = b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \quad & \qquad\qquad \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 & + \cdots + a_{nm}x_m & = b_n
\end{aligned}
$$

Introducción

El sistema anterior se puede también expresar a través de un sistema matricial, el cual tiene la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Esta estructura nos será de mucha utilidad al momento de llevar a cabo los distintos métodos a estudiar.

Ejemplos:
Expresar los siguientes sistemas en su forma matricial.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-y & = & 1 \\ -x+5y & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} -3y+2x-z & = & -11 \\ -x+y+z & = & 2 \\ z+2x-5y & = & 1 \end{array}\right.$$

Eliminación gaussiana

El método de eliminación gaussiana consta de dos etapas principales:

1. Eliminación hacia adelante.
2. Sustitución hacia atrás.

Es importante resaltar que este método se puede trabajar sobre el sistema de ecuaciones lineales o sobre su expresión matricial asociada. Sin embargo, para fines del curso vamos a trabajar a través de la expresión matricial.

Eliminación gaussiana

Se denomina matriz extendida a la matriz en la cual también aparecen los términos independientes del sistema lineal. Considerando el ejemplo anterior del sistema de dos variables, se tiene que su matriz extendida asociada es igual a:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & \vdots & 1 \\ -1 & 5 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Eliminación gaussiana

Sea el sistema:

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\
0.1x_1 - 0.3x_3 + 7x_2 &= -19.3 \\
10x_3 - 0.2x_2 + 0.3x_1 &= 71.4
\end{aligned}
$$

Eliminación gaussiana

Sea el sistema:

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85\\
0.1x_1 - 0.3x_3 + 7x_2 &= -19.3\\
10x_3 - 0.2x_2 + 0.3x_1 &= 71.4
\end{aligned}
$$

Es claro que su matriz extendida asociada es igual a:

$$
\begin{bmatrix}
3 & -0.1 & -0.2 & \vdots & 7.85\\
0.1 & 7 & -0.3 & \vdots & -19.3\\
0.3 & -0.2 & 10 & \vdots & 71.4
\end{bmatrix}
$$

Eliminación gaussiana

El primer paso para aplicar la eliminación gaussiana está dado por la eliminación hacia adelante. El proceso para hacer esto se basa en volver ceros los elementos bajo la diagonal de la matriz principal.

En el ejemplo anterior, lo primero es eliminar el 0.1 y 0.3. Para hacer esto, primero multiplicamos por $-0.1/3$ al primer renglón y se lo sumamos al segundo, obteniendo

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & \vdots & 7.85 \\ 0 & 7.003333 & -0.293333 & \vdots & -19.561667 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & \vdots & 71.4 \end{bmatrix}$$

Eliminación gaussiana

En forma análoga eliminamos el valor 0.3, obteniendo

$$\left[\begin{array}{cccccc} 3 & -0.1 & -0.2 & \vdots & 7.85 \\ 0 & 7.003333 & -0.293333 & \vdots & -19.561667 \\ 0 & -0.19 & 10.02 & \vdots & 70.615 \end{array}\right]$$

Eliminación gaussiana

En este caso, para completar la eliminación hacia adelante nos falta hacer cero el valor -0.19.

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & \vdots & 7.85 \\ 0 & 7.003333 & -0.293333 & \vdots & -19.561667 \\ 0 & 0 & 10.012042 & \vdots & 70.084293 \end{bmatrix}$$

Finalmente, tras terminar la eliminación hacia adelante, nos queda aplicar la segunda etapa de la eliminación gaussiana, esto es, sustitución hacia atrás.

Eliminación gaussiana

Ya que el último renglón siempre está asociado a la última variable a encontrar, en nuestro caso, esto sería x_3. Por lo tanto, se sigue que:

$$10.012042x_3 = 70.084293,$$

luego

$$x_3 = 7\ .$$

Del segundo renglón tenemos que:

$$7.003333x_2 - 0.293333x_3 = -19.561667,$$

entonces

$$x_2 = \frac{-19.561667 + 0.293333x_3}{7.003333} = -2.500001\ .$$

Finalmente, del primer renglón se tiene que

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85,$$

luego

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3} = 3.$$

Eliminación gaussiana

Ejemplo:
Sea el sistema lineal:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}w & = & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{5}w & = & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z + \frac{1}{6}w & = & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{6}z + \frac{1}{7}w & = & \frac{1}{9} \end{array}\right.$$

Eliminación gaussiana

Ejemplo:
Sea el sistema lineal:

$$\begin{cases} x - y + 2z - w & = & -8 \\ 2x - 2y + 3z - 3w & = & -20 \\ x + y + z & = & -2 \\ x - y + 4z + 3w & = & 4 \end{cases}$$

Dificultades del método de eliminación

- División entre cero
- Errores de redondeo
- Sistemas mal condicionados

Sistemas mal condicionados

Ejemplos:
Sean los sistemas lineales:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 10 \\ 1.1x + 2y & = & 10.4 \end{array} \right. , \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x + 2y & = & 10 \\ 1.05x + 2y & = & 10.4 \end{array} \right.$$

Pivoteo: La estrategia de pivoteo busca eliminar los casos cuando los elementos pivotes sean cero o muy cercanos a cero. Esta estrategia consiste en que antes de eliminar los elementos bajo el pivote, se determine el elemento más grande (en magnitud) disponible en la columna. Tras lo cual se procede a intercambiar las filas. Esto se conoce como **pivoteo parcial**.

Pivoteo Parcial

Ejemplos: Sean los sistemas lineales:

$$
\left\{ \begin{array}{rcl} 0.003x + 59.14y & = & 59.17 \\ 5.291x + 6.13y & = & 46.78 \end{array} \right. , \quad
\left\{ \begin{array}{rcl} 2y + z + 2w & = & 5 \\ x + z + 3w & = & 5 \\ 3x + y - 4z + 2w = & = & 2 \\ -4x + z + w & = & -2 \end{array} \right.
$$

Preguntas...

1. Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + \alpha z + 2 & = & y \\ 3 + x + \alpha z & = & 2y \\ \alpha x + y + z & = & 2 \end{cases}$$

   a) Para que valores de α el sistema tiene solución única.
   b) Para que valores de α el sistema tiene infinitas soluciones.
   c) Para que valores de α el sistema no tiene solución.

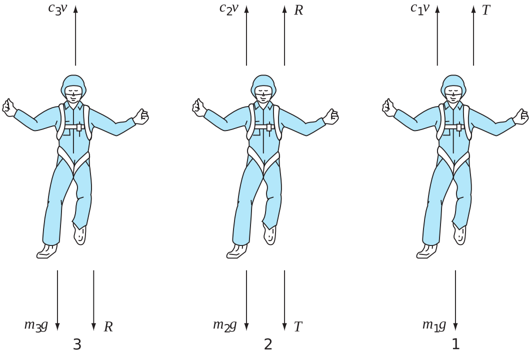
Preguntas...

2. Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 2x + 3 &= 6\alpha y \\ \frac{3}{2} + y &= 3\alpha x \end{cases}$$

a) Para que valores de α el sistema tiene solución única.
b) Para que valores de α el sistema tiene infinitas soluciones.
c) Para que valores de α el sistema no tiene solución.

Preguntas...



Paracaidista	Masa, kg	Coef ciente de arrastre, kg/ s
1	70	10
2	60	14
3	40	17

Factorización LU

- La factorización LU es un proceso en el cual se descompone una matriz A como un producto de matrices, con la particularidad de que L es una matriz triangular inferior (lower) y U es una matriz triangular superior (upper).
- Es importante resaltar que no todas las matrices se pueden descomponer en la forma LU.
- En el contexto de solución de sistemas lineales, la factorización LU es muy útil siempre y cuando se busque resolver una serie de sistemas de ecuaciones con una misma matriz de coeficientes.

Factorización LU

En el caso de que una matriz admita una factorización LU, el proceso de obtener esto es muy sencillo ya que está ligado al proceso de eliminación gaussiana.

Ejemplo:
Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Calcular el valor de las matrices L, U tal que $LU = A$.

Factorización LU

Ya que el método de eliminación de Gauss conlleva a encontrar una matriz triangular superior, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 16/3 \end{bmatrix}$$

lo cual surge como resultado al multiplicar el primer renglon por $-1/3$ y sumarselo al segundo. Por lo tanto, denotemos a la matriz anterior como U.

La matriz L se forma de la siguiente manera:

1. Se define una matriz nula de $n \times n$, donde n es el número de renglones de la matriz A.

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. El factor empleado para hacer la eliminación en la matriz A es ubicado en la misma posición en donde se hizo la eliminación, **pero con signo cambiado**, esto es,

$$L_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Finalmente, la matriz $L = L_1 + I$, donde I es la matriz identidad de $n \times n$.

$$L = L_1 + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} .$$

Hagamos la comprobación:

$$L \times U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 16/3 \end{bmatrix}$$

Factorización LU

Sea la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 \\ 0.1 & 7 & -0.3 \\ 0.3 & -0.2 & 10 \end{bmatrix}$$

Calcular el valor de las matrices L, U tal que $LU = A$.