Problemario sobre Aproximación de Solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

1. Encuentre la solución para cada uno de los siguientes problemas de valor inicial.

$$
\begin{aligned}
&a)\ y'(t) = y(t)\cos(t), \quad y(0) = 1\\
&b)\ w'(t) = \frac{4t^3 w(t)}{1+t^4}, \quad w(0) = 1\\
&c)\ z'(t) = te^{3t} - 2z(t), \quad z(0) = 0\\
&d)\ y'(t) = 1 + \frac{y(t)}{t}, \quad y(1) = 2\\
&e)\ w'(t) = \cos(2t) + \sin(3t), \quad w(0) = 1\\
&f)\ z'(t) = 1 + \frac{z(t)}{t} + \left(\frac{z(t)}{t}\right)^2, \quad z(1) = 0\\
&g)\ y'(t) = -\left(y(t)+1\right)\left(y(t)+3\right), \quad y(0) = -2
\end{aligned}
$$

2. Aplique el método de Euler para aproximar la solución de los problemas de valor inicial planteados en la pregunta anterior al considerar lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&a)\quad 0 \le t \le 1, \quad N = 20.\\
&b)\quad 0 \le t \le 1, \quad h = 0.1.\\
&c)\quad 0 \le t \le 2, \quad N = 4.\\
&d)\quad 1 \le t \le 2, \quad h = 0.25.\\
&e)\quad 0 \le t \le 1, \quad N = 4.\\
&f)\quad 1 \le t \le 3, \quad h = 0.2.\\
&g)\quad 0 \le t \le 2, \quad N = 10.
\end{aligned}
$$

   Para cada uno de los casos anteriores calcule los errores absolutos y relativos para cada iteración.

3. Aplique el método de Heun para aproximar la solución de los problemas de valor inicial planteados en la pregunta 1. Considere las mismas condiciones que en la pregunta 2. Además de lo anterior, calcule también los errores absolutos y relativos para cada iteración.

4. Aplique el método de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar la solución de los problemas de valor inicial planteados en la pregunta 1. Considere las mismas condiciones que en la pregunta 2. Además de lo anterior, calcule también los errores absolutos y relativos para cada iteración.

5. Si se supone que el arrastre es proporcional al cuadrado de la velocidad, se puede modelar la velocidad de un objeto que cae por medio de la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m}v^2,$$

   donde v es la velocidad (m/s), t es el tiempo (s), g representa la aceleración de la gravedad ($9.81\ m/s^2$), c_d es el coeficiente de arrastre de segundo orden (kg/m), y m representa a la masa del objeto (kg).

   Considere que el valor de la masa del objeto es igual a 90 kg, y que el coeficiente de arrastre es igual a 0.225 kg/m. Si se deja caer el objeto de una altura de 50 m, empleando el método de Euler con un tamaño de paso menor o igual que 0.5, determine la velocidad con la cual el objeto choca con el suelo. Sugerencia: Emplear las ecuaciones de caída libre para definir el tiempo sobre el cual vamos a calcular la solución de la ecuación diferencial.

6. El movimiento de un sistema acoplado masa resorte está descrito por la ecuación diferencial ordinaria:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0,$$

donde x representa el desplazamiento desde la posición de equilibrio (m), t es el tiempo (s), m es la masa (kg), y c representa el coeficiente de amortiguamiento (Ns/m). Si el coeficiente de amortiguamiento c es igual a 40 (amortiguamiento crítico), y además, la constante del resorte es $k = 20\ N/m$. Calcular la aproximación de la solución de la ecuación anterior aplicando el método de Runge-Kutta de orden cuatro al considerar:

- $0 \leq t \leq 15\ s$.
- Velocidad inicial igual a cero.
- Desplazamiento inicial igual a $1\ m$.

7. La salida de agua de un tanque cónico invertido provisto de un orificio circular, fluye con una velocidad

$$\frac{dh}{dt} = -0.6\pi r^2 \frac{\sqrt{2gh}}{A(h)},$$

donde r es el radio del orificio, h es la altura del nivel del agua medido desde el vértice del cono, y $A(h)$ es el área de la sección transversal del tanque, ubicada a h unidades por arriba del orificio. Suponga que $r = 0.03\ m$, $g = 9.81 m/s$, que el tanque tiene un nivel inicial de agua de $2.5\ m$, y un volumen inicial de $156\ m^3$. Aplicando el método de Runge-Kutta de cuarto orden, calcular el nivel del agua después de $3\ min$ con un tamaño de paso igual a $20\ s$.

8. Como se mencionó en clase, la ecuación logística puede ser empleada para simular el tamaño de una población.

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right),$$

donde N representa al tamaño de la población, r es la tasa neta de crecimiento, y K es la capacidad de carga. Empleando los métodos de Euler y Runge-Kutta de cuarto orden, simular el crecimiento de la población mundial entre 1950 y 2000 al considerar una condición inicial de 2555 millones de personas, $r = 0.026\ y^{-1}$, y $K = 12000$ millones de personas. Compare sus resultados con la siguiente tabla:

t	1950	1960	1970	1980	1990	2000
N(t)	2555	3040	3708	4454	5276	6079