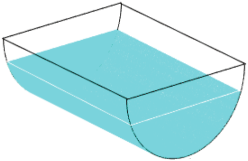
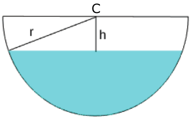
Introducción a los métodos numéricos

Dr. Manuel Adrian Acuña Zegarra

Motivación

- Longitud debe ser igual a $10m$.
- Presenta como sección transversal un semicírculo.
- No se quiere que se llene totalmente, sino que haya una altura $h = 0.15m$ que no sea cubierta por agua.
- Considerando el punto anterior, que el volumen máximo del agua sea igual a $12.4m^3$.





Motivación

Ecuación del volumen de agua para una estructura con las características anteriores:

$$V = L\left[\frac{\pi r^2}{2} - r^2 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{h}{r}\right) - h\left(r^2 - h^2\right)^{1/2}\right] .$$

Motivación

Ecuación del volumen de agua para una estructura con las características anteriores:

$$V = L\left[\frac{\pi r^2}{2} - r^2 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{h}{r}\right) - h\left(r^2 - h^2\right)^{1/2}\right] .$$

Reemplazando en la ecuación anterior las características del bebedero a considerar, se tiene:

$$12.4 = 10\left[\frac{\pi r^2}{2} - r^2 \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{0.15}{r}\right) - 0.15\left(r^2 - 0.0225\right)^{1/2}\right] .$$

Características de los métodos numéricos

- Son técnicas o procesos mediante los cuales es posible reformular problemas matemáticos, de tal forma que puedan resolverse utilizando operaciones aritméticas.

Características de los métodos numéricos

- Son técnicas o procesos mediante los cuales es posible reformular problemas matemáticos, de tal forma que puedan resolverse utilizando operaciones aritméticas.
- Representan opciones que aumentan, en forma considerable, la capacidad para enfrentar y resolver los diferentes problemas que se nos presentan.

Características de los métodos numéricos

- Son técnicas o procesos mediante los cuales es posible reformular problemas matemáticos, de tal forma que puedan resolverse utilizando operaciones aritméticas.
- Representan opciones que aumentan, en forma considerable, la capacidad para enfrentar y resolver los diferentes problemas que se nos presentan.
- En general, se emplean un buen número de cálculos aritméticos para su desarrollo.

Cifras significativas

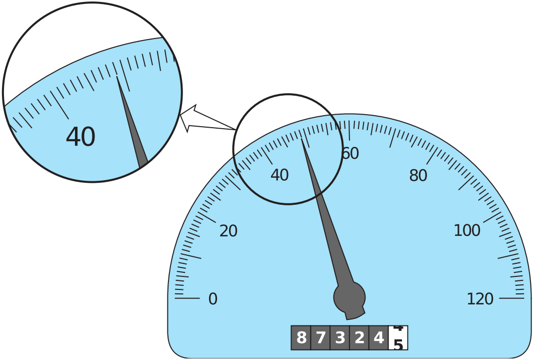


Figura 1: Velocímetro y odómetro de un automóvil

Cifras significativas

- El concepto de cifras o dígitos significativos se ha desarrollado para designar formalmente la confiabilidad de un valor numérico.

Cifras significativas

- El concepto de cifras o dígitos significativos se ha desarrollado para designar formalmente la confiabilidad de un valor numérico.
- Las cifras significativas de un número están dadas por el número de dígitos que se ofrecen con certeza, más uno estimado.

Cifras significativas

- El concepto de cifras o dígitos significativos se ha desarrollado para designar formalmente la confiabilidad de un valor numérico.
- Las cifras significativas de un número están dadas por el número de dígitos que se ofrecen con certeza, más uno estimado.
- Por convención al dígito estimado se le da el valor de la mitad de la escala menor de división en el instrumento de medición.

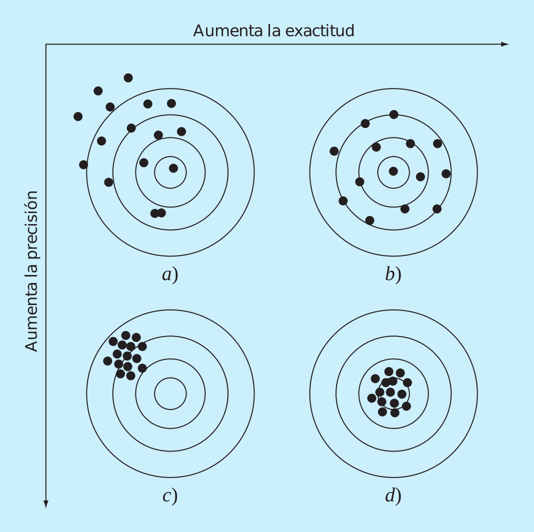
Exactitud y precisión

- La exactitud se refiere a qué tan cercano está el valor calculado o medido del valor verdadero.

Exactitud y precisión

- La exactitud se refiere a qué tan cercano está el valor calculado o medido del valor verdadero.
- La precisión se refiere a qué tan cercanos se encuentran, unos de otros, diversos valores calculados o medidos.

Exactitud y precisión



Teoría del error

- Los errores numéricos surgen del uso de aproximaciones para representar operaciones y cantidades matemáticas exactas.

Teoría del error

- Los errores numéricos surgen del uso de aproximaciones para representar operaciones y cantidades matemáticas exactas.
- Tipos de errores numéricos:
  1. Errores de truncamiento.
  2. Errores de redondeo.

Teoría del error

- Los errores numéricos surgen del uso de aproximaciones para representar operaciones y cantidades matemáticas exactas.
- Tipos de errores numéricos:
  1. Errores de truncamiento.
  2. Errores de redondeo.
- Ambos tipos de errores se pueden expresar como:

$$\text{Valor verdadero} = \text{Valor aproximado} + \text{error}$$

Teoría del error

Al reordenar la igualdad anterior, obtenemos

$$\text{error} = \text{Valor verdadero} - \text{Valor aproximado},$$

el cual, tras aplicarle el valor absoluto, se obtiene:

$$\text{error}_{absoluto} = |\text{Valor verdadero} - \text{Valor aproximado}|,$$

Al reordenar la igualdad anterior, obtenemos

$$\text{error} = \text{Valor verdadero} - \text{Valor aproximado},$$

el cual, tras aplicarle el valor absoluto, se obtiene:

$$\text{error}_{absoluto} = |\text{Valor verdadero} - \text{Valor aproximado}|,$$

Ejemplo: Suponga que se tiene que medir la longitud de un puente y la de un remache, obtiendo 9999 y 9 cm, respectivamente. Si los valores verdaderos son 10000 y 10 cm, calcule el error absoluto en cada caso.

Teoría del error

El error relativo está expresado de la siguiente manera

$$\text{error}_{relativo} = \frac{\text{error}_{absoluto}}{|\text{Valor verdadero}|},$$

Teoría del error

El error relativo está expresado de la siguiente manera

$$\text{error}_{relativo} = \frac{\text{error}_{absoluto}}{|\text{Valor verdadero}|},$$

mientras que el error porcentual está dado por

$$\text{error}_{porcentual} = \text{error}_{relativo} \times 100\,\%.$$

Teoría del error

Cuando se trabaja en términos computacionales surge el concepto de Tolerancia, el cual puede ser entendido como la cota superior que puede tomar alguno de los errores deseados. Denotaremos a este valor por TOL.

Es importante relacionar los errores con el número de cifras significativas en la aproximación. Para hacer esto, se empleará Es posible demostrar el siguiente criterio (Scarborough, 1966):

$$TOL = \left(0.5 \times 10^{2-n}\right) \%$$

con el cual se tendrá la seguridad de que el resultado es correcto en al menos n cifras significativas.

Errores de truncamiento

Son aquellos errores que resultan al usar una aproximación en lugar de un procedimiento matemático exacto.

Por ejemplo, sea la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = -2x,$$

la cual al ser resuelta, se tiene como solución:

$$x(t) = x(0)e^{-2t}$$

Errores de truncamiento

Por otro lado, la ecuación diferencial puede ser aproximada mediante un procedimiento de diferencias finitas, obteniendo:

$$\frac{dx}{dt} \approx \frac{x(t_{i+1}) - x(t_i)}{t_{i+1} - t_i}.$$

Al reemplazar la expresión anterior en la ecuación inicial, se obtiene:

$$x(t_{i+1}) = \left(1 - 2\left(t_{i+1} - t_i\right)\right) x(t_i) \ ,$$

donde $t_{i+1} - t_i = h$, con h constante para todo i.

Serie de Taylor

La serie de Taylor proporciona un medio para predecir el valor de una función en un punto en términos del valor de la función y sus derivadas en otro punto. Dicha serie se expresa de la siguiente forma:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n}(a)(x-a)^{n}}{n!} \ .$$

¿Qué requerimientos debe cumplir la función f para poder ser aproximada a través de una serie de Taylor?

Serie de Taylor

Por ejemplo, sea la función:

$$f(x) = -0.1x^4 - 0.15x^3 - 0.5x^2 - 0.25x + 1.2,$$

la cual se busca aproximar cuando $x = 2$ mediante una expansión de Taylor alrededor de 1.

Errores de redondeo

- Los errores de redondeo se originan debido a que la computadora emplea un número determinado de cifras significativas durante un cálculo.
- Un ejemplo claro de esto, es la representación de π, $\sqrt{7}$, e, etc.
- Otro ejemplo de esto surge debido a que las computadoras usan una representación en base 2, lo cual da como consecuencia que no pueden representar exactamente algunos números en base 10.

Representación de números en la computadora

Los errores de redondeo se relacionan de manera directa con la forma en que se guardan los números en la memoria de la computadora.

- La unidad fundamental mediante la cual se representa la información se llama palabra.
- Ésta es una entidad que consiste en una cadena de dígitos binarios o bits.

Sistemas numéricos

- Un sistema numérico es simplemente una convención para representar cantidades.
- En la vida cotidiana estamos acostumbrados a emplear el sistema de base 10, el cual utiliza 10 digitos $(0-9)$.
- A lo largo de la historia, diferentes civilizaciones emplearon diferentes tipos de sistemas de numeración, por ejemplo, los Mayas emplearon el sistema en base 20.

Sistemas numéricos

- A diferencia del sistema en que estamos acostumbrados trabajar, la computadora emplea el sistema binario o de base 2. Este sistema utiliza 2 dígitos $(0, 1)$.
- Esto se relaciona con el hecho de que las unidades lógicas fundamentales de las computadoras digitales sean componentes electrónicos de apagado/encendido.

Representación entera

- El método más sencillo para entender cómo los enteros se representan en la computadora se denomina método de magnitud con signo.
- En este método se emplea el primer bit de una palabra para indicar el signo: con un 0 para positivo y un 1 para el negativo.