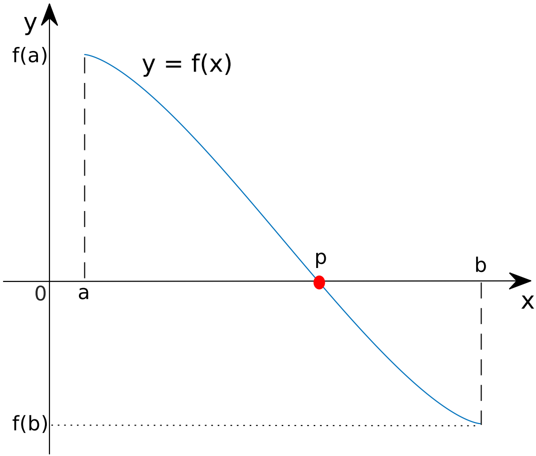
Solución de ecuaciones no lineales

Dr. Manuel Adrian Acuña Zegarra

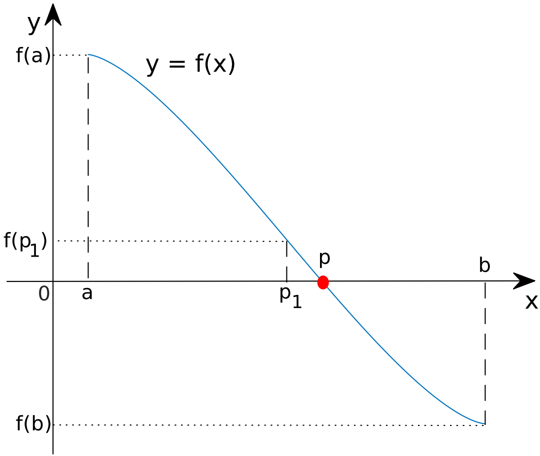
Método de bisección

- Se emplea para obtener una aproximación de una raíz, o solución, de una ecuación de la forma $f(x) = 0$.
- El método se basa en emplear iterativamente el teorema de Bolzano, el cual garantiza que dada una función f continua en el intervalo $[a, b]$, tal que $f(a) \times f(b) < 0$, entonces existe al menos un número $p \in (a, b)$ tal que $f(p) = 0$.

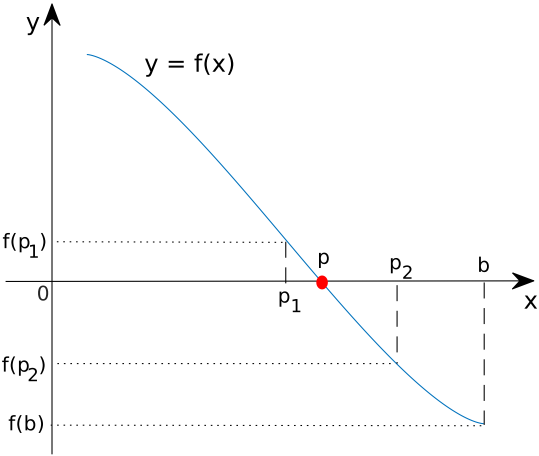
Método de bisección



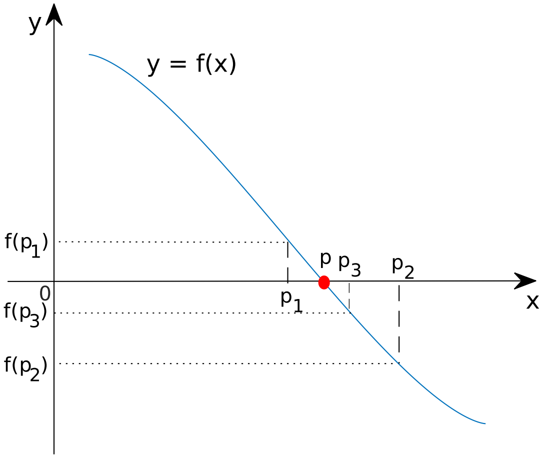
Método de bisección



Método de bisección



Método de bisección



Método de bisección

Para llevar a cabo este método, se siguen los siguientes pasos:

- Paso 1: Verificar que la función f cumpla las condiciones del teorema de Bolzano en el intervalo propuesto $[a, b]$.
- Paso 2: Encontrar el punto medio del intervalo $[a, b]$ y escoger el subintervalo que contenga a la raíz buscada. Para hacer esto último, aplicaremos nuevamente el teorema de Bolzano sobre este nuevo intervalo.
- Paso 3: Aplicar el paso 2 a nuestro nuevo intervalo y proseguir con este procedimiento en cada nuevo intervalo generado.

Método de bisección

Definimos a la tolerancia como un valor $\epsilon > 0$, tal que

$$\begin{aligned} & |p_n - p_{n-1}| < \epsilon, \\ & \frac{|p_n - p_{n-1}|}{|p_n|} < \epsilon, \quad p_n \neq 0, \quad \text{o} \\ & |f(p_n)| < \epsilon. \end{aligned}$$

donde p_n es el valor obtenido en el n-ésima iteración al aplicar el método de bisección. En el caso de que se conozca la solución exacta, en las dos primeras desigualdades se sustituirá el valor de p_n por p y el de p_{n-1} por p_n.

Es importante mencionar que usualmente se considera que el error relativo es un mejor criterio para relacionar con el valor de tolerancia, puesto que existen casos en donde:

i) $p_n - p_{n-1}$ tienda a cero, pero la aproximación difiera mucho de la raíz exacta, o

ii) $f(p_n)$ sea muy cercano a cero, pero la aproximación aún se encuentra lejos de la raíz buscada.

Ejemplos

1. Aplique el método de bisección para aproximar la solución de $x^2 = 2$ cuando $x \in [1, 2]$. Considere una tolerancia igual a 0.0001.

Ejemplos

1. Aplique el método de bisección para aproximar la solución de $x^2 = 2$ cuando $x \in [1, 2]$. Considere una tolerancia igual a 0.0001.
2. Aplique el método de bisección para aproximar la solución de $cos(x) - \sqrt{x} = 0$ cuando $x \in [0, \pi/4]$. Considere una tolerancia igual a 0.0005.

Iteración de punto fijo

Sea la función $f(x) = x^2 - 2x + 3$. Es claro que si y es solución de $f(x)$ significa que:

$$y^2 - 2y + 3 = 0,$$

lo cual es equivalente a decir que

$$y = \frac{y^2 + 3}{2} \ .$$

Por lo tanto, si denotamos al lado derecho de la ecuación anterior por $g(y)$, tenemos

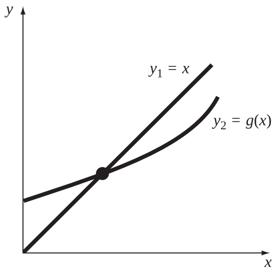
$$g(y) = y \ .$$

Iteración de punto fijo

- Un punto fijo de una función g es un número x tal que $g(x) = x$.

Iteración de punto fijo

- Un punto fijo de una función g es un número x tal que $g(x) = x$.
- Gráficamente se puede interpretar lo anterior de la siguiente manera:



Observemos los siguientes ejemplos:

1. $g(x) = x^2 - 2$ cuando $x \in [-2, 3]$.

Iteración de punto fijo

Observemos los siguientes ejemplos:

1. $g(x) = x^2 - 2$ cuando $x \in [-2, 3]$.
2. $g(x) = \sin(x) - x$ para $x \in [-\pi/4, \pi/4]$

Iteración de punto fijo

Observemos los siguientes ejemplos:

1. $g(x) = x^2 - 2$ cuando $x \in [-2, 3]$.
2. $g(x) = \sin(x) - x$ para $x \in [-\pi/4, \pi/4]$
3. $g(x) = e^x - 1$ cuando $x \in [-1, 1]$.

Iteración de punto fijo

El siguiente teorema da condiciones suficientes para la existencia y unicidad del punto fijo.

Teorema

a) *Si $f \in C[a,b]$ y $f(x) \in [a,b]$, para todo $x \in [a,b]$, entonces f tiene al menos un punto fijo en $[a,b]$.*

b) *Y si además $f'(x)$ existe para todo $x \in (a,b)$ y existe una constante positiva $k < 1$ con*

$$|f'(x)| \leq k, \quad \text{para todo } x \in (a,b),$$

entonces el punto fijo en $[a,b]$ es único.

Iteración de punto fijo

Sea la función $g(x) = \frac{x^2-2}{4}$ definida para $x \in [-1, 1]$.

Iteración de punto fijo

Sea la función $g(x) = \frac{x^2-2}{4}$ definida para $x \in [-1, 1]$.

- Es claro que $g(x)$ es una función continua en $x \in [-1, 1]$.

Iteración de punto fijo

Sea la función $g(x) = \frac{x^2-2}{4}$ definida para $x \in [-1, 1]$.

- Es claro que $g(x)$ es una función continua en $x \in [-1, 1]$.
- Para garantizar que $g(x) \in [-1, 1]$ para todo $x \in [-1, 1]$, podemos aplicar los criterios de las derivadas.

Iteración de punto fijo

Sea la función $g(x) = \frac{x^2-2}{4}$ definida para $x \in [-1, 1]$.

- Es claro que $g(x)$ es una función continua en $x \in [-1, 1]$.
- Para garantizar que $g(x) \in [-1, 1]$ para todo $x \in [-1, 1]$, podemos aplicar los criterios de las derivadas.
- Finalmente, tras observar las características de la primera derivada de $g(x)$ es claro que existe $k < 1$ tal que

$$|g'(x)| \leq k, \quad \text{para todo } x \in (a, b).$$

Ejemplos:

Sea

$$f(x) = \frac{\sin(x) + x}{3}, \quad x \in [0, \pi]$$

- Primero vamos a garantizar que $f(x) \in [0, \pi]$ para todo $x \in [0, \pi]$.
- Luego, vamos a probar que existe $k < 1$ tal que

$$|f'(x)| \leq k, \quad \text{para todo } x \in (0, \pi).$$

Ejemplos:

Sea

$$f(x) = \frac{e^{-x}}{2}, \quad x \in [0,1]$$

- Primero vamos a garantizar que $f(x) \in [0,1]$ para todo $x \in [0,1]$.
- Luego, vamos a probar que existe $k < 1$ tal que

$$|f'(x)| \leq k, \quad \text{para todo } x \in (0,1).$$

Iteración de punto fijo

Teorema

Sea $g \in C([a,b])$ tal que $g(x) \in [a,b]$ para toda $x \in [a,b]$. Además supongamos que existe $g' \in (a,b)$ y una constante positiva $k < 1$ tales que

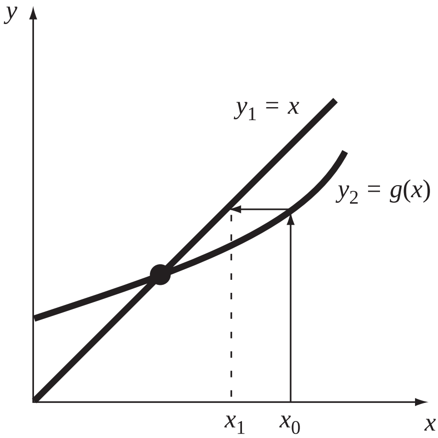
$$|g'(x)| \leq k, \quad \textit{para todo } x \in (a,b) \ .$$

Entonces, para cualquier $p_0 \in [a,b]$, la sucesión definida por

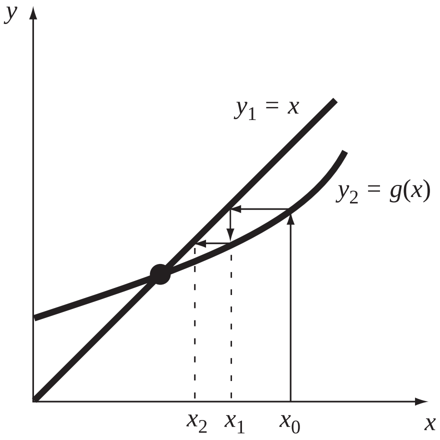
$$p_n = g(p_{n-1}), \quad n \geq 1,$$

converge al único punto fijo $p \in [a,b]$.

Iteración de punto fijo



Iteración de punto fijo



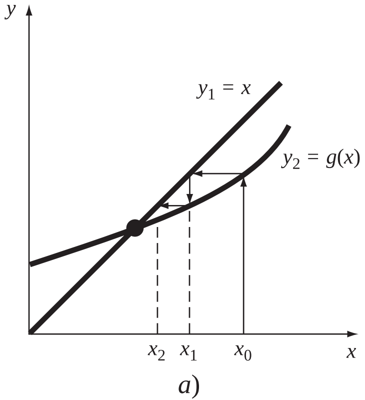


Figura 1: Ejemplos donde la sucesión converge al valor buscado.

Iteración de punto fijo

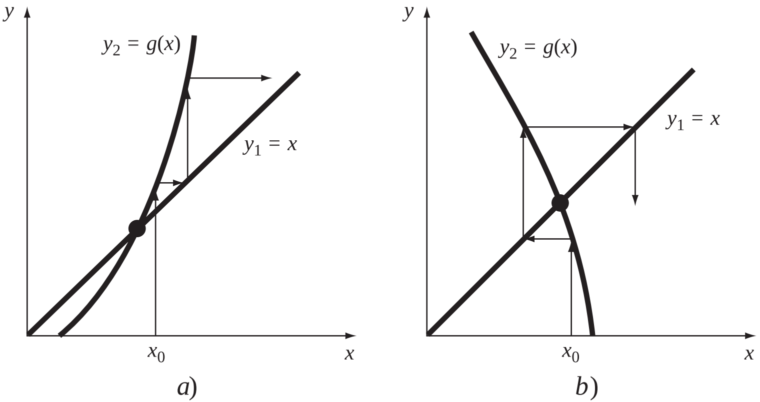


Figura 2: Ejemplos donde la sucesión no converge al valor buscado.

Iteración de punto fijo

La ecuación $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ tiene una raíz única en $[1, 2]$. Es claro que existen diversas maneras de expresar la ecuación anterior en la forma $f(x) = x$, por ejemplo,

$$x = \underbrace{x - x^3 - 4x^2 + 10}_{f_1(x)} .$$

Iteración de punto fijo

Otras maneras de expresar la ecuación inicial, son las siguientes:

b) $x = \left(\frac{10}{x} - 4x\right)^{1/2}$,

c) $x = \frac{1}{2}\left(10 - x^3\right)^{1/2}$,

d) $x = \left(\frac{10}{4+x}\right)^{1/2}$,

e) $x = x - \left(\frac{x^3+4x^2-10}{3x^2+8x}\right)$,

Método de Newton

El método de Newton es uno de los más eficaces métodos numéricos para calcular una aproximación de la raíz de una función. La ventaja de este método en comparación con la iteración de punto fijo está dado principalmente en las condiciones que se pide sobre la función a trabajar.

Método de Newton

Suponamos que $f \in C^2[a,b]$. Definimos $p_0 \in [a,b]$ como una aproximación de la raíz buscada p, tal que $f'(p_0) \neq 0$ y $|p - p_0|$ es lo suficientemente "pequeño". Procedemos a evaluar p en el polinomio de taylor de $f(x)$ expandido alrededor de p_0,

$$f(p) = f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2} f''(\xi(p)),$$

donde $\xi(p)$ es un valor entre p y p_0.

Método de Newton

Ya que por hipótesis inicial $|p - p_0|$ es lo suficientemente "pequeño", esto implica que $|p - p_0|^2$ es un término mucho más pequeño y además $f(p) = 0$, podemos afirmar lo siguiente:

$$0 \approx f(p_0) + (p - p_0)f'(p_0),$$

lo cual, al despejar el valor de p, obtenemos:

$$p \approx p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)} \ .$$

Método de Newton

De esta forma, el método de Newton queda establecido por la siguiente sucesión:

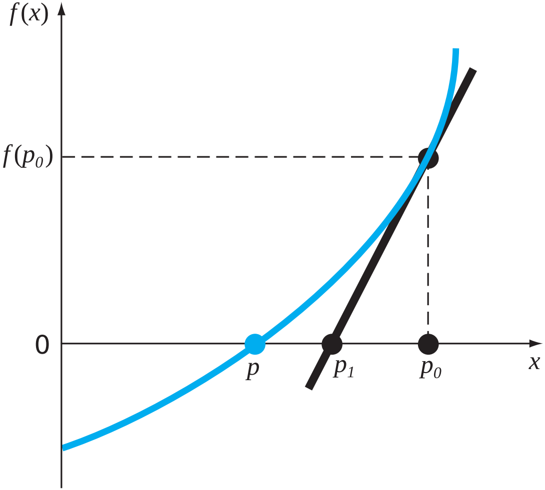
$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad n \geq 1.$$

De esta forma, el método de Newton queda establecido por la siguiente sucesión:

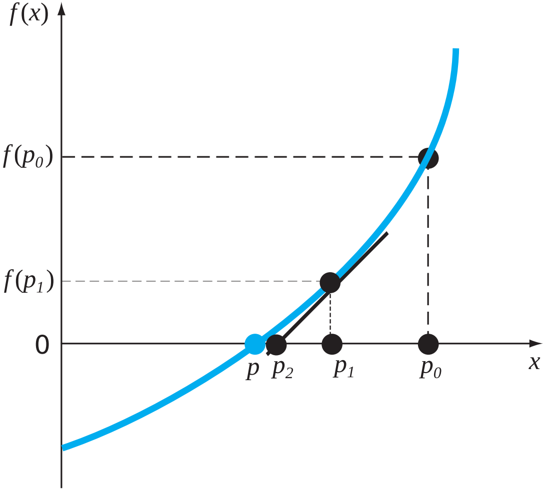
$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \quad n \geq 1.$$

Nota: Es importante resaltar, la importancia de la elección del punto inicial p_0, debido a la condición de que $|p - p_0|$ es lo suficientemente "pequeño".

Método de Newton



Método de Newton



Método de Novo Newton

Ejemplos:

Considere la función $f(x) = \cos(x) - x$. Aproximar la raíz de la función $f(x)$ considerando como punto inicial, el valor de $\pi/4$.

Solución:

La sucesión generada por el método de Newton, viene dada de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}, \\ &= p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{-\sin(p_{n-1}) - 1} \ . \end{aligned}$$

Método de Newton

$$p_0 = \frac{\pi}{4} \approx 0.785398163397448$$

$$p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{-\sin(p_0) - 1} \approx 0.739536133515238$$

$$p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{-\sin(p_1) - 1} \approx 0.739085178106010$$

$$p_3 = p_2 - \frac{f(p_2)}{-\sin(p_2) - 1} \approx 0.739085133215161$$

$$p_4 = p_3 - \frac{f(p_3)}{-\sin(p_3) - 1} \approx 0.739085133215161$$

Para el mismo problema apliquemos el método de punto fijo con la misma condición inicial. Es importante mencionar que al considerar $g(x) = \cos(x) = x$ sobre el intervalo $[0, \pi/4]$, se cumplen las condiciones del teorema de punto fijo.