Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Dr. Manuel Adrian Acuña Zegarra

Introducción

Un sistema de ecuaciones lineales de dos variables puede ser expresado de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2, \end{aligned}$$

donde a_{ij} son los coeficientes y b_i son los términos independientes. Ambos velores son constantes. Asimismo, x y y son las incógnitas a encontrar.

Introducción

En general, un sistema de n ecuaciones lineales con m variables se expresa de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &+ \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &+ \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \quad & \qquad\qquad \vdots & \vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 &+ \cdots + a_{nm}x_m &= b_n
\end{aligned}
$$

Introducción

El sistema anterior se puede también expresar a través de un sistema matricial, el cual tiene la siguiente estructura:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Esta estructura nos será de mucha utilidad al momento de llevar a cabo los distintos métodos a estudiar.

Introducción

Ejemplos:
Expresar los siguientes sistemas en su forma matricial.

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x - y & = & 1 \\ -x + 5y & = & 3 \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{rcl} -3y + 2x - z & = & -11 \\ -x + y + z & = & 2 \\ z + 2x - 5y & = & 1 \end{array}\right.$$

Eliminación gaussiana

El método de eliminación gaussiana consta de dos etapas principales:

1. Eliminación hacia adelante.
2. Sustitución hacia atrás.

Es importante resaltar que este método se puede trabajar sobre el sistema de ecuaciones lineales o sobre su expresión matricial asociada. Sin embargo, para fines del curso vamos a trabajar a través de la expresión matricial.

Eliminación gaussiana

Se denomina matriz extendida a la matriz en la cual también aparecen los términos independientes del sistema lineal. Considerando el ejemplo anterior del sistema de dos variables, se tiene que su matriz extendida asociada es igual a:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & \vdots & 1 \\ -1 & 5 & \vdots & 3 \end{bmatrix}$$

Eliminación gaussiana

Sea el sistema:

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\
0.1x_1 - 0.3x_3 + 7x_2 &= -19.3 \\
10x_3 - 0.2x_2 + 0.3x_1 &= 71.4
\end{aligned}
$$

Eliminación gaussiana

Sea el sistema:

$$
\begin{aligned}
3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 &= 7.85 \\
0.1x_1 - 0.3x_3 + 7x_2 &= -19.3 \\
10x_3 - 0.2x_2 + 0.3x_1 &= 71.4
\end{aligned}
$$

Es claro que su matriz extendida asociada es igual a:

$$
\begin{bmatrix}
3 & -0.1 & -0.2 & \vdots & 7.85 \\
0.1 & 7 & -0.3 & \vdots & -19.3 \\
0.3 & -0.2 & 10 & \vdots & 71.4
\end{bmatrix}
$$

Eliminación gaussiana

El primer paso para aplicar la eliminación gaussiana está dado por la eliminación hacia adelante. El proceso para hacer esto se basa en volver ceros los elementos bajo la diagonal de la matriz principal.

En el ejemplo anterior, lo primero es eliminar el 0.1 y 0.3. Para hacer esto, primero multiplicamos por $-0.1/3$ al primer renglón y se lo sumamos al segundo, obteniendo

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & \vdots & 7.85 \\ 0 & 7.003333 & -0.293333 & \vdots & -19.561667 \\ 0.3 & -0.2 & 10 & \vdots & 71.4 \end{bmatrix}$$

Eliminación gaussiana

En forma análoga eliminamos el valor 0.3, obteniendo

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & \vdots & 7.85 \\ 0 & 7.003333 & -0.293333 & \vdots & -19.561667 \\ 0 & -0.19 & 10.02 & \vdots & 70.615 \end{bmatrix}$$

En este caso, para completar la eliminación hacia adelante nos falta hacer cero el valor -0.19.

$$\begin{bmatrix} 3 & -0.1 & -0.2 & \vdots & 7.85 \\ 0 & 7.003333 & -0.293333 & \vdots & -19.561667 \\ 0 & 0 & 10.012042 & \vdots & 70.084293 \end{bmatrix}$$

Finalmente, tras terminar la eliminación hacia adelante, nos queda aplicar la segunda etapa de la eliminación gaussiana, esto es, sustitución hacia atrás.

Eliminación gaussiana

Ya que el último renglón siempre está asociado a la última variable a encontrar, en nuestro caso, esto sería x_3. Por lo tanto, se sigue que:

$$10.012042x_3 = 70.084293,$$

luego

$$x_3 = 7\ .$$

Del segundo renglón tenemos que:

$$7.003333x_2 - 0.293333x_3 = -19.561667,$$

Eliminación gaussiana

entonces

$$x_2 = \frac{-19.561667 + 0.293333x_3}{7.003333} = -2.500001 \ .$$

Finalmente, del primer renglón se tiene que

$$3x_1 - 0.1x_2 - 0.2x_3 = 7.85,$$

luego

$$x_1 = \frac{7.85 + 0.1x_2 + 0.2x_3}{3} = 3.$$

Eliminación gaussiana

Ejemplo:
Sea el sistema lineal:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + \frac{1}{4}w & = & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z + \frac{1}{5}w & = & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{5}z + \frac{1}{6}w & = & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{5}y + \frac{1}{6}z + \frac{1}{7}w & = & \frac{1}{9} \end{cases}$$

Eliminación gaussiana

Ejemplo:
Sea el sistema lineal:

$$\begin{cases} x - y + 2z - w & = & -8 \\ 2x - 2y + 3z - 3w & = & -20 \\ x + y + z & = & -2 \\ x - y + 4z + 3w & = & 4 \end{cases}$$

Dificultades del método de eliminación

- División entre cero
- Errores de redondeo
- Sistemas mal condicionados

Sistemas mal condicionados

Ejemplos:
Sean los sistemas lineales:

$$\begin{cases} x + 2y &= 10 \\ 1.1x + 2y &= 10.4 \end{cases}, \quad \begin{cases} x + 2y &= 10 \\ 1.05x + 2y &= 10.4 \end{cases}$$

Técnicas para mejorar las soluciones

Pivoteo: La estrategia de pivoteo busca eliminar los casos cuando los elementos pivotes sean cero o muy cercanos a cero. Esta estrategia consiste en que antes de eliminar los elementos bajo el pivote, se determine el elemento más grande (en magnitud) disponible en la columna. Tras lo cual se procede a intercambiar las filas. Esto se conoce como **pivoteo parcial**.

Pivoteo Parcial

Ejemplos: Sean los sistemas lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 0.003x + 59.14y & = & 59.17 \\ 5.291x + 6.13y & = & 46.78 \end{array}\right. , \quad \left\{\begin{array}{rcl} 2y + z + 2w & = & 5 \\ x + z + 3w & = & 5 \\ 3x + y - 4z + 2w = & = & 2 \\ -4x + z + w & = & -2 \end{array}\right.$$