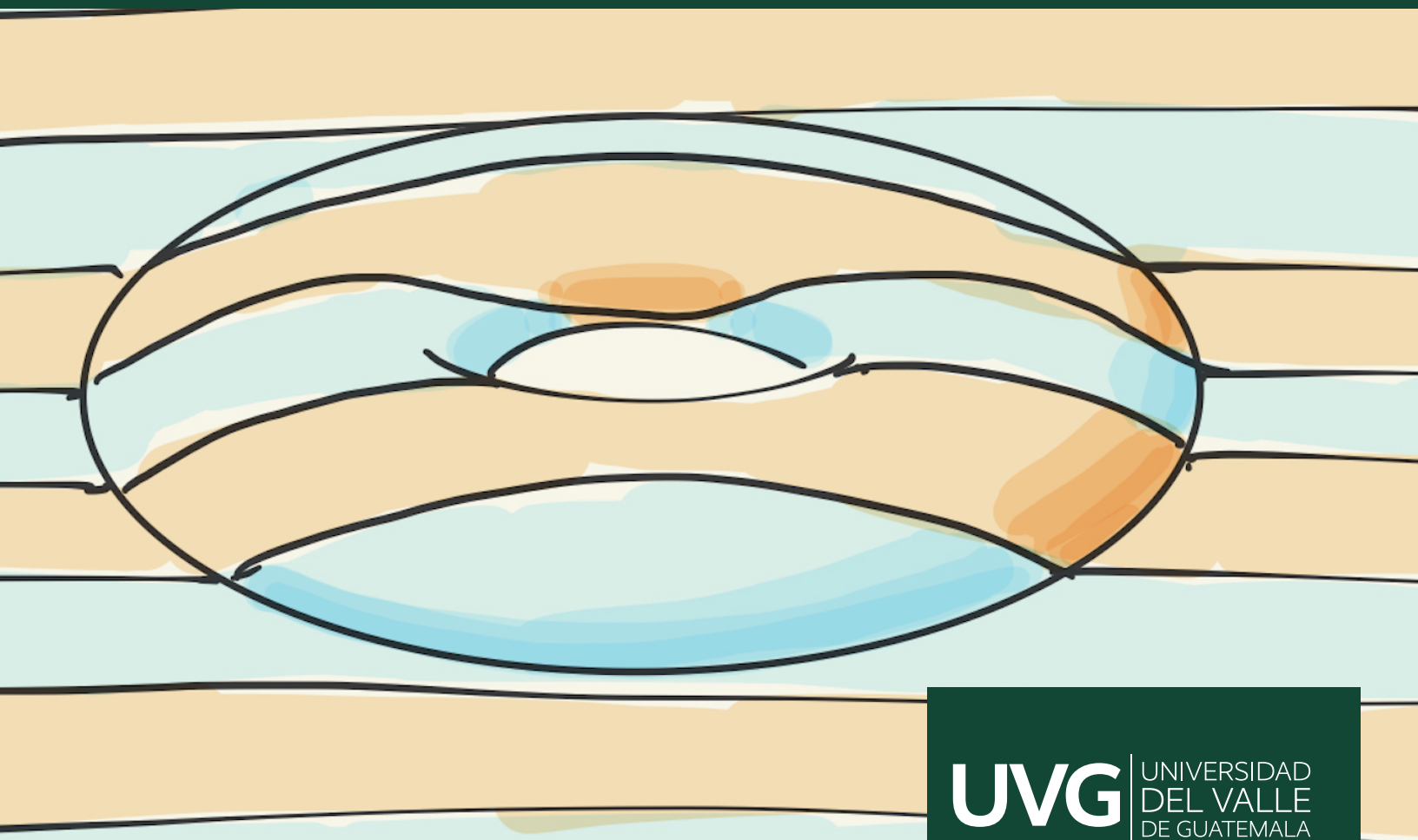

Continuidad de operadores pseudo-diferenciales en el toro

Manuel Alejandro Martínez Flores



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades



Continuidad de operadores pseudo-diferenciales en el
toro

Trabajo de graduación en modalidad de Tesis presentado por
Manuel Alejandro Martínez Flores
Para optar al grado académico de Licenciado en Matemática Aplicada

Guatemala, TODO del 2025

Vo.Bo.:

(f) _____
Dr. Duván Cardona

Tribunal Examinador:

(f) _____
Dr. Duván Cardona

(f) _____
TODO

(f) _____
TODO

Fecha de aprobación: Guatemala, TODO.

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Cras vitae eleifend ipsum, ut mattis nunc. Pellentesque ac hendrerit lacus. Cras sollicitudin eget sem nec luctus. Vivamus aliquet lorem id elit venenatis pellentesque. Nam id orci iaculis, rutrum ipsum vel, porttitor magna. Etiam molestie vel elit sed suscipit. Proin dui risus, scelerisque porttitor cursus ac, tempor eget turpis. Aliquam ultricies congue ligula ac ornare. Duis id purus eu ex pharetra feugiat. Vivamus ac orci arcu. Nulla id diam quis erat rhoncus hendrerit. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Sed vulputate, metus vel efficitur fringilla, orci ex ultricies augue, sit amet rhoncus ex purus ut massa. Nam pharetra ipsum consequat est blandit, sed commodo nunc scelerisque. Maecenas ut suscipit libero. Sed vel euismod tellus.

Proin elit tellus, finibus et metus et, vestibulum ullamcorper est. Nulla viverra nisl id libero sodales, a porttitor est congue. Maecenas semper, felis ut rhoncus cursus, leo magna convallis ligula, at vehicula neque quam at ipsum. Integer commodo mattis eros sit amet tristique. Cras eu maximus arcu. Morbi condimentum dignissim enim non hendrerit. Sed molestie erat sit amet porttitor sagittis. Maecenas porttitor tincidunt erat, ac lacinia lacus sodales faucibus. Integer nec laoreet massa. Proin a arcu lorem. Donec at tincidunt arcu, et sodales neque. Morbi rhoncus, ligula porta lobortis faucibus, magna diam aliquet felis, nec ultrices metus turpis et libero. Integer efficitur erat dolor, quis iaculis metus dignissim eu.

Prefacio	III
Resumen	VI
1. Introducción	1
2. Objetivos	3
2.1. Objetivo General	3
2.2. Objetivos Específicos	3
3. Justificación	4
4. Antecedentes	5
5. Preliminares	6
5.1. Espacios de Lebesgue en \mathbb{R}^n y \mathbb{T}^n	6
5.2. Transformada de Fourier en \mathbb{R}^n	15
5.3. Transformada de Fourier en \mathbb{T}^n	18
5.4. Distribuciones y espacios de Sobolev en \mathbb{R}^n	22
5.5. Distribuciones y espacios de Sobolev en \mathbb{T}^n	25
5.6. Espacios de Hardy en \mathbb{R}^n y \mathbb{T}^n	27
6. Operadores pseudo-diferenciales	44
6.1. Definición y propiedades básicas en \mathbb{R}^n	44
6.2. Definición y propiedades básicas en \mathbb{T}^n	47
7. Continuidad de operadores pseudo-diferenciales	57
7.1. Continuidad en espacios de Lebesgue	57
7.2. Continuidad en espacios de Sobolev	68
Bibliografía	72

Este trabajo presenta un estudio sistemático de la continuidad de operadores pseudo-diferenciales en el toro \mathbb{T}^n , abordando el problema de acotación en espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{T}^n)$ y de Sobolev $W_p^s(\mathbb{T}^n)$. Siguiendo el enfoque global desarrollado por Ruzhansky, Turunen y Vainikko, se analizan operadores con símbolos en clases de Hörmander $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, estableciendo condiciones óptimas sobre los parámetros m , ρ y δ que garantizan la continuidad de estos operadores. Se demuestran resultados clave que incluyen extensiones toroidales de teoremas clásicos de Calderón-Vaillancourt, Fefferman, y resultados recientes de Delgado y los obtenidos con Cardona, utilizando técnicas de análisis armónico, interpolación compleja y estimaciones de núcleos integrales. El trabajo proporciona una referencia completa en español sobre el tema, destacando las diferencias fundamentales entre el caso toroidal y el euclidiano, particularmente en lo concerniente a la estructura discreta del espacio de frecuencias \mathbb{Z}^n .

Abstract

This work presents a systematic study of the continuity of pseudo-differential operators on the torus \mathbb{T}^n , addressing the boundedness problem in Lebesgue spaces $L^p(\mathbb{T}^n)$ and Sobolev spaces $W_p^s(\mathbb{T}^n)$. Following the global approach developed by Ruzhansky, Turunen, and Vainikko, we analyze operators with symbols in Hörmander classes $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, establishing optimal conditions on the parameters m , ρ , and δ that guarantee the continuity of these operators. We prove key results including toroidal extensions of classical theorems by Calderón-Vaillancourt and Fefferman, as well as recent results by Delgado and the ones obtained with Cardona, using techniques from harmonic analysis, complex interpolation, and integral kernel estimates. The work provides a comprehensive reference in Spanish on the subject, highlighting fundamental differences between the toroidal and Euclidean cases, particularly concerning the discrete structure of the frequency space \mathbb{Z}^n .

El estudio de los operadores pseudo-diferenciales constituye una de las piedras angulares del análisis moderno, con aplicaciones profundas en la teoría de ecuaciones diferenciales parciales, el análisis armónico y la teoría espectral. Estos operadores generalizan tanto a los operadores diferenciales como a los multiplicadores de Fourier, permitiendo un tratamiento unificado de problemas que involucran no solo la regularidad de soluciones, sino también la acotación en diversos espacios funcionales. En el caso euclidiano, la teoría está bien establecida gracias a los trabajos fundacionales de Calderón, Zygmund, Hörmander y Fefferman, entre otros. Sin embargo, el estudio de estos operadores en variedades compactas, como el toro $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$, presenta desafíos particulares debido a la estructura discreta de su espacio de frecuencias y a la necesidad de desarrollar herramientas adaptadas a este contexto.

En el toro, el cálculo pseudo-diferencial puede abordarse de dos maneras: mediante una formulación local, tratando al toro como una variedad y utilizando particiones de la unidad, o mediante una definición global, aprovechando la estructura de grupo subyacente. Este trabajo se centra en este último enfoque, siguiendo el marco desarrollado por Ruzhansky, Turunen y Vainikko, que permite definir operadores pseudo-diferenciales toroidales a través de series de Fourier discretas. Esta perspectiva no solo es natural para el toro, sino que también facilita el estudio de propiedades de acotación en espacios de Lebesgue $L^p(\mathbb{T}^n)$ y de Sobolev $W_p^s(\mathbb{T}^n)$, entre otros.

Uno de los problemas centrales en la teoría es determinar bajo qué condiciones un operador pseudo-diferencial T_a , definido por un símbolo $a(x, \xi)$ en una clase de Hörmander $S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, se extiende a un operador acotado entre espacios de funciones. Resultados clásicos, como los de Calderón-Vaillancourt para $L^2(\mathbb{R}^n)$ o los de Fefferman para $L^p(\mathbb{R}^n)$, han establecido cotas que dependen críticamente de los parámetros m, ρ, δ del símbolo. En el caso toroidal, aunque muchos de estos resultados tienen análogos, las demostraciones requieren ajustes sustanciales debido a la naturaleza discreta del espacio de frecuencias \mathbb{Z}^n y a la falta de invarianza bajo cambios de coordenadas cuando $\rho > 1 - \delta$.

Este trabajo tiene como objetivo revisar y exponer de manera sistemática los resultados de continuidad de operadores pseudo-diferenciales en el toro, haciendo especial hincapié en las técnicas de demostración y en las diferencias con el caso euclidiano. Se abordarán tanto resultados clásicos como contribuciones recientes, incluyendo los teoremas de Delgado para $L^p(\mathbb{T}^n)$ con $p \geq 2$ y las extensiones de Álvarez-Hounie realizadas con Cardona para el rango completo $1 < p < \infty$.

La exposición se estructura en tres capítulos principales. Inicialmente, se presentan los preliminares necesarios sobre espacios de funciones, transformadas de Fourier y distribuciones en \mathbb{R}^n y \mathbb{T}^n . Además, se incluyen resultados clásicos de análisis armónico, como el hecho que el espacio BMO es el dual del espacio de Hardy H^1 y técnicas de interpolación compleja que permiten extender propiedades de continuidad a espacios L^p con $1 < p < \infty$. Luego, se introduce la definición y propiedades

básicas de los operadores pseudo-diferenciales en ambos contextos, destacando las particularidades del cálculo toroidal, como el uso de operadores de diferencia discreta en lugar de derivadas convencionales. Finalmente, se dedican dos capítulos a demostrar los principales resultados de continuidad en espacios de Lebesgue y de Sobolev, utilizando técnicas que incluyen interpolación, descomposiciones atómicas y estimaciones de núcleos integrales.

Cabe destacar que, a diferencia del caso euclidiano, las clases H^1 y BMO no son estables bajo la multiplicación de funciones test en el toro, lo que imposibilita tratar este espacio simplemente como una variedad mediante particiones de la unidad. Esta limitación justifica el estudio independiente del caso toroidal y la necesidad de desarrollar herramientas específicas para este contexto. Asimismo, los operadores pseudo-diferenciales con símbolos en las clases de Hörmander no son estables bajo cambios de coordenadas cuando $\rho > 1 - \delta$, lo que refuerza la relevancia de un tratamiento global mediante la transformada de Fourier discreta.

Con este trabajo, se espera proporcionar una referencia accesible y rigurosa que contribuya a la divulgación de estos temas en español y fomente futuras investigaciones en el área. La escasez de literatura en español sobre operadores pseudo-diferenciales representa una barrera significativa para estudiantes e investigadores hispanohablantes, limitando su acceso a herramientas avanzadas y reduciendo las oportunidades de formación especializada. Esta exposición busca reducir esta brecha, permitiendo el acceso a conceptos avanzados y contribuyendo a fortalecer la comunidad matemática en español.

2.1. Objetivo General

Revisar y exponer los conceptos fundamentales en el estudio de operadores pseudo-diferenciales, detallando teoremas y demostraciones importantes para su entendimiento e investigación.

2.2. Objetivos Específicos

- Definir y explicar los conceptos clave para el estudio de operadores pseudo-diferenciales
- Desarrollar con rigor matemático las bases teóricas de los operadores pseudo-diferenciales
- Introducir de forma accesible al estado del arte en la investigación de operadores pseudo-diferenciales

El estudio de los operadores pseudo-diferenciales es esencial en el análisis moderno, con aplicaciones clave en ecuaciones diferenciales parciales (EDP), análisis armónico y teoría espectral. Sin embargo, la falta de recursos en español sobre el tema representa una barrera significativa para estudiantes e investigadores hispanohablantes, limitando su acceso a herramientas avanzadas y reduciendo las oportunidades de formación especializada. Esta carencia no solo dificulta el aprendizaje autónomo, sino que también desincentiva la investigación en áreas teóricas y aplicadas donde estos operadores son fundamentales, como el análisis de regularidad de soluciones de EDP's. Este trabajo busca reducir esta brecha, proporcionando una exposición clara y rigurosa de los operadores pseudo-diferenciales en el toro y sus propiedades de continuidad. Permitiendo así, el acceso a conceptos avanzados y contribuyendo a fortalecer la comunidad matemática en español, promoviendo la investigación y la innovación en un campo con amplias proyecciones teóricas y aplicadas.

En el caso euclidiano, Calderón y Vaillancourt demostraron que los operadores pseudo-diferenciales con símbolos en la clase $S_{\rho,\rho}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ son acotados en $L^2(\mathbb{R}^n)$ para algún $0 \leq \rho < 1$, véase [4, 5]. Este resultado no puede extenderse cuando $\rho = 1$, es decir, existen símbolos en $S_{1,1}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ cuyos operadores pseudo-diferenciales asociados no son acotados en L^2 ; para un argumento clásico de este hecho debido a Hörmander, consúltese [11]. Además, Fefferman [13] probó la acotación $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ -BMO(\mathbb{R}^n) para operadores pseudo-diferenciales con símbolos en la clase $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, con $m = -n(1-\rho)/2$ donde $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Fefferman también obtuvo la acotación en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para estas clases cuando $m \leq -n(1-\rho)|1/p - 1/2|$ y $1 < p < \infty$. En vista de ejemplos clásicos debidos a Wainger y Hirschman, el resultado de Fefferman es óptimo para multiplicadores de Fourier. Cabe destacar que el desarrollo histórico del problema de la acotación en L^p de operadores pseudo-diferenciales ha sido discutido en \mathbb{R}^n , por ejemplo, en [19, 25].

Los operadores pseudo-diferenciales con símbolos en las clases de Hörmander pueden definirse en variedades C^∞ mediante cartas locales. Por ello, se considera el toro $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ como un grupo aditivo cociente y una n -variedad, con el atlas preferido de sistemas de coordenadas dado por la aplicación de restricción $x \mapsto x + \mathbb{Z}^n$ en conjuntos abiertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, véase McLane [17]. Se nota que en [1], Agranovich proporciona una definición global de operadores pseudo-diferenciales en el círculo $\mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^1$, en lugar de la formulación local que trata al círculo como una variedad. Mediante la transformada de Fourier, esta definición se extendió al toro \mathbb{T}^n . Además, se ha demostrado que las clases (ρ, δ) de Agranovich y Hörmander son equivalentes, gracias al teorema de equivalencia de McLane [17]. En este trabajo, se consideran operadores pseudo-diferenciales toroidales en el contexto del cálculo pseudo-diferencial en el toro desarrollado por Ruzhansky, Turunen y Vainniko [20, 21]. Asimismo, cotas L^p en el círculo que pueden extenderse al toro se encuentran en [26], en el marco clásico de la teoría de Calderón-Zygmund. Por otro lado, el análogo toroidal del resultado de Fefferman fue probado por Delgado en [10] para el toro, aunque aún se requiere que $\delta < \rho$. Se nota que, para $0 \leq \delta < 1$ y $0 < \rho \leq 1$, Álvarez y Hounie [2] probaron la acotación $L^p(\mathbb{R}^n)$ - $L^q(\mathbb{R}^n)$ de operadores pseudo-diferenciales cuando $p \leq q$, incluso con $\delta \geq \rho$. Este resultado fue extendido al caso toroidal en [9]. Para otros trabajos sobre acotación L^p de operadores pseudo-diferenciales, se remite al lector a [7, 18, 22].

En este capítulo se revisarán aspectos básicos del análisis armónico en \mathbb{R}^n y \mathbb{T}^n . Se recuerda que \mathbb{R}^n es un grupo aditivo respecto a la suma usual de vectores con subgrupo aditivo \mathbb{Z}^n . Entonces, se define al toro n -dimensional como el grupo cociente $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$. Además, el toro puede ser identificado con el conjunto $[0, 1)^n$ y se le puede considerar con la topología cociente. A lo largo de este trabajo, se fijará la medida de Lebesgue en \mathbb{R}^n . Para cualquier punto $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se denotará la norma euclídeana como

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

Sin embargo, podría ser problemático considerar potencias negativas de la norma euclídeana, debido a que se desvanece en cero. Por lo que se considerará una función que se comporta asintóticamente similar, pero no presenta el mismo problema

$$\langle x \rangle := \sqrt{1 + |x|^2}.$$

Si se tiene que existe una constante $C > 0$ tal que $A \leq CB$, se dice que $A \lesssim B$. Si además, C depende de algún parámetro α , se denota $A \lesssim_\alpha B$.

5.1. Espacios de Lebesgue en \mathbb{R}^n y \mathbb{T}^n

Sea Ω un subconjunto medible de \mathbb{R}^n . Por simplicidad, se supondrá que Ω es abierto o cerrado.

Definición 5.1.1. Dado $1 \leq p < \infty$. Se dice que una función medible $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ se encuentra en $L^p(\Omega)$ si su norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

es finita. Para el caso $p = \infty$, se dice que $f \in L^\infty(\Omega)$ si es esencialmente acotada. Es decir, si

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty,$$

donde $\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)|$ se define como el menor número real M tal que es mayor que $|f(x)|$ casi para todo $x \in \Omega$, i.e. excepto fuera de un conjunto de medida cero.

Cabe destacar que en realidad los elementos de los espacios $L^p(\Omega)$ son clases de equivalencias de funciones iguales casi en todo $x \in \Omega$. Sin embargo, es un detalle técnico menor y se acostumbra a tratarlos como funciones. Además, cuando Ω sea claro por el contexto, simplemente se denotará $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ como $\|\cdot\|_{L^p}$. Ahora, se discutirán propiedades importantes de los espacios de Lebesgue.

Proposición 5.1.2 (Desigualdad de Young). *Sean $1 < p, q < \infty$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces para todos $a, b > 0$, se tiene que*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Como consecuencia, para $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, se tiene que $fg \in L^1(\Omega)$ y

$$\|fg\|_{L^1} \leq \frac{1}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q}\|g\|_{L^q}^q.$$

Demostración. Esto es consecuencia del hecho que $x \mapsto e^x$ es una función convexa. Entonces

$$ab = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{1}{p} \ln a^p + \frac{1}{q} \ln b^q} \leq \frac{1}{p} e^{\ln a^p} + \frac{1}{q} e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Completando así la prueba. \square

Particularmente cuando $p = 2 = q$, se tiene la conocida como desigualdad de Cauchy.

Proposición 5.1.3 (Desigualdad de Hölder). *Sean $1 \leq p, q \leq \infty$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, para $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, se tiene que $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Demostración. Para el caso $p = 1$ o $p = \infty$, el resultado es trivial. Así que se considerará el caso $1 < p < \infty$, que es una aplicación de la proposición anterior. Primero, se supone que $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. Entonces, se tiene que

$$\|fg\|_{L^1} \leq \frac{1}{p}\|f\|_{L^p} + \frac{1}{q}\|g\|_{L^q} = 1.$$

Ahora, se nota que si $\|f\|_{L^p}$ o $\|g\|_{L^q}$ se anulan, entonces se trivializa la desigualdad. Por lo que se puede considerar el caso más general en el que ninguna de las normas se anula de la siguiente manera

$$\left\| \frac{f}{\|f\|_{L^p}} \frac{g}{\|g\|_{L^q}} \right\|_{L^1} \leq 1.$$

El resultado sigue de la linealidad de la norma L^1 . \square

En el caso $p = 2 = q$ se obtiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Proposición 5.1.4 (Desigualdad de Minkowski). *Dado $1 \leq p \leq \infty$, sean $f, g \in L^p(\Omega)$. Entonces se tiene que*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Particularmente, $\|\cdot\|_{L^p}$ satisface la desigualdad triangular y $L^p(\Omega)$ es un espacio normado.

Demostración. Para $p = 1$ o $p = \infty$ el resultado se obtiene gracias a la desigualdad triangular del módulo en los números complejos. Ahora, para $1 < p < \infty$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{L^p}^p &\leq \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} (|f| + |g|) dx \\ &= \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |f| dx + \int_{\Omega} |f + g|^{p-1} |g| dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |f + g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_{\Omega} |f|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_{\Omega} |g|^p dx \right)^{1/p} \right] \\ &= \|f + g\|_{L^p}^{p-1} (\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}). \end{aligned}$$

Aquí, la primera desigualdad es la desigualdad triangular de los números complejos y la segunda es la desigualdad de Hölder, por lo que se concluye lo deseado. \square

Ahora se introducen dos resultados importantes y de bastante utilidad. Sin embargo, sus demostraciones requieren de herramientas de teoría de la medida o del análisis complejo que se encuentran fuera del alcance de este trabajo. Por lo que simplemente se enuncian y se recomienda al lector investigar los detalles.

Proposición 5.1.5 (Monotonía de la norma L^p). *Sea $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ y sea $1 \leq p \leq \infty$. Se supone que $f(\cdot, y) \in L^p(\Omega_1)$ para casi todo y , y que $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_{L^p}$ se encuentra en $L^1(\Omega_2)$. Entonces $f(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2)$ para casi todo x , la función $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y) dy$ se encuentra en $L^p(\Omega_1)$, y*

$$\left\| \int_{\Omega_2} f(\cdot, y) dy \right\|_{L^p(\Omega_1)} \leq \int_{\Omega_2} \|f(\cdot, y)\|_{L^p(\Omega_1)} dy.$$

A continuación se presenta un resultado clásico de la interpolación de operadores y espacios de funciones. Para una discusión más profunda de estas técnicas, se recomienda revisar Bergh y Löfstrom [3].

Teorema 5.1.6 (Interpolación de Riesz-Thorin). *Sea $T : L^{p_0}(\Omega) + L^{p_1}(\Omega) \rightarrow L^{q_0}(\Omega) + L^{q_1}(\Omega)$ un operador lineal tal que*

$$\|Tf\|_{L^{q_0}} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}}, \quad \|Tf\|_{L^{q_1}} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}}.$$

Para cualquier $0 < \theta < 1$, se definen

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Entonces, T extiende a un operador continuo de $L^{p_\theta}(\Omega)$ en $L^{q_\theta}(\Omega)$. Además,

$$\|Tf\|_{L^{q_\theta}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^{p_\theta}}.$$

Se continúa con el programa de definiciones y propiedades en los espacios de Lebesgue.

Definición 5.1.7 (Convoluciones). Para funciones $f, g \in L^1(\Omega)$ se define su convolución como

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) dy.$$

Se puede notar que el cambio de variable $y \mapsto x-u$ implica la conmutatividad, es decir $f * g = g * f$.

Nota 5.1.8. En la definición anterior existe la pregunta sobre la convergencia de la integral. Para definir la convolución de forma rigurosa, se podría definir primero para funciones que cumplan condiciones de regularidad más fuertes, como las del espacio de Schwartz que se definirá en la siguiente sección, para luego definir el operador $*$: $L^1 \times L^1 \rightarrow L^1$ que estaría bien definido gracias a la siguiente propiedad.

Proposición 5.1.9 (Desigualdad de Young para convoluciones). *Sean $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, y sean $f \in L^p(\Omega)$, $g \in L^q(\Omega)$. Entonces se tiene que*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Demostración. Se nota que gracias al teorema 5.1.6 es suficiente demostrar

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}, \quad \|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^t}, \quad (5.1.1)$$

para $\frac{1}{t} + \frac{1}{p} = 1$. En efecto, bastaría con considerar el operador $f * \cdot$, los parametros

$$p_0 = 1, \quad p_1 = t, \quad q_0 = p, \quad q_1 = \infty.$$

y $\|f\|_{L^p}$ como ambas constantes de estimación. Al aplicar la interpolación

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{\infty}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{t},$$

se obtiene la condición indicada para los parametros p, q, r . Ahora, se procede a demostrar el primer estimativo de (5.1.1). Este se obtiene como resultado de la monotonía de la norma L^p , véase la proposición 5.1.5. En efecto,

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^p} &= \left\| \int_{\Omega} f(\cdot - y)g(y) \, dy \right\|_{L^p} \\ &\leq \int_{\Omega} \|f(\cdot - y)\|_{L^p} |g(y)| \, dy \\ &\leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Por otra parte, el segundo estimativo es resultado de la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^\infty} &\leq \int_{\Omega} |f(x - y)| |g(y)| \, dy \\ &\leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^t}. \end{aligned}$$

Concluyendo con el resultado deseado. \square

Proposición 5.1.10 (Definición alternativa de la norma L^p). *Para $f \in L^p(\Omega)$, se tiene que para $1 \leq p < \infty$,*

$$p \int_0^\infty t^{p-1} a_f(t) \, dt = \int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx.$$

con $a_f(t) = |\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}|$

Demostración. Basta con notar que para cualquier función diferenciable $\phi(t)$ con $\phi(0) = 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \phi(|f(x)|) \, dx &= \int_{\Omega} \int_0^{|f(x)|} \phi'(t) \, dt \, dx \\ &= \int_0^\infty \phi'(t) \int_{|f(x)| > t} dx \, dt \\ &= \int_0^\infty \phi'(t) |\{x \in \Omega : |f(x)| > t\}| \, dt. \end{aligned}$$

Ahora, el resultado se obtiene cuando $\phi(t) = t^p$. \square

Se continua con un resultado importante sobre convergencia en espacios L^p

Teorema 5.1.11 (Convergencia dominada de Lebesgue). *Sea $(f_k)_{k=1}^\infty$ una secuencia de funciones medibles en Ω tales que convergen puntualmente a f para casi todo $x \in \Omega$. Se supone que existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_k| \leq g$ para todo k . Entonces f es integrable y*

$$\int_{\Omega} f \, dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_k \, dx.$$

Nota 5.1.12. Una implicación del resultado anterior es el hecho que los espacios L^p son completos, y por consecuencia son espacios de Banach. Particularmente, el espacio L^2 es un espacio de Hilbert con producto interno dado por

$$\langle f, g \rangle_{L^2} := \int_{\Omega} f \bar{g} \, dx,$$

donde \bar{z} es el conjugado en los números complejos.

Teorema 5.1.13. *Las funciones continuas son densas en el espacio $L^p(\Omega)$.*

Demostración. Basta con demostrarlo para una función simple χ_E , donde E es un conjunto medible. Por definición de medida de Lebesgue $|E| = \inf\{\sum |I_k| : E \subset \bigcup I_k\}$, donde los I_k son cubos abiertos. Entonces, siempre existe un abierto U , tal que $|U \setminus E| < \varepsilon$. Ahora, se toma una sucesión de funciones suaves ϕ_n , tal que $\phi_n(0) = 1$, que $\phi_n(t) = 0$, para $t > 1/n$. Entonces, se define $\Phi_n(x) := \phi_n(d(x, U))$, donde se toma la distancia al abierto U . Por lo que

$$\|\Phi_n - \chi_E\|_{L^p} \leq \|\chi_{U_n} - \chi_E\|_{L^p} = \|\chi_{U_n \setminus U} - \chi_{U \setminus E}\|_{L^p} \leq \|\chi_{U_n \setminus U}\|_{L^p} + \varepsilon,$$

donde U_n es el soporte de Φ_n , que se puede ver decrece a U . La prueba se completa por convergencia dominada. \square

Se presenta la versión local de los espacios de Lebesgue. Para ello se necesita el siguiente espacio de funciones.

Definición 5.1.14 (Funciones suaves de soporte compacto). Se dice que $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es suave si es de clase C^∞ , o infinitamente diferenciable. Se define su soporte como

$$\text{supp } \varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Si $\text{supp } \varphi$ es compacto, se dice que $f \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definición 5.1.15 (Localización de espacios de Lebesgue). Se dice que una función medible $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ es localmente integrable o pertenece a $L_{loc}^p(\Omega)$, con $1 \leq p \leq \infty$ si

$$\|f\varphi\|_{L^p} < \infty,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

A continuación, se presenta un resultado de interpolación bastante útil.

Definición 5.1.16. Sea T un operador desde $L^p(\Omega)$ al espacio de funciones medibles desde Σ hacia \mathbb{C} . Entonces, se dice que T es de tipo (p, q) débil, con $q < \infty$, si se tiene que

$$|\{x \in \Sigma : |Tf(x)| > \lambda\}| \lesssim \left(\frac{\|f\|_{L^p}}{\lambda} \right)^q.$$

Además, se dice que es de tipo débil $(p, q = \infty)$ o tipo fuerte (p, q) , si es acotado desde $L^p(\Omega)$ hacia $L^q(\Sigma)$.

Teorema 5.1.17. Sea $\{T_t\}$ una familia de operadores en $L^p(\Omega)$, y se define su operador maximal asociado

$$T_*f(x) = \sup_t |T_tf(x)|.$$

Si T_* es de tipo (p, q) débil, entonces se tiene que los conjuntos

$$\left\{ f \in L^p : \lim_{t \rightarrow t_0} T_tf(x) = f(x) \text{ casi en todas partes} \right\},$$

$$\left\{ f \in L^p : \lim_{t \rightarrow t_0} T_tf(x) = 0 \text{ casi en todas partes} \right\},$$

son cerrados.

Demostración. Sea (f_n) una sucesión de funciones que converge a $f \in L^p$. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} |\{\limsup_{t \rightarrow t_0} |T_tf(x) - f(x)| > \lambda\}| &\leq |\{\limsup_{t \rightarrow t_0} |T_t(f - f_n)(x) - (f - f_n)(x)| > \lambda\}| \\ &\leq |\{T_*(f - f_n)(x) > \lambda/2\}| + |\{(f - f_n)(x)| > \lambda/2\}| \\ &\leq \left(\frac{C2}{\lambda} \|f - f_n\|_{L^p} \right)^q + \left(\frac{2}{\lambda} \|f - f_n\|_{L^p} \right)^q \rightarrow 0, \end{aligned}$$

cuando $n \rightarrow \infty$. Lo que completa la prueba del primer conjunto, para el segundo, se utiliza un argumento similar con $\{\limsup_{t \rightarrow t_0} |T_tf(x)| > \lambda\}$. \square

Teorema 5.1.18 (Interpolación de Marcinkiewicz). Sean $1 \leq p_0 < p_1 \leq \infty$, y $1 \leq q_0 < q_1 \leq \infty$, tales que $p_j < q_j$. Y sea T un operador sublineal desde $L^{p_0}(\Omega) + L^{p_1}(\Omega)$ hacia las funciones medibles en Σ , es decir

$$\begin{aligned} |T(f+g)(x)| &\leq |Tf(x)| + |Tg(x)|, \\ |T(\lambda f)(x)| &= |\lambda| |Tf(x)|. \end{aligned}$$

Además, suponga que T es de tipo débil (p_0, q_0) y (p_1, q_1) . Entonces, se tiene que T es de tipo fuerte (p, q) para $p_0 < p < p_1$, $q_0 < q < q_1$, y $p \leq q$, con la forma

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Demostración. Sea $f \in L^p$, y sea χ la función indicadora para puntos que satisfacen $|f| > \sigma \lambda^\gamma$, donde σ es una constante que se escoge luego, y

$$\gamma = \frac{(q_1 - q_0)p_0p_1}{(p_1 - p_2)q_0q_1}.$$

Entonces, se descompone

$$f = f\chi + f(1-\chi) =: f_0 + f_1,$$

donde se puede ver que $f_j \in L^{p_j}$. Además,

$$|Tf(x)| \leq |Tf_0(x)| + |Tf_1(x)|,$$

$$a_{Tf}(\lambda) \leq a_{Tf_0}(\lambda/2) + a_{Tf_1}(\lambda/2).$$

(Caso: $p_1 < \infty$) Entonces se tienen las desigualdades

$$a_{Tf_j}(\lambda/2) \leq \left(\frac{2A_j}{\lambda} \|f\|_{L^{p_j}} \right)^{q_j}.$$

Además, se define Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{L^q}^q &= q \int_0^\infty \lambda^{q-1} a_{Tf}(\lambda) d\lambda \\ &\leq \sum_j q \int_0^\infty \lambda^{q-1} a_{Tf_j}(\lambda/2) d\lambda \\ &\leq \sum_j q \int_0^\infty \lambda^{q-1-q_j} (2A_j)^{q_j} \left(\int_\Omega |f_j(x)|^{p_j} dx \right)^{q_j/p_j} d\lambda \\ &\leq \sum_j q \int_0^\infty \lambda^{q-1-q_j} (2A_j)^{q_j} \int_\Omega |f_j(x)|^{q_j} dx d\lambda \\ &\leq q \int_0^\infty \lambda^{q-1-q_0} (2A_0)^{q_0} \int_{|f|>\sigma\lambda^\gamma} |f(x)|^{q_0} dx d\lambda \\ &\quad + q \int_0^\infty \lambda^{q-1-q_1} (2A_1)^{q_1} \int_{|f|>\sigma\lambda^\gamma} |f(x)|^{q_1} dx d\lambda \\ &= q(2A_0)^{q_0} \int_\Omega |f(x)|^{q_0} \int_0^{(|f|/\sigma)^{1/\gamma}} \lambda^{q-1-q_0} d\lambda dx \\ &\quad + q(2A_1)^{q_1} \int_\Omega |f(x)|^{q_1} \int_{(|f|/\sigma)^{1/\gamma}}^\infty \lambda^{q-1-q_1} d\lambda dx \\ &= \frac{q(2A_0)^{q_0} \sigma^{q_0-p}}{q-q_0} \int_\Omega |f(x)|^q dx + \frac{q(2A_1)^{q_1} \sigma^{q_1-p}}{q_1-q} \int_\Omega |f(x)|^p dx \\ &= \left(\frac{q(2A_0)^{q_0} \sigma^{q_0-p}}{q-q_0} + \frac{q(2A_1)^{q_1} \sigma^{q_1-p}}{q_1-q} \right) \|f\|_{L^p}^p. \end{aligned}$$

Ahora, se escoge $\sigma = \frac{1}{2} A_0^{\frac{q_0}{q_1 - q_0}} A_1^{\frac{q_1}{q_0 - q_1}}$, para obtener una cota que dependa solo de A_0, A_1 y p, q . Particularmente, cuando $p_j = q_j$

$$\|Tf\|_{L^p} \leq 2p^{1/p} \left(\frac{1}{p - p_0} + \frac{1}{p_1 - p} \right)^{1/p} A_0^{1-\theta} A_1^\theta \|f\|_{L^p}, \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}. \quad (5.1.2)$$

(Caso $q_1 = \infty$) Es similar al caso anterior, pero solo con una desigualdad débil. En efecto

$$\|Tf\|_{L^q}^q \leq \frac{q(2A_0)^{q_0} \sigma^{q_0 - p}}{q - q_0} \|f\|_{L^p}^p,$$

particularmente, si $p_j = q_j$, se escoge $\sigma = (2A_1)^{-1}$, donde $\|Tg\|_{L^\infty} \leq A_1 \|g\|_{L^\infty}$, se obtiene (5.1.2). Lo que completa la prueba. \square

Ahora, se presenta un resultado de descomposición que fue demostrado por Calderón y Zygmund [6].

Definición 5.1.19 (Cubos diádicos). En \mathbb{R}^n , se define a \mathcal{Q}_k como la colección de cubos abiertos por la derecha, cuyos vértices son puntos adyacentes del retículo $(2^{-k}\mathbb{Z})^n$. Entonces, se les llama *cubos diádicos* a los elementos de $\bigcup_k \mathcal{Q}_k$.

Nota 5.1.20. Esta definición también puede aplicar para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, al tomar la colección $\mathcal{Q}'_k := \{Q \cap \Omega : Q \in \mathcal{Q}_k\}$. Además, se tiene que estos cubos cumplen con:

1. Dado $x \in \Omega$, existe un único $Q \in \mathcal{Q}_k$, tal que $x \in Q$, para cada k .
2. Para cualesquiera dos cubos diádicos, se tiene que son disjuntos o uno está contenido en el otro.
3. Cada cubo en \mathcal{Q}_k , está contenido en exactamente un cubo de \mathcal{Q}_j , para $j < k$. Además, contiene exactamente 2^n cubos en \mathcal{Q}_{k+1} .

Definición 5.1.21 (Operador maximal diádico). Para $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, se define el *operador maximal diádico* como

$$M_d f(x) := \sup_k |E_k f(x)|, \quad \text{con} \quad E_k f(x) := \sum_{Q \in \mathcal{Q}_k} \frac{\chi_Q(x)}{|Q|} \int_Q f$$

Teorema 5.1.22. El operador maximal diádico es de tipo débil $(1, 1)$. Además, se tiene $\lim_k E_k f(x) = f(x)$, para $f \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponga que f es no-negativo. Entonces se descompone

$$\{x \in \Omega : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup_k \Omega_k,$$

donde $x \in \Omega_k$, si $k = \min\{j : E_j f(x) > \lambda\}$. Este k existe porque $E_k f(x) \rightarrow 0$ cuando $k \rightarrow -\infty$, para $f \in L^1$. Estos Ω_k son disjuntos y por construcción pueden escribirse como union de cubos en \mathcal{Q}_k . Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} |\{x \in \Omega : M_d f(x) > \lambda\}| &= \sum_k |\Omega_k| \\ &\leq \sum_k \frac{1}{\lambda} \int_{\Omega_k} E_k f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_k \sum_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_k \\ Q \subset \Omega_k}} \int_Q \frac{\chi_Q(x)}{|Q|} \int_Q f(y) \, dy \, dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_k \sum_{\substack{Q \in \mathcal{Q}_k \\ Q \subset \Omega_k}} \int_Q f(x) \, dx \\ &= \frac{1}{\lambda} \sum_k \int_{\Omega_k} f(x) \, dx \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Ahora, para la segunda parte, es claro que es válido para una función continua. Entonces, en vista del Teorema 5.1.17, se puede verificar para cualquier $f \in L^1_{loc}$, por un argumento de densidad. \square

Teorema 5.1.23 (Calderón-Zygmund). *Para cualquier f integrable y no-negativa, existe una secuencia $\{Q_j\}$ de cubos diádicos disjuntos, tales que*

1. $f(x) \geq \lambda$ casi en todas partes para $x \notin \bigcup_j Q_j$,
2. $\left| \bigcup_j Q_j \right| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^1}$,
3. $\lambda < \frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f \leq 2^n \lambda$.

Demostración. La prueba del segundo inciso se encuentra en la demostración anterior. El primer inciso es consecuencia del hecho que si $x \notin \bigcup_j Q_j$, entonces $E_k f(x) \leq \lambda$ para todo k , y solo basta con tomar el límite en vista del resultado anterior. Para el tercer inciso, se ve que por construcción de los Q_j , se tiene que el promedio de f sobre ellos es mayor que λ , y ningún cubo que lo contenga también lo cumple. Ahora, sea \tilde{Q}_j el cubo diádico más pequeño que contiene estrictamente a Q_j . Entonces, se tiene que

$$\frac{1}{|Q_j|} \int_{Q_j} f \leq \frac{|\tilde{Q}_j|}{|Q_j|} \frac{1}{|\tilde{Q}_j|} \int_{\tilde{Q}_j} f \leq 2^n \lambda.$$

Lo que concluye la prueba. \square

A continuación se define un operador maximal bastante importante. El operador maximal de Hardy-Littlewood.

Definición 5.1.24 (Operador maximal de Hardy-Littlewood). Para $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, se define al *operador maximal de Hardy-Littlewood* como

$$Mf(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y)| dy,$$

donde Q son cubos con lados paralelos a los ejes.

Ahora, se presenta un resultado que evidencia la utilidad de este operador maximal

Teorema 5.1.25. *El operador maximal de Hardy-Littlewood es continuo en $L^p(\Omega)$, para $1 < p \leq \infty$.*

Demostración. Es bastante claro que $Mf(x) \leq \|f\|_{L^\infty}$, entonces solo queda demostrar la desigualdad débil de tipo $(1, 1)$, para poder aplicar el Teorema de interpolación de Marcinkiewicz. Para esto, se aplica la descomposición de Calderón-Zygmund al operador maximal diádico

$$\{x \in \Omega : M_d f(x) > \lambda\} = \bigcup_j Q_j.$$

Para cada Q_j , se toma $3Q_j$, un cubo concéntrico tal que $\ell(3Q_j) = 3\ell(Q_j)$. Además, se fija $x \notin \bigcup_j 3Q_j$ y un cubo cualquiera Q que lo contenga. Se escoge $k \in \mathbb{Z}$, tal que $2^{k-1} \leq \ell(Q) < 2^k$, entonces existen $m \leq 2^n$ cubos diádicos en Q_k que se intersectan con Q , que se denotan R_j . Note que ninguno está contenido en los Q_j , de lo contrario $x \in \bigcup_j 3Q_j$. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{1}{|Q|} \int_Q f dx &= \frac{1}{|Q|} \sum_{j=1}^m \int_{Q \cap R_j} f dx \\ &\leq \sum_{j=1}^m \frac{2^{kn}}{|Q|} \frac{1}{|R_j|} \int_{R_j} f dx \\ &\leq 2^n m \lambda \leq 4^n \lambda. \end{aligned}$$

En conclusión, se tiene que

$$\{x \in \Omega : Mf(x) > 4^n \lambda\} \subset \bigcup_j 3Q_j,$$

$$|\{x \in \Omega : Mf(x) > \lambda\}| \leq \frac{12^n}{\lambda} \|f\|_{L^1},$$

en vista de la desigualdad débil del operador M_d . Lo que completa la prueba. \square

En vista de la continuidad débil $(1, 1)$, y el hecho que vale para funciones continuas, se obtiene que

Corolario 5.1.26 (Teorema de diferenciación de Lebesgue). *Para $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, se tiene que*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} f(y) \, dy = f(x),$$

casi para todo $x \in \Omega$. En particular, $|f| \leq Mf$ casi en todas partes, y

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{|B(x, r)|} \int_{B(x, r)} |f(y) - f(x)| \, dy = 0,$$

casi en todas partes. A los puntos que lo satisfacen se les llama puntos de Lebesgue.

Para concluir, se incluye una desigualdad bastante útil.

Teorema 5.1.27 (Hardy-Littlewood-Sobolev). *Sea $0 < \alpha < n$, y sean $1 < p < q < \infty$ tales que*

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{n}.$$

Además, si se define el potencial de Riesz como

$$(I_\alpha f)(x) := \int_{\Omega} \frac{f(x) \, dx}{|x - y|^{n-\alpha}},$$

entonces $\|I_\alpha f\|_{L^q} \lesssim \|f\|_{L^p}$.

Demostración. Note que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y) \, dy}{|x - y|^{n-\alpha}} = \int_0^\infty \frac{r^{n-1}}{r^{n-\alpha}} \int_{S^{n-1}} f(x + rz) \, d\sigma(z) \, dr = \int_0^\infty r^{\alpha-1} f_x(r) \, dr,$$

donde $f_x r = r^{-n} \int_{S^{n-1}} f(x + rz) \, d\sigma(z)$. Entonces, $|f_x(r)| \leq Mf(x)$, y por la desigualdad de Hölder

$$|f_x(r)| \lesssim r^{-n} \int_{B(x, r)} |f(y)| \, dy \lesssim r^{-n} \|f\|_p r^{n(p-1)/p} = r^{-n/p}.$$

Por lo que, para algún r_x ,

$$|I_\alpha f(x)| \leq \int_0^{r_x} r^{\alpha-1} Mf(x) \, dr + \int_{r_x}^\infty r^{\alpha-1} r^{-n/p} \|f\|_{L^p} \, dr \lesssim Mf(x) r_x^\alpha + \|f\|_{L^p} r_x^{\alpha-n/p}.$$

Al tomar $r_x := [Mf(x)]^{-p/n} \|f\|_{L^p}^{p/n}$, se tiene que

$$|I_\alpha f(x)| \lesssim [Mf(x)]^{1-\alpha p/n} \|f\|_{L^p}^{\alpha p/n}.$$

Además, por la continuidad del operador maximal de Hardy-Littlewood

$$\|I_\alpha f(x)\|_{L^q}^q \lesssim \|f\|_{L^p}^{\alpha p q/n} \int_{\mathbb{R}^n} Mf(x)^{(1-\alpha p/n)q} \, dx \lesssim \|f\|_{L^p}^{\alpha p q/n} \|f\|_{(1-\alpha p/n)q}^{(1-\alpha p/n)q}.$$

Entonces, el resultado se obtiene cuando $(1 - \alpha p/n)q = p$. \square

5.2. Transformada de Fourier en \mathbb{R}^n

Ahora, se procede a definir y mostrar propiedades importantes de la transformada de Fourier, una herramienta fundamental para el estudio de las ecuaciones diferenciales en general y los operadores pseudo-diferenciales en particular.

Definición 5.2.1 (Transformada de Fourier en \mathbb{R}^n). Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se define su transformada de Fourier como

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx,$$

para cualquier $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 5.2.2. La transformada de Fourier es un operador continuo $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^n)$ con norma uno:

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}.$$

Además, \widehat{f} es continua en todas partes.

Demostración. El estimativo es resultado de la desigualdad de Minkowski para integrales clásica

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i x \cdot \xi}| |f(x)| dx \\ &\leq \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Ahora, la continuidad es consecuencia del teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Para cualquier $\xi_k \rightarrow \xi$ se define

$$h_k(x) := e^{-2\pi i x \cdot \xi_k} f(x)$$

Entonces, se tiene que $|h_k| \leq |f|$ y se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} f(x) dx = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi_k} f(x) dx.$$

Que es exactamente $\widehat{f}(\xi) = \lim \widehat{f}(\xi_k)$, el resultado deseado. \square

A pesar de que la transformada de Fourier está bien definida en el espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$, este presenta ciertas limitaciones técnicas debido a los pocos requerimientos de regularidad para las funciones en este espacio. Es muy útil tener acceso a otras herramientas resultantes de continuidad, diferenciabilidad, y decaimiento. Por lo tanto, se introduce notación que será importante a lo largo de este trabajo.

Definición 5.2.3 (Notación de multi-índice). Para $\alpha := (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \beta := (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$, se define

$$\partial^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

De forma similar, $x^\beta := x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$. Se dice que $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo i . Además, se denota la longitud del multi-índice como $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ y su factorial como $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$.

Definición 5.2.4 (Espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). Se dice que una función suave (infinitamente diferenciable) $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ se encuentra en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si se cumple que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty,$$

para cualesquiera multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Ahora, se dice que $\varphi_j \rightarrow \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha (\varphi_j - \varphi)(x)| \rightarrow 0,$$

cuando $j \rightarrow \infty$ para cualesquiera multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Proposición 5.2.5. Para cualquier $1 \leq p \leq \infty$ se tiene que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ con encaje continuo.

Demostración. El caso $p = \infty$ es trivial, pues las funciones en el espacio de Schwartz son acotadas por definición. Sea $\varphi_j \rightarrow 0$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(x)|^p dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{pN} |\varphi_j(x)|^p \langle x \rangle^{-pN} dx \\ &\lesssim \max_{|\beta| \leq N} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\beta \varphi_j(x)|^p \int_{\mathbb{R}^n} \langle x \rangle^{-pN} dx \\ &\rightarrow 0, \end{aligned}$$

donde $N \in \mathbb{N}$ se escoge de manera que la última integral converga. \square

Teorema 5.2.6. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $2\pi i \xi_j \widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\partial_j \varphi}(\xi)$ y $2\pi i x_j \widehat{\varphi}(\xi) = -\partial_j \widehat{\varphi}(\xi)$

Demostración. Para la primera expresión se procede por integración por partes

$$\begin{aligned} \widehat{\partial_j \varphi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \partial_{x_j} \varphi(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{\xi_j} e^{-2\pi i x \cdot \xi}) \varphi(x) dx \\ &= 2\pi i \xi_j \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Se nota que no aparece el término con la frontera debido a que φ se desvanece en el infinito. Ahora, para la segunda expresión

$$\partial_{\xi_j} \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} (-2\pi i x_j) \varphi(x) dx.$$

Concluyendo la prueba. \square

Por lo que se puede concluir lo siguiente

Corolario 5.2.7. Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces,

$$\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi i)^{|\alpha| - |\beta|} (-1)^{|\alpha|} \widehat{\partial^\beta [x^\alpha \varphi]}(\xi).$$

Por lo que

$$\begin{aligned} |\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)| &\leq |2\pi i|^{|\alpha| - |\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta [x^\alpha \varphi(x)]| dx \\ &\leq |2\pi i|^{|\alpha| - |\beta|} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|)^{n+1} \partial^\beta [x^\alpha \varphi(x)]| \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |x|)^{-n-1} dx \\ &= C \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |(1 + |x|)^{n+1} \partial^\beta [x^\alpha \varphi(x)]| \\ &< \infty. \end{aligned}$$

Particularmente, $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$ mapea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo. Además, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, la transformada de Fourier es un operador continuo.

En realidad, es un isomorfismo en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para ello se demostrarán algunos lemas útiles.

Lema 5.2.8 (Fórmula de multiplicación para la transformada de Fourier). Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} dx$.

Demostración. Aplicando el teorema de Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}g \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot y} f(y) \, dy \right] g(x) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot y} g(x) \, dx \right] f(y) \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} \, dy \end{aligned}$$

Concluyendo la prueba. □

Lema 5.2.9 (Transformada de Fourier para Gaussiana). *Se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} e^{-\varepsilon \pi^2 |x|^2} \, dx = (\pi \varepsilon)^{-n/2} e^{-|\xi|^2/\varepsilon},$$

para todo $\varepsilon > 0$. Gracias al cambio de variable $x \mapsto 2\pi x$ y $\varepsilon \mapsto 2\varepsilon$, esto equivale a

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} e^{-\varepsilon^2 |x|^2/2} \, dx = (2\pi/\varepsilon)^{-n/2} e^{-|\xi|^2/(2\varepsilon)}.$$

Demostración. La segunda expresión sigue del caso unidimensional

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\tau} e^{-t^2/2} \, dt &= e^{-\tau^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+i\tau)^2/2} \, dt \\ &= e^{-\tau^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2} \, dt \\ &= \sqrt{2\pi} e^{-\tau^2/2}. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $t \mapsto \sqrt{\varepsilon}t$ y $\tau \mapsto \tau/\sqrt{\varepsilon}$ se tiene que

$$\sqrt{\varepsilon} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\tau} e^{-\varepsilon t^2/2} \, dt = \sqrt{2\pi} e^{-\tau^2/(2\varepsilon)}.$$

El caso multidimensional sigue del producto de las integrales unidimensionales. □

Teorema 5.2.10 (Fórmula de inversión de Fourier). *La transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en si mismo con inverso dado por*

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} f(\xi) \, d\xi.$$

Demostración. El teorema de convergencia dominada de Lebesgue permite realizar la sustitución

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \widehat{\varphi})(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{\varphi}(\xi) \, d\xi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \widehat{\varphi}(\xi) e^{-2\varepsilon \pi^2 |\xi|^2} \, d\xi \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y) \cdot \xi} \varphi(y) e^{-2\varepsilon \pi^2 |\xi|^2} \, dy \, d\xi. \end{aligned}$$

Con el cambio de variable $y \mapsto y + x$ se obtiene que

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \widehat{\varphi})(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \cdot \xi} \varphi(y+x) e^{-2\varepsilon \pi^2 |\xi|^2} \, dy \, d\xi.$$

Por el teorema de Fubini y la transformada de Fourier para Gaussianas se tiene que

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1} \widehat{\varphi})(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y+x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y \cdot \xi} e^{-2\varepsilon \pi^2 |\xi|^2} \, d\xi \, dy \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y+x) (2\pi \varepsilon)^{-n/2} e^{-|y|^2/(2\varepsilon)} \, dy \end{aligned}$$

Con un último cambio de variable $y \mapsto \sqrt{\varepsilon}z$ se concluye

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}^{-1}\widehat{\varphi})(x) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\sqrt{\varepsilon}z + x) (2\pi)^{-n/2} e^{-|z|^2/2} dz \\ &= (2\pi)^{-n/2} \varphi(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2/2} dz = \varphi(x). \end{aligned}$$

Finalizando con la prueba. □

El siguiente teorema relaciona la transformada de Fourier con las convoluciones

Teorema 5.2.11. Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces se cumple que $\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi)$, que $\widehat{\varphi\psi}(\xi) = (\widehat{\varphi} * \widehat{\psi})(\xi)$, y que $\int \varphi\overline{\psi} = \int \widehat{\varphi}\widehat{\overline{\psi}}$.

Demostración. Para la primera expresión se tiene que

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi * \psi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} (\varphi * \psi)(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x-y) \cdot \xi} \varphi(x-y) e^{-2\pi i y \cdot \xi} \psi(y) dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i z \cdot \xi} \varphi(z) e^{-2\pi i y \cdot \xi} \psi(y) dy dz \\ &= \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi). \end{aligned}$$

Ahora, para la segunda expresión

$$\begin{aligned} (\widehat{\varphi} * \widehat{\psi})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}(\xi - y) \widehat{\psi}(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot (\xi - y)} \varphi(x) \widehat{\psi}(y) dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot y} \widehat{\psi}(y) dy \right] e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \xi} \varphi(x) \psi(x) dx = \widehat{\varphi\psi}(\xi). \end{aligned}$$

Para la tercera expresión se define $\chi := \widehat{\overline{\psi}}$, entonces

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\overline{\psi} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi\widehat{\chi} = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}\chi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\varphi}\widehat{\overline{\psi}}.$$

Completando la prueba. □

5.3. Transformada de Fourier en \mathbb{T}^n

Se fija la notación del toro n -dimensional como $\mathbb{T}^n := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Esta identificación se realiza tanto en el contexto de grupo aditivo cociente como en el de topología cociente. Se suele identificar a \mathbb{T}^n con $[0, 1)^n$ como subconjunto de \mathbb{R}^n , y se fija su medida como la restricción de la medida euclídeana. Se puede entender una función definida en el toro como una función 1-periodica. Es decir, si $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ cumple que $g(x) = g(x + k)$ para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{Z}^n$, entonces puede identificarse con una función $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{C}$ definida como $f([x]) = g(x)$, donde $[x]$ es la clase de equivalencia de $x \in \mathbb{R}^n$ en el cociente. No obstante, no es necesario realizar la distinción entre punto y clase de equivalencia y se denotará $x \in \mathbb{T}^n$, de manera similar, se dirá que $f = g$ para los fines de este trabajo.

Definición 5.3.1 (Espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$). Sea $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ el espacio de *funciones de decaimiento rápido* $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que satisfacen

$$|\varphi(\xi)| \lesssim_M \langle \xi \rangle^{-M},$$

en todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$, para cualquier $M > 0$. La convergencia de este espacio está dada por las seminormas $p_k(\varphi) := \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle \xi \rangle^k |\varphi(\xi)|$.

Definición 5.3.2 (Transformada de Fourier periodica). Sea $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ la *transformada de Fourier periodica* definida por

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x \cdot \xi} f(x) dx.$$

Además, se define la transformada de Fourier periodica inversa $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{T}^n)$, como

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi)(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} \varphi(\xi).$$

Teorema 5.3.3. *La definición 5.3.2 es válida. Es decir,*

1. $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$,
2. $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$,
3. $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}$ y $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}$ son la función identidad en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ y $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ respectivamente.

Demostración. Para la primera parte, se toma $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Entonces

$$\begin{aligned} (-i2\pi\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{T}^n} (-i2\pi\xi)^\alpha e^{-i2\pi x \cdot \xi} f(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} [\partial_x^\alpha e^{-i2\pi x \cdot \xi}] f(x) dx \\ &= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x \cdot \xi} [\partial_x^\alpha f(x)] dx < \infty. \end{aligned}$$

Por lo que $|\langle \xi \rangle^M \widehat{f}(\xi)| < \infty$ para cualquier $M < \infty$, y $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Para la segunda parte, se toma $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ y se tiene que

$$|\partial_x^\alpha [\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi](x)| \leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |\partial_x^\alpha e^{i2\pi x \cdot \xi} \varphi(\xi)| \lesssim_M \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |\xi^\alpha| \langle \xi \rangle^{-M} < \infty,$$

para M lo suficientemente grande. Por lo que $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi$ es suave. Para la tercera parte, primero se aprovecha la convergencia uniforme para tener que

$$\begin{aligned} [\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi)](\xi) &= \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x \cdot \xi} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \eta} \varphi(\eta) dx \\ &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\eta) \int_{\mathbb{T}^n} e^{i2\pi x \cdot (\eta - \xi)} dx \\ &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\eta) \delta_{\eta, \xi} = \varphi(\xi). \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}
[\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f)](x) &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi y \cdot \xi} f(y) \, dy \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi(x-y) \cdot \xi} f(y) \, dy \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\xi \leq \alpha} e^{i2\pi y \cdot \xi} f(x-y) \, dy \\
&=: \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}^n} D_\alpha(y) f(x-y) \, dy \\
&=: \lim_{\alpha \rightarrow \infty} S_\alpha f(x).
\end{aligned}$$

A D_α se le conoce como el kernel de Dirichlet y a S_α como el operador de sumas parciales. Se puede trabajar el kernel de Dirichlet para obtener que

$$\begin{aligned}
D_\alpha(y) &= \sum_{\xi \leq \alpha} e^{i2\pi y \cdot \xi} \\
&= \prod_{j=1}^n \sum_{\xi_j = -\alpha_j}^{\alpha_j} e^{i2\pi y_j \xi_j} \\
&= \prod_{j=1}^n e^{-i2\pi \alpha_j y_j} \left(\frac{e^{i2\pi(2\alpha_j+1)y_j} - 1}{e^{i2\pi y_j} - 1} \right) \\
&= \prod_{j=1}^n \frac{\sin(\pi(2\alpha_j+1)y_j)}{\sin(\pi y_j)}.
\end{aligned}$$

Ahora, se utiliza el método de sumabilidad de Césaro, que indica que el promedio de una sucesión converge al mismo límite que el límite de la sucesión, para definir el kernel de Fejér como

$$\begin{aligned}
\sigma_N f(x) &:= \frac{1}{(N+1)^n} \sum_{\|\alpha\|_\infty \leq N} S_\alpha f(x) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \frac{1}{(N+1)^n} \sum_{\|\alpha\|_\infty \leq N} D_\alpha(y) f(x-y) \, dy \\
&=: \int_{\mathbb{T}^n} F_N(y) f(x-y) \, dy.
\end{aligned}$$

El kernel de Fejér se puede reescribir notando que $e^{i2\pi y_j \xi_j}$ aparece exactamente $N+1-|\xi_j|$ veces en la sumatoria, obteniendo que

$$\begin{aligned}
F_N(y) &= \frac{1}{(N+1)^n} \prod_{j=1}^n \sum_{\xi_j = -N}^N (N+1-|\xi_j|) e^{i2\pi y_j \xi_j} \\
&= \frac{1}{(N+1)^n} \prod_{j=1}^n \sum_{k=0}^N \sum_{\xi_j = -k}^k e^{i2\pi y_j \xi_j}.
\end{aligned}$$

Ahora, note que tiene una forma similar al kernel de Dirichlet para obtener que

$$\begin{aligned}
 F_N(y) &= \frac{1}{(N+1)^n} \prod_{j=1}^n \sum_{k=0}^N \frac{\sin(\pi(2k+1)y_j)}{\sin(\pi y_j)} \\
 &= \frac{1}{(N+1)^n} \prod_{j=1}^n \sum_{k=0}^N \frac{\sin(\pi(2k+1)y_j) \sin(\pi y_j)}{\sin^2(\pi y_j)} \\
 &= \frac{1}{2(N+1)^n} \prod_{j=1}^n \sum_{k=0}^N \frac{\cos(2k\pi y_j) - \cos(2(k+1)\pi y_j)}{\sin^2(\pi y_j)} \\
 &= \frac{1}{2(N+1)^n} \prod_{j=1}^n \frac{1 - \cos(\pi(N+1)y_j)}{\sin^2(\pi y_j)} \\
 &= \frac{1}{(N+1)^n} \prod_{j=1}^n \left[\frac{\sin(\pi(N+1)y_j)}{\sin(\pi y_j)} \right]^2.
 \end{aligned}$$

Este kernel tiene las propiedades que $F_N \geq 0$, que $\int_{\mathbb{T}^n} F_N(y) dy = 1$, y que para $\delta > 0$ se tiene que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\delta < |y|} F_N(y) dy \leq \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(N+1)^n \sin^{2n}(\pi\delta)} = 0.$$

Entonces, se puede concluir que

$$\begin{aligned}
 |\sigma_N f(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{T}^n} |f(x-y) - f(x)| F_N(y) dy \\
 &\leq \int_{|y| < \delta} |f(x-y) - f(x)| F_N(y) dy + 2\|f\|_{\infty} \int_{\mathbb{T}^n} F_N(y) dy \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

debido a que el primer término puede ser controlado escogiendo δ lo suficientemente pequeño gracias a la continuidad de f , y el segundo termino puede controlarse al escoger N una vez fijado δ . Esta convergencia es uniforme respecto a x debido a la compacidad de \mathbb{T}^n . Por lo que se justifica la definición de la transformada de Fourier y su inversa. \square

Nota 5.3.4. En la demostración anterior se utilizan técnicas de sumabilidad que son frecuentes en el análisis de Fourier. Para mayor detalle sobre estas técnicas y el análisis de Fourier se recomienda al lector revisar Duoandikoetxea [11]. Por otra parte, estas técnicas pueden ser utilizadas para demostrar la convergencia de estas series en la norma L^p .

Teorema 5.3.5. *La serie de Fourier de f converge a f en la norma $L^p(\mathbb{T}^n)$.*

Demostración. Para el operador de Césaro σ_N y el kernel de Fejér se tiene que

$$\begin{aligned}
 \|\sigma_N f - f\|_{L^p} &\leq \int_{\mathbb{T}^n} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_{L^p} F_N(y) dy \\
 &\leq \int_{|y| < \delta} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_{L^p} F_N(y) dy + 2\|f\|_{L^p} \int_{\mathbb{T}^n} F_N(y) dy \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

donde, de nuevo, se puede controlar el primer término con δ y el segundo escogiendo un N apropiado. \square

Definición 5.3.6 (Espacios de sucesiones $\ell^p(\mathcal{C})$). El espacio de sucesiones $\ell^p(\mathcal{C})$, para \mathcal{C} un conjunto enumerable, consiste de las funciones $a : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$, tales que

$$\|a\|_{\ell^p} := \left(\sum_{k \in \mathcal{C}} |a_k|^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Generalmente, $\mathcal{C} = \mathbb{Z}^n$.

Teorema 5.3.7 (Identidad de Plancherel). Si $u \in L^2(\mathbb{T}^n)$, entonces $\widehat{u} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$, y se cumple que

$$\|\widehat{u}\|_{\ell^2} = \|u\|_{L^2}.$$

Demostración. Primero, note que

$$\begin{aligned} (u, S_N u)_{L^2} &= \int_{\mathbb{T}^n} u(x) \sum_{|\xi| \leq N} \overline{\widehat{u}(\xi) e^{i2\pi x \cdot \xi}} dx \\ &= \sum_{|\xi| \leq N} \overline{\widehat{u}(\xi)} \int_{\mathbb{T}^n} u(x) e^{-i2\pi x \cdot \xi} dx \\ &= \sum_{|\xi| \leq N} \overline{\widehat{u}(\xi)} \widehat{u}(\xi) = \|\widehat{u}_N\|_{\ell^2}^2. \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \|u - S_N u\|_{L^2}^2 &= \|u\|_{L^2}^2 - (u, S_N u)_{L^2} - (S_N u, u)_{L^2} + \|S_N u\|_{L^2}^2 \\ &= 2\|u\|_{L^2}^2 - 2\|\widehat{u}_N\|_{\ell^2}^2. \end{aligned}$$

Por continuidad de las normas, se obtiene la identidad deseada al hacer $N \rightarrow \infty$. \square

5.4. Distribuciones y espacios de Sobolev en \mathbb{R}^n

En esta sección se inicia introduciendo el espacio de distribuciones templadas que permite extender la transformada de Fourier a un espacio más general que $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definición 5.4.1 (Distribuciones templadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$). Se define el *espacio de distribuciones templadas* como el espacio de funcionales lineales continuos $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$. En este caso, se entiende la continuidad en el sentido que si $\varphi_j \rightarrow \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene que $u(\varphi_j) \rightarrow u(\varphi)$ en \mathbb{C} . Además, se dice que $u_j \rightarrow u$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si $u_j(\varphi) \rightarrow u(\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Las funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se les conoce como las funciones de prueba del espacio de distribuciones templadas. Otra notación usual para $u(\varphi)$ es $\langle u, \varphi \rangle$.

Nota 5.4.2 (Funciones como distribuciones). Se puede considerar a $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ como una distribución templada. Se define el funcional u_f de la siguiente manera

$$\langle u_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi dx.$$

Claramente es un funcional lineal. La continuidad es resultado de la desigualdad de Hölder y el encaje continuo de las funciones de prueba en el espacio L^q . En efecto, para $\varphi_j \rightarrow \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$|\langle u_f, \varphi_j \rangle - \langle u_f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{L^p} \|\varphi_j - \varphi\|_{L^q} \rightarrow 0.$$

Por simplicidad se denota $\langle u_f, \varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$. Además, este encaje es continuo, pues si $f_j \rightarrow f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$|\langle f_j, \varphi \rangle - \langle f, \varphi \rangle| \leq \|f_j - f\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^q}.$$

Particularmente, para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se puede motivar la definición de distintas propiedades de distribuciones mediante la manipulación del funcional u_φ mencionado anteriormente. Por ejemplo, en vista de la integración por partes tenemos que

$$\langle \partial_j \varphi, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j \varphi) \psi dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \varphi (\partial_j \psi) dx = - \langle \varphi, \partial_j \psi \rangle.$$

Por lo que definimos la derivada en el sentido de distribuciones de la siguiente manera

Definición 5.4.3 (Derivada distribucional). Para $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se define

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle,$$

para cualquier función de prueba φ y cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Ejemplo 5.4.4. Considere la función Heaviside, o escalón, dada por

$$H(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Es claro que representa una distribución templada, así que se calcula su derivada distribucional

$$\langle \partial H, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} H \partial \varphi \, dx = - \int_0^\infty \partial \varphi \, dx = -\varphi|_0^\infty = \varphi(0) =: \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Donde δ es el funcional conocido como la delta de Dirac. Por lo que se tiene que en el sentido de distribuciones que $\partial H = \delta$.

Por otra parte, la fórmula de multiplicación de Fourier motiva la definición de la transformada de Fourier para distribuciones.

Definición 5.4.5 (Transformada de Fourier para distribuciones). Para $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se define

$$\langle \mathcal{F}u, \varphi \rangle := \langle u, \mathcal{F}\varphi \rangle, \quad \langle \mathcal{F}^{-1}u, \varphi \rangle := \langle u, \mathcal{F}^{-1}\varphi \rangle,$$

para cualquier función de prueba φ .

Ejemplo 5.4.6. Considere la distribución de la delta de Dirac dada por $\langle \delta, \varphi \rangle := \varphi(0)$. Se calcula su transformada de Fourier de la siguiente manera

$$\langle \mathcal{F}\delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, dx = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Por lo que en el sentido de distribuciones se tiene que $\widehat{\delta} = 1$ la función constante, que es acotada y por tanto una distribución. También se puede demostrar que $\widehat{1} = \delta$. En efecto

$$\langle \mathcal{F}(1), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi} \, dx = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi})(0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Teorema 5.4.7. La transformada de Fourier \mathcal{F} es continua en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $u_j \rightarrow u$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\widehat{u}_j(\varphi) = u_j(\widehat{\varphi}) \rightarrow u(\widehat{\varphi}) = \widehat{u}(\varphi).$$

Por lo que es un operador continuo. □

Lema 5.4.8. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es secuencialmente denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ igual a uno en una vecindad del origen. Entonces se define $\psi_k(x) := \psi(x/k)$ y se puede verificar que $\psi_k \varphi \rightarrow \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Teorema 5.4.9. $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es secuencialmente denso en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Sea $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y sean ψ, ψ_k como en la demostración anterior. Entonces se define $\langle \psi u, \varphi \rangle := \langle u, \psi \varphi \rangle$, y se tiene que $\psi_k u \rightarrow u$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En efecto, por el lema anterior se tiene que

$$\langle \psi_k u, \varphi \rangle = \langle u, \psi_k \varphi \rangle \rightarrow \langle u, \varphi \rangle.$$

Similarmente, $\psi_k \hat{u} \rightarrow \hat{u}$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, lo que implica que $\mathcal{F}^{-1}(\psi_k \hat{u}) \rightarrow u$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ debido a la continuidad de la transformada de Fourier. Entonces, se tiene que

$$u_k := \psi_k[\mathcal{F}^{-1}(\psi_k \hat{u})] \rightarrow u$$

en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Solo queda demostrar $u_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, en el caso general, para cualquier $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(\chi \hat{u}), \varphi \rangle = \langle \hat{u}, \chi \mathcal{F}^{-1} \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \hat{u}, \chi(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} \rangle \varphi(x) dx.$$

Por lo que se puede identificar $\mathcal{F}^{-1}(\chi \hat{u})(x) = \hat{u}(\chi(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi})$, que es continua respecto a x y que sus derivadas respecto a x tienen soporte compacto respecto a ξ , por lo que las derivadas de $\mathcal{F}^{-1}(\chi \hat{u})(x)$ tienen soporte compacto. \square

Teorema 5.4.10 (Identidad de Parseval y Plancherel). *Para $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \bar{v} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u} \overline{\widehat{v}} d\xi.$$

Particularmente, $\hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|\hat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}.$$

Demostración. Sean u_j, v_j secuencias de funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que convergen respectivamente a u, v en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, se toma el límite en el Teorema 5.2.11 para obtener el resultado deseado. \square

Definición 5.4.11 (Espacios de Sobolev). Sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea $k \in \mathbb{N}_0$. El *espacio de Sobolev* $W_p^k(\Omega)$ consiste de todas las funciones $f \in L^p(\Omega)$ tales que para cualquier multi-índice $|\alpha| \leq k$ se tiene que $\partial^\alpha f$ existe (en el sentido de distribuciones) y pertenece a $L^p(\Omega)$. Para tales funciones se define

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{1/p},$$

para $1 \leq p < \infty$. Para $p = \infty$ se define como

$$\|f\|_{W_\infty^k(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty}.$$

Nota 5.4.12. Se advierte al lector que existen otras notaciones disponibles en la literatura. Por ejemplo L_k^p , o $W^{p,k}$. Además, cuando $p = 2$, se suele denotar como H^k .

Teorema 5.4.13. *Sea $f, g \in W_p^k(\Omega)$ y sea α un multi-índice con $|\alpha| \leq k$, entonces se tiene que*

1. $\partial^\alpha f \in W_p^{k-|\alpha|}$ y que $\partial^\alpha(\partial^\beta f) = \partial^{\alpha+\beta} f = \partial^\beta(\partial^\alpha f)$, para todos multi-índices que satisfacen $|\alpha| + |\beta| \leq k$,
2. $\lambda f + \mu g \in W_p^k$ y $\partial^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda \partial^\alpha f + \mu \partial^\alpha g$, para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,
3. $\|\cdot\|_{W_p^k}$ es una norma,
4. $W_p^k(\Omega)$ es un espacio de Banach.

Demostración. Los primeros dos incisos son resultado de la definición de derivada en el sentido de distribuciones. En efecto, para (1) se tiene que

$$\langle \partial^\alpha(\partial^\beta f), \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle \partial^\beta f, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \langle f, \partial^{\alpha+\beta} \varphi \rangle.$$

El otro caso es análogo. El inciso (2) es resultado de la linealidad de $\langle \cdot, \varphi \rangle$. Para el inciso (3) es claro que $\|\lambda f\|_{W_p^k} = |\lambda| \|f\|_{W_p^k}$ por lo anterior, y que $\|f\|_{W_p^k} = 0$ si y solo si f se anula en casi todas partes. La desigualdad triangular para $p = \infty$ es trivial, para el caso $1 \leq p < \infty$ se tiene que

$$\begin{aligned} \|f + g\|_{W_p^k} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f + \partial^\alpha g\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} (\|\partial^\alpha f\|_{L^p} + \|\partial^\alpha g\|_{L^p})^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha g\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \\ &= \|f\|_{W_p^k} + \|g\|_{W_p^k}. \end{aligned}$$

Para el inciso (4) se toma una sucesión de Cauchy f_j en W_p^k . Entonces, $\partial^\alpha f_j$ es una sucesión de Cauchy en L^p para todo $|\alpha| \leq k$. Como L^p es completo, se tiene que $\partial^\alpha f_j$ converge a algún g_α en L^p . Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \langle \partial^\alpha g_0, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle g_0, \partial^\alpha \varphi \rangle \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} (-1)^{|\alpha|} \langle f_j, \partial^\alpha \varphi \rangle \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \langle \partial^\alpha f_j, \varphi \rangle \\ &= \langle g_\alpha, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Por lo que $\partial^\alpha g_0 = g_\alpha$ y $f_j \rightarrow g_0$ en W_p^k . □

Teorema 5.4.14 (Encaje de Sobolev). *Sea $s \in \mathbb{N}$, tal que $s > k + n/2$. Entonces se tiene que el espacio de Sobolev $W_2^s(\mathbb{R}^n)$ está contenido en el espacio de Hölder $C^k(\mathbb{R}^n)$ y la inclusión es continua.*

Demostración. Sea $u \in W_2^s(\mathbb{R}^n)$, entonces por la identidad de Plancherel se tiene que

$$\|u\|_{W_2^s}^2 = \sum_{|\alpha| \leq s} \|\partial^\alpha u\|_{L^2}^2 \sim \sum_{|\alpha| \leq s} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha|^2 |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \sim \int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi.$$

Ahora, basta demostrar que $\widehat{\partial^\alpha u} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $|\alpha| \leq k$, porque esto implicaría que su transformada inversa es continua y acotada. Utilizando Cauchy-Schwarz, se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\xi^\alpha| |\widehat{u}(\xi)| d\xi &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\xi|^{2|\alpha|}}{(1 + |\xi|^2)^s} d\xi \right)^{1/2} \\ &\lesssim \|u\|_{W_2^s}. \end{aligned}$$

Donde la segunda integral es finita dado que $2|\alpha| - 2s \leq 2k - 2s < -n$. Además, se tiene que

$$\sup |\partial^\alpha u| \leq \|\widehat{\partial^\alpha u}\|_{L^1} \lesssim \|u\|_{W_2^s},$$

por lo que la inclusión es continua y se completa la prueba. □

5.5. Distribuciones y espacios de Sobolev en \mathbb{T}^n

Teorema 5.5.1 (Distribuciones templadas $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$). *Los elementos u del espacio de distribuciones templadas $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$, que consiste de funcionales lineales continuos en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, tienen la forma*

$$\varphi \mapsto \langle u, \varphi \rangle := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} u(\xi) \varphi(\xi),$$

y crecen a lo más de forma polinomial.

Demostración. Note que se puede definir

$$u(\eta) := \langle u, \delta_\eta \rangle,$$

y como cada $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ puede ser escrito como

$$\varphi(\xi) = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\eta) \delta_\eta(\xi),$$

entonces se concluye que

$$\langle u, \varphi \rangle = \left\langle u, \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\eta) \delta_\eta \right\rangle = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\eta) \langle u, \delta_\eta \rangle = \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\eta) u(\eta).$$

Por otra parte, un funcional es continuo en un espacio con contables seminormas si se tiene que

$$|\langle u, \delta_\xi \rangle| \lesssim p_M(\delta_\xi) \lesssim \langle \xi \rangle^M,$$

para algún $M > 0$. □

Definición 5.5.2. El espacio de *distribuciones periódicas* $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ consiste de los funcionales lineales continuos definidos en $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Note que esto incluye a las funciones $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$ definiendo su funcional correspondiente de la siguiente manera

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{T}^n} f \varphi \, dx.$$

Además, similarmente al caso euclideo, se define la derivada distribucional como a continuación

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Definición 5.5.3. Se define la transformada de Fourier periodica en el sentido de distribuciones como un operador $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ de la siguiente manera

$$\langle \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} u, \varphi \rangle := \langle u, \iota \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi \rangle,$$

donde $(\iota \circ \psi)(x) = \psi(-x)$. Esta definición es consistente cuando $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. En efecto,

$$\begin{aligned} \langle \widehat{u}, \varphi \rangle &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u}(\xi) \varphi(\xi) \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x \cdot \xi} u(x) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) e^{i2\pi(-x) \cdot \xi} u(x) \, dx \\ &= \int_{\mathbb{T}^n} (\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi)(-x) u(x) \, dx = \langle u, \iota \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi \rangle. \end{aligned}$$

Lo que genera el resultado deseado.

Al identificar \mathbb{T}^n con $[0, 1)^n \subset \mathbb{R}^n$, se puede utilizar la definición de espacios de Sobolev euclideanos para el caso periodico.

Definición 5.5.4 (Espacios de Sobolev). Sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea $k \in \mathbb{N}_0$. El *espacio de Sobolev* $W_p^k(\Omega)$ consiste de todas las funciones $f \in L^p(\Omega)$ tales que para cualquier multi-índice $|\alpha| \leq k$ se tiene que $\partial^\alpha f$ existe (en el sentido de distribuciones) y pertenece a $L^p(\Omega)$. Para tales funciones se define

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{1/p},$$

para $1 \leq p < \infty$. Para $p = \infty$ se define como

$$\|f\|_{W_\infty^k(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty}.$$

La demostración del hecho que los espacios de Sobolev son espacios de Banach es la realizada para el Teorema 5.4.13. Además, se presenta el encaje de Sobolev para el caso toroidal, cuya prueba es analoga a la del Teorema 5.4.14.

Teorema 5.5.5 (Encaje de Sobolev). *Sea $s \in \mathbb{N}$, tal que $s > k + n/2$. Entonces se tiene que el espacio de Sobolev $W_2^s(\mathbb{T}^n)$ está contenido en el espacio de Hölder $C^k(\mathbb{T}^n)$ y la inclusión es continua.*

5.6. Espacios de Hardy en \mathbb{R}^n y \mathbb{T}^n

En este apartado se presentan las bases de la teoría de interpolación compleja que permite extender propiedades de continuidad a espacios L^p con $1 < p < \infty$. Esto es posible gracias al clásico resultado de Fefferman [12], que indica que el espacio de funciones de oscilación media acotada BMO es el dual del espacio de Hardy H^1 .

Definición 5.6.1 (Espacio de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$). Se dice que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se encuentra en el espacio de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$ si existen $f_1, \dots, f_n \in L^1(\mathbb{R}^n)$ que satisfacen

$$\widehat{f}_j(\xi) = \frac{i\xi_j}{|\xi|} \widehat{f}(\xi).$$

Se escribe $f_j =: R_j f$, y se le conoce como la transformada de Riesz, y se define la norma

$$\|f\|_{H^1} := \|f\|_{L^1} + \sum_{1 \leq j \leq n} \|R_j f\|_{L^1}.$$

Proposición 5.6.2 (Principio maximal). *Sea u una función real de clase C^2 en una región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y continua en $\overline{\Omega}$. Suponga que $\Delta u \geq 0$ en Ω y que $u \leq 0$ en su frontera, entonces se tiene que $u \leq 0$ en todo Ω .*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $\nabla^2 u > 0$, en caso contrario se puede tomar $u + \varepsilon|x|^2 - \delta$ para $\varepsilon, \delta > 0$ pequeños. Suponga que no vale $u \leq 0$ para todo Ω , entonces existe algún máximo positivo en algún $x_0 \in \Omega$. Como $\nabla u(x_0) = 0$, se tiene que al menos algún $\partial_j^2 u(x_0) > 0$. Además, como es máximo, se cumple $\partial_j u(x_0) = 0$. Usando el teorema de Taylor,

$$u(x_0 + he_j) - u(x_0) = \frac{1}{2} h^2 \partial_j^2 u(x_0) + o(h^3).$$

Por lo que no es un máximo y se obtiene la contradicción. \square

Lema 5.6.3. *Sea $F := (u_0, \dots, u_n)$, tal que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en \mathbb{R}_+^{n+1} , es decir*

$$\sum_{j=0}^n \partial_{x_j} u_j = 0, \quad y \quad \partial_{x_j} u_k = \partial_{x_k} u_j,$$

con $x_0 = t$. Suponga que $|F| > 0$ en algún punto y sea $q \geq (n-1)/n$, entonces se tiene que $\Delta(|F|^q) \geq 0$. Particularmente, si $q > (n-1)/n$,

$$\Delta(|F|^q) \sim |F|^{q-2} |\nabla F|^2.$$

Note que las imagenes de las u_j pueden encontrarse en un espacio de Hilbert abstracto.

Demostración. Primero, note que por las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$\sum_{j=0}^n \partial_j^2 u_k = \partial_k \sum_{j=0}^n \partial_j u_j = 0,$$

y que $\Delta F = 0$. Por la regla de Leibniz se tiene que

$$\partial_j^2 |F|^q = q(q-2)|F|^{q-4}(\partial_j F \cdot F)^2 + q|F|^{q-2}[\partial_j F]^2 + (\partial_j^2 F \cdot F).$$

Al sumar respecto a j , se obtiene que

$$\Delta|F|^q = q|F|^{q-4} \left[(q-2) \sum (\partial_j F \cdot F)^2 + |F|^2 \sum |\partial_j F|^2 \right].$$

Ahora, si $q \geq 2$, por la desigualdad de Schwarz se tiene que $\sum (\partial_j F \cdot F)^2 \leq |F|^2 \sum |\partial_j F|^2$ y es claro que $\Delta(|F|^q) \geq 0$. Cuando $q < 2$, note que se puede descomponer a las imágenes en sus componentes ortogonales y basta demostrarlo para un espacio de dimensión uno. Entonces, tome la matriz $M = (m_{jk}) := \partial_j u_k$, que es simétrica y por lo tanto diagonalizable a una matriz con diagonal $\lambda_0 \geq \dots \geq \lambda_n$. Como la traza es invariante respecto a conjugados, se tiene que

$$\lambda_0 = - \sum_{j>0} \lambda_j,$$

y por la desigualdad de Schwarz,

$$\lambda_0^2 \leq n \sum_{j>0} \lambda_j^2.$$

Ahora, la norma operador y la norma Frobenius de la matriz también son invariantes ortogonales y se obtiene que

$$\|M\|_2^2 = \lambda_0^2 \leq \frac{n}{n+1} \sum_j \lambda_j^2 = \frac{n}{n+1} \|M\|_F^2.$$

Esto implica que

$$\sum_j (\partial_j F \cdot F)^2 \leq |F|^2 \|M\|_2 \leq |F|^2 \|M\|_F \leq \frac{n}{n+1} |F|^2 \sum_j |\partial_j F|^2.$$

Lo que implica que $\Delta(|F|^q)$. Para obtener la comparación final deseada, basta con notar que

$$|F|^2 \sum_j |\partial_j F|^2 = |F|^2 |\nabla F|^2.$$

Lo que completa la prueba. \square

Ahora, se presenta un operador bastante útil: la integral de Poisson. Para una discusión exhaustiva, vea Stein [23].

Definición 5.6.4. Se define el kernel de Poisson n -dimensional como

$$P_t(x) := \frac{c_n t}{(t^2 + |x|^2)^{(n+1)/2}},$$

donde c_n es una constante para que su integral sea uno, y para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se define su integral de Poisson como

$$(Pf)(x, t) := (P_t * f)(x).$$

Este kernel tiene una propiedad muy útil relacionada con la transformada de Fourier. Puede ser obtenida utilizando coordenadas polares y propiedades de las funciones de Bessel, pero queda fuera del alcance de este trabajo.

Proposición 5.6.5. El kernel de Poisson puede ser expresado como

$$P_t(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Además, tiene una relación interesante con el operador maximal de Hardy-Littlewood.

Teorema 5.6.6. Para $f \in L^1$, se tiene que $\sup_{t>0} |Pf(x, t)| \lesssim Mf(x)$.

Demostración. Note que

$$\int_{\varepsilon < |x-y| < R} \frac{tf(y) dy}{(t^2 + |x-y|^2)^{(n+1)/2}} = \int_{\varepsilon}^R \int_{S^{n-1}} P_t(r) f(x+rz) r^{n-1} d\sigma(z) dr.$$

Al integrar por partes respecto a r , se obtiene que

$$P_t(r) \int_{B(x,r)} f(y) dy \Big|_{r=\varepsilon}^R - \int_{\varepsilon}^R \int_{B(x,r)} f(y) dy P'_t(r) dr,$$

y al hacer $\varepsilon \rightarrow 0$ y $R \rightarrow \infty$, se puede estimar por

$$Mf(x) \int_0^{\infty} r^n P'_t(r) dr.$$

La prueba se completa al notar que $P'_t(r) \lesssim r^{-n-2}$. □

Esto permite demostrar propiedades útiles de las extensiones de Poisson.

Teorema 5.6.7. *Sea $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, entonces su integral de Poisson cumple que*

1. Pf es armónica,
2. cumple la condición de frontera $\lim_{t \rightarrow 0} (Pf)(x, t) = f(x)$, para casi todo x ,
3. tiene propiedad de decaimiento $\lim_{t \rightarrow \infty} (Pf)(x, t) = 0$,
4. se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x) dx = 2 \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t[\nabla(Pf)(x, t)][\nabla(Pg)(x, t)] dx dt.$$

Demostración. Para el primer inciso, se aprovecha su transformada de Fourier, para obtener que

$$\partial_t(P\varphi)(x, t) = - \int_{\mathbb{R}^n} 2\pi|\xi| \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi,$$

$$\partial_{x_j}(P\varphi)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} 2\pi i \xi_j \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi.$$

Entonces, se tiene que

$$\nabla^2(Pf)(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} 4\pi^2 |\xi|^2 \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi - \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} 4\pi^2 \xi_j^2 \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = 0.$$

Para el segundo y tercer inciso, se aprovecha que el operador $\sup_{t>0} |Pf(x, t)|$ es débil $(1, 1)$, entonces el Teorema 5.1.17 implica que basta demostrarlo para funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. En este caso es consecuencia de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim_{t \rightarrow 0} (Pf)(x, t) = \lim_{t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = f(x),$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (Pf)(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi = 0.$$

Para el cuarto inciso, se procede descomponiendo

$$\int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t[\nabla(Pf)][\nabla(Pg)] dx dt = \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t[\nabla_x(Pf)][\nabla_x(Pg)] + t\partial_t(Pf)\partial_t(Pg) dx dt =: I_1 + I_2.$$

Por integración por partes en I_2 , se tiene que

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathbb{R}^n} [t(Pf)\partial_t(Pg)]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty (Pf)\partial_t(Pg) + t(Pf)\partial_t^2(Pg) dt dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty (Pf)\partial_t(Pg) + t(Pf)\partial_t^2(Pg) dt dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty t(Pf)\nabla_x^2(Pg) - (Pf)\partial_t(Pg) dt dx, \end{aligned}$$

como Pg es armónica. Ahora, integrando por partes respecto a x , y luego respecto a t , se tiene que

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t[\nabla_x(Pf)][\nabla_x(Pg)] + (Pf)\partial_t(Pg) dx dt \\ &= -I_1 - \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (Pf)\partial_t(Pg) dx dt \end{aligned}$$

Por la simetría de f y g , se puede reescribir como

$$\begin{aligned} I_2 &= -I_1 - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty [\partial_t(Pf)](Pg) + (Pf)[\partial_t(Pg)] dt dx \\ &= -I_1 - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} [(Pf)(Pg)]_{t=0}^\infty dx \\ &= -I_1 + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} fg dx. \end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba. □

Teorema 5.6.8. Para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, se tiene que $\lim_{t \rightarrow 0} (P_t * f) \rightarrow f$ en norma L^p

Demostración. Primero note que por una pequeña manipulación

$$P_t(y) = \frac{c_n t^{-n}}{(1 + |y/t|^2)^{(n+1)/2}} = t^{-n} P_1(y/t)$$

Entonces, como $\int P_t dy = 1$, y por la desigualdad de Minkowski

$$\|P_t * f - f\|_{L^p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot - y) - f(\cdot)\|_{L^p} t^{-n} P_1(y/t) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot - ty) - f(\cdot)\|_{L^p} P_1(y) dy \rightarrow 0,$$

cuando $t \rightarrow 0$. Esto se da como $\|f(\cdot - ty) - f(\cdot)\|_{L^p} \rightarrow 0$, por el Teorema de diferenciación de Lebesgue y se culmina argumentando convergencia dominada. □

Ahora, se presenta un caso especial de una desigualdad de Carleson para variedades demostrada por Hörmander [16].

Lema 5.6.9. Sea μ una medida positiva sobre \mathbb{R}_+^{n+1} tal que $\mu(T(x_0, h)) \lesssim h^n$, donde $T(x_0, h) := \{(x, t) : 0 < t < h, |x - x_0| < h\}$. Entonces, se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} |(Pf)(x, t)|^p d\mu \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx,$$

donde $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, y $1 < p < \infty$.

Demostración. Primero se nota que

$$(Pf)(x, t) \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{tf(y) dy}{(t + |x - y|)^{n+1}}.$$

Cuando $|x_0 - y| < t$, se tiene que

$$\int_{B(x_0, t)} \frac{tf(y) \, dy}{(t + |x - y|)^{n+1}} \lesssim t^{-n} \int_{B(x_0, t)} f(y) \, dy.$$

Además, cuando $2^{k-1}t \leq |x_0 - y| \leq 2^k t$, se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{\{2^{k-1}t \leq |x_0 - y| \leq 2^k t\}} \frac{tf(y) \, dy}{(t + |x - y|)^{n+1}} &\lesssim t^{-n} 2^{n(k-1)} \int_{B(x_0, 2^k t)} f(y) \, dy \\ &\lesssim t^{-n} 2^{n(k-1)} \frac{(2^k t)^n}{|B(x_0, 2^k t)|} \int_{B(x_0, 2^k t)} f(y) \, dy. \end{aligned}$$

Sumando todas las partes se obtiene que

$$(Pf)(x, t) \lesssim \sup_{s \geq t} \frac{1}{|B(x_0, s)|} \int_{B(x_0, s)} f(y) \, dy =: \tilde{f}(x, t).$$

Ahora, se define

$$E(\varepsilon, M) := \left\{ (x', t) : 0 < t < M, \int_{B(x', t)} |f| \, dx > r(\varepsilon + t^n) \right\}.$$

Entonces, si existe una secuencia $(x_j, t_j) \subset E(\varepsilon, M)$, tales que las bolas $B(x_j, t_j)$ son disjuntas, se tiene que

$$\sum_j r(\varepsilon + t_j^n) \leq \sum_j \int_{B(x_j, t_j)} |f| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, dx.$$

Por lo que dichas secuencias deben ser finitas. Entonces, sea $M_1 := \sup\{t : (x, t) \in E(\varepsilon, M)\}$ y se escoje $(x_1, t_1) \in E(\varepsilon, M)$, tal que $3t_1 \geq M_1$. Si ya se escogieron $j - 1$ puntos, entonces se define M_j como el supremo de los t tales que $(x, t) \in E(\varepsilon, M)$ y que $B(x, t)$ es disjunta a las bolas $B(x_1, t_1), \dots, B(x_{j-1}, t_{j-1})$. Luego se escoje (x_j, t_j) tal que $3t_j \geq M_j$. Este proceso termina luego de un número de pasos. Entonces, para $(x, t) \in E(\varepsilon, M)$, se tiene que $B(x, t)$ interseca a algún $B(x_j, t_j)$, particularmente, si j es el menor índice para el que ocurre, se tiene que $t \leq M_j \leq 3t_j$, y que $B(x, t) \subset B(x_j, 3t_j)$. Ahora, se define

$$E'(\varepsilon, M) := \{(x, t) : B(x, t) \subset B(x', t'), (x', t') \in E(\varepsilon, M)\} \subset \bigcup_j \{(x, t) : B(x, t) \subset B(x_j, 3t_j)\}.$$

Por lo que se tiene que

$$\begin{aligned} \mu(E'(\varepsilon, M)) &\leq \sum_j \mu\{(x, t) : B(x, t) \subset B(x_j, 3t_j)\} \\ &\leq \sum_j \mu(T(x_j, 3t_j)) \\ &\lesssim \sum_j t_j^n \leq \frac{1}{r} \int_{\mathbb{R}^n} |f| \, dx. \end{aligned}$$

Además, cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ y $M \rightarrow \infty$, se tiene que $E'(\varepsilon, M)$ crece al conjunto $\{|\tilde{f}| > r\}$. Finalmente, sea χ la función indicadora del conjunto $\{|f| < r\sigma\}$, para descomponer $f = f\chi + f(1 - \chi) =: f_1 + f_2$.

Como $\tilde{f}_1 \leq r\sigma$, entonces $\tilde{f}_2 \geq r(1 - \sigma)$ cuando $\tilde{f} > r$. Por lo que se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{p-1} \mu\{|\tilde{f}| > r\} dr &\lesssim \frac{1}{1-\sigma} \int_0^\infty \int_{|f|>r\sigma} r^{p-2} |f| dx \\ &= \frac{1}{1-\sigma} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{0 < r < |f|/\sigma} r^{p-2} |f| dr dx \\ &= \frac{\sigma^{1-p}}{(1-\sigma)(p-1)} \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx \\ \int_{R_+^{n+1}} |\tilde{f}|^p d\mu &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx, \end{aligned}$$

donde $\sigma < 1$ puede ser escogido a conveniencia. Entonces, se concluye que

$$\int_{R_+^{n+1}} |Pf|^p d\mu \lesssim \int_{R_+^{n+1}} |\tilde{f}|^p d\mu \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f|^p dx.$$

Lo que concluye la prueba. \square

Teorema 5.6.10 (Definición equivalente del espacio de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$). *Para toda $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$, existe una función $F := (u_0, \dots, u_n)$ tal que satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en \mathbb{R}_+^{n+1} . Además,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{t>0} |F(x, t)| dx \lesssim \|f\|_{H^1},$$

y $\lim_{t \rightarrow 0} u_0(x, t) = f(x)$ casi en todas partes, y en norma L^1 .

Demostración. Definase a $u_0 := Pf$, y $u_j := P(R_j f)$, que están bien definidas como $R_j f \in L^1$. Ahora, recuerde las derivadas de las integrales de Poisson

$$\begin{aligned} \partial_t P(R_j f)(x, t) &= - \int_{\mathbb{R}^n} 2\pi |\xi| \widehat{f}(\xi) \frac{i\xi_j}{|\xi|} e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi, \\ \partial_{x_k} P(R_j f)(x, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} 2\pi i \xi_k \widehat{f}(\xi) \frac{i\xi_j}{|\xi|} e^{-2\pi t|\xi|} e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi. \end{aligned}$$

Entonces, $\sum \partial_j u_j = 0$, y $\partial_j u_k = \partial_k u_j$. Además, $\lim_{t \rightarrow 0} u_j(x, t) = R_j f(x)$ casi en todas partes y en norma L^1 . La comparación de normas es resultado de esta convergencia. \square

Nota 5.6.11. En realidad la relación anterior es una doble implicación. Para cada F cuyas componentes satisfagan las ecuaciones de Cauchy-Riemann, y que $\|F\|_{H^1} < \infty$, se puede encontrar una función $f(x) := \lim_{t \rightarrow 0} u_0(x, t)$ en el espacio H^1 . Esto implica demostrar que los límites no-tangenciales de estas funciones existen casi en todas partes y que las componentes u_j son integrales de Poisson de medidas finitas. Entonces, se tiene una definición alternativa para el espacio de Hardy $H^1(\mathbb{R}^n)$ con normas equivalentes. Más aún, es posible definir mediante estas funciones F , los espacios H^p para $p \leq 1$, mediante la cuasi-norma

$$\|F\|_{H^p} := \sup_{t>0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x, t)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Para un tratamiento más detallado, vea Stein [23].

Definición 5.6.12 (Espacio de funciones de oscilación media acotada $BMO(\mathbb{R}^n)$). Para $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$, se define el operador *maximal sharp* como

$$f^\#(x) := \sup_{Q \ni x} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(y) - f_Q| dy,$$

donde f_Q es el valor promedio de f sobre el cubo Q . Se dice que f pertenece al *espacio de funciones de oscilación media acotada* $BMO(\mathbb{R}^n)$ si se tiene que $f^\# \in L^\infty$. En ese caso se define la norma

$$\|f\|_{BMO} := \|f^\#\|_{L^\infty}.$$

En realidad, se toma el cociente respecto a funciones constantes para que la definición de norma sea adecuada.

Ahora, se presenta una norma alternativa que no requiere del cálculo del valor promedio f_Q .

Proposición 5.6.13 (Norma alternativa $BMO(\mathbb{R}^n)$). *Para $f \in BMO(\mathbb{R}^n)$, se tiene que*

$$\frac{1}{2}\|f\|_{BMO} \leq \sup_Q \inf_{b \in \mathbb{C}} \frac{1}{|Q|} \int_Q |f(x) - b| dx \leq \|f\|_{BMO}.$$

Demostración. Para la cota superior basta tomar $b = f_Q$. Para la cota inferior, se tiene que

$$\begin{aligned} \int_Q |f(x) - f_Q| dx &\leq \int_Q |f(x) - b| dx + \int_Q |b - f_Q| dx \\ &= \int_Q |f(x) - b| dx + |Q| |b - f_Q| \\ &\leq 2 \int_Q |f(x) - b| dx. \end{aligned}$$

Lo que completa la prueba. \square

El operador maximal sharp, tiene una relación interesante con el operador maximal de Hardy-Littlewood.

Teorema 5.6.14. *Para $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, se tiene que $f^\# \leq 2Mf$.*

Demostración. Basta con ver que

$$\int_Q |f - f_Q| dx \leq \int_Q |f| dx + |f_Q| \leq 2|f|_Q.$$

El resultado se obtiene de dividir por la medida de Q y tomando el supremo. \square

El resultado converso se tiene en norma y se debe a Fefferman y Stein [14].

Teorema 5.6.15 (Fefferman-Stein). *Sea $f \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, y sea $1 < p < \infty$, donde $1 \leq p_0 \leq p$. Suponga que $f^\# \in L^p(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene que*

$$\|Mf\|_{L^p} \leq A_p \|f^\#\|_{L^p},$$

donde M es el operador maximal de Hardy-Littlewood, y A_p solo depende de p .

Demostración. Se aplica la descomposición de Calderón-Zygmund (vea el Teorema 5.1.23) para obtener una sucesión de cubos diádicos $\{Q_j^\lambda\}$ tales que $|f(x)| \leq \lambda$, para $x \notin \bigcup_j Q_j^\lambda$, y que

$$\lambda < \frac{1}{|Q_j^\lambda|} \int_{Q_j^\lambda} |f(x)| dx \leq 2^n \lambda.$$

Ahora, se puede ver que si $a_g(\lambda) := |\{g > \lambda\}|$ es la función densidad, entonces $a_f(\lambda) = |Q^\lambda| := \left| \bigcup_j Q_j^\lambda \right|$. Entonces, se busca probar

$$a_f(\lambda) \leq a_{f^\#}(\lambda/A) + \frac{2}{A} a_f(2^{-n-1}\lambda), \quad (5.6.1)$$

Para ello, se fija $Q_0 = Q_j^{\lambda 2^{-n-1}}$. Si se tiene que $Q_0 \subset \{f^\# > \lambda/A\}$, entonces, es trivial que

$$\sum_{Q_j^\lambda \subset Q_0} |Q_j^\lambda| \leq |\{f^\# > \lambda/A\} \cap Q_0|.$$

En caso contrario, por definición se tiene que

$$\frac{1}{|Q_0|} \int_{Q_0} |f - f_{Q_0}| dx \leq \frac{\lambda}{A}.$$

Por otra parte, $|f_{Q_0}| \leq 2^n(2^{-n-1}\lambda) = \lambda/2$, y $|f|_{Q_j^\lambda} \leq \lambda$. Entonces, se tiene que

$$\int_{Q_j^\lambda} |f - f_{Q_0}| dx \geq \frac{\lambda}{2} |Q_j^\lambda|,$$

donde $Q_j^\lambda \subset Q_0$. Entonces, se tiene que

$$\sum_{Q_j^\lambda \subset Q_0} |Q_j^\lambda| \leq \frac{2}{A} |Q_0|.$$

Se obtiene (5.6.1) al sumar sobre todos los cubos Q_0 . Ahora, note que si $x \in Q_j^\lambda$, entonces

$$Mf(x) \geq \frac{1}{|Q_j^\lambda|} \int_{Q_j^\lambda} |f| dx > \lambda,$$

y $a_f(\lambda) \leq a_{Mf}(\lambda)$. Además, se define $2Q_j^\lambda$ como el cubo concentrico a Q_j^λ , tal que $\ell(2Q_j^\lambda) = 2\ell(Q_j^\lambda)$, y se fija $x \notin \bigcup 2Q_j^\lambda$. Sea Q cualquier cubo que contenga a x , entonces

$$\int_Q |f(y)| dy = \int_{Q \cap Q_j^\lambda} |f(y)| dy + \int_{Q \cap (\mathbb{R}^n \setminus Q_j^\lambda)} |f(y)| dy =: I_1 + I_2.$$

Note que $I_2 \leq \lambda|Q|$. Para I_1 , vea que si $Q \cap Q_j^\lambda$ es no vacío, entonces $Q_j^\lambda \subset 4Q$, dado que $Q \not\subset 2Q_j^\lambda$ implica $\ell(Q) > \ell(Q_j^\lambda)$. Por lo que

$$I_1 \leq \sum_{Q_j^\lambda \subset 4Q} \int_{Q_j^\lambda} |f(y)| dy \leq \sum_{Q_j^\lambda \subset 4Q} 2^n \lambda |Q_j^\lambda| \leq 2^n 4^n \lambda |Q|.$$

Entonces, se puede concluir que

$$2^{-n} a_{Mf}[(1 + 2^n 4^n) \lambda] \leq a_f(\lambda) \leq a_{Mf}(\lambda). \quad (5.6.2)$$

Por otra parte, se define

$$I_N := p \int_0^N \lambda^{p-1} a_f(\lambda) d\lambda \leq p \int_0^N \lambda^{p-1} a_{Mf}(\lambda) d\lambda.$$

También, se sabe que si $p_0 > 1$, entonces $I_N \leq \|Mf\|_{L^{p_0}}$, y que si $p_0 = 1$, entonces $a_{Mf}(\lambda) \lesssim \lambda^{-1}$ (vea el Teorema 5.1.25). En general, se tiene que $I_N < \infty$ como $f \in L^{p_0}$. Por (5.6.1) se tiene que

$$\begin{aligned} I_N &\leq p \int_0^N \lambda^{p-1} a_{f^\#}(\lambda/A) d\lambda + \frac{2}{A} p \int_0^N \lambda^{p-1} a_f(2^{-n-1}\lambda) d\lambda \\ &\leq A^p p \int_0^N \lambda^{p-1} a_{f^\#}(\lambda) d\lambda + \frac{2}{A} p 2^{(n+1)p} \int_0^{N 2^{-n-1}} \lambda^{p-1} a_f(\lambda) d\lambda \\ &\leq A^p \|f^\#\|_{L^p} + \frac{2}{A} 2^{(n+1)p} I_N. \end{aligned}$$

Por lo que, si se escoge $A = 4 \cdot 2^{(n+1)p}$, se tiene que $I_N \leq 4 \cdot 2^{(n+1)p} \|f^\#\|_{L^p}$. Finalmente, se concluye que

$$\begin{aligned} \|Mf\|_{L^p} &= p \int_0^N \lambda^{p-1} a_{Mf}(\lambda) d\lambda \\ &\leq 2^n (1 + 2^n 4^n)^{-p} p \int_0^\infty \lambda^{p-1} a_f(\lambda) d\lambda \\ &= 2^n (1 + 2^n 4^n)^{-p} \lim_{N \rightarrow \infty} I_N \leq A_p \|f^\#\|_{L^p}, \end{aligned}$$

con $A_p = 2^n (1 + 2^n 4^n)^{-p} 4 \cdot 2^{(n+1)p}$. Se puede ver que la constante solo depende de n y p , concluyendo la prueba \square

A continuación se presenta el resultado clásico de Fefferman [12], y la demostración se guía de la presentada en su trabajo con Stein [14].

Teorema 5.6.16 (Fefferman). *El dual de $H^1(\mathbb{R}^n)$ es $BMO(\mathbb{R}^n)$. Esto puede entenderse de la siguiente manera*

1. Para $\varphi \in BMO$, el funcional $f \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) f(x) dx$ es acotado en H^1 .
2. Para cualquier funcional continuo en H^1 , se comporta como el funcional en (1) para una única función $\varphi \in BMO$.

Para ello, se enuncia este teorema auxiliar.

Teorema 5.6.17. *Para φ , los siguientes enunciados son equivalentes*

1. φ pertenece a $BMO(\mathbb{R}^n)$,
2. $\varphi = \varphi_0 + \sum_{j=1}^n R_j \varphi_j$, donde $\varphi_0, \dots, \varphi_n \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$,
3. se tiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x)| dx}{1 + |x|^{n+1}} < \infty,$$

y que

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \int_{T(x_0, h)} t |\nabla(P\varphi)(x, t)|^2 dx dt \lesssim h^n,$$

donde $0 < h < \infty$, $T(x_0, h) := \{(x, t) : 0 < t < h, |x - x_0| < h\}$, y $P\varphi$ su integral de Poisson.

Los dos teoremas anteriores se demuestran en conjunto de la siguiente manera: Teorema 5.6.16 \Rightarrow Teorema 5.6.17(2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow Teorema 5.6.16.

Demostración. (Teorema 5.6.16 \Rightarrow 2) Sea $B := \bigoplus^{n+1} L^1$ el espacio de Banach con la norma dada por $\|(f_0, \dots, f_n)\| := \sum \|f_j\|_{L^1}$. Entonces, sea S el subespacio en el que $f_j = R_j f_0$, que claramente es cerrado y que es isométrico a H^1 mediante el mapa $f_0 \mapsto (f_0, R_1 f_0, \dots, R_n f_0)$. Entonces, por el Teorema Hahn-Banach, cada funcional continuo definido en H^1 , puede ser extendido a un funcional continuo en B , cuyo dual es $\bigoplus^{n+1} L^\infty$. Es decir, para cada funcional T continuo en H^1 , existen $\varphi_0, \dots, \varphi_n \in L^\infty$, tales que

$$T(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \varphi_0 dx + \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (R_j f) \varphi_j dx.$$

Por otra parte, se tiene que por la transformada de Fourier

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (R_j f) \varphi_j dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y) \cdot \xi} \frac{i\xi_j}{|\xi|} f(y) dy d\xi \right] \varphi_j(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \left[\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y) \cdot \xi} \frac{i\xi_j}{|\xi|} \varphi_j(x) dx d\xi \right] dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^n} f(y) (R_j \varphi_j)(y) dy. \end{aligned}$$

Por lo que cada funcional continuo T se puede escribir como

$$T(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f \left[\varphi_0 - \sum_{j=1}^n R_j \varphi_j \right] dx.$$

(2 \Rightarrow 1) En vista del inciso anterior, basta con demostrar que para cualquier $\varphi \in L^\infty$, se tiene que $R_j \varphi \in \text{BMO}$. Para un cubo Q de diametro σ , sea χ , la función indicadora para puntos $|x - x_Q| \leq 2\sigma$, para descomponer

$$\varphi = \varphi \chi + \varphi(1 - \chi) =: \varphi_1 + \varphi_2.$$

Entonces, se tiene que $\widehat{R_j \varphi_1}(\xi) = i \xi_j \widehat{\varphi_1}(\xi)/|\xi|$ y por la desigualdad de Hölder e identidad de Plancherel

$$\frac{1}{|Q|} \int_Q |R_j \varphi_1| dx \leq |Q|^{-1/2} \|R_j \varphi_1\|_{L^2} \leq |Q|^{-1/2} \|\widehat{\varphi_1}\|_{L^2} \lesssim \|\varphi\|_{L^\infty}. \quad (5.6.3)$$

Por otra parte, se puede verificar que la transformada de Riesz, equivale a la siguiente convolución

$$(R_j f)(x) = (K_j * f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{x_j - y_j}{|x - y|^{n+1}} f(y) dy.$$

Ahora, por el Teorema del valor medio, se tiene que

$$|K_j(x - y) - K_j(x_Q - y)| \leq |x - x_Q| \sup_z |\nabla K_j(z)|,$$

donde z se encuentra entre $x - y$, y $x_Q - y$. Además, se tiene que $|\nabla K_j(z)| \lesssim |z|^{n+1}$. Ahora, para y en el soporte de φ_2 , y $x \in Q$, se tiene que

$$|y - x| \geq |y - x_Q| - |x_Q - x| \geq |x_Q - x|.$$

Por lo que $|z| \gtrsim |x_Q - y|$ y se tiene que

$$|(R_j \varphi_2)(x) - (R_j \varphi_2)(x_Q)| \lesssim \sigma \int_{|x_Q - y| > 2\sigma} \frac{\|\varphi\|_{L^\infty}}{|x_Q - y|^{n+1}} dy \lesssim \|\varphi\|_{L^\infty}. \quad (5.6.4)$$

Escogiendo $b = (R_j \varphi_2)(x_Q)$ en la norma equivalente en BMO se tiene que

$$\|R_j \varphi\|_{\text{BMO}} \lesssim \sup_Q \frac{1}{|Q|} \int_Q |(R_j \varphi_2)(x) - (R_j \varphi_2)(x_Q)| + |R_j \varphi_1(x)| dx \lesssim \|\varphi\|_{L^\infty}.$$

(1 \Rightarrow 3) Sea Q el cubo de lado uno centrado en el origen, y Q_k el cubo de lado 2^k con el mismo centro. Entonces, se tiene que

$$\left| \int_{Q_{k-1}} [\varphi(x) - \varphi_{Q_k}] dx \right| \leq \int_{Q_k} |\varphi(x) - \varphi_{Q_k}| dx \leq 2^{nk} \|\varphi\|_{\text{BMO}}.$$

Por lo que $|\varphi_{Q_{k-1}} - \varphi_{Q_k}| \leq 2^n \|\varphi\|_{\text{BMO}}$, y se tiene que

$$\int_{Q_k} |\varphi(x) - \varphi_Q| dx \leq 2^{nk} [1 + 2^n k] \|\varphi\|_{\text{BMO}}.$$

Particularmente, se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{Q_{k+1} \setminus Q_k} \frac{|\varphi(x) - \varphi_Q|}{1 + |x|^{n+1}} dx &\lesssim \int_{Q_{k+1} \setminus Q_k} \frac{|\varphi(x) - \varphi_Q|}{1 + 2^{k(n+1)}} dx \\ &\leq \frac{2^{nk+n} [1 + 2^n (k+1)]}{1 + 2^{kn+k}} \|\varphi\|_{\text{BMO}}. \end{aligned}$$

Por lo que sumar todas las expresiones de este estilo resulta en

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\varphi(x) - \varphi_Q|}{1 + |x|^{n+1}} dx \lesssim \|\varphi\|_{\text{BMO}} < \infty.$$

Para el segundo estimativo, fije $x_0 = 0$, y sea Q el cubo centrado en el origen, de lado $4h$. Sea χ su función característica y $\tilde{\chi}$ la de su complemento. Entonces, se descompone a φ de la siguiente manera

$$\varphi = \varphi_Q + (\varphi - \varphi_Q)\chi + (\varphi - \varphi_Q)\tilde{\chi} =: \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3.$$

Primero, φ_1 es constante y no aporta a la norma del gradiente. Por la identidad de Plancherel se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{T(0,h)} t |\nabla(P\varphi_2)(x,t)|^2 dx dt &\leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t |\nabla(P\varphi_2)(x,t)|^2 dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\varphi_2}(\xi)|^2 \left[8\pi^2 |\xi|^2 \int_0^\infty t e^{-4\pi t |\xi|} dt \right] d\xi \\ &= \frac{1}{2} \|\widehat{\varphi_2}\|_{L^2}^2 \\ &= \int_Q |\varphi(x) - \varphi_Q| dx \lesssim h^n \|\varphi\|_{\text{BMO}}^2, \end{aligned}$$

por los cálculos realizados en el inciso anterior. Por otra parte, sigue que

$$\begin{aligned} |\nabla(P\varphi_3)(x,t)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla P_t(x-y)| |\varphi_3(y)| dy \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q} \left[\frac{1}{t + |x-y|} \right]^{n+1} |\varphi(y) - \varphi_Q| dy. \end{aligned}$$

Pero, para $(x,t) \in T(0,h)$, se tiene que

$$\left[\frac{1}{t + |x-y|} \right]^{n+1} \lesssim \frac{1}{h^{n+1} + |y|^{n+1}},$$

y que $|\nabla(P\varphi_3)(x,t)| \lesssim h^{-1} \|\varphi\|_{\text{BMO}}$. Finalmente se concluye que en realidad

$$\sup_{x_0 \in \mathbb{R}^n} \int_{T(x_0,h)} t |\nabla(P\varphi)(x,t)|^2 dx dt \lesssim h^n \|\varphi\|_{\text{BMO}}.$$

(3 \Rightarrow Teorema 5.6.16) En vista del Teorema 5.6.7, basta demostrar que para $f \in H^1$ apropiado se tiene que

$$\left| \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t [\nabla(Pf)] [\nabla(P\varphi)] dx dt \right| \lesssim \|f\|_{H^1}.$$

Además, en vista del Teorema 5.6.10 se tiene que existe $F = (u_0, \dots, u_n)$, que satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann generalizadas, tal que $u_0(x,0) = f(x)$, y que gracias a un argumento de densidad, decae rápidamente en el infinito. También, se puede requerir sin pérdida de generalidad que $|F| > 0$, y que $\Delta(|F|) = O(|x| + t + 1)^{-n-\delta}$ en su dominio. Entonces, el lado izquierdo de la expresión anterior puede ser acotado por

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t |\nabla(Pf)| |\nabla(P\varphi)| dx dt &\leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla F| |\nabla(P\varphi)| dx dt \\ &\leq \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t |\nabla(P\varphi)|^2 |F| dx dt \right)^{1/2} \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t |F|^{-1} |\nabla F|^2 dx dt \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Ahora, por el Teorema 5.6.3 se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t|F|^{-1}|\nabla F|^2 dx dt &\lesssim \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t\Delta(|F(x,t)|) dx dt \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,0)| dx \lesssim \|f\|_{H^1}, \end{aligned}$$

por el Teorema de Green. Por otra parte, se define $g(x) := |F(x,0)|^q$, con $q = (n-1)/n$. Entonces, por el Lema 5.6.3, se tiene que $\Delta(|F|^q - Pg) \geq 0$ y como $Pg = |F|^q$ en la frontera, el principio maximal implica $|F(x,t)| \leq [(Pg)(x,t)]^p$, donde $p = 1/q > 1$. En particular

$$\|g\|_{L^p}^p \leq \int_{\mathbb{R}^n} |F(x,0)| dx \lesssim \|f\|_{H^1}.$$

Entonces, el término restante puede ser estimado utilizando el Lema 5.6.9 con $d\mu := t|\nabla(P\varphi)|^2 dx dt$. En efecto,

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t|\nabla(P\varphi)|^2 |F| dx dt \leq \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} t|\nabla(P\varphi)|^2 |Pg|^p dx dt \lesssim \|g\|_{L^p}^p \lesssim \|f\|_{H^1}.$$

Lo que concluye la prueba. \square

Nota 5.6.18. En esta demostración se demostró en $(1 \Rightarrow 3)$ una propiedad de la conocida función- g de Littlewood-Paley, que se define como

$$g(f)(x) := \left(\int_0^\infty |\nabla P f(x,t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

En particular, se demuestra que $\|g\|_{L^2} \sim \|f\|_{L^2}$.

Ahora, se presenta la teoría de interpolación compleja.

Definición 5.6.19 (Parejas de espacios). Sean A_0 , y A_1 espacios de Banach. Se dice que estos son *compatibles* si existe un espacio topológico de Hausdorff que los contenga como subespacios, y se denota a la *pareja de espacios* como $\overline{A} := (A_0, A_1)$. Ahora, se define el *espacio intersección* $\Delta(\overline{A}) := A_0 \cap A_1$, con la norma

$$\|a\|_{\Delta(\overline{A})} := \max\{\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}\}.$$

Además, se define el *espacio suma* $\Sigma(\overline{A}) := A_0 + A_1$, con la norma

$$\|a\|_{\Sigma(\overline{A})} := \inf_{a=a_0+a_1} (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}).$$

No es complicado demostrar que estos espacios también son de Banach. Por otra parte, se define un mapa entre parejas $T : \overline{A} \rightarrow \overline{B}$ como un mapa lineal continuo $T : \Sigma(\overline{A}) \rightarrow \Sigma(\overline{B})$, tales que sus restricciones $T|_{A_j} : A_j \rightarrow B_j$ son mapas lineales continuos para $j = 0, 1$. En consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned} \|T\|_{\Delta(\overline{A}), \Delta(\overline{B})} &\leq \max\{\|T\|_{A_0, B_0}, \|T\|_{A_1, B_1}\}, \\ \|T\|_{\Sigma(\overline{A}), \Sigma(\overline{B})} &\leq \max\{\|T\|_{A_0, B_0}, \|T\|_{A_1, B_1}\}. \end{aligned}$$

Definición 5.6.20 (Espacios intermedios y de interpolación). Sea $\overline{A} := (A_0, A_1)$ una pareja compatible, entonces A es un *espacio intermedio* respecto a \overline{A} si $\Delta(\overline{A}) \subset \Sigma(\overline{A})$. Además, se dice que dos espacios intermedios A, B respecto a $\overline{A}, \overline{B}$ respectivamente, son *espacio de interpolación*, si $T : \overline{A} \rightarrow \overline{B}$ implica $T : A \rightarrow B$. Si además, se tiene que

$$\|T\|_{A, B} \leq C \max\{\|T\|_{A_0, B_0}, \|T\|_{A_1, B_1}\},$$

se dice que son *espacios de interpolación uniformes*, y cuando $C = 1$ se dice que son *espacios de interpolación exacta*. Sea $0 \leq \theta \leq 1$, entonces se dice que A, B son de *exponente* θ si

$$\|T\|_{A, B} \leq C \|T\|_{A_0, B_0}^{1-\theta} \|T\|_{A_1, B_1}^\theta.$$

Además, si $C = 1$, se dice que son de *exponente exacto*.

Nota 5.6.21. Se puede ver que lo que en realidad se definió es una categoría cuyos objetos son las parejas compatibles y sus morfismos los mapas definidos anteriormente. A continuación se definen los funtores de interpolación.

Definición 5.6.22 (Functor de interpolación). Se dice que F es un *functor de interpolación* si para parejas $\overline{A}, \overline{B}$, entonces $F(\overline{A}), F(\overline{B})$ son espacios de interpolación. Además, se tiene que $F(T)$ para $T : \overline{A} \rightarrow \overline{B}$.

Ahora, se presentan las particularidades del método de interpolación compleja.

Definición 5.6.23. Dada una pareja \overline{A} de espacios de Banach, se define a $\mathfrak{F}(\overline{A})$ como el conjunto de funciones $f : \mathbb{C} \rightarrow \Sigma(\overline{A})$, tales que son continuas y acotadas en la banda $S := \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1\}$, y que son analíticas en el interior de la misma. Además, se requiere que el mapa $t \mapsto f(j + it)$ sea continuo en A_j y se desvanezcan cuando $t \rightarrow \infty$, para $j = 1, 0$. Además, se define la norma

$$\|f\|_{\mathfrak{F}} := \max\{\sup \|f(it)\|_{A_0}, \sup \|f(1 + it)\|_{A_1}\}.$$

Se puede verificar que es un espacio de Banach. Por otra parte, se define el functor de interpolación $\overline{A}_{[\theta]} = C_{\theta}(\overline{A})$ como el espacio de vectores $a \in \Sigma(\overline{A})$, tales que $a = f(\theta)$ para algún $f \in \mathfrak{F}(\overline{A})$. Además, se define la norma

$$\|a\|_{[\theta]} := \inf\{\|f\|_{\mathfrak{F}} : f(\theta) = a\}.$$

Teorema 5.6.24. *El espacio $\overline{A}_{[\theta]}$ es un espacio de Banach y es un espacio de interpolación the exponente exacto θ .*

Demostración. Es claro que el mapa $f \mapsto f(\theta)$ es continuo desde $\mathfrak{F}(\overline{A})$ hacia $\Sigma(\overline{A})$, dado que $\|f(\theta)\|_{\Sigma} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}}$. El kernel de este mapa es el conjunto $\mathcal{N}_{\theta} := \{f : f(\theta) = 0\}$. Entonces, $\overline{A}_{[\theta]}$ es isomorfo e isométrico al cociente $\mathfrak{F}/\mathcal{N}_{\theta}$. Además, como \mathcal{N}_{θ} es cerrado, se tiene que es un espacio de Banach. Ahora, se tiene que $\|a\|_{\Sigma} = \|f(\theta)\|_{\Sigma} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}}$, que implica que $\overline{A}_{[\theta]} \subset \Sigma(\overline{A})$. Asimismo, sea

$$f(z) := e^{(z-\theta)^2} a,$$

que implica que $\Delta(\overline{A}) \subset \overline{A}_{[\theta]}$. Entonces, es un espacio intermedio. Por otra parte, suponga T_j mapea a A_j en B_j con norma M_j . Dado $a \in \overline{A}_{[\theta]}$, y dado $\varepsilon > 0$, existe $f \in \mathfrak{F}(\overline{A})$ tal que $f(\theta) = a$ y que $\|f\|_{\mathfrak{F}} \leq \|a\|_{[\theta]} + \varepsilon$. Entonces, sea

$$g(z) := M_0^{z-1} M_1^{-z} T(f(z)),$$

que pertenece a $\mathfrak{F}(\overline{B})$. Además, $\|g\|_{\mathfrak{F}} \leq \|f\|_{\mathfrak{F}}$, pero $g(\theta) = M_0^{\theta-1} M_1^{-\theta} T(a)$ y se concluye que

$$\|Ta\|_{[\theta]} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|g\|_{\mathfrak{F}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{\mathfrak{F}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} (\|a\|_{[\theta]} + \varepsilon).$$

Lo que concluye la prueba. \square

Ahora, se puede expresar el Teorema de interpolación de Riesz en el lenguaje que se estableció anteriormente.

Teorema 5.6.25. *Sean $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, entonces para $0 < \theta < 1$ se tiene que*

$$(L^{p_0}, L^{p_1})_{[\theta]} = L^p, \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Ahora, se presenta el resultado de dualidad de interpolación compleja que permite explotar el hecho que BMO es el dual de H^1 .

Teorema 5.6.26. *Sea $\overline{A} := (A_0, A_1)$ una pareja compatible de espacios de Banach tales que $\Delta(\overline{A})$ es denso en ambos espacios y al menos uno de los espacios es reflexivo. Entonces*

$$(A_0, A_1)'_{[\theta]} = (A'_0, A'_1)_{[\theta]},$$

con igualdad de normas.

Este resultado no se demuestra, ya que se encuentra fuera de los alcances de este trabajo, pero se recomienda revisar Bergh y Löfstrom [3]. Por otra parte, se presenta el resultado que permite realizar interpolación utilizando el espacio H^1 y el espacio BMO.

Teorema 5.6.27. *Sea $1 < p \leq \infty$, entonces se tiene que*

$$(H^1, L^p)_{[\theta]} = L^q, \quad (\text{BMO}, L^{p'})_{[\theta]} = L^{q'}, \quad \text{con} \quad \frac{1}{q} = 1 - \theta + \frac{\theta}{p}.$$

Sin embargo, para los intereses de este trabajo, se demuestran el siguiente corolario, cuya prueba directa contiene las ideas generales del resultado anterior.

Corolario 5.6.28. *Sea $z \mapsto T_z$ un mapa de la banda cerrada $0 \leq \text{Re } z \leq 1$ a operadores acotados en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Suponga que el mapa es continuo y acotado en la banda, y analítico en su interior. Además, fije $\frac{1}{p} = 1 - \frac{\theta}{2}$, para $0 < \theta < 1$.*

1. *Suponga*

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \mathbb{R}} \|T_{iy}f\|_{L^1} &\leq M_0 \|f\|_{H^1}, \quad f \in L^2 \cap H^1 \\ \sup_{y \in \mathbb{R}} \|T_{1+iy}f\|_{L^2} &\leq M_1 \|f\|_{L^2}, \quad f \in L^2. \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que

$$\|T_\theta f\|_{L^p} \leq M_\theta \|f\|_{L^p}, \quad f \in L^2 \cap L^p.$$

2. *Suponga*

$$\begin{aligned} \sup_{y \in \mathbb{R}} \|T_{iy}f\|_{\text{BMO}} &\leq M_0 \|f\|_{L^\infty}, \quad f \in L^2 \cap L^\infty \\ \sup_{y \in \mathbb{R}} \|T_{1+iy}f\|_{L^2} &\leq M_1 \|f\|_{L^2}, \quad f \in L^2. \end{aligned}$$

Entonces, se tiene que

$$\|T_\theta f\|_{L^{p'}} \leq M_\theta \|f\|_{L^{p'}}, \quad f \in L^2 \cap L^{p'}.$$

Donde M_θ solo depende de M_0 , M_1 , y θ .

Demostración. La prueba del primer inciso contiene incluida la prueba del segundo inciso, gracias a la propiedad de dualidad entre H^1 y BMO. Así que suponga las hipótesis del inciso (1). Sea S_z el adjunto (en L^2) del operador $T_{\bar{z}}$, es decir

$$\int_{\mathbb{R}^n} T_z(f)g \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} f \overline{S_{\bar{z}}(g)} \, dx,$$

para $f, g \in L^2$. Entonces, se tiene que el mapa $z \mapsto S_z$ es continuo y acotado en la banda cerrada, y analítico en su interior. Ahora, para $g \in L^2 \cap L^\infty$, y $f \in L^2 \cap H^1$, se tiene que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f S_{iy}(g) \, dx \right| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \overline{T_{-iy}(f)} g \, dx \right| \leq \|T_{-iy}f\|_{L^1} \|g\|_{L^\infty} \leq M_0 \|f\|_{H^1} \|g\|_{L^\infty}.$$

Entonces, se tiene que $S_{iy}g$, es la restricción de un funcional acotado en H^1 , por lo que en vista del Teorema 5.6.16, se tiene que $\|S_{iy}g\|_{\text{BMO}} \leq C_0 M_0 \|g\|_{L^\infty}$. La dualidad de L^2 permite un argumento similar para así concluir $\|S_{iy}g\|_{L^2} \leq M_1 \|g\|_{L^2}$, y que S_z cumple las condiciones del inciso (2). Ahora, sea $x \mapsto Q(x)$ una función medible que mapea puntos a cubos que los contienen, y sea $\eta(x, y)$ una función medible en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, tal que $|\eta(x, y)| = 1$. Además, se define el operador

$$(U_z f)(x) := \frac{1}{|Q(x)|} \int_{Q(x)} [F(y) - F_{Q(x)}] \eta(x, y) \, dy,$$

con $F = S_z f$. Note que $\sup |U_z f(x)| = F^\#(x)$, si el supremo se toma sobre todas las funciones Q y η . Además, como $\|F^\#\|_{L^2} \leq 2\|MF\|_{L^2} \leq C_1\|F\|_2$ (vea el Teorema 5.1.25), entonces se tiene que la función $z \mapsto \int U_z(f)g \, dx$ es acotada y continua en la banda cerrada, y analítica en su interior. También cumple que

$$\|U_{iy}f\|_{L^\infty} = \|F^\#\|_{L^\infty} = \|F\|_{\text{BMO}} = \|S_{iy}f\|_{\text{BMO}} \leq C_0 M_0 \|f\|_{L^\infty}, \quad f \in L^2 \cap L^\infty,$$

$$\|U_{1+iy}f\|_{L^2} = \|F^\#\|_{L^2} \leq C_1\|F\|_{L^2} = C_1\|S_{1+iy}f\|_{L^2} \leq C_1 M_1 \|f\|_{L^2}, \quad f \in L^2.$$

Por el Teorema de interpolación de Riesz-Thorin (Teorema 5.1.6), se tiene que

$$\|U_\theta f\|_{L^{p'}} \leq (C_0 M_0)^{1-\theta} (C_1 M_1)^\theta \|f\|_{L^{p'}}, \quad \frac{1}{p'} = \frac{\theta}{2}.$$

Como esta cota no depende de las funciones Q o η , entonces se puede tomar el supremo y obtener que

$$\|F^\#\|_{L^{p'}} = \|(S_\theta f)^\#\|_{L^{p'}} \leq (C_0 M_0)^{1-\theta} (C_1 M_1)^\theta \|f\|_{L^{p'}}.$$

Al aplicar el Teorema 5.6.15, se obtiene que

$$\|S_\theta f\|_{L^{p'}} \leq \|M(S_\theta f)\|_{L^{p'}} \leq A_{p'} \|(S_\theta f)^\#\|_{L^{p'}} \leq A_{p'} (C_0 M_0)^{1-\theta} (C_1 M_1)^\theta \|f\|_{L^{p'}}.$$

Por lo que se obtiene el resultado del inciso (2). El inciso (1) se completa mediante un argumento de dualidad, ambos con $M_\theta = A_{p'} (C_0 M_0)^{1-\theta} (C_1 M_1)^\theta$. \square

Para concluir, se presenta una definición alternativa del espacio de Hardy H^1 . Aquí, se adapta el caso p de la prueba general presentada por Stein [24].

Definición 5.6.29 (Descomposición atómica $H_{at}^1(\mathbb{R}^n)$). Se le llama *átomo* a una función $a : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ soportada en una bola B , que cumple que

$$\|a\|_{L^\infty} \leq |B|^{-1}, \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{R}^n} a(x) \, dx = 0.$$

Además, se dice que $f \in H_{at}^1(\mathbb{R}^n)$ si existe una *descomposición atómica*, es decir una secuencia de átomos (a_j) que satisfaga

$$f = \sum_j \lambda_j a_j, \quad \sum_j |\lambda_j| < \infty.$$

También se define la norma

$$\|f\|_{H_{at}^1} := \inf \left\{ \sum_j |\lambda_j| : f = \sum_j \lambda_j a_j \right\}$$

Teorema 5.6.30. *Se tiene que $H^1(\mathbb{R}^n) = H_{at}^1(\mathbb{R}^n)$, con equivalencia de norma.*

Demostración. ($\|\cdot\|_{H^1} \lesssim \|\cdot\|_{H_{at}^1}$) Para esta dirección, basta con ver que los átomos tienen norma H^1 uniforme. Primero, por (5.6.3), se tiene que para un átomo a relacionado a una bola $B(z, \sigma)$

$$\int_{B(z, 2\sigma)} |R_j a(x)| \, dx \lesssim |B(z, \sigma)| \|a\|_{L^\infty} \leq C.$$

Ahora, por (5.6.4), se tiene que para $|x - z| > 2\sigma$,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(z, 2\sigma)} |K_j(y - x) - K(z - x)| \, dx \leq C.$$

Además, por la propiedad de cancelación

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(z, 2\sigma)} |R_j a| dx &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(z, 2\sigma)} \left| \int_{B(z, \sigma)} a(y) [K_j(x-y) - K_j(x-z)] dy \right| dx \\ &\leq \int_{B(z, \sigma)} |a(y)| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B(z, 2\sigma)} |K_j(x-y) - K_j(x-z)| dx dy \\ &\leq C \int_{B(z, \sigma)} |a(y)| dy \leq C. \end{aligned}$$

En conclusión $\|R_j a\|_{L^1} \leq C$, y esto permite asegurar la convergencia en H^1 de la serie de átomos, y que para cualquier $\varepsilon > 0$

$$\|f\|_{H^1} \leq \sum_j |\lambda_j| \|a_j\|_{H^1} \lesssim \sum_j |\lambda_j| \leq \|f\|_{H_{at}^1} + \varepsilon.$$

($\|\cdot\|_{H_{at}^1} \lesssim \|\cdot\|_{H^1}$) Para la construcción de los átomos, se aplica la descomposición de Calderón-Zygmund a $\mathcal{M}f := |f_0| + \sum |R_j f|$, al nivel $\lambda = 2^m$, para obtener una sucesión de cubos diádicos $\{Q_k^m\}$ tales que

$$2^m < \frac{1}{|Q_k^m|} \int_{Q_k^m} \mathcal{M}f dx \leq 2^{n+m},$$

$$|Q^m| := \left| \bigcup_k Q_k^m \right| \lesssim 2^{-m} \|\mathcal{M}f\|_{L^1} = 2^{-m} \|f\|_{H^1},$$

y si $x \notin Q^m$, entonces $\mathcal{M}f(x) \leq 2^m$ casi en todas partes. Entonces, se definen

$$g^m := f(1 - \chi_{Q^m}) + \sum_k f_{\frac{1}{2}Q_k^m} \chi_{\frac{1}{2}Q_k^m}, \quad b^m := \sum_k b_k^m := \sum_k (f - f_{\frac{1}{2}Q_k^m}) \chi_{\frac{1}{2}Q_k^m}.$$

Por lo que, para $x \in Q_k^m$, se tiene que

$$\begin{aligned} |R_j b_k^m| &\leq \left| \int_{Q_k^m} K_j(x-y) f(y) dy \right| + \left| \int_{Q_k^m} K_j(x-y) f_{\frac{1}{2}Q_k^m} dy \right| \\ &\leq |R_j f| + \left| \int_{Q_k^m} K_j(x-y) \frac{2^n}{|Q_k^m|} \int_{\frac{1}{2}Q_k^m} f(x) dx dy \right| \\ &\leq |R_j f| + \frac{2^n}{|Q_k^m|} \int_{Q_k^m} |R_j f(y)| dy \\ &\lesssim |R_j f| + |R_j f|_{Q_k^m} \lesssim |R_j f| + 2^{n+m} \lesssim \mathcal{M}f. \end{aligned}$$

Ahora, cuando $x \notin Q_k^m$, se aprovecha el hecho que $\int b_k^m = 0$, para tener que

$$R_j b_k^m = \int_{\mathbb{R}^n} b_k^m(y) [K_j(x-y) - K_j(x-x_{Q_k^m})] dy$$

Aquí, $x_{Q_k^m}$ es el centro del cubo. Por un argumento similar al de (5.6.4), se tiene que

$$|R_j b_k^m| \lesssim \int_{Q_k^m} \frac{\ell(Q_k^m) |f(y) - f_{\frac{1}{2}Q_k^m}|}{|x - x_{Q_k^m}|^{n+1}} dy \leq 2|f|_{\frac{1}{2}Q_k^m} \frac{\ell(Q_k^m)}{|x - x_{Q_k^m}|^{n+1}} |Q_k^m| \lesssim 2^{n+m} \frac{\ell(Q_k^m)^{n+1}}{|x - x_{Q_k^m}|^{n+1}}.$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}b_k^m dx &= \int_{Q_k^m} \mathcal{M}b_k^m dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus Q_k^m} \mathcal{M}b_k^m dx \\
&\leq \int_{Q_k^m} \mathcal{M}f dx + \int_{|x-x_{Q_k^m}| > \ell(Q_k^m)} 2^m \frac{\ell(Q_k^m)^{n+1}}{|x-x_{Q_k^m}|^{n+1}} dx \\
&\lesssim \int_{Q_k^m} \mathcal{M}f dx + 2^m \ell(Q_k^m)^n \\
&\lesssim \int_{Q_k^m} \mathcal{M}f dx + 2^m |Q_k^m| \lesssim \int_{Q_k^m} \mathcal{M}f dx.
\end{aligned}$$

Por lo que se tiene que

$$\|b^m\|_{H^1} \leq \sum_k \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}b_k^m dx \leq \sum_k \int_{Q_k^m} \mathcal{M}f dx \leq \int_{Q^m} \mathcal{M}f dx \rightarrow 0,$$

cuando se hace $m \rightarrow \infty$, dado que $Q^m = \{\mathcal{M}f > 2^m\}$. Equivalentemente, $\|f - g^m\|_{H^1} \rightarrow 0$. Además, como $g^m \rightarrow 0$ cuando $m \rightarrow -\infty$, se tiene que

$$f = \sum_{m \in \mathbb{Z}} (g^{m+1} - g^m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_k (g^{m+1} - g^m) \chi_{Q_k^m},$$

como $g^{m+1} - g^m = b^m - b^{m+1}$, que se encuentra soportado en Q^m . Ahora, se define B_k^m como la menor bola que contiene al cubo Q_k^m , y como $|g^{m+1} - g^m| \leq 3 \cdot 2^m$, se definen

$$\lambda_k^m := 3 \cdot 2^m |B_k^m|, \quad a_k^m := (\lambda_k^m)^{-1} (g^{m+1} - g^m) \chi_{Q_k^m},$$

De tal manera que $\|a_k^m\|_{L^\infty} \leq |B_k^m|^{-1}$. Ahora, note que como son cúbos diádicos, si $Q_k^m \cap Q_\ell^{m+1}$, entonces, uno está contenido en el otro, particularmente $Q_\ell^{m+1} \subset Q_k^m$. Por lo que

$$\int_{Q_k^m} (g^{m+1} - g^m) dx = \int_{Q_k^m} (b^m - b^{m+1}) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (b_k^m - b^{m+1} \chi_{Q_k^m}) dx = - \sum_\ell \int_{\mathbb{R}^n} b_\ell^{m+1} dx = 0.$$

Similarmente, los cubos Q_k^m contienen a todos los cubos $Q_\ell^{m'}$ con $m' > m$. Entonces, se pueden agrupar los átomos para cada nivel m

$$\sum_k |\lambda_k^m| \lesssim \sum_k 2^m |B_k^m| \lesssim 2^m \sum_k |Q_k^m| = 2^m |\{\mathcal{M}f > 2^m\}| \lesssim \|\mathcal{M}f\|_{L^1} = \|f\|_{H^1}.$$

Al tomar el ínfimo de todos los niveles m , se obtiene el resultado deseado. \square

Nota 5.6.31. Todo lo discutido anteriormente, puede ser adaptado al caso del toro \mathbb{T}^n , restringiendo lo anterior a funciones 1-periódicas. Además, en todas las demostraciones, se puede restringir el dominio de integración al cubo unitario, y esto no tiene ningún efecto en la convergencia. Además, intercambiar la integral por la sumatoria en la transformada de Fourier inversa no afecta ninguno de los procedimientos realizados. Por ello, no se repiten las definiciones y teoremas para el caso toroidal, pues son bastante naturales.

6.1. Definición y propiedades básicas en \mathbb{R}^n

Definición 6.1.1 (Clases de símbolos de Hörmander $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$). Sean $0 \leq \delta, \rho \leq 1$. Se dice que $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ si $a := (x, \xi)$ es suave en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y cumple que

$$|\partial_x^\beta \partial_\xi^\alpha a(x, \xi)| \lesssim_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

para cualesquiera multi-índices α, β . Se dice que estos símbolos tienen orden $m \in \mathbb{R}$.

Definición 6.1.2. Sean $0 \leq \delta, \rho \leq 1$ y sea $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. El operador pseudo-diferencial con símbolo $a := a(x, \xi)$ se define como

$$T_a f(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{f}(\xi) d\xi,$$

donde $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La clase de operadores pseudo-diferenciales con símbolos en $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ se denotan por $\Psi_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$.

Proposición 6.1.3. Para $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $T_a f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Note que como $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$|\partial_x^\beta a(x, \xi) \widehat{f}(\xi)| \lesssim \langle \xi \rangle^{m+\delta|\beta|} \langle \xi \rangle^{-N},$$

para algún $N > 0$ apropiado, por lo que todas sus derivadas respecto a x son absolutamente convergentes y se tiene que $T_a f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ahora, se define el operador

$$L_\xi := (1 + 4\pi^2 |x|^2)^{-1} (I - \mathcal{L}_\xi),$$

donde \mathcal{L}_ξ es el laplaciano. Note que $L_\xi(e^{2\pi i x \cdot \xi}) = e^{2\pi i x \cdot \xi}$ y por integración por partes se tiene que

$$T_a f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} L_\xi^N [a(x, \xi) \widehat{f}(\xi)] d\xi.$$

Por lo que $|T_a f(x)| \lesssim_N \langle x \rangle^{-2N}$ para cualquier N y se concluye que $T_a f$ decae rápidamente. Este argumento se puede aplicar para cualquiera de sus derivadas y se obtiene que $T_a f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. \square

Ejemplo 6.1.4 (Operadores diferenciales). Sea $P := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial_x^\alpha$ un operador de derivadas parciales. Entonces, al considerarle como un operador pseudo-diferencial se tiene que su símbolo es simplemente su polinomio característico $p(x, \xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) (2\pi i \xi)^\alpha$. Si las funciones coeficientes a_α son continuas, este símbolo pertenece a la clase de Hörmander de orden m .

Nota 6.1.5 (Kernel de un operador pseudo-diferencial). Se puede reescribir la definición de operador pseudo-diferencial de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T_a f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{f}(\xi) d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x-y) \cdot \xi} a(x, \xi) f(y) dy d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} k(x, y) f(y) dy, \end{aligned}$$

donde se define en el sentido de distribuciones al kernel de Schwartz del operador pseudo-diferencial como

$$k(x, y) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x-y) \cdot \xi} a(x, \xi) d\xi$$

Teorema 6.1.6 (Composición de operadores pseudo-diferenciales). Sea $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, sea $a \in S_{\rho, \delta}^{m_1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y sea $b \in S_{\rho, \delta}^{m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Entonces, existe un símbolo $c \in S_{\rho, \delta}^{m_1+m_2}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que $T_c = T_a \circ T_b$. Además, se tiene la fórmula asintótica

$$c \sim \sum_{\alpha} \frac{(2\pi i)^{-|\alpha|}}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha a) (\partial_x^\alpha b).$$

Es decir, para cualquier $N > 0$, se tiene que

$$c - \sum_{|\alpha| < N} \frac{(2\pi i)^{-|\alpha|}}{\alpha!} (\partial_\xi^\alpha a) (\partial_x^\alpha b) \in S_{\rho, \delta}^{m_1+m_2-(\rho-\delta)N}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Demostración. Fije un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\text{supp } \chi \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq 2\}$ y tal que $\chi(x) = 1$ para $|x - x_0| \leq 1$. Realice la descomposición

$$b = \chi b + (1 - \chi) b := b_1 + b_2.$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} (T_a \circ T_{b_1}) f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x-y) \cdot \eta} a(x, \eta) \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (y-z) \cdot \xi} b_1(y, \xi) f(z) dz d\xi dy d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x-z) \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x-y) \cdot (\eta - \xi)} a(x, \eta) b_1(y, \xi) dy d\eta f(z) dz d\xi, \end{aligned}$$

donde se aprovecho que $(x-y) \cdot (\eta - \xi) + (x-z) \cdot \xi = (x-y) \cdot \eta + (y-z) \cdot \xi$. Por lo que se define

$$\begin{aligned} c(x, \xi) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i (x-y) \cdot (\eta - \xi)} a(x, \eta) b_1(y, \xi) dy d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot (\eta - \xi)} a(x, \eta) \widehat{b_1}(\eta - \xi, \xi) d\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \eta} a(x, \eta + \xi) \widehat{b_1}(\eta, \xi) d\eta. \end{aligned}$$

Como b_1 tiene soporte compacto en x , se tiene que $\widehat{b_1}$ es de decaimiento rápido uniformemente en ξ y que

$$|\widehat{b_1}(\eta, \xi)| \lesssim_M \langle \eta \rangle^{-M} \langle \xi \rangle^{m_2},$$

para todo $M \leq 0$. La expansión de Taylor en la segunda variable de $a(x, \xi + \eta)$ resulta en

$$a(x, \xi + \eta) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) \eta^\alpha + R_N(x, \xi, \eta),$$

donde R_N es un residuo que se discutirá más adelante. Al sustituir esta expresión en la fórmula para $c(x, \xi)$ se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \eta} [\partial_\xi^\alpha a(x, \xi) \eta^\alpha] \widehat{b}_1(\eta, \xi) d\eta = (2\pi i)^{-|\alpha|} \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) \partial_x^\alpha b_1(x, \xi),$$

que corresponden a los términos de la expansión asintótica. Ahora, el símbolo resultante del residuo es

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \eta} R_N(x, \xi, \eta) \widehat{b}_1(\eta, \xi) d\eta.$$

Pero, se puede estimar mediante

$$|R_N(x, \xi, \eta)| \lesssim_N |\eta|^N \max\{|\partial_\xi^\alpha a(x, \zeta)| : |\alpha| = N, \zeta \text{ interpolación de } \eta \text{ y } \eta + \xi\}.$$

Note que si $|\eta| \leq |\xi|/2$, entonces cualquier ζ de la expresión anterior es proporcional a ξ , por lo que para este caso se puede estimar

$$|R_N(x, \xi, \eta)| \lesssim_N |\eta|^N \langle \xi \rangle^{m_1 - (\rho - \delta)N}.$$

Por otra parte, si $\rho N \geq m_1$, se tiene la siguiente cota para cualquier caso

$$|R_N(x, \xi, \eta)| \lesssim_N |\eta|^N.$$

Combinando los estimativos y la expresión del residuo del símbolo se obtiene que

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \eta} R_N(x, \xi, \eta) \widehat{b}_1(\eta, \xi) d\eta \right| \\ & \lesssim_{M, N} \langle \xi \rangle^{m_1 + m_2 - (\rho - \delta)N} \int_{|\eta| < |\xi|/2} \langle \eta \rangle^{-M} |\eta|^N d\eta + \langle \xi \rangle^{m_2} \int_{|\eta| \geq |\xi|/2} \langle \eta \rangle^{-M} |\eta|^N d\eta. \end{aligned}$$

Al escoger M lo suficientemente grande, se puede estimar el residuo simbólico por $\langle \xi \rangle^{m_1 + m_2 - \rho N}$. Ahora, note que $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta R_N(x, \xi, \eta)$ es el residuo de la expansión de $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi + \eta)$. Por lo que un argumento similar resulta en

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \eta} [\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta R_N(x, \xi, \eta)] \widehat{b}_1(\eta, \xi) d\eta \right| \lesssim_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m_1 + m_2 - \rho N - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}.$$

Ahora, solo queda demostrar que $T_a \circ T_{b_2}$ tiene símbolo de orden $-\infty$ y no afecta la fórmula asintótica. Para ello, se utiliza integración por partes para obtener propiedades de regularidad del símbolo restante. Considere el Laplaciano en η

$$\Delta_\eta^{N_1} e^{2\pi i(x-y) \cdot (\eta - \xi)} = (-4\pi^2 |x - y|^2)^{N_1} e^{2\pi i(x-y) \cdot (\eta - \xi)}.$$

Y el Laplaciano en y ,

$$(1 - \Delta_y)^{N_2} e^{2\pi i(x-y) \cdot (\eta - \xi)} = (1 + 4\pi^2 |\xi - \eta|^2)^{N_2} e^{2\pi i(x-y) \cdot (\eta - \xi)}.$$

Además, se tiene que

$$\langle \xi - \eta \rangle \langle \eta \rangle = \sqrt{1 + |\xi - \eta|^2 + |\eta|^2 + |\xi - \eta|^2 |\eta|^2} \geq \sqrt{1 + |\xi|^2} = \langle \xi \rangle.$$

Combinando estos estimativos y las desigualdades simbólicas se obtiene que

$$\begin{aligned}
|c_2(x, \xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y) \cdot (\eta - \xi)} a(x, \eta) b_2(y, \xi) dy d\eta \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y) \cdot (\eta - \xi)} \frac{\Delta_\xi^{N_1} a(x, \eta)}{(-4\pi^2|x-y|^2)^{N_1}} \frac{(1 - \Delta_y)^{N_2} b_2(y, \xi)}{(1 + 4\pi^2|\xi - \eta|^2)^{N_2}} dy d\eta \right| \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle \eta \rangle^{m_1 - 2\rho N_1}}{\langle x - y \rangle^{2N_1}} \frac{\langle \xi \rangle^{m_2 + 2\delta N_2}}{\langle \xi - \eta \rangle^{2N_2}} dy d\eta \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \langle \eta \rangle^{m_1 - 2\rho N_1 + 2N_2} \langle \xi \rangle^{m_2 - 2(1-\delta)N_2} d\eta \\
&\lesssim \langle \xi \rangle^{m_2 - 2(1-\delta)N_2},
\end{aligned}$$

donde se escoge N_1 tal que $-2\rho N_1 + 2N_2 + m_1 < -n$. Por lo que se puede escoger N_2 libremente para obtener la cota deseada. Un argumento análogo funciona para las derivadas de c_2 , por lo que este pertenece a $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. \square

Definición 6.1.7 (Potencial de Bessel). Se define al potencial de Bessel de orden $m \in \mathbb{R}$ al operador pseudo-diferencial con símbolo $\langle \xi \rangle^m$. Este se denota por J^m .

Se puede ver que la composición con este operador no presenta la restricción $\delta < \rho$.

Teorema 6.1.8. Sea $0 \leq \delta < 1$, sea $0 < \rho \leq 1$, sea $a := a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, y sea $b := b(\xi) \in S_{1, \delta}^s(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Entonces $T_a T_b$ y $T_b T_a$ pertenecen a $S_{\rho, \delta}^{m+s}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Además, $T_a T_b$ tiene símbolo $a(x, \xi) b(\xi)$.

Demostración. Se tiene que para $T_c = T_a T_b$

$$\begin{aligned}
c(x, \xi) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y) \cdot (\eta - \xi)} a(x, \eta) b(\xi) dy d\eta \\
&= b(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(y-x) \cdot \xi} \hat{a}(x, y-x) dy \\
&= b(\xi) a(x, \xi).
\end{aligned}$$

Para $T_c = T_b T_a$ se puede utilizar la fórmula asintótica de la fórmula de composición. Para manejar el hecho que en este caso se permite $\delta \geq \rho$ para el símbolo a , se aprovecha el hecho que

$$|\partial_\xi^\alpha b(\xi) \partial_x^\alpha a(x, \xi)| \lesssim \langle \xi \rangle^{s-|\alpha|} \langle \xi \rangle^{m+\delta|\alpha|}.$$

Por lo que se tiene el orden deseado en ambos casos. \square

6.2. Definición y propiedades básicas en \mathbb{T}^n

El cálculo simbólico en el toro \mathbb{T}^n presenta ciertas diferencias respecto al caso euclideo. Gran parte de ellas surgen del hecho que el dominio de frecuencias correspondiente es el retículo \mathbb{Z}^n . Por lo que es necesario definir herramientas análogas que funcionen en el caso discreto.

Definición 6.2.1. Sea $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$, entonces se definen los operadores de diferencia como

$$\Delta_{\xi_j} \varphi(\xi) := \varphi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi),$$

$$\overline{\Delta}_{\xi_j} \varphi(\xi) := \varphi(\xi) - \varphi(\xi - \delta_j).$$

Además, para un multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, se define

$$\Delta_\xi^\alpha := \Delta_{\xi_1}^{\alpha_1} \cdots \Delta_{\xi_n}^{\alpha_n},$$

$$\overline{\Delta}_\xi^\alpha := \overline{\Delta}_{\xi_1}^{\alpha_1} \cdots \overline{\Delta}_{\xi_n}^{\alpha_n}.$$

Proposición 6.2.2. Sea $\varphi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$, entonces

$$\Delta_\xi^\alpha \varphi(\xi) = \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \varphi(\xi + \beta).$$

Demostración. Se define el operador de traslación $E_j := (I + \Delta_{\xi_j})$, que actúa de la siguiente manera

$$E_j \varphi(\xi) = (I + \Delta_{\xi_j}) \varphi(\xi) = \varphi(\xi + \delta_j).$$

Entonces, por el teorema del binomio se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta_\xi^\alpha \varphi(\xi) &= (E - I)^\alpha \varphi(\xi) \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} E^\beta \varphi(\xi) \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \varphi(\xi + \beta). \end{aligned}$$

Lo que completa la prueba. □

Note que este operador tiene propiedades análogas a las de la derivada en el caso continuo

Proposición 6.2.3. Sean $\varphi, \psi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, entonces

1. $\Delta_\xi^\alpha (s\varphi + t\psi)(\xi) = s\Delta_\xi^\alpha \varphi(\xi) + t\Delta_\xi^\alpha \psi(\xi),$
2. $\Delta_\xi^\alpha \Delta_\xi^\beta = \Delta_\xi^{\alpha+\beta} = \Delta_\xi^\beta \Delta_\xi^\alpha,$
3. $\Delta_\xi^\alpha (\varphi\psi)(\xi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} [\Delta_\xi^\beta \varphi(\xi)] [\Delta_\xi^{\alpha-\beta} \psi(\xi + \beta)].$

Demostración. Todas estas propiedades pueden ser demostradas mediante inducción, por lo que solo se demostrarán los casos base. La primera propiedad es equivalente a decir que los operadores de diferencia son lineales. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi_j} (s\varphi + t\psi)(\xi) &= (s\varphi + t\psi)(\xi + \delta_j) - (s\varphi + t\psi)(\xi) \\ &= s\varphi(\xi + \delta_j) + t\psi(\xi + \delta_j) - s\varphi(\xi) - t\psi(\xi) \\ &= s\Delta_{\xi_j} \varphi(\xi) + t\Delta_{\xi_j} \psi(\xi). \end{aligned}$$

La segunda propiedad quiere decir que los operadores de diferencia conmutan, es decir

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi_i} \Delta_{\xi_j} \varphi(\xi) &= \Delta_{\xi_i} [\varphi(\cdot + \delta_j) - \varphi(\cdot)](\xi) \\ &= \Delta_{\xi_i} [\varphi(\cdot + \delta_j)](\xi) - \Delta_{\xi_i} \varphi(\xi) \\ &= \varphi(\xi + \delta_j + \delta_i) - \varphi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi + \delta_i) + \varphi(\xi) \\ &= \Delta_{\xi_j} [\varphi(\cdot + \delta_i) - \varphi(\cdot)](\xi) \\ &= \Delta_{\xi_j} \Delta_{\xi_i} \varphi(\xi). \end{aligned}$$

La tercera propiedad es análoga a la regla de Leibniz, o regla del producto. En efecto,

$$\begin{aligned} \Delta_{\xi_j} (\varphi\psi)(\xi) &= \varphi(\xi + \delta_j) \psi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi) \psi(\xi) \\ &= \varphi(\xi + \delta_j) \psi(\xi + \delta_j) + \varphi(\xi) \psi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi) \psi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi) \psi(\xi) \\ &= \varphi(\xi) [\psi(\xi + \delta_j) - \psi(\xi)] + [\varphi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi)] \psi(\xi + \delta_j) \\ &= \varphi(\xi) [\Delta_{\xi_j} \psi(\xi)] + [\Delta_{\xi_j} \varphi(\xi)] \psi(\xi + \delta_j). \end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba. □

Proposición 6.2.4 (Suma por partes). Sean $\varphi, \psi : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces, se tiene que

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) [\Delta_\xi^\alpha \psi(\xi)] = (-1)^{|\alpha|} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} [\bar{\Delta}_\xi^\alpha \varphi(\xi)] \psi(\xi),$$

dado que ambas series sean absolutamente convergentes.

Demostración. Para probarlo para un multi-índice arbitrario basta con demostrarlo para los casos base y luego el resultado se obtiene por recursividad. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) [\Delta_{\xi_j} \psi(\xi)] &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) [\psi(\xi + \delta_j) - \psi(\xi)] \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) \psi(\xi + \delta_j) - \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) \psi(\xi) \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi - \delta_j) \psi(\xi) - \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) \psi(\xi) \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} [\varphi(\xi - \delta_j) - \varphi(\xi)] \psi(\xi) \\ &= - \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} [\bar{\Delta}_{\xi_j} \varphi(\xi)] \psi(\xi) \end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba. \square

En el caso discreto, los polinomios tradicionales y los operadores de diferencia no se comportan exactamente como sus contrapartes continuas. Lo que inspira definiciones alternativas que se presentan a continuación.

Definición 6.2.5. Para $\theta \in \mathbb{Z}^n$, se define $\theta_j^{(0)} := 1$, y

$$\theta_j^{(k+1)} := \theta_j^{(k)} (\theta_j - k).$$

Además, para cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, se define

$$\theta^{(\alpha)} := \theta_1^{(\alpha_1)} \dots \theta_n^{(\alpha_n)}.$$

Similarmente, se define $D_{y_j}^{(0)} := I$, y

$$D_{y_j}^{(k+1)} := D_{y_j}^{(k)} \left(\frac{\partial_{y_j}}{i2\pi} - kI \right),$$

$$D_y^{(\alpha)} := D_{y_1}^{(\alpha_1)} \dots D_{y_n}^{(\alpha_n)}.$$

Proposición 6.2.6. Para $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, se tiene que

$$\Delta_\theta^\beta \theta^{(\alpha)} = \alpha^{(\beta)} \theta^{(\alpha-\beta)},$$

lo que concuerda con el caso continuo $\partial_\theta^\beta \theta^\alpha = \alpha^{(\beta)} \theta^{\alpha-\beta}$.

Demostración. Basta con ver que

$$\begin{aligned} \Delta_{\theta_j} \theta_j^{(\alpha_j)} &= (\theta_j + 1)^{(\alpha_j)} - \theta_j^{(\alpha_j)} \\ &= (\theta_j + 1) \theta_j \dots (\theta_j - \alpha_j + 2) - \theta_j^{(\alpha_j)} \\ &= (\theta_j + 1) \theta_j^{(\alpha_j-1)} - \theta_j^{(\alpha_j-1)} (\theta_j - \alpha_j + 1) \\ &= \alpha_j \theta_j^{(\alpha_j-1)}. \end{aligned}$$

El resultado sigue de recursividad. \square

Definición 6.2.7 (Integración discreta). Para $b \geq 0$, se definen

$$I_k^b := \sum_{0 \leq k < b}, \quad \text{y} \quad I_k^{-b} := - \sum_{-b \leq k < 0}.$$

Teorema 6.2.8 ("Teorema fundamental del cálculo" discreto 1D). Sea $\theta \in \mathbb{Z}$, y sea $\alpha \in \mathbb{N}_0$. Entonces, se tiene que

$$I_{k_1}^\theta I_{k_2}^{k_1} \dots I_{k_\alpha}^{k_{\alpha-1}} 1 = \frac{1}{\alpha!} \theta^{(\alpha)}.$$

Demostración. Note que en general se tiene que

$$I_k^b \Delta_k f(k) = \sum_{0 \leq k < b} [f(k+1) - f(k)] = f(b) - f(0).$$

Particularmente, $I_k^b \Delta_k k^{(i)} = b^{(i)}$, que se puede combinar con el hecho que $\Delta_k k^{(i)} = i k^{(i)}$, y el resultado deseado sigue de una inducción. \square

La extensión al caso multi-dimensional es inmediata.

Corolario 6.2.9 ("Teorema fundamental del cálculo" discreto). Sea $\theta \in \mathbb{Z}^n$, y sea $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Entonces, se tiene que

$$\prod_{j=1}^n I_{k(j,1)}^{\theta_j} I_{k(j,2)}^{k(j,1)} \dots I_{k(j,\alpha_j)}^{k(j,\alpha_j-1)} 1 = \frac{1}{\alpha!} \theta^{(\alpha)}.$$

Ahora, se presenta el análogo discreto de la expansión de Taylor.

Teorema 6.2.10 (Expansión de Taylor discreta). Sea $p : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$. Entonces, se puede escribir como

$$p(\xi + \theta) = \sum_{|\alpha| < M} \frac{1}{\alpha!} \theta^{(\alpha)} \Delta_\xi^\alpha p(\xi) + r_M(\xi, \theta),$$

donde el residuo satisface

$$|\Delta_\xi^\omega r_M(\xi, \theta)| \lesssim_M \max_{|\alpha|=M, \nu \in Q(\theta)} |\theta^{(\alpha)} \Delta_\xi^{\alpha+\omega} p(\xi + \nu)|,$$

donde $Q(\theta) := \{\nu \in \mathbb{Z}^n : |\nu_j| \leq |\theta_j| \text{ para todo } j = 1, \dots, n\}$.

Demostración. Primero, para $0 \neq \alpha \in \mathbb{N}_0^n$, se denota $m_\alpha := \min\{j : \alpha_j \neq 0\}$. Para $\theta \in \mathbb{Z}^n$, e $i \in \{1, \dots, n\}$, se define $\nu(\theta, i, k) \in \mathbb{Z}^n$ como

$$\nu(\theta, i, k)_j := \begin{cases} \theta_j, & 1 \leq j < i, \\ k, & j = i, \\ 0, & i < j \leq n. \end{cases}$$

Se afirma que el residuo puede ser escrito como

$$r_M(\xi, \theta) = \sum_{|\alpha|=M} r_\alpha(\xi, \theta),$$

donde

$$r_\alpha(\xi, \theta) := \prod_{j=1}^n I_{k(j,1)}^{\theta_j} I_{k(j,2)}^{k(j,1)} \dots I_{k(j,\alpha_j)}^{k(j,\alpha_j-1)} \Delta_\xi^\alpha p(\xi + \nu(\theta, m_\alpha, k(m_\alpha, \alpha_{m_\alpha}))).$$

Se realiza una prueba por inducción, para $M = 1$, se tiene que

$$r_{\delta_i}(\xi, \theta) = I_k^{\theta_i} \Delta_{\xi_i} p(\xi + \nu(\theta, i, k)) = p(\xi + \nu(\theta, i, \theta_i)) - p(\xi + \nu(\theta, i, 0)).$$

Por lo que se cumple el resultado deseado

$$\sum_{i=1}^n r_{\delta_i}(\xi, \theta) = \sum_{i=1}^n [p(\xi + \nu(\theta, i+1, 0)) - p(\xi + \nu(\theta, i, 0))] = p(\xi + \theta) - p(\xi) = r_1(\xi, \theta).$$

Ahora, suponga el resultado es verdadero para $|\alpha| = M$, entonces se tiene que

$$\begin{aligned} r_{M+1}(\xi, \theta) &= r_M(\xi, \theta) - \sum_{|\alpha|=M} \frac{1}{\alpha!} \theta^{(\alpha)} \Delta_\xi^\alpha p(\xi) \\ &= \sum_{|\alpha|=M} \left(r_\alpha(\xi, \theta) - \frac{1}{\alpha!} \theta^{(\alpha)} \Delta_\xi^\alpha p(\xi) \right) \\ &= \sum_{|\alpha|=M} \prod_{j=1}^n I_{k(j,1)}^{\theta_j} I_{k(j,2)}^{k(j,1)} \cdots I_{k(j,\alpha_j)}^{k(j,\alpha_j-1)} \Delta_\xi^\alpha [p(\xi + \nu(\theta, m_\alpha, k(m_\alpha, \alpha_{m_\alpha}))) - p(\xi)]. \end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene la igualdad

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m_\alpha} I_l^{\nu(\theta, m_\alpha, k)_i} \Delta_{\xi_i} p(\xi + \nu(\theta, i, l)) &= \sum_{i=1}^{m_\alpha} [p(\xi + \nu(\theta, i, \nu(\theta, m_\alpha, k)_i)) - p(\xi + \nu(\theta, i, 0))] \\ &= \sum_{i=1}^{m_\alpha} [p(\xi + \nu(\theta, m_\alpha, k), i+1, 0)) - p(\xi + \nu(\theta, i, 0))] \\ &= p(\xi + \nu(\theta, m_\alpha, k)) - p(\xi). \end{aligned}$$

Por lo que se obtiene que

$$\begin{aligned} r_{M+1}(\xi, \theta) &= \sum_{|\alpha|=M} \prod_{j=1}^n I_{k(j,1)}^{\theta_j} I_{k(j,2)}^{k(j,1)} \cdots I_{k(j,\alpha_j)}^{k(j,\alpha_j-1)} \sum_{i=1}^{m_\alpha} I_{l_i}^{\nu(\theta, m_\alpha, \alpha_{m_\alpha})_i} \Delta_\xi^{\alpha+\delta_i} p(\xi + \nu(\theta, i, l_i)) \\ &= \sum_{|\beta|=M+1} \prod_{j=1}^n I_{k(j,1)}^{\theta_j} I_{k(j,2)}^{k(j,1)} \cdots I_{k(j,\beta_j)}^{k(j,\beta_j-1)} \Delta_\xi^\beta p(\xi + \nu(\theta, m_\beta, k(m_\beta, \beta_{m_\beta}))). \end{aligned}$$

Lo que completa la inducción. Para obtener los estimativos del residuo, se considera que

$$\begin{aligned} |\Delta_\xi^\omega r_M(\xi, \theta)| &= \left| \sum_{|\alpha|=M} \Delta_\xi^\alpha r_\alpha(\xi, \theta) \right| \\ &= \left| \sum_{|\alpha|=M} \prod_{j=1}^n I_{k(j,1)}^{\theta_j} I_{k(j,2)}^{k(j,1)} \cdots I_{k(j,\alpha_j)}^{k(j,\alpha_j-1)} \Delta_\xi^{\alpha+\omega} p(\xi + \nu(\theta, m_\alpha, k(m_\alpha, \alpha_{m_\alpha}))) \right| \\ &\leq \sum_{|\alpha|=M} \frac{1}{\alpha!} |\theta|^{(\alpha)} \max_{\nu \in Q(\theta)} |\Delta^{\alpha+\omega} p(\xi + \nu)|. \end{aligned}$$

Lo que completa la prueba. \square

A continuación se presentan las definiciones toroidales para símbolos de clases de Hörmander y sus respectivos operadores pseudo-diferenciales.

Definición 6.2.11 (Clase de símbolos toroidales $S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$). Sea $m \in \mathbb{R}$, sean $0 \leq \delta, \rho \leq 1$. Entonces, la *clase de símbolos toroidales* $S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ consiste de las funciones $a := a(x, \xi) : \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ que son suaves en x para todo ξ , y que satisfacen las desigualdades simbólicas

$$|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \lesssim_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

para cualesquiera multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Definición 6.2.12 (Operadores pseudo-diferenciales toroidales). Para $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, se denota T_a a su *operador pseudo-diferencial toroidal* correspondiente, que se define como

$$T_a f(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{f}(\xi).$$

Además, se dice que $T_a \in \Psi_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$

Proposición 6.2.13. Sea $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, entonces $T_a f$ está bien definido y $T_a f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Además, T_a es un operador continuo de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ en sí mismo.

Demostración. Se tiene que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, entonces la serie en la definición de $T_a f$ converge absolutamente y $T_a f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned} T_a f(x) &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{f}(\xi) \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} a(x, \xi) \int_{\mathbb{T}^n} e^{i2\pi(x-y) \cdot \xi} f(y) dy \\ &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} a(x, \xi) \langle \xi \rangle^{-2M} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i2\pi(x-y) \cdot \xi} \left(I - \frac{\mathcal{L}_y}{4\pi^2} \right)^M f(y) dy, \end{aligned}$$

donde \mathcal{L}_y es el Laplaciano respecto a y . Entonces, basta escoger M lo suficientemente grande para obtener convergencia absoluta de la serie. Por lo que, para $f_j \rightarrow f$ en $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, se puede intercambiar el límite con la serie y la integral mediante la convergencia dominada de Lebesgue para obtener $T_a f_j \rightarrow T_a f$ en $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. \square

Nota 6.2.14 (Kernel de Schwartz para operadores pseudo-diferenciales toroidales). La definición de $T_a f$ para un símbolo toroidal sugiere que puede ser reescrito (ignorando preguntas acerca de convergencia) como

$$T_a f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi(x-y) \cdot \xi} a(x, \xi) f(y) dy = \int_{\mathbb{T}^n} k(x, y) f(y) dy,$$

donde $k(x, y)$ es el *kernel de Schwartz* que se expresa como

$$k(x, y) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi(x-y) \cdot \xi} a(x, \xi),$$

y se entiende en el sentido de distribuciones.

Teorema 6.2.15. Sean $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, sea $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, y sea $b \in S_{\rho,\delta}^l(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Entonces, el símbolo del operador $T_a T_b$ pertenece a $S_{\rho,\delta}^{m+l}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{Z}^n)$, y sigue la siguiente expansión asintótica

$$\sum_{\gamma \geq 0} \frac{1}{\gamma!} [\Delta_\xi^\gamma a(x, \xi)] [D_x^{(\gamma)} b(x, \xi)].$$

Demostración. Se tiene que el símbolo de la composición esta dado por

$$\begin{aligned} c(x, \xi) &:= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i2\pi(x-y) \cdot (\eta - \xi)} a(x, \eta) b(y, \xi) dy \\ &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot (\eta - \xi)} a(x, \eta) \widehat{b}(\eta - \xi, \xi) \\ &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \eta} a(x, \eta + \xi) \widehat{b}(\eta, \xi). \end{aligned}$$

Ahora, se utiliza la expansión de Taylor discreta para obtener que

$$\begin{aligned}
c(x, \xi) &= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \eta} \left[\sum_{|\gamma| < N} \frac{1}{\gamma!} \Delta_\xi^\gamma a(x, \xi) \eta^{(\gamma)} + R_N(x, \xi, \eta) \right] \widehat{b}(\eta, \xi) \\
&= \sum_{|\gamma| < N} \frac{1}{\gamma!} \left[\Delta_\xi^\gamma a(x, \xi) \right] \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \eta} \widehat{b}(\eta, \xi) \eta^{(\gamma)} + \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \eta} R_N(x, \xi, \eta) \widehat{b}(\eta, \xi) \\
&= \sum_{|\gamma| < N} \frac{1}{\gamma!} \left[\Delta_\xi^\gamma a(x, \xi) \right] D_x^{(\gamma)} b(x, \xi) + E_N(x, \xi).
\end{aligned}$$

Ahora, solo queda estimar el término correspondiente al error. En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned}
|\Delta_\xi^{\alpha'} \partial_x^{\beta'} [e^{i2\pi x \cdot \eta} \widehat{b}(\eta, \xi)]| &= \left| \Delta_\xi^{\alpha'} \partial_x^{\beta'} e^{i2\pi x \cdot \eta} \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi y \cdot \eta} b(y, \xi) dy \right| \\
&= \left| \Delta_\xi^{\alpha'} \partial_x^{\beta'} e^{i2\pi x \cdot \eta} \langle \eta \rangle^{-r} \int_{\mathbb{T}^n} \langle \eta \rangle^r e^{-i2\pi y \cdot \eta} b(y, \xi) dy \right| \\
&= \left| \partial_x^{\beta'} e^{i2\pi x \cdot \eta} \langle \eta \rangle^{-r} \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi y \cdot \eta} \Delta_\xi^{\alpha'} \left(1 - \frac{\mathcal{L}_y}{4\pi^2} \right)^{r/2} b(y, \xi) dy \right| \\
&\lesssim \langle \eta \rangle^{|\beta'| - r} \langle \xi \rangle^{l - \rho|\alpha'| + \delta r}.
\end{aligned}$$

Para el residuo de la serie de Taylor discreta se tiene que

$$\begin{aligned}
|\Delta_\xi^{\alpha''} \partial_x^{\beta''} R_N(x, \xi, \eta)| &\lesssim \langle \eta \rangle^N \max_{|\omega|=N, \nu \in Q(\eta)} |\Delta_\xi^{\omega + \alpha''} \partial_x^{\beta''} a(x, \xi + \nu)| \\
&\lesssim \langle \eta \rangle^N \max_{|\omega|=N, \nu \in Q(\eta)} \langle \xi + \nu \rangle^{m - \rho(N + |\alpha''|) + \delta|\beta''|}.
\end{aligned}$$

Entonces, por la fórmula de Leibniz discreta y tomando $\alpha' + \alpha'' = \alpha$, $\beta' + \beta'' = \beta$, el término del error puede ser acotado por

$$|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta E_N(x, \xi)| \lesssim \langle \xi \rangle^{l - \rho|\alpha'| + \delta r} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \langle \eta \rangle^{N + |\beta'| - r} \max_{\nu \in Q(\eta)} \langle \xi + \nu \rangle^{m - \rho(N + |\alpha''|) + \delta|\beta''|}.$$

Ahora, suponga que $|\eta| \leq |\xi|/2$, entonces el término de error puede ser acotado por

$$\langle \xi \rangle^{l - \rho|\alpha'| + \delta r + m - \rho(N + |\alpha''|) + \delta|\beta''| + n} \max_{|\eta| \leq |\xi|/2} \langle \eta \rangle^{N + |\beta'| - r},$$

y al escoger $r = N + |\beta'|$, se obtiene que

$$\langle \xi \rangle^{m + l - (\rho - \delta)N - \rho|\alpha| + \delta|\beta| + n}.$$

Por lo que este término puede ser aproximado por cualquier $\langle \xi \rangle^{-M}$ escogiendo el N apropiado en vista que $\rho > \delta$. Por otra parte, si $|\eta| > |\xi|/2$, entonces para N lo suficientemente grande se puede estimar el término del error por

$$\langle \xi \rangle^{l - \rho|\alpha'| + \delta r} \sum_{|\eta| > |\xi|/2} \langle \eta \rangle^{N + |\beta'| - r} \lesssim \langle \xi \rangle^{l - \rho|\alpha'| + \delta r + N + |\beta'| - r - 1},$$

cuando r es más grande que N . Además, dado que $\delta < 1$, se puede escoger r para estimar este término por cualquier $\langle \xi \rangle^{-M}$. Lo que completa la prueba. \square

Ahora, ha sido expuesto que la herramienta correspondiente al trabajar en el espacio de frecuencias de símbolos toroidales es el cálculo de diferencias discretas. Sin embargo, puede ser de interés extender las técnicas utilizadas en el análisis de símbolos euclidianos para obtener resultados similares. Para ello, se realiza un proceso conocido como la *extensión del símbolo toroidal*, que consiste en una interpolación suave de un símbolo definido en $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n$ para obtener uno definido en $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$. A continuación se presntan los detalles de dicho proceso.

Lema 6.2.16. *Existen funciones $\phi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, y una función $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tales que*

$$\mathcal{P}\theta(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \theta(x+k) = 1,$$

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\theta)|_{\mathbb{Z}^n}(\xi) = \delta_0(\xi) \quad y \quad \partial_\xi^\alpha(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\theta)(\xi) = \overline{\Delta}_\xi^\alpha \phi_\alpha(\xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

Demostración. Primero, considere el caso unidimensional. Sea $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$, tal que

$$\text{supp } \theta \subset (-1, 1), \quad \theta(-x) = \theta(x), \quad \theta(1-y) + \theta(y) = 1,$$

para $x \in \mathbb{R}$ y $0 \leq y \leq 1$. Note entonces que $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, y por lo tanto $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ también. En particular, para $\xi \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\theta)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \theta(x) e^{-i2\pi x \cdot \xi} dx \\ &= \int_0^1 [\theta(x-1) + \theta(x)] e^{-i2\pi x \cdot \xi} dx \\ &= \delta_0(\xi). \end{aligned}$$

Ahora, si la $\phi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ deseada existe, entonces debe satisfacer que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi x \cdot \xi} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\theta)(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi x \cdot \xi} \overline{\Delta}_\xi^\alpha \phi_\alpha(\xi) d\xi \\ &= (1 - e^{i2\pi x})^\alpha \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi x \cdot \xi} \phi_\alpha(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Por lo que se obtiene la formula

$$(-i2\pi x)^\alpha \theta(x) = (1 - e^{i2\pi x})^\alpha (\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{-1}\phi_\alpha)(x).$$

Entonces, se puede definir ϕ_α como

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{-1}\phi_\alpha(x) := \begin{cases} \left(\frac{-i2\pi x}{1 - e^{i2\pi x}} \right)^\alpha \theta(x), & 0 < |x| < 1, \\ 1, & x = 0, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Para el caso n -dimensional se puede definir el mapa $x \mapsto \theta(x_1) \cdots \theta(x_n)$, que cumple las mismas propiedades. \square

Nota 6.2.17. La clase de símbolos $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ se puede definir como el conjunto de símbolos en la clase $S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ que son 1-periódicos respecto a x .

Teorema 6.2.18. *Sea $0 \leq \delta \leq 1$ y sea $0 < \rho \leq 1$. El símbolo $\tilde{a} \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ es un símbolo toroidal si y solo si existe un símbolo euclideo $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{a} = a|_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n}$. Además, esta extensión es única modulo $S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$.*

Demostración. (\Leftarrow) Por el Teorema de Valor Medio se tiene que para cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$\begin{aligned} \Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tilde{a}(x, \xi) &= \Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi) \\ &= \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)|_{\xi=\eta}, \end{aligned}$$

para algún $\eta \in Q := [\xi_1, \xi_1 + \alpha_1] \times \cdots \times [\xi_n, \xi_n + \alpha_n]$. Por lo que, se obtiene que

$$\begin{aligned} |\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tilde{a}(x, \xi)| &= |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)|_{\xi=\eta}| \\ &\lesssim_{\alpha\beta} \langle \eta \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \\ &\lesssim_\alpha \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}. \end{aligned}$$

(\Rightarrow) Sea $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como en el Lema 6.2.16, y se define

$$a(x, \xi) := \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \theta)(\xi - \eta) \tilde{a}(x, \eta).$$

Se puede ver que cuando $\xi \in \mathbb{Z}^n$, entonces $a(x, \xi) = \tilde{a}(x, \xi)$. Además, se tiene que

$$\begin{aligned} |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| &= \left| \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \partial_\xi^\alpha (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} \theta)(\xi - \eta) \partial_x^\beta \tilde{a}(x, \eta) \right| \\ &= \left| \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \bar{\Delta}_\xi^\alpha \phi_\alpha(\xi - \eta) \partial_x^\beta \tilde{a}(x, \eta) \right| \\ &= \left| \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \phi_\alpha(\xi - \eta) \Delta_\eta^\alpha \partial_x^\beta \tilde{a}(x, \eta) \right| \\ &\lesssim_{\alpha\beta} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} |\phi_\alpha(\xi - \eta)| \langle \eta \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \\ &\lesssim_\alpha \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \langle \eta \rangle^{-M} \langle \xi - \eta \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \\ &\leq \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \langle \eta \rangle^{|m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|-M|} \\ &\lesssim_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}. \end{aligned}$$

Aquí se utilizó el hecho que $\phi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ y que $\langle \xi - \eta \rangle^q \leq \langle \xi \rangle^q \langle \eta \rangle^{|q|}$. Lo que completa la prueba de la existencia del símbolo. Para demostrar la unicidad, sean $a, b \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$, tales que $a|_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n} = b|_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n}$. Entonces, se define $c := a - b$, y para $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$ se escoge $\eta \in \mathbb{Z}^n$ uno de sus puntos más cercanos. Por lo que se tiene la siguiente expansión de Taylor de primer orden

$$\begin{aligned} c(x, \xi) &= c(x, \eta) + \sum_{|\alpha|=1} r_\alpha(x, \xi, \xi - \eta) (\xi - \eta)^\alpha \\ &= \sum_{|\alpha|=1} r_\alpha(x, \xi, \xi - \eta) (\xi - \eta)^\alpha, \end{aligned}$$

donde

$$r_\alpha(x, \xi, \theta) = \int_0^1 (1-t) \partial_\xi^\alpha c(x, \xi + t\theta) dt.$$

Entonces, se tiene que $|c(x, \xi)| \lesssim \langle \xi \rangle^{m-\rho}$, y este proceso puede aplicarse recursivamente a c y a sus derivadas para concluir que $c \in S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$. \square

Definición 6.2.19 (Periodización). La *peoridización* de una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se define como

$$\mathcal{P}f(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} f(x + k).$$

Teorema 6.2.20 (Periodización de operadores). Sea $a := a(x, \xi) \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, una función 1-periodica en x para todo ξ . Sea $\tilde{a} = a|_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n}$, entonces

$$(\mathcal{P} \circ T_a)f = (T_{\tilde{a}} \circ \mathcal{P})f,$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(T_a f)(x) &= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (T_a f)(x+k) \\
&= \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi(x+k) \cdot \xi} a(x+k, \xi) (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi k \cdot \xi} \right) e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) \, d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{\mathbb{Z}^n}(\xi) e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) \, d\xi \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(\mathcal{P}f)(\xi) \\
&= (T_{\tilde{a}} \circ \mathcal{P})f(x).
\end{aligned}$$

Lo que completa la prueba. □

Al combinar este resultado con el Teorema 6.2.18, se obtiene que

Corolario 6.2.21. *Sea $0 \leq \delta \leq 1$, y sea $0 < \rho \leq 1$. Entonces, se tiene que*

$$\Psi_{\rho, \delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n) = \Psi_{\rho, \delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n).$$

Continuidad de operadores pseudo-diferenciales

7.1. Continuidad en espacios de Lebesgue

Teorema 7.1.1. Sea $a \in S_{\rho,\delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, entonces su kernel de Schwartz cumple que

$$|k(x, y)| \lesssim_N |x - y|^{-N},$$

para $x \neq y$, y para cualquier $N > (m + n)/\rho$.

Demostración. Con el argumento de integración por partes se tiene que

$$\begin{aligned} (2\pi i)^{|\gamma|} (x - y)^\gamma k(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^\gamma [e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}] a(x, \xi) \, d\xi \\ &= (-1)^{|\gamma|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} \partial_\xi^\gamma [a(x, \xi)] \, d\xi. \end{aligned}$$

Entonces, si se fija $|\gamma| = N$, se tiene que

$$|x - y|^{-N} |k(x, y)| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{m-\rho N} \, d\xi,$$

que es finito cuando $m - \rho N < -n$. □

Teorema 7.1.2. Sea $a \in S_{1,0}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, entonces T_a extiende a un operador acotado de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo.

Demostración. Primero, suponga que $a := a(x, \xi)$ tiene soporte compacto respecto a x . Además, es suficiente demostrar este enunciado para funciones $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ debido a que este es secuencialmente denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y a un simple argumento analítico. Entonces, se define a la transformada de Fourier de a respecto a x como

$$\widehat{a}(\lambda, \xi) := \mathcal{F}\{a(\cdot, \xi)\}(\lambda).$$

Ahora, note que para cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene que

$$(2\pi i \lambda)^\alpha \widehat{a}(\lambda, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x \cdot \lambda} \partial_x^\alpha a(x, \xi) \, dx.$$

Entonces, $|(2\pi i\lambda)^\alpha \widehat{a}(\lambda, \xi)| \leq C_\alpha$ uniformemente en ξ . Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned} T_a f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \lambda} \widehat{a}(\lambda, \xi) \widehat{f}(\xi) d\lambda d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \lambda} T_{\widehat{a}} f(x) d\lambda. \end{aligned}$$

Entonces, gracias a la identidad de Plancherel

$$\begin{aligned} \|T_{\widehat{a}} f\|_{L^2} &= \|\mathcal{F}(T_{\widehat{a}} f)\|_{L^2} = \|\widehat{a}(\lambda, \cdot) \widehat{f}\|_{L^2} \\ &\leq \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |\widehat{a}(\lambda, \xi)| \|\widehat{f}\|_{L^2} \lesssim \langle \lambda \rangle^{-N} \|f\|_{L^2}, \end{aligned}$$

para cualquier $N \geq 0$. Por lo que

$$\begin{aligned} \|T_a f\|_{L^2} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|T_{\widehat{a}} f\|_{L^2} d\lambda \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \langle \lambda \rangle^{-N} \|f\|_{L^2} d\lambda \lesssim \|f\|_{L^2}, \end{aligned}$$

cuando se escoge $N > n$. Ahora, considere el caso en el que el símbolo no necesariamente tiene soporte compacto. Para ello, se fija $x_0 = 0$ y se descompone $f = f_1 + f_2$, donde f_1 y f_2 son funciones suaves tales que $|f_1| \leq |f|$, $|f_2| \leq |f|$, y que $\text{supp } f_1 \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 3\}$, $\text{supp } f_2 \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq 2\}$. Fije $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que sea igual a uno en la bola unitaria. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\{|x| \leq 1\}} |T_a f_1(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |T_{\eta a} f_1(x)|^2 dx \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^2 dx \\ &\lesssim \int_{|x| \leq 3} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Ahora, por el Teorema 7.1.1, se tiene que

$$|k(x, y)| \lesssim_N |x - y|^{-N} \lesssim_N |y|^{-N},$$

dado que $|y| \geq 2$ y $|x| \leq 1$, que implica que $|x - y| \geq 1$. Entonces, se obtiene que

$$\begin{aligned} |T_a f_2(x)| &\leq \int_{\{|y| \geq 2\}} |k(x, y)| |f_2(y)| dy \\ &\lesssim \int_{\{|y| \geq 2\}} \frac{|f_2(y)|}{|y|^N} dy \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{\langle y \rangle^N} dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|^2}{\langle y \rangle^N} dy \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\langle y \rangle^N} dy \right)^{1/2} \\ &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|^2}{\langle y \rangle^N} dy \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

cuando se elige $N > n$. Por lo que se tiene que

$$\int_{\{|x| \leq 1\}} |T_a f_2(x)|^2 dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|^2}{\langle y \rangle^N} dy.$$

Note que los estimativos de f_1 y f_2 solo dependen de la dimensión n y las constantes de las desigualdades simbólicas de a . Es decir, no depende de x_0 , y se puede escribir que

$$\int_{\{|x-x_0|\leq 1\}} |T_a f(x)|^2 dx \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2 dx}{\langle x-x_0 \rangle^N}.$$

Por lo tanto, si χ_A es la función característica del conjunto A , entonces al integrar respecto a x_0 y cambiar el orden de integración se obtiene que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{|x-x_0|\leq 1\}} |T_a f(x)|^2 dx dx_0 &\lesssim_N \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2 dx}{\langle x-x_0 \rangle^N} dx_0 \\ |B(1)| \int_{\mathbb{R}^n} |T_a f(x)|^2 dx &\lesssim_N \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Lo que completa la prueba. \square

Nota 7.1.3. Los operadores $T \in \Psi_{1,0}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tienen propiedades que los hacen bastante especiales. En realidad, son ejemplos de los tipos de operadores que dieron inicio a la teoría de operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund [6]. En particular, se puede utilizar esta teoría para concluir que los operadores en $\Psi_{1,0}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ son continuos de L^p en sí mismo, para $1 < p < \infty$. Por lo que se enuncia este resultado sin demostración.

Teorema 7.1.4. Sea $T \in \Psi_{1,0}^0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, entonces T se extiende a un operador acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo.

Ahora, se presenta un resultado de continuidad L^2 para el caso del toro. En este caso se relajan los requerimientos de regularidad del símbolo, en vista de la compacidad del toro.

Teorema 7.1.5. Sea $k \in \mathbb{N}$, tal que $k > n/2$, y sea $a := a(x, \xi) : \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$, tal que

$$|\partial_x^\beta a(x, \xi)| \leq C,$$

para todo x, ξ , y $|\beta| \leq k$. Entonces T_a extiende a un operador acotado en $L^2(\mathbb{T}^n)$.

Demostración. Primero, se define

$$A_y f(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i2\pi(x-z) \cdot \xi} a(y, \xi) f(z) dz,$$

de tal manera que $A_x f(x) = T_a f(x)$. Entonces se tiene que

$$\|T_a f\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{T}^n} |T_a f(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{T}^n} \sup_{y \in \mathbb{T}^n} |A_y f(x)|^2 dx.$$

Al aplicar el Teorema de encaje de Sobolev, se obtiene que

$$\begin{aligned} \|T_a f\|_{L^2}^2 &\lesssim \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\mathbb{T}^n} |\partial_y^\alpha A_y f(x)|^2 dy dx \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{y \in \mathbb{T}^n} \int_{\mathbb{T}^n} |\partial_y^\alpha A_y f(x)|^2 dx \\ &= \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{y \in \mathbb{T}^n} \|\partial_y^\alpha A_y f(x)\|_{L^2}^2 \\ &\leq \sum_{|\alpha| \leq k} \sup_{y \in \mathbb{T}^n} \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |\partial_y^\alpha a(y, \xi)|^2 \|f\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Lo que completa la prueba. \square

A continuación se presentan una serie de resultados de continuidad L^p tanto en \mathbb{R}^n como en \mathbb{T}^n . Como el enfoque de este trabajo es en el estudio de continuidad de operadores pseudo-diferenciales en el toro, entonces no se incluirán las demostraciones de los resultados en el caso euclideo. Sin embargo, las técnicas que se utilizarán en este caso pueden ser modificadas para recuperar las demostraciones de los casos euclideos. El primer resultado que se presenta es uno clásico, demostrado por Fefferman [13] en el contexto euclideo.

Teorema 7.1.6 (Fefferman). *Sean $0 \leq \delta < 1 - \varepsilon < 1$, y sea $T \in \Psi_{1-\varepsilon, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Suponga que*

$$m \leq -n\varepsilon \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right|,$$

entonces el operador T extiende a un operador continuo de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo para $1 < p < \infty$.

Este resultado fue extendido al caso toroidal para el rango $2 \leq p < \infty$ por Delgado [10]. Sin embargo, se relajan los requerimientos del símbolo como fue el caso en el Teorema 7.1.5.

Teorema 7.1.7 (Delgado). *Sea $0 < \varepsilon < 1$, y sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > n/2$. Sea $a : \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{C}$ un símbolo tal que*

$$|\Delta_\xi^\alpha a(x, \xi)| \lesssim \langle \xi \rangle^{-n\varepsilon/2 - (1-\varepsilon)|\alpha|}, \quad |\partial_x^\beta a(x, \xi)| \lesssim \langle \xi \rangle^{-n\varepsilon/2},$$

para $|\alpha|, |\beta| \leq k$. Entonces el operador T_a extiende a un operador acotado de $L^p(\mathbb{T}^n)$ en sí mismo para $2 \leq p < \infty$.

Nota 7.1.8. En el resultado de Delgado se puede entender a $a(x, \xi)$ como un símbolo con regularidad limitada, pero se puede considerar informalmente como un símbolo en una clase de Hörmander con $\rho = 1 - \varepsilon$ y $\delta = 0$.

Note que en ambos casos se requiere $\delta < \rho$. Esta restricción puede ser salvada gracias al trabajo de Álvarez y Hounie [2]. A partir de este momento, se denota $\lambda := \max\{(\delta - \rho)/2, 0\}$.

Teorema 7.1.9 (Álvarez y Hounie). *Sea $0 \leq \delta < 1$, sea $0 < \rho \leq 1$, y sea $T \in \Psi_{\rho, \delta}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Suponga*

$$m \leq -n \left[(1 - \rho) \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| + \lambda \right],$$

entonces el operador T extiende a un operador continuo de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo.

El análogo toroidal de este resultado fue demostrado con Cardona en [9]. Aquí se presenta la prueba del mismo siguiendo el mismo esquema que Álvarez y Hounie. Primero, se demuestran unos estimativos del kernel de Schwarz de operadores pseudo-diferenciales toroidales bastante útiles.

Nota 7.1.10. Ahora, vale la pena indicar la razón por la que los resultados en el toro no son consecuencia de los del caso euclideo. Las clases H^1 y BMO, no son estables bajo la multiplicación de funciones test, por lo que no es posible tratar al toro como una variedad mediante particiones de la unidad. Además, los operadores pseudo-diferenciales con símbolos en las clases de Hörmander no son estables bajo cambios de coordenadas cuando $\rho > 1 - \delta$. Esto justifica el hecho de que se considere al toro \mathbb{T}^n como un caso distinto a \mathbb{R}^n y se estudien los resultados por separado.

Teorema 7.1.11. *Sea $T \in \Psi_{\rho, \delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, con $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$, con símbolo $p(x, \xi)$ y con kernel*

$$k(x, y) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi(x-y) \cdot \xi} p(x, \xi). \quad (7.1.1)$$

(a) *(Propiedad pseudo-local) k es suave fuera de la diagonal. Además, dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, entonces para cualquier $N > (m + n + |\alpha + \beta|)/\rho$ se tiene*

$$\sup_{x \neq y} |x - y|^N |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x, y)| = C_{\alpha\beta N} < \infty. \quad (7.1.2)$$

- (b) Suponiendo que p tiene soporte compacto en ξ uniformemente en x , entonces k es suave y dados $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, se tiene que

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x, y)| \lesssim_{\alpha\beta} \langle x - y \rangle^{-N}. \quad (7.1.3)$$

- (c) Suponiendo $m + M + n < 0$ para algún $M \in \mathbb{Z}^+$, entonces k es una función continua acotada con derivadas continuas acotadas hasta el orden M .

- (d) Suponiendo $m + M + n = 0$ para algún $M \in \mathbb{Z}^+$, entonces existe $C > 0$ tal que

$$\sup_{|\alpha+\beta|=M} |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x, y)| \leq C |\log |x - y||, \quad x \neq y. \quad (7.1.4)$$

Demostración. Primero, se observa que existe $\tilde{p} \in S_{\rho, \delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{p}|_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n} = p$ y con $T_{\tilde{p}} = T$. En consecuencia, el kernel de Schwarz puede considerarse como $k(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} \tilde{p}(x, \xi) d\xi$. Ahora, las derivadas del kernel se ven de la siguiente manera:

$$\partial_x^\alpha \partial_y^\beta k(x, y) = \int_{\mathbb{R}^n} (-i2\pi\xi)^\beta e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} \sum_{\omega \leq \alpha} C_\omega (i2\pi\xi)^{\alpha-\omega} \partial_x^\omega \tilde{p}(x, \xi) d\xi, \quad (7.1.5)$$

que es el núcleo de un operador con símbolo de orden $m + |\alpha + \beta|$. Entonces, es suficiente probar los resultados cuando $|\alpha + \beta| = 0$.

- (a) La continuidad del kernel $k(x, y)$ se prueba en [21, Teorema 4.3.6]. Por integración por partes se tiene que

$$\begin{aligned} (i2\pi)^{|\gamma|} (x - y)^\gamma k(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^\gamma \left[e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} \right] \tilde{p}(x, \xi) d\xi \\ &= (-1)^{|\gamma|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} \partial_\xi^\gamma [\tilde{p}(x, \xi)] d\xi. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si se fija $|\gamma| = N$, se obtiene

$$|i2\pi|^N |x - y|^N |k(x, y)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^{m-\rho N} d\xi.$$

La última integral es finita cuando $N > (m + n)/\rho$, probando el resultado.

- (b) Se observa que el núcleo sería una suma finita de funciones continuas, probando la continuidad de $k(x, y)$. Además, \tilde{p} tendría el mismo soporte de p . Por lo tanto, la última integral anterior sería finita sin ninguna restricción sobre N .

- (c) Sea $m < -n$. Entonces, se tiene la serie finita

$$|k(x, y)| \leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle \xi \rangle^m,$$

probando la acotación de $k(x, y)$.

- (d) Primero se observa que por (a), (b) es suficiente probar la estimación cuando $|x - y| < 1$ y si $\tilde{p}(x, \xi)$ se anula para $|\xi| < 1$ uniformemente en x . Sea $m + n = 0$ y sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con soporte en $[0, 1]$, tal que $\int \varphi = 1$, y se define

$$k(x, y, t) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} \tilde{p}(x, \xi) \varphi(\langle \xi \rangle - t) d\xi,$$

de modo que

$$k(x, y) = \int_1^\infty k(x, y, t) dt.$$

Luego, usando integración por partes, se tiene que

$$\begin{aligned} (i2\pi)^{|\gamma|} (x-y)^\gamma k(x, y, t) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^\gamma \left[e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} \right] \tilde{p}(x, \xi) \varphi(\langle \xi \rangle - t) d\xi \\ &= (-1)^{|\gamma|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} \sum_{\omega \leq \gamma} C_\omega \partial_\xi^\omega \tilde{p}(x, \xi) \partial^{\gamma-\omega} \varphi(\langle \xi \rangle - t) d\xi. \end{aligned}$$

Dado que $\langle \xi \rangle \sim t$ en el soporte de $\varphi(\cdot - t)$, que tiene volumen estimado por Ct^{n-1} , se obtiene para $|\gamma| = N$

$$\begin{aligned} |x-y|^N |k(x, y, t)| &\leq C \int_{\text{supp } \varphi(\cdot - t)} \langle \xi \rangle^{m-\rho N} d\xi \\ &\leq C \int_{\text{supp } \varphi(\cdot - t)} t^{m-\rho N} d\xi \leq Ct^{m+n-\rho N-1}. \end{aligned}$$

Sumando las estimaciones para $N = 0, 1$, se obtiene

$$|k(x, y, t)| \leq C \frac{t^{-\rho-1}}{t^{-\rho} + |x-y|}.$$

Entonces, el resultado de evaluar la integral anterior es la estimación deseada $|k(x, y)| \leq C |\log |x-y||$ para $x \neq y$. \square

Ahora, se enuncia un resultado de continuidad en $L^2(\mathbb{T}^n)$, cuya demostración es muy similar a la realizada por Hounie en [15].

Teorema 7.1.12. *Sea $\tilde{p} : \mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ un símbolo tal que para $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$, $m \leq -n\lambda$ y $|\alpha|, |\beta| \leq \lceil n/2 \rceil$ satisfice:*

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tilde{p}(x, \xi)| \leq C_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}. \quad (7.1.6)$$

Entonces $T_{\tilde{p}}$ es acotado de $L^2(\mathbb{T}^n)$ en sí mismo con norma proporcional al las mejores cotas $C_{\alpha\beta}$.

Teorema 7.1.13. *Sea $T \in \Psi_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, con $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$, $m \leq -n[(1-\rho)/2 + \lambda]$, entonces T es una aplicación continua*

- (a) *de $L^2(\mathbb{T}^n)$ en $L^{2/\rho}(\mathbb{T}^n)$,*
- (b) *de $L^{2/(2-\rho)}(\mathbb{T}^n)$ en $L^2(\mathbb{T}^n)$.*

Demostración. Primero se observa que $J^{n(1-\rho)/2}T$ y $TJ^{n(1-\rho)/2}$ tienen orden $\leq -n\lambda$, por lo que son acotados en $L^2(\mathbb{T}^n)$ por Teorema 7.1.12. Además, por la desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev, se tiene que $J^{-n(1-\rho)/2}$ es una aplicación continua de $L^2(\mathbb{T}^n)$ en $L^{2/\rho}(\mathbb{T}^n)$ y de $L^{2/(2-\rho)}(\mathbb{T}^n)$ en $L^2(\mathbb{T}^n)$. Por lo tanto,

$$\|Tf\|_{L^{2/\rho}} = \|J^{-n(1-\rho)/2} J^{n(1-\rho)/2} Tf\|_{L^{2/\rho}} \lesssim \|J^{n(1-\rho)/2} Tf\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^2},$$

y

$$\|Tf\|_{L^2} = \|TJ^{n(1-\rho)/2} J^{-n(1-\rho)/2} f\|_{L^2} \lesssim \|J^{-n(1-\rho)/2} f\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^{2/(2-\rho)}}.$$

Por lo tanto, se prueba el resultado deseado. \square

Teorema 7.1.14. *Sea $T \in \Psi_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, con $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$, con símbolo $p := p(x, \xi)$ y con núcleo $k := k(x, y)$.*

(a) Para cualquier $z \in \mathbb{T}^n$ fijo, y $\sigma \geq \varepsilon > 0$, se tienen las desigualdades para el kernel:

$$\sup_{|y-z| \leq \sigma} \int_{|x-z| > 2\sigma} |k(x, y) - k(x, z)| dx \leq C_\varepsilon, \quad (7.1.7)$$

$$\sup_{|y-z| \leq \sigma} \int_{|x-z| > 2\sigma} |k(y, x) - k(z, x)| dx \leq C_\varepsilon. \quad (7.1.8)$$

(b) Si $m \leq -n[(1-\rho)/2 + \lambda]$, y $\sigma < 1$, se tiene para cualquier $z \in \mathbb{T}^n$ fijo,

$$\sup_{|y-z| \leq \sigma} \int_{|x-z| > 2\sigma^\rho} |k(x, y) - k(x, z)| dx \leq C. \quad (7.1.9)$$

(c) Si $m \leq -n(1-\rho)/2$, y $\sigma < 1$, se tiene para cualquier $z \in \mathbb{T}^n$ fijo,

$$\sup_{|y-z| \leq \sigma} \int_{|x-z| > 2\sigma^\rho} |k(y, x) - k(z, x)| dx \leq C. \quad (7.1.10)$$

Demostración. (a) Primero, se observa que $|x - y| \geq |x - z| - |z - y| > \sigma$ en el dominio de evaluación. Luego, por la desigualdad triangular y ecuación (7.1.2) se tiene

$$\begin{aligned} & \sup_{|y-z| \leq \sigma} \int_{|x-z| > 2\sigma} |k(x, y) - k(x, z)| dx \\ & \leq \sup_{|y-z| \leq \sigma} \int_{|x-z| > 2\sigma} |k(x, y)| dx + \sup_{|y-z| \leq \sigma} \int_{|x-z| > 2\sigma} |k(x, z)| dx \\ & \lesssim \int_{|x-y| > \sigma} |x - y|^{-N} dx + \int_{|x-z| > \sigma} |x - z|^{-N} dx \\ & \leq \int_{\mathbb{T}^n} \sigma^{-N} dx + \int_{\mathbb{T}^n} \sigma^{-N} dx \leq C_\varepsilon. \end{aligned}$$

(b) Como antes, sea \tilde{p} el símbolo correspondiente en $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$. Sea $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ con soporte contenido en $[1/2, 1]$, tal que

$$\int_0^\infty \varphi(1/t)/t dt = \int_1^2 \varphi(1/t)/t dt = 1.$$

Se define

$$k(x, y, t) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi(x-y) \cdot \xi} \tilde{p}(x, \xi) \varphi(\langle \xi \rangle / t) d\xi,$$

de modo que

$$k(x, y) = \int_0^\infty k(x, y, t) dt = \int_1^\infty k(x, y, t) dt.$$

Sea $N > n/2$ un entero, entonces se obtienen las estimaciones por Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} & \int_{|x-z| > 2\sigma^\rho} |k(x, y, t) - k(x, z, t)| dx \\ & \leq \left[\int_{\mathbb{T}^n} (1 + t^{2\rho}|x - z|^2)^N |k(x, y, t) - k(x, z, t)| dx \right]^{1/2} \left[\int_{\mathbb{T}^n} (1 + t^{2\rho}|x - z|^2)^{-N} dx \right]^{1/2} \\ & \lesssim \left[\int_{\mathbb{T}^n} (1 + t^{2\rho}|x - z|^2)^N |k(x, y, t) - k(x, z, t)| dx \right]^{1/2} t^{-\rho n/2}. \end{aligned} \quad (7.1.11)$$

Así, para $|\alpha| \leq N$ se tiene que

$$\begin{aligned} & t^{\rho|\alpha|} (x-z)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} \left[e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} - e^{i2\pi(x-z)\cdot\xi} \right] \tilde{p}(x, \xi) \varphi(\langle\xi\rangle/t) d\xi \\ &= t^{\rho|\alpha|} (x-z)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi(x-z)\cdot\xi} \left[e^{i2\pi(z-y)\cdot\xi} - 1 \right] \tilde{p}(x, \xi) \varphi(\langle\xi\rangle/t) d\xi \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha\beta} t^{\rho|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi(x-z)\cdot\xi} \partial_\xi^\beta \left[\left(e^{i2\pi(z-y)\cdot\xi} - 1 \right) \tilde{p}(x, \xi) \right] \partial_\xi^{\alpha-\beta} \varphi(\langle\xi\rangle/t) d\xi. \end{aligned}$$

Ahora, $|e^{i2\pi(x-z)\cdot\xi} - 1| \leq |x-z||\xi| \leq t\sigma$ en el soporte de $\varphi(\langle\xi\rangle/t)$. Por otro lado,

$$|\partial_\xi^\gamma e^{i2\pi(x-z)\cdot\xi}| \lesssim_\gamma |y-z|^{|\gamma|} \lesssim_\gamma \sigma^{|\gamma|} \lesssim C \langle\xi\rangle^{-|\gamma|} (t\sigma)^{|\gamma|}.$$

Asuma que $t\sigma < 1$, entonces para cualquier $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, que es igual a uno en el soporte de $\varphi(\langle\xi\rangle/t)$ el conjunto

$$\Sigma_{\alpha\beta} = \left\{ \langle\xi\rangle^{n(1-\rho)/2+\rho|\beta|} \partial_\xi^\beta \left[\left(e^{i2\pi(x-z)\cdot\xi} - 1 \right) \tilde{p}(x, \xi) \right] \chi(\langle\xi\rangle/t) : |y-z| < \sigma, z \in \mathbb{T}^n \right\}$$

tiene medida acotada por $C \langle\xi\rangle^{n(1-\rho)/2+\rho|\beta|} (t\sigma) \langle\xi\rangle^{m-\rho|\beta|} \leq Ct\sigma \langle\xi\rangle^{-n\lambda}$. Así, se puede considerar $\tilde{p}(x, \xi)$ como un símbolo en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ y por Teorema 7.1.9 cada uno de los operadores correspondientes con símbolos

$$\langle\xi\rangle^{n(1-\rho)/2+\rho|\beta|} \partial_\xi^\beta \left[\left(e^{i2\pi(x-z)\cdot\xi} - 1 \right) \tilde{p}(x, \xi) \right] \chi(\langle\xi\rangle/t),$$

en el conjunto $\Sigma_{\alpha\beta}$ son acotados en $L^2(\mathbb{R}^n)$ con norma estimada por $Ct\sigma$. Por lo tanto, ecuación (7.1.11) puede estimarse usando la identidad de Plancherel mediante

$$\begin{aligned} Ct\sigma \sum_{\beta \leq \alpha, |\alpha| \leq N} C_{\alpha\beta} t^{\rho|\alpha|} \left\| \langle\xi\rangle^{-n(1-\rho)/2-\rho|\beta|} t^{-|\alpha-\beta|} \partial_\xi^{\alpha-\beta} \varphi(\langle\xi\rangle/t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} t^{-\rho n/2} \\ \leq Ct\sigma t^{\rho|\alpha|} t^{-n(1-\rho)/2-\rho|\beta|} t^{-|\alpha-\beta|} t^{-\rho n/2} \leq Ct\sigma, \end{aligned} \quad (7.1.12)$$

como $\langle\xi\rangle \sim t$ en el soporte de la función. Ahora, se elimina la restricción $t\sigma < 1$. Para $|\alpha| = N$ se tiene que

$$\begin{aligned} & \int_{|x-z| > 2\sigma^\rho} |k(x, y, t)| dx \\ & \leq \left[\int_{\mathbb{T}^n} (t^{2\rho}|x-y|^2)^N |k(x, y, t)|^2 dx \right]^{1/2} \left[\int_{|x-y| > \sigma^\rho} (|t^{2\rho}|x-y|^2)^{-N} dx \right]^{1/2} \\ & \leq C \left[\int_{\mathbb{T}^n} (t^{2\rho}|x-y|^2)^N |k(x, y, t)|^2 dx \right]^{1/2} t^{-\rho N} \sigma^{\rho(n/2-N)}. \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

Sea $|\alpha| = N$, entonces

$$\begin{aligned} & t^{\rho|\alpha|} (x-y)^\alpha \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} \tilde{p}(x, \xi) \varphi(\langle\xi\rangle/t) d\xi \\ &= \sum_{\beta \leq \alpha} C_{\alpha\beta} t^{\rho|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} \partial_\xi^\beta \tilde{p}(x, \xi) t^{-|\alpha-\beta|} \partial_\xi^{\alpha-\beta} \varphi(\langle\xi\rangle/t) d\xi, \end{aligned}$$

y para cada $\beta \leq \alpha$ la norma $L^2(\mathbb{T}^n)$ como función de x de

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} \partial_\xi^\beta \tilde{p}(x, \xi) t^{-|\alpha-\beta|} \partial_\xi^{\alpha-\beta} \varphi(\langle\xi\rangle/t) d\xi$$

es igual a la norma $L^2(\mathbb{T}^n)$ como función de x de

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} \partial_\xi^\beta \tilde{p}(x+y, \xi) t^{-|\alpha-\beta|} \partial_\xi^{\alpha-\beta} \varphi(\langle \xi \rangle / t) d\xi.$$

Por otro lado, el conjunto $\{\langle \xi \rangle^{n(1-\rho)/2+\rho|\beta|} \partial_\xi^\beta \tilde{p}(x+y, \xi) : y \in \mathbb{T}^n\}$ tiene medida acotada por $C\langle \xi \rangle^{n(1-\rho)/2+\rho|\beta|} \langle \xi \rangle^{m-\rho|\beta|} = C\langle \xi \rangle^{n(1-\rho)/2+m}$, así que sus respectivos operadores son acotados en $L^2(\mathbb{R}^n)$ por Teorema 7.1.9. Por lo tanto, ecuación (7.1.13) puede estimarse mediante

$$C \sum_{\beta \leq \alpha, |\alpha|=N} t^{\rho|\alpha|} t^{-n(1-\rho)/2-\rho|\beta|} t^{-\rho|\alpha-\beta|} t^{n/2} t^{\rho N} \sigma^{\rho(n/2-N)} \leq C(t\sigma)^{\rho(n/2-N)}.$$

De manera similar, se puede estimar

$$\int_{|x-z|>2\sigma^\rho} |k(x, z, t)| dx \leq C(t\sigma)^{\rho(n/2-N)}.$$

Usando estas estimaciones y ecuación (7.1.12) se obtiene el resultado de la siguiente expresión:

$$\int_{|x-z|>2\sigma^\rho} |k(x, y) - k(x, z)| dx \lesssim \int_1^{1/\sigma} t\sigma/t dt + \int_{1/\sigma}^\infty (t\sigma)^{\rho(n/2-N)}/t dt \leq C. \quad (7.1.14)$$

Completando la demostración.

(c) Primero, se observa que

$$\begin{aligned} & k(y, x, t) - k(z, x, t) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi(x-y)\cdot\xi} [\tilde{p}(y, \xi) - \tilde{p}(z, \xi)] \varphi(\langle \xi \rangle / t) d\xi \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi x \cdot \xi} [e^{i2\pi y \cdot \xi} - e^{i2\pi z \cdot \xi}] \tilde{p}(z, \xi) \varphi(\langle \xi \rangle / t) d\xi \\ &= f(x-y, y, z, t) + g(x, y, z, t). \end{aligned}$$

Entonces, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^n} |g(x, y, z, t)| dx &\lesssim t^{-\rho n/2} \left[\int_{\mathbb{T}^n} |g(x, y, z, t)|^2 (1+t^{2\rho}|x|^2)^N dx \right]^{1/2} \\ &\lesssim t^{-\rho n/2} \sum_{|\alpha| \leq N} \left[\int_{\mathbb{T}^n} |(t^\rho x)^\alpha g(x, y, z, t)|^2 dx \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Se observa que g es la transformada de Fourier en \mathbb{R}^n en la primera variable de la función $G(\xi, y, z, t) = [e^{i2\pi y \cdot \xi} - e^{i2\pi z \cdot \xi}] \tilde{p}(z, \xi) \varphi(\langle \xi \rangle / t)$. Además, como antes, $|\partial_\xi^\gamma (e^{i2\pi y \cdot \xi} - e^{i2\pi z \cdot \xi})| \leq C t \sigma$ cuando $t\sigma < 1$. Por lo tanto, asumiendo $t\sigma < 1$ y usando la identidad de Plancherel, se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^n} |g(x, y, z, t)| dx &\lesssim t^{-\rho n/2} \sum_{|\alpha| \leq N} \|\partial_\xi^\alpha G(\xi, y, z, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq t^{-\rho n/2} \sum_{\beta \leq \alpha, |\alpha| \leq N} \left\| \partial_\xi^\beta \xi [(e^{i2\pi y \cdot \xi} - e^{i2\pi z \cdot \xi}) \tilde{p}(z, \xi)] \partial_\xi^{\alpha-\beta} \varphi(\langle \xi \rangle / t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\lesssim t^{-\rho n/2} \sum_{\beta \leq \alpha, |\alpha| \leq N} t \sigma t^{m-\rho|\beta|} t^{-|\alpha-\beta|} t^{n/2} \\ &\leq t \sigma t^{n(1-\rho)/2+m} \leq t \sigma. \end{aligned}$$

Ahora, se elimina la restricción $t\sigma < 1$ y se observa que

$$g(x, y, z, t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i2\pi(x-z)\cdot\xi} \left[e^{i2\pi(y-z)\cdot\xi} - 1 \right] \tilde{p}(z, \xi) \varphi(\langle \xi \rangle / t) d\xi.$$

Así, se tiene que

$$\int_{\mathbb{T}^n} |g(x, y, z, t)| dx \leq Ct^{-\rho N} \sigma^{\rho(n/2-N)} \left[\int_{\mathbb{T}^n} (t^{2\rho} |x-z|^2)^N |g(x, y, z, t)|^2 dx \right].$$

Se puede usar la identidad de Plancherel como antes, para obtener

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{T}^n} |g(x, y, z, t)| dx &\leq Ct^{-\rho N} \sigma^{\rho(n/2-N)} \sum_{\beta \leq \alpha, |\alpha|=N} \left\| \partial_\xi^\beta \left[(e^{i2\pi(y-z)\cdot\xi} - 1) \tilde{p}(z, \xi) \right] \partial_\xi^{\alpha-\beta} \varphi(\langle \xi \rangle / t) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq Ct^{-\rho N} \sigma^{\rho(n/2-N)} \sum_{\beta \leq \alpha, |\alpha|=N} t^{-|\alpha-\beta|} t^{n/2} \\ &\leq C(t\sigma)^{\rho(n/2-N)}. \end{aligned}$$

Se pueden usar los mismos procedimientos para encontrar estas cotas para $f(x-y, y, z, t)$ al observar que $\int_{|x-z|>2\sigma\rho} |f(x-y, y, z, t)| dx \leq \int_{|x|>\sigma\rho} |f(x, y, z, t)| dx$. Entonces la cota deseada proviene del cálculo en ecuación (7.1.14). \square

Teorema 7.1.15. Sea $T \in \Psi_{\rho, \delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, con $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$, $m \leq -n[(1-\rho)/2 + \lambda]$, entonces T y su adjunto T^* son aplicaciones continuas

(a) del espacio de Hardy $H^1(\mathbb{T}^n)$ en $L^1(\mathbb{T}^n)$,

(b) de $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ en $BMO(\mathbb{T}^n)$.

Demostración. (a) Sea a un átomo de $H^1(\mathbb{T}^n)$ con soporte en $B(z, \sigma)$, que satisface $\|a\|_{L^\infty} \leq |B|^{-1}$ y la condición de cancelación. Si $\sigma < 1$, se define $B' = B(z, 2\sigma\rho)$ y $A = \mathbb{T}^n \setminus B'$. Entonces

$$\int_{\mathbb{T}^n} |Ta(x)| dx \leq \int_{B'} |Ta(x)| dx + \int_A |Ta(x)| dx =: I_1 + I_2.$$

Ahora, usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el Teorema 7.1.13 (b) se obtiene

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \|\chi_{B'}\|_{L^2} \|Ta\|_{L^2} \lesssim \sigma^{\rho n/2} \|a\|_{L^{2/(2-\rho)}} \\ &\leq \sigma^{\rho n/2} \left[\int_B |B|^{-2/(2-\rho)} dx \right]^{(2-\rho)/2} \leq \sigma^{\rho n/2} |B|^{-\rho/2} \leq C, \end{aligned}$$

y usando el Teorema 7.1.14 (b) se tiene la estimación,

$$I_2 \leq \int_A \int_B |k(x, y) - k(x, z)| |a(y)| dy dx \leq \sup_{|y-z|<\sigma} \int_A |k(x, y) - k(x, z)| dx \leq C.$$

Cuando $\sigma \geq 1$, se define $B' = B(z, 2\sigma)$ y $A = \mathbb{T}^n \setminus B'$. Entonces se divide la norma $L^1(\mathbb{T}^n)$ en $I_1 + I_2$ como anteriormente. Ahora se usa el Teorema 7.1.13 (a) para obtener

$$\begin{aligned} I_1 &\leq \|\chi_{B'}\|_{L^2} \|Ta\|_{L^2} \lesssim \sigma^{n/2} \|a\|_{L^2} \\ &\lesssim \sigma^{n/2} \left[\int_B |B|^{-2} dx \right]^{1/2} \leq \sigma^{n/2} |B|^{-1/2} \leq C, \end{aligned}$$

y se usa el Teorema 7.1.14 (a) para estimar I_2 .

- (b) Sea $B = B(z, \sigma)$. Si $\sigma < 1$, se define $B' = B(z, 2\sigma^\rho)$ y $A = \mathbb{T}^n \setminus B'$ de modo que se obtiene $f = f\chi_{B'} + f\chi_A =: f_1 + f_2$. Ahora, se define $b = Tf_2(z)$, que está bien definido, ya que Tf_2 es suave en B' . Entonces

$$\frac{1}{|B|} \int_B |Tf(x) - b| dx \leq \frac{1}{|B|} \int_B |Tf_1(x)| dx + \frac{1}{|B|} \int_B |Tf_2(x) - b| dx =: I_1 + I_2.$$

Por la desigualdad de Hölder y el Teorema 7.1.13 (a) se tienen las desigualdades

$$I_1 \leq \frac{1}{|B|} \|\chi_{B'}\|_{L^{2/(2-\rho)}} \|Tf_1\|_{L^{2/\rho}} \lesssim |B|^{-\rho/2} \|f_1\|_{L^2} \leq |B|^{-\rho/2} \left[\int_{B'} \|f\|_{L^\infty}^2 dx \right]^{1/2} \lesssim \|f\|_{L^\infty},$$

y usando el Teorema 7.1.14 (c) se obtiene

$$I_2 \leq \frac{1}{|B|} \int_B \int_A |k(x, y) - k(z, y)| |f(y)| dy dx \leq \sup_{|y-z| < \sigma} \int_A |k(x, y) - k(z, y)| \|f\|_{L^\infty} dy \lesssim \|f\|_{L^\infty}.$$

Cuando $\sigma \geq 1$, se define $B' = B(z, 2\sigma)$ y $A = \mathbb{T}^n \setminus B'$. Entonces se divide la norma BMO en $I_1 + I_2$ como anteriormente. Ahora se usa la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el Teorema 7.1.13 (b) para obtener

$$I_1 \leq \frac{1}{|B|} \|\chi_B\|_{L^2} \|Tf_1\|_{L^2} = |B|^{-1/2} \|Tf_1\|_{L^2} \lesssim |B|^{-1/2} \left[\int_{B'} \|f\|_{L^\infty}^2 dx \right]^{1/2} \lesssim \|f\|_{L^\infty},$$

y se usa Teorema 7.1.14 (a) para estimar I_2 . Así, se obtiene la desigualdad

$$\|Tf\|_{\text{BMO}(\mathbb{T}^n)} = \sup_B \inf_{b \in \mathbb{C}} \frac{1}{|B|} \int_B |Tf(x) - b| dx \lesssim \|f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^n)}.$$

Por lo tanto, se completa la demostración para T .

Ahora, se observa que por un argumento de dualidad y en vista del Teorema 5.6.16, se tiene que también es válido para el adjunto T^* . \square

Teorema 7.1.16. Sea $T \in \Psi_{\rho, \delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, con $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$ y

$$m \leq -n \left[(1 - \rho) \left| \frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right| + \lambda \right]. \quad (7.1.15)$$

Entonces T es una aplicación continua de $L^p(\mathbb{T}^n)$ en sí mismo.

Demostración. Se puede usar el argumento de interpolación compleja entre $(H^1(\mathbb{T}^n), L^1(\mathbb{T}^n))$ y $(L^2(\mathbb{T}^n), L^2(\mathbb{T}^n))$ para $1 < p < 2$, y entre $(L^2(\mathbb{T}^n), L^2(\mathbb{T}^n))$ y el par $(L^1(\mathbb{T}^n), \text{BMO}(\mathbb{T}^n))$ para $2 < p < \infty$. De hecho, T es acotado en $L^2(\mathbb{T}^n)$ si $m \leq -n\lambda$ por Teorema 7.1.12. Por otro lado, si $m \leq -n[(1 - \rho)/2 + \lambda]$, entonces T será acotado de $H^1(\mathbb{T}^n)$ en $L^1(\mathbb{T}^n)$ y de $L^\infty(\mathbb{T}^n)$ en $\text{BMO}(\mathbb{T}^n)$. Entonces T será acotado en $L^p(\mathbb{T}^n)$, por el argumento de interpolación de Fefferman-Stein, para

$$\frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{q} + \frac{\theta}{2},$$

y $0 < \theta < 1$, con $q = 1$ o $q = \infty$. Lo cual es equivalente a la restricción

$$m \leq -n\lambda\theta - n[(1 - \rho)/2 + \lambda](1 - \theta).$$

Es decir, que m satisface ecuación (7.1.15), completando la demostración. \square

Se pueden usar las propiedades de los operadores de potencial de Bessel para extender el resultado de acotación en $L^p(\mathbb{T}^n)$ al caso $L^p(\mathbb{T}^n)$ - $L^q(\mathbb{T}^n)$. En el caso del toro, el siguiente teorema extiende el resultado de acotación $L^p(\mathbb{T}^n)$ - $L^q(\mathbb{T}^n)$ en [8] al rango completo $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$.

Teorema 7.1.17. Sea $T \in \Psi_{\rho,\delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, con $0 < \rho \leq 1$, $0 \leq \delta < 1$, entonces T es una aplicación continua de $L^p(\mathbb{T}^n)$ en $L^q(\mathbb{T}^n)$ para $1 < p \leq q < \infty$, si

(a) $1 < p \leq 2 \leq q$ y

$$m \leq -n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \lambda \right), \quad (7.1.16)$$

(b) $2 \leq p \leq q$ y

$$m \leq -n \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + (1 - \rho) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) + \lambda \right], \quad (7.1.17)$$

(c) $p \leq q \leq 2$ y

$$m \leq -n \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + (1 - \rho) \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) + \lambda \right]. \quad (7.1.18)$$

Demostración. (a) Sean $m_1 = -n(1/p - 1/2)$ y $m_2 = -n(1/2 - 1/q)$. Entonces $m \leq m_1 + m_2 - n\lambda$ y $J^{-m_2} T J^{-m_1}$ es acotado en $L^2(\mathbb{T}^n)$ por Teorema 7.1.12. Además, por la desigualdad de Hardy-Littlewood-Sobolev, se obtiene que J^{m_1} es acotado de $L^p(\mathbb{T}^n)$ en $L^2(\mathbb{T}^n)$ y J^{m_2} es acotado de $L^q(\mathbb{T}^n)$ en $L^2(\mathbb{T}^n)$. Por lo tanto,

$$\|J^{m_2}(J^{-m_2} T J^{-m_1})J^{m_1} f\|_{L^q} \lesssim \|(J^{-m_2} T J^{-m_1})J^{m_1} f\|_{L^2} \lesssim \|J^{m_1} f\|_{L^2} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

Así, se prueba el resultado.

(b) Sea $m' = -n(1/p - 1/q)$, de modo que $J^{m'}$ es continuo de $L^p(\mathbb{T}^n)$ en $L^q(\mathbb{T}^n)$ y $J^{-m'} T$ tiene orden $m - m' \leq -n[(1 - \rho)(1/2 - 1/q) + \lambda]$ y es una aplicación continua de $L^p(\mathbb{T}^n)$ en sí mismo. Así, se tiene que

$$\|J^{m'}(J^{-m'} T) f\|_{L^q} \lesssim \|(J^{-m'} T) f\|_{L^p} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

Por lo tanto, se obtiene la estimación deseada.

(c) Como anteriormente, se define $m' = -n(1/p - 1/q)$ de modo que $T J^{-m'}$ aplica continuamente $L^q(\mathbb{T}^n)$ en sí mismo y

$$\|(T J^{-m'}) J^{m'} f\|_{L^q} \lesssim \|J^{m'} f\|_{L^q} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

Por lo tanto, se completa la demostración. \square

7.2. Continuidad en espacios de Sobolev

Primero, se revisita la definición de espacios de Sobolev utilizando los operadores pseudo-diferenciales que han sido definidos en apartados anteriores.

Definición 7.2.1 (Espacios de Sobolev). Sea $s \in \mathbb{R}$, entonces se dice que f pertenece al *espacio de Sobolev* $W_p^s(\mathbb{R}^n)$, si $J^s f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, donde $1 \leq p \leq \infty$ y J^s es el potencial de Bessel de orden s . Además, se define la norma

$$\|f\|_{W_p^s} := \|J^s f\|_{L^p}.$$

Ahora, se extiende el resultado del Teorema 7.1.4 para estos espacios.

Teorema 7.2.2. Sea $T \in \Psi_{1,0}^m(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ sea un operador pseudo-diferencial de orden $m \in \mathbb{R}$. Entonces, el operador T se extiende a un operador continuo desde el espacio de Sobolev $W_p^{s-m}(\mathbb{R}^n)$ hacia $W_p^s(\mathbb{R}^n)$, con $1 < p < \infty$.

Demostración. Note que $J^{s-m}TJ^{-s}$ es un operador de orden cero, por lo que es continuo en L^p , en vista del Teorema 7.1.4. Por lo que se tiene que

$$\|f\|_{W_p^{s-m}} = \|J^{s-m}Tf\|_{L^p} = \|J^{s-m}TJ^{-s}J^s f\|_{L^p} \lesssim \|J^s f\|_{L^p} = \|f\|_{W_p^s}.$$

Completando la prueba. \square

Ahora, se demuestra que la definición revisitada de espacios de Sobolev coincide con la definición para regularidad entera que se dio anteriormente.

Teorema 7.2.3. *El espacio $W_p^s(\mathbb{R}^n)$ coincide con el espacio $W_p^k(\mathbb{R}^n)$, para $1 < p < \infty$, cuando $s = k$ es entero, con equivalencia de normas.*

Demostración. Se utilizará k para simplificar la notación. Para $|\alpha| \leq k$, se tiene que $\partial_x^\alpha J^{-k}$ es un operador pseudo-diferencial con símbolo $(2\pi i \xi)^\alpha \langle \xi \rangle^{-k}$, y orden $|\alpha| - k \leq 0$. Entonces, por el Teorema 7.1.4 se puede concluir que son acotados en L^p , y que

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial_x^\alpha f\|_{L^p} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial_x^\alpha J^{-k} J^k f\|_{L^p} \lesssim \|J^k f\|_{L^p} = \|f\|_{W_p^k}.$$

Por otra parte, se tiene que el operador con símbolo

$$\frac{\langle \xi \rangle^k}{p_k(\xi)} := \langle \xi \rangle^k \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \xi^\alpha \right)^{-1} \leq C < \infty,$$

es acotado en L^p . Por lo que

$$\begin{aligned} \|f\|_{W_p^k} &= \|J^k f\|_{L^p} = \|J^k T_{p_k}^{-1} T_{p_k} f\|_{L^p} \\ &\lesssim \|T_{p_k} f\|_{L^p} \\ &= \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\sum \xi^\alpha \widehat{f}(\xi) \right) \right\|_{L^p} \\ &\leq \sum \|\mathcal{F}^{-1}(\xi^\alpha \widehat{f}(\xi))\|_{L^p} \\ &\lesssim \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial_x^\alpha f\|_{L^p} \end{aligned}$$

Lo que completa la prueba de equivalencia de definiciones. \square

La definición de espacios de Sobolev también puede realizarse mediante el potencial de Bessel en el caso del toro.

Definición 7.2.4 (Espacios de Sobolev). Sea $s \in \mathbb{R}$, entonces se dice que f pertenece al *espacio de Sobolev* $W_p^s(\mathbb{T}^n)$, si $J^s f \in L^p(\mathbb{T}^n)$, donde $1 \leq p \leq \infty$ y J^s es el potencial de Bessel de orden s . Además, se define la norma

$$\|f\|_{W_p^s} := \|J^s f\|_{L^p}.$$

Ahora, se extiende el Teorema 7.1.17 a espacios de Sobolev.

Teorema 7.2.5. *Sean $0 \leq \delta < 1$, $0 < \rho \leq 1$, $m \in \mathbb{R}$, y $T \in \Psi_{\rho, \delta}^m(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$. Entonces, T se extiende a un operador acotado de $W_p^s(\mathbb{T}^n)$ en $W_q^{s-\mu}(\mathbb{T}^n)$ donde $1 < p \leq q < \infty$, para cualquier $s \in \mathbb{R}$, cuando*

1. $1 < p \leq 2 \leq q$ y

$$\mu \geq m + n \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + \lambda \right),$$

2. si $2 \leq p \leq q$ y

$$\mu \geq m + n \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + (1 - \rho) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) + \lambda \right],$$

3. si $p \leq q \leq 2$ y

$$\mu \geq m + n \left[\frac{1}{p} - \frac{1}{q} + (1 - \rho) \left(\frac{1}{q} - \frac{1}{2} \right) + \lambda \right],$$

donde $\lambda := \max\{0, (\delta - \rho)/2\}$.

Demostración. Se observa que $J^{s-\mu} T J^{-s}$ tiene orden $m - \mu$, que satisface los requisitos del Teorema 7.1.17, implicando su continuidad L^p - L^q . Por lo tanto, se obtiene que

$$\|Tf\|_{W_q^{s-\mu}} = \|T J^{-s} J^s f\|_{W_q^{s-\mu}} = \|J^{s-\mu} T J^{-s} J^s f\|_{L^q} \lesssim \|J^s f\|_{L^p} = \|f\|_{W_p^s}.$$

Así, se completa la demostración. □

- [1] Agranovich, M. S.: *Spectral properties of elliptic pseudodifferential operators on a closed curve*. Functional Analysis and Its Applications, 13(4):279–281, 1980.
- [2] Alvarez, J. y Hounie, J.: *Estimates for the kernel and continuity properties of pseudo-differential operators*. Arkiv för Matematik, 28(1–2):1–22, 1990.
- [3] Bergh, J. y Lofstrom, J.: *Interpolation spaces*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. 1976.
- [4] Calderón, A. P. y Vaillancourt, R.: *On the boundedness of pseudo-differential operators*. Journal of the Mathematical Society of Japan, 23(2), 1971.
- [5] Calderón, A. P. y Vaillancourt, R.: *A class of bounded pseudo-differential operators*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 69(5):1185–1187, 1972.
- [6] Calderón, A. P. y Zygmund, A.: *On the existence of certain singular integrals*. Acta Mathematica, 88(0):85–139, 1952.
- [7] Cardona, D.: *Weak type $(1,1)$ bounds for a class of periodic pseudo-differential operators*. Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, 5(4):507–515, 2014.
- [8] Cardona, D., Delgado, J., Kumar, V. y Ruzhansky, M.: *L_p - L_q -Boundedness of pseudo-differential operators on compact Lie groups*. Osaka Journal of Mathematics, 2023. to appear.
- [9] Cardona, D. y Martínez, M. A.: *Estimates for pseudo-differential operators on the torus revisited. I*. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 554(2):129959, 2026, ISSN 0022-247X.
- [10] Delgado, J.: *L^p -bounds for pseudo-differential operators on the torus*. En *Pseudo-Differential Operators, Generalized Functions and Asymptotics*, páginas 103–116. 2013.
- [11] Duoandikoetxea, J.: *Fourier Analysis*. American Mathematical Society, Providence, 2001.
- [12] Fefferman, C.: *Characterizations of bounded mean oscillation*. Bulletin of the American Mathematical Society, 77(4):587–588, 1971.
- [13] Fefferman, C.: *L_p bounds for pseudo-differential operators*. Israel Journal of Mathematics, 14(4):413–417, 1973.
- [14] Fefferman, C. y Stein, E. M.: *H_p spaces of several variables*. Acta Mathematica, 129(0):137–193, 1972.

- [15] Hounie, J.: *On the L^2 continuity of pseudo-differential operators*. Communications in Partial Differential Equations, 11(7):765–778, 1986.
- [16] Hörmander, Lars: *L_p Estimates for (Pluri-) Subharmonic Functions*. Mathematica Scandinavica, 20:65–78, 1967.
- [17] McLean, W.M.: *Local and global description of periodic pseudo-differential operators*. Mathematische Nachrichten, 150:151–161, 1991.
- [18] Molahajloo, S. y Wong, M.W.: *Pseudo-differential operators on \mathbb{S}^1* . En Rodino, L. y M.W. Wong (editores): *New Developments in Pseudo-differential Operators*, páginas 297–306. Birkhäuser, 2008.
- [19] Nagase, M.: *On some classes of L^p -bounded pseudodifferential operators*. Osaka Journal of Mathematics, 23(2):425–440, 1986.
- [20] Ruzhansky, M. y Turunen, M.: *On the Fourier analysis of operators on the torus*. En Toft, J., M.W. Wong y H. Zhu (editores): *Modern Trends in Pseudo-Differential Operators*, volumen 172 de *Operator Theory: Advances and Applications*, páginas 87–105. Birkhäuser, 2007.
- [21] Ruzhansky, M. y Turunen, V.: *Pseudo-differential operators and symmetries: Background analysis and advanced topics*. Birkhäuser, Basel, 2010.
- [22] Ruzhansky, M. y Turunen, V.: *Quantization of Pseudo-Differential Operators on the torus*. Journal of Fourier Analysis and Applications, 16:943–982, 2010.
- [23] STEIN, ELIAS M.: *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions (PMS-30)*. Princeton University Press, 1970, ISBN 9780691080796. <http://www.jstor.org/stable/j.ctt1bpmb07>, visitado el 2025-09-12.
- [24] STEIN, ELIAS M. y Timothy S. Murphy: *Harmonic Analysis (PMS-43): Real-Variable Methods, Orthogonality, and Oscillatory Integrals. (PMS-43)*. Princeton University Press, 1993, ISBN 9780691032160.
- [25] Wang, L.: *Pseudo-differential operators with rough coefficients*. Tesis de Doctorado, McMaster University, 1997.
- [26] Wong, M. W.: *Discrete Fourier Analysis*. Birkhäuser, 2011.