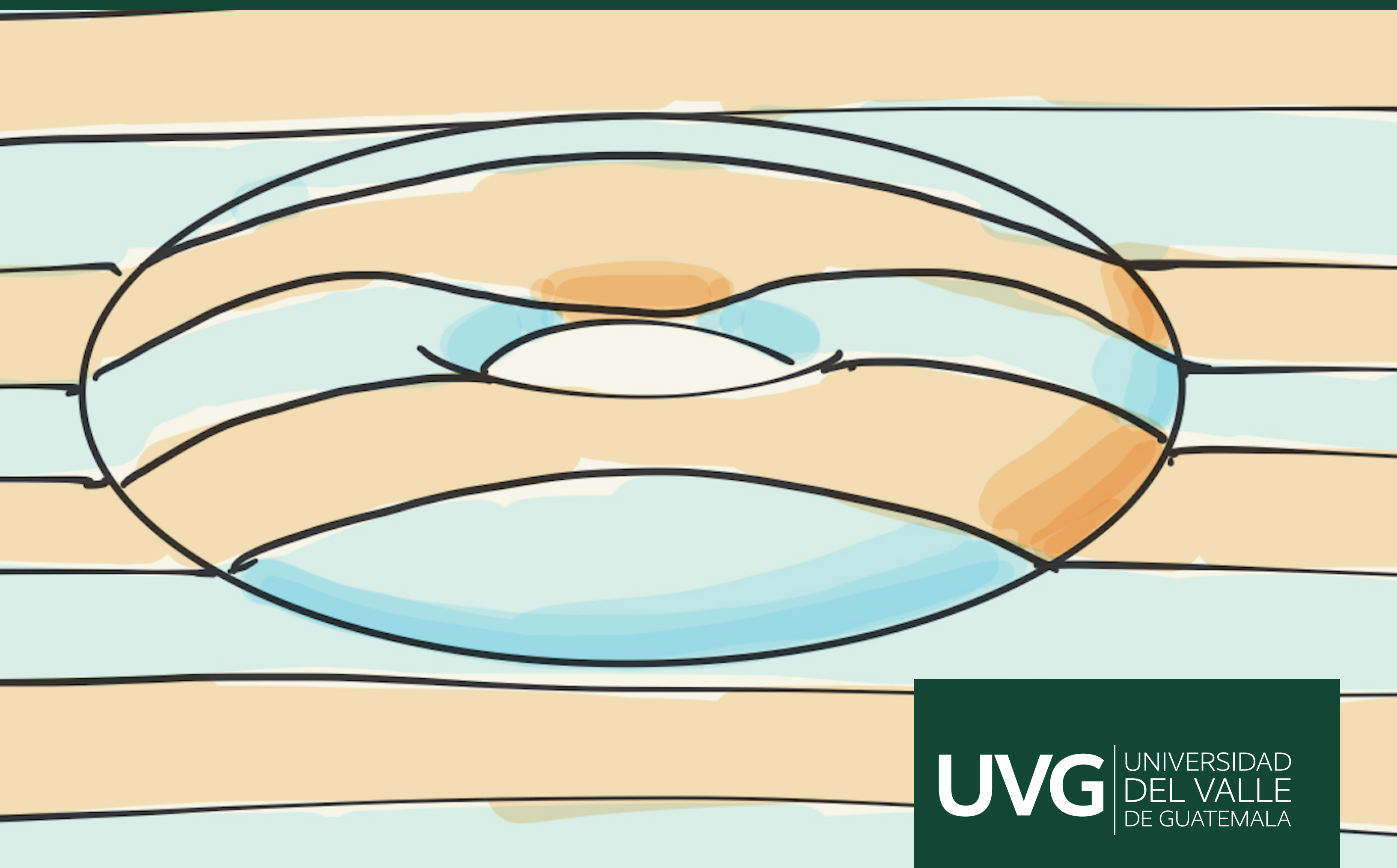
Continuidad de operadores pseudo-diferenciales en el toro

Manuel Alejandro Martínez Flores



UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA

UNIVERSIDAD DEL VALLE DE GUATEMALA
Facultad de Ciencias y Humanidades

Continuidad de operadores pseudo-diferenciales en el toro

Trabajo de graduación en modalidad de Tésis presentado por
Manuel Alejandro Martínez Flores
Para optar al grado académico de Licenciado en Matemática Aplicada

Guatemala, TODO del 2025

Vo.Bo.:

(f) ______________________________

Dr. Duván Cardona

Tribunal Examinador:

(f) ______________________________

Dr. Duván Cardona

(f) ______________________________

TODO

(f) ______________________________

TODO

Fecha de aprobación: Guatemala, TODO.

Prefacio

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Cras vitae eleifend ipsum, ut mattis nunc. Pellentesque ac hendrerit lacus. Cras sollicitudin eget sem nec luctus. Vivamus aliquet lorem id elit venenatis pellentesque. Nam id orci iaculis, rutrum ipsum vel, porttitor magna. Etiam molestie vel elit sed suscipit. Proin dui risus, scelerisque porttitor cursus ac, tempor eget turpis. Aliquam ultricies congue ligula ac ornare. Duis id purus eu ex pharetra feugiat. Vivamus ac orci arcu. Nulla id diam quis erat rhoncus hendrerit. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Sed vulputate, metus vel efficitur fringilla, orci ex ultricies augue, sit amet rhoncus ex purus ut massa. Nam pharetra ipsum consequat est blandit, sed commodo nunc scelerisque. Maecenas ut suscipit libero. Sed vel euismod tellus.

Proin elit tellus, finibus et metus et, vestibulum ullamcorper est. Nulla viverra nisl id libero sodales, a porttitor est congue. Maecenas semper, felis ut rhoncus cursus, leo magna convallis ligula, at vehicula neque quam at ipsum. Integer commodo mattis eros sit amet tristique. Cras eu maximus arcu. Morbi condimentum dignissim enim non hendrerit. Sed molestie erat sit amet porttitor sagittis. Maecenas porttitor tincidunt erat, ac lacinia lacus sodales faucibus. Integer nec laoreet massa. Proin a arcu lorem. Donec at tincidunt arcu, et sodales neque. Morbi rhoncus, ligula porta lobortis faucibus, magna diam aliquet felis, nec ultrices metus turpis et libero. Integer efficitur erat dolor, quis iaculis metus dignissim eu.

Índice

Resumen

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Cras vitae eleifend ipsum, ut mattis nunc. Pellentesque ac hendrerit lacus. Cras sollicitudin eget sem nec luctus. Vivamus aliquet lorem id elit venenatis pellentesque. Nam id orci iaculis, rutrum ipsum vel, porttitor magna. Etiam molestie vel elit sed suscipit. Proin dui risus, scelerisque porttitor cursus ac, tempor eget turpis. Aliquam ultricies congue ligula ac ornare. Duis id purus eu ex pharetra feugiat. Vivamus ac orci arcu. Nulla id diam quis erat rhoncus hendrerit. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Sed vulputate, metus vel efficitur fringilla, orci ex ultricies augue, sit amet rhoncus ex purus ut massa. Nam pharetra ipsum consequat est blandit, sed commodo nunc scelerisque. Maecenas ut suscipit libero. Sed vel euismod tellus.

Proin elit tellus, finibus et metus et, vestibulum ullamcorper est. Nulla viverra nisl id libero sodales, a porttitor est congue. Maecenas semper, felis ut rhoncus cursus, leo magna convallis ligula, at vehicula neque quam at ipsum. Integer commodo mattis eros sit amet tristique. Cras eu maximus arcu. Morbi condimentum dignissim enim non hendrerit. Sed molestie erat sit amet porttitor sagittis. Maecenas porttitor tincidunt erat, ac lacinia lacus sodales faucibus. Integer nec laoreet massa. Proin a arcu lorem. Donec at tincidunt arcu, et sodales neque. Morbi rhoncus, ligula porta lobortis faucibus, magna diam aliquet felis, nec ultrices metus turpis et libero. Integer efficitur erat dolor, quis iaculis metus dignissim eu.

CAPÍTULO 1

Introducción

Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Quisque eget consequat risus. Praesent a quam lacinia, consequat eros id, auctor tellus. Phasellus a dapibus arcu, vitae luctus leo. Aliquam erat volutpat. Suspendisse ac velit quam. Nullam risus nibh, lobortis vehicula elit non, pellentesque volutpat odio. Donec feugiat porta sapien gravida interdum. Cras odio nunc, lobortis sed pellentesque imperdiet, facilisis eu quam. Praesent pharetra, orci at tincidunt lacinia, neque nulla ornare lacus, ut malesuada elit risus non mi. Fusce pellentesque vitae sapien sed mollis. Curabitur viverra at nulla vitae porta. In et mauris lorem.

Vestibulum faucibus fringilla justo, eget facilisis elit convallis sit amet. Morbi nisi metus, hendrerit quis pellentesque non, faucibus at leo. Proin consectetur, est vel facilisis facilisis, arcu felis vestibulum quam, et fringilla metus neque at enim. Nunc justo mauris, egestas quis maximus eget, viverra vehicula nunc. Fusce eu nulla elementum, condimentum diam at, aliquam leo. Nullam sed sodales enim, eu imperdiet risus. Aliquam ornare augue leo, fringilla mattis nunc facilisis eget. Nam faucibus, libero a aliquet fermentum, magna arcu ultrices lacus, a placerat tortor turpis ut purus.

Integer eget ligula non metus egestas rutrum sit amet ut tellus. Aliquam vel convallis est, eu sodales leo. Proin consequat nisi at nunc malesuada gravida. Aliquam erat volutpat. Aliquam finibus interdum dignissim. Etiam feugiat hendrerit nisl, hendrerit feugiat ex malesuada in. Cras tempus eget arcu vitae congue. Ut non tristique mauris. Vivamus in mattis ipsum. Cras bibendum, enim bibendum commodo accumsan, ligula nulla porttitor ex, et pharetra eros nisl eget ex. Morbi at semper arcu. Curabitur massa sem, maximus id metus ut, molestie tempus quam. Vivamus dictum nunc vitae elit malesuada convallis. Donec ac semper turpis, non scelerisque justo. In congue risus id vulputate gravida. Nam ut mattis sapien.

CAPÍTULO 2

Objetivos

2.1. Objetivo General

Revisar y exponer los conceptos fundamentales en el estudio de operadores pseudo-diferenciales, detallando teoremas y demostraciones importantes para su entendimiento e investigación.

2.2. Objetivos Específicos

- Definir y explicar los conceptos clave para el estudio de operadores pseudo-diferenciales
- Desarrollar con rigor matemático las bases teóricas de los operadores pseudo-diferenciales
- Introducir de forma accesible al estado del arte en la investigación de operadores pseudo-diferenciales

CAPÍTULO 3

Justificación

El estudio de los operadores pseudo-diferenciales es esencial en el análisis moderno, con aplicaciones clave en ecuaciones diferenciales parciales (EDP), análisis armónico y teoría espectral. Sin embargo, la falta de recursos en español sobre el tema representa una barrera significativa para estudiantes e investigadores hispanohablantes, limitando su acceso a herramientas avanzadas y reduciendo las oportunidades de formación especializada. Esta carencia no solo dificulta el aprendizaje autónomo, sino que también desincentiva la investigación en áreas teóricas y aplicadas donde estos operadores son fundamentales, como el análisis de regularidad de soluciones de EDP's. Este trabajo busca reducir esta brecha, proporcionando una exposición clara y rigurosa de los operadores pseudo-diferenciales en el toro y sus propiedades de continuidad. Permitiendo así, el acceso a conceptos avanzados y contribuyendo a fortalecer la comunidad matemática en español, promoviendo la investigación y la innovación en un campo con amplias proyecciones teóricas y aplicadas.

CAPÍTULO 4

Antecedentes

En el caso euclidiano, Calderón y Vaillancourt demostraron que los operadores pseudo-diferenciales con símbolos en la clase $S^0_{\rho,\rho}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ son acotados en $L^2(\mathbb{R}^n)$ para algún $0 \leq \rho < 1$, véase [4, 5]. Este resultado no puede extenderse cuando $\rho = 1$, es decir, existen símbolos en $S^0_{1,1}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ cuyos operadores pseudo-diferenciales asociados no son acotados en L^2; para un argumento clásico de este hecho debido a Hörmander, consúltese [10]. Además, Fefferman [11] probó la acotación $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-$\mathrm{BMO}(\mathbb{R}^n)$ para operadores pseudo-diferenciales con símbolos en la clase $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, con $m = -n(1-\rho)/2$ donde $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Fefferman también obtuvo la acotación en $L^p(\mathbb{R}^n)$ para estas clases cuando $m \leq -n(1-\rho)|1/p - 1/2|$ y $1 < p < \infty$. En vista de ejemplos clásicos debidos a Wainger y Hirschman, el resultado de Fefferman es óptimo para multiplicadores de Fourier. Cabe destacar que el desarrollo histórico del problema de la acotación en L^p de operadores pseudo-diferenciales ha sido discutido en $\mathbb{R}^n$, por ejemplo, en [14, 18].

Los operadores pseudo-diferenciales con símbolos en las clases de Hörmander pueden definirse en variedades C^∞ mediante cartas locales. Por ello, se considera el toro $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ como un grupo aditivo cociente y una n-variedad, con el atlas preferido de sistemas de coordenadas dado por la aplicación de restricción $x \mapsto x + \mathbb{Z}^n$ en conjuntos abiertos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, véase McLane [12]. Se nota que en [1], Agranovich proporciona una definición global de operadores pseudo-diferenciales en el círculo $\mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^1$, en lugar de la formulación local que trata al círculo como una variedad. Mediante la transformada de Fourier, esta definición se extendió al toro $\mathbb{T}^n$. Además, se ha demostrado que las clases (ρ, δ) de Agranovich y Hörmander son equivalentes, gracias al teorema de equivalencia de McLane [12]. En este trabajo, se consideran operadores pseudo-diferenciales toroidales en el contexto del cálculo pseudo-diferencial en el toro desarrollado por Ruzhansky, Turunen y Vainniko [15, 16]. Asimismo, cotas L^p en el círculo que pueden extenderse al toro se encuentran en [19], en el marco clásico de la teoría de Calderón-Zygmund. Por otro lado, el análogo toroidal del resultado de Fefferman fue probado por Delgado en [9] para el toro, aunque aún se requiere que $\delta < \rho$. Se nota que, para $0 \leq \delta < 1$ y $0 < \rho \leq 1$, Álvarez y Hounie [2] probaron la acotación $L^p(\mathbb{R}^n)$-$L^q(\mathbb{R}^n)$ de operadores pseudo-diferenciales cuando $p \leq q$, incluso con $\delta \geq \rho$. Este resultado fue extendido al caso toroidal en [8]. Para otros trabajos sobre acotación L^p de operadores pseudo-diferenciales, se remite al lector a [7, 13, 17].

CAPÍTULO 5

Preliminares

En este capítulo se revisarán aspectos básicos del análisis armónico en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{T}^n$. Se recuerda que $\mathbb{R}^n$ es un grupo aditivo respecto a la suma usual de vectores con subgrupo aditivo $\mathbb{Z}^n$. Entonces, se define al toro n-dimensional como el grupo cociente $\mathbb{T}^n := \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n = (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n$. Además, el toro puede ser identificado con el conjunto $[0,1)^n$ y se le puede considerar con la topología cociente. A lo largo de este trabajo, se fijará la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$. Para cualquier punto $x := (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, se denotará la norma euclideana como

$$|x| := \sqrt{x_1^2 + \cdot + x_n^2}.$$

Sin embargo, podría ser problemático considerar potencias negativas de la norma euclideana, debido a que se desvanece en cero. Por lo que se considerará una función que se comporta asintóticamente similar, pero no presenta el mismo problema

$$\langle x \rangle := \sqrt{1 + |x|^2}.$$

Si se tiene que existe una constante $C > 0$ tal que $A \leq CB$, se dice que $A \lesssim B$. Si además, C depende de algún parámetro α, se denota $A \lesssim_\alpha B$.

5.1. Espacios de Lebesgue en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{T}^n$

Sea Ω un subconjunto medible de $\mathbb{R}^n$. Por simplicidad, se supondrá que Ω es abierto o cerrado.

Definición 5.1.1. Dado $1 \leq p < \infty$. Se dice que una función medible $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se encuentra en $L^p(\Omega)$ si su norma

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_\Omega |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \right)^{1/p}$$

es finita. Para el caso $p = \infty$, se dice que $f \in L^\infty(\Omega)$ si es esencialmente acotada. Es decir, si

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| < \infty,$$

donde $\operatorname{ess\,sup}_{x\in\Omega} |f(x)|$ se define como el menor número real M tal que es mayor que $|f(x)|$ casi para todo $x \in \Omega$, i.e. excepto fuera de un conjunto de medida cero.

Cabe destacar que en realidad los elementos de los espacios $L^p(\Omega)$ son clases de equivalencias de funciones iguales casi en todo $x \in \Omega$. Sin embargo, es un detalle técnico menor y se acostumbra a tratarles como funciones. Además, cuando Ω sea claro por el contexto, simplemente se denotará $\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$ como $\|\cdot\|_{L^p}$. Ahora, se discutirán propiedades importantes de los espacios de Lebesgue.

Proposición 5.1.2 (Desigualdad de Young)**.** *Sean $1 < p, q < \infty$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces para todos $a, b > 0$, se tiene que*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Como consecuencia, para $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, se tiene que $fg \in L^1(\Omega)$ y

$$\|fg\|_{L^1} \leq \frac{1}{p}\|f\|_{L^p}^p + \frac{1}{q}\|g\|_{L^q}^q.$$

Demostración. Esto es consecuencia del hecho que $x \mapsto e^x$ es una función convexa. Entonces

$$ab = e^{\ln a + \ln b} = e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} \leq \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Completando así la prueba. □

Particularmente cuando $p = 2 = q$, se tiene la conocida como desigualdad de Cauchy.

Proposición 5.1.3 (Desigualdad de Hölder)**.** *Sean $1 \leq p, q \leq \infty$, tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces, para $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^p(\Omega)$, se tiene que $fg \in L^1(\Omega)$ y*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Demostración. Para el caso $p = 1$ o $p = \infty$, el resultado es trivial. Así que se considerará el caso $1 < p < \infty$, que es una aplicación de la proposición anterior. Primero, se supone que $\|f\|_{L^p} = \|g\|_{L^q} = 1$. Entonces, se tiene que

$$\|fg\|_{L^1} \leq \frac{1}{p}\|f\|_{L^p} + \frac{1}{q}\|g\|_{L^q} = 1.$$

Ahora, se nota que si $\|f\|_{L^p}$ o $\|g\|_{L^q}$ se anulan, entonces se trivializa la desigualdad. Por lo que se puede considerar el caso más general en el que ninguna de las normas se anula de la siguiente manera

$$\left\| \frac{f}{\|f\|_{L^p}} \frac{g}{\|g\|_{L^q}} \right\|_{L^1} \leq 1.$$

El resultado sigue de la linealidad de la norma L^1. □

En el caso $p = 2 = q$ se obtiene la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Proposición 5.1.4 (Desigualdad de Minkowski)**.** *Dado $1 \leq p \leq \infty$, sean $f, g \in L^p(\Omega)$. Entonces se tiene que*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Particularmente, $\|\cdot\|_{L^p}$ satisface la desigualdad triangular y $L^p(\Omega)$ es un espacio normado.

Demostración. Para $p = 1$ o $p = \infty$ el resultado se obtiene gracias a la desigualdad triangular del módulo en los números complejos. Ahora, para $1 < p < \infty$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f + g\|_{L^p}^p &\leq \int_\Omega |f + g|^{p-1}(|f| + |g|)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |f + g|^{p-1}|f|\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |f + g|^{p-1}|g|\,\mathrm{d}x \\
&\leq \left(\int_\Omega |f + g|^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}\right] \\
&= \|f + g\|_{L^p}^{p-1}(\|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}).
\end{aligned}$$

Aquí, la primera desigualdad es la desigualdad triangular de los números complejos y la segunda es la desigualdad de Hölder, por lo que se concluye lo deseado. □

Ahora se introducen dos resultados importantes y de bastante utilidad. Sin embargo, sus demostraciones requieren de herramientas de teoría de la medida o del análisis complejo que se encuentran fuera del alcance de este trabajo. Por lo que simplemente se enuncian y se recomienda al lector investigar los detalles.

Proposición 5.1.5 (Monotonía de la norma L^p). *Sea $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ y sea $1 \leq p \leq \infty$. Se supone que $f(\cdot, y) \in L^p(\Omega_1)$ para casi todo y, y que $y \mapsto \|f(\cdot, y)\|_{L^p}$ se encuentra en $L^1(\Omega_2)$. Entonces $f(x, \cdot) \in L^1(\Omega_2)$ para casi todo x, la función $x \mapsto \int_{\Omega_2} f(x, y)\, \mathrm{d}y$ se encuentra en $L^p(\Omega_1)$, y*

$$\left\| \int_{\Omega_2} f(\cdot, y)\, \mathrm{d}y \right\|_{L^p(\Omega_1)} \leq \int_{\Omega_2} \|f(\cdot, y)\|_{L^p(\Omega_1)}\, \mathrm{d}y.$$

A continuación se presenta un resultado clásico de la interpolación de operadores y espacios de funciones. Para una discusión más profunda de estas técnicas, se recomienda revisar Bergh y Löfstrom [3].

Teorema 5.1.6 (Interpolación de Riesz-Thorin). *Sea $T : L^{p_0}(\Omega) + L^{p_1}(\Omega) \to L^{q_0}(\Omega) + L^{q_1}(\Omega)$ un operador lineal tal que*

$$\|Tf\|_{L^{q_0}} \leq M_0 \|f\|_{L^{p_0}}, \quad \|Tf\|_{L^{q_1}} \leq M_1 \|f\|_{L^{p_1}}.$$

Para cualquier $0 < \theta < 1$, se definen

$$\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q_\theta} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Entonces, T extiende a un operador continuo de $L^{p_\theta}(\Omega)$ en $L^{q_\theta}(\Omega)$. Además,

$$\|Tf\|_{L^{q_\theta}} \leq M_0^{1-\theta} M_1^{\theta} \|f\|_{L^{p_\theta}}.$$

Se continúa con el programa de definiciones y propiedades en los espacios de Lebesgue.

Definición 5.1.7 (Convoluciones). Para funciones $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ se define su convolución como

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y)\, \mathrm{d}y.$$

Se puede notar que el cambio de variable $y \mapsto x - u$ implica la conmutatividad, es decir $f * g = g * f$.

Nota 5.1.8. En la definición anterior existe la pregunta sobre la convergencia de la integral. Para definir la convolución de forma rigurosa, se podría definir primero para funciones que cumplan condiciones de regularidad más fuertes, como las del espacio de Schwartz que se definirá en la siguiente sección, para luego definir el operador $* : L^1 \times L^1 \to L^1$ que estaría bien definido gracias a la siguiente propiedad.

Proposición 5.1.9 (Desigualdad de Young para convoluciones). *Sean $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$, y sean $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Entonces se tiene que*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Demostración. Se nota que gracias al teorema 5.1.6 es suficiente demostrar

$$\|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}, \quad \|f * g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^t}, \tag{5.1.1}$$

para $\frac{1}{t} + \frac{1}{p} = 1$. En efecto, bastaría con considerar el operador $f * \cdot$, los parametros

$$p_0 = 1, \quad p_1 = t, \quad q_0 = p, \quad q_1 = \infty.$$

y $\|f\|_{L^p}$ como ambas constantes de estimación. Al aplicar la interpolación

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{p} + \frac{\theta}{\infty}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{t},$$

se obtiene la condición indicada para los parametros p, q, r. Ahora, se procede a demostrar el primer estimativo de (5.1.1). Este se obtiene como resultado de la monotonia de la norma L^p, véase la proposición 5.1.5. En efecto,

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^p} &= \left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot - y) g(y)\,\mathrm{d}y \right\|_{L^p} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot - y)\|_{L^p} |g(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Por otra parte, el segundo estimativo es resultado de la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} \|f * g\|_{L^\infty} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||g(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^t}. \end{aligned}$$

Concluyendo con el resultado deseado. □

Se continua con un resultado importante sobre convergencia en espacios L^p

Teorema 5.1.10 (Convergencia dominanda de Lebesgue)**.** *Sea $(f_k)_{k=1}^\infty$ una secuencia de funciones medibles en Ω tales que convergen puntualmente a f para casi todo $x \in \Omega$. Se supone que existe $g \in L^1(\Omega)$ tal que $|f_k| \leq g$ para todo k. Entonces f es integrable y*

$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega f_k\,\mathrm{d}x.$$

Nota 5.1.11. Una implicación del resultado anterior es el hecho que los espacios L^p son completos, y por consecuencia son espacios de Banach. Particularmente, el espacio L^2 es un espacio de Hilbert con producto interno dado por

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_\Omega f\overline{g}\,\mathrm{d}x,$$

donde $\overline{z}$ es el conjugado en los números complejos.

Se concluye esta sección con la definición de la versión local de los espacios de Lebesgue. Para ello se necesita el siguiente espacio de funciones.

Definición 5.1.12 (Funciones suaves de soporte compacto)**.** Se dice que $\varphi : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es suave si es de clase C^∞, o infinitamente diferenciable. Se define su soporte como

$$\operatorname{supp}\varphi = \overline{\{x \in \Omega : \varphi(x) \neq 0\}}.$$

Si $\operatorname{supp}\varphi$ es compacto, se dice que $f \in \mathbb{C}_0^\infty(\Omega)$.

Definición 5.1.13 (Localización de espacios de Lebesgue)**.** Se dice que una función medible $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ es localmente integrable o pertenece a $L^p_{loc}(\Omega)$, con $1 \leq p \leq \infty$ si

$$\|f\varphi\|_{L^p} < \infty,$$

para todo $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

5.2. Transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$

Ahora, se procede a definir y mostrar propiedades importantes de la transformada de Fourier, una herramienta fundamental para el estudio de las ecuaciones diferenciales en general y los operadores pseudo-diferenciales en particular.

Definición 5.2.1 (Transformada de Fourier en $\mathbb{R}^n$)**.** Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, se define su transformada de Fourier como

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

para cualquier $\xi \in \mathbb{R}^n$.

Proposición 5.2.2. *La transformada de Fourier es un operador continuo $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^\infty(\mathbb{R}^n)$ con norma uno:*

$$\|\widehat{f}\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}.$$

Además, $\widehat{f}$ es continua en todas partes.

Demostración. El estimativo es resultado de la desigualdad de Minkowski para integrales clásica

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{-2\pi i x\cdot\xi}\right| |f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq \|f\|_{L^1}.\end{aligned}$$

Ahora, la continuidad es consecuencia del teorema de convergencia dominada de Lebesgue. Para cualquier $\xi_k \to \xi$ se define

$$h_k(x) := e^{-2\pi i x\cdot\xi_k} f(x)$$

Entonces, se tiene que $|h_k| \leq |f|$ y se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi_k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Que es exactamente $\widehat{f}(\xi) = \lim \widehat{f}(\xi_k)$, el resultado deseado. □

A pesar de que la transformada de Fourier está bien definida en el espacio $L^1(\mathbb{R}^n)$, este presenta ciertas limitaciones técnicas debido a los pocos requerimientos de regularidad para las funciones en este espacio. Es muy útil tener acceso a otras herramientas resultantes de continuidad, diferenciabilidad, y decaimiento. Por lo tanto, se introduce notación que será importante a lo largo de este trabajo.

Definición 5.2.3 (Notación de multi-índice)**.** Para $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \beta := (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{N}_0^n$, se define

$$\partial^\alpha := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

De forma similar, $x^\beta := x_1^{\beta_1} \cdots x_n^{\beta_n}$. Se dice que $\alpha \leq \beta$ si $\alpha_i \leq \beta_i$ para todo i. Además, se denota la longitud del multi-índice como $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots \alpha_n$ y su factorial como $\alpha! := \alpha_1! \cdots \alpha_n!$.

Definición 5.2.4 (Espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)**.** Se dice que una función suave (infinitamente diferenciable) $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ se encuentra en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si se cumple que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha \varphi(x)| < \infty,$$

para cualesquiera multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$. Ahora, se dice que $\varphi_j \to \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ si

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \partial^\alpha (\varphi_j - \varphi)(x)| \to 0,$$

cuando $j \to \infty$ para cualesquiera multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Proposición 5.2.5. *Para cualquier $1 \leq p \leq \infty$ se tiene que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$ con encaje continuo.*

Demostración. El caso $p = \infty$ es trivial, pues las funciones en el espacio de Schwartz son acotadas por definición. Sea $\varphi_j \to 0$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\varphi_j(x)|^p \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{pN} |\varphi_j(x)|^p \langle x\rangle^{-pN} \,\mathrm{d}x \\ &\lesssim \max_{|\beta|\leq N} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x^\beta \varphi_j(x)|^p \int_{\mathbb{R}^n} \langle x\rangle^{-pN} \,\mathrm{d}x \\ &\to 0,\end{aligned}$$

donde $N \in \mathbb{N}$ se escoge de manera que la última integral converga. □

Teorema 5.2.6. *Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces $2\pi i \xi_j \widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\partial_j \varphi}(\xi)$ y $2\pi i \widehat{x_j \varphi}(\xi) = -\partial_j \widehat{\varphi}(\xi)$*

Demostración. Para la primera expresión se procede por integración por partes

$$\begin{aligned}\widehat{\partial_j \varphi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \partial_{x_j} \varphi(x) \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{\xi_j} e^{-2\pi i x\cdot\xi}) \varphi(x) \,\mathrm{d}x \\ &= 2\pi i \xi_j \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} \varphi(x) \,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Se nota que no aparece el término con la frontera debido a que φ se desvanece en el infinito. Ahora, para la segunda expresión

$$\partial_{\xi_j} \widehat{\varphi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} (-2\pi i x_j) \varphi(x) \,\mathrm{d}x.$$

Concluyendo la prueba. □

Por lo que se puede concluir lo siguiente

Corolario 5.2.7. *Sea $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Entonces,*

$$\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi) = (2\pi i)^{|\alpha|-|\beta|} (-1)^{|\alpha|} \widehat{\partial^\beta [x^\alpha \varphi]}(\xi).$$

Por lo que

$$\begin{aligned}|\xi^\beta \partial^\alpha \widehat{\varphi}(\xi)| &\leq |2\pi i|^{|\alpha|-|\beta|} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\beta [x^\alpha \varphi(x)]| \,\mathrm{d}x \\ &\leq |2\pi i|^{|\alpha|-|\beta|} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|)^{n+1} \partial^\beta [x^\alpha \varphi(x)]\right| \int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-n-1} \,\mathrm{d}x \\ &= C \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|)^{n+1} \partial^\beta [x^\alpha \varphi(x)]\right| \\ &< \infty.\end{aligned}$$

Particularmente, $\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}$ mapea $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo. Además, por el teorema de convergencia dominada de Lebesgue, la transformada de Fourier es un operador continuo.

En realidad, es un isomorfismo en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Para ello se demostrarán algunos lemas útiles.

Lema 5.2.8 (Fórmula de multiplicación para la transformada de Fourier)**.** *Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Entonces, $\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} f \widehat{g} \,\mathrm{d}x$.*

Demostración. Aplicando el teorema de Fubini

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f} g \,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot y} f(y)\,\mathrm{d}y\right] g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot y} g(x)\,\mathrm{d}x\right] f(y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f\widehat{g}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Concluyendo la prueba. □

Lema 5.2.9 (Transformada de Fourier para Gaussiana)**.** *Se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi} e^{-\varepsilon\pi^2|x|^2}\,\mathrm{d}x = (\pi\varepsilon)^{-n/2} e^{-|\xi|^2/\varepsilon},$$

para todo $\varepsilon > 0$. Gracias al cambio de variable $x \mapsto 2\pi x$ y $\varepsilon \mapsto 2\varepsilon$, esto equivale a

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot\xi} e^{-\varepsilon^2|x|^2/2}\,\mathrm{d}x = (2\pi/\varepsilon)^{-n/2} e^{-|\xi|^2/(2\varepsilon)}.$$

Demostración. La segunda expresión sigue del caso unidimensional

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\tau} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t &= e^{-\tau^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t+i\tau)^2/2}\,\mathrm{d}t \\ &= e^{-\tau^2/2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2\pi} e^{-\tau^2/2}.\end{aligned}$$

Con el cambio de variable $t \mapsto \sqrt{\varepsilon} t$ y $\tau \mapsto \tau/\sqrt{\tau}$ se tiene que

$$\sqrt{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\tau} e^{-\varepsilon t^2/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\pi} e^{-\tau^2/(2\varepsilon)}.$$

El caso multidimensional sigue del producto de las integrales unidimensionales. □

Teorema 5.2.10 (Fórmula de inversión de Fourier)**.** *La transformada de Fourier es un isomorfismo de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en si mismo con inverso dado por*

$$(\mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^n} f)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Demostración. El teorema de convergencia dominada de Lebesgue permite realizar la sustitución

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^n}\widehat{\varphi})(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\widehat{\varphi}(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi}\widehat{\varphi}(\xi) e^{-2\varepsilon\pi^2|\xi|^2}\,\mathrm{d}\xi \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}\varphi(y) e^{-2\varepsilon\pi^2|\xi|^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Con el cambio de variable $y \mapsto y + x$ se obtiene que

$$(\mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^n}\widehat{\varphi})(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y\cdot\xi}\varphi(y+x) e^{-2\varepsilon\pi^2|\xi|^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi.$$

Por el teorema de Fubini y la transformada de Fourier para Gaussianas se tiene que

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^n}\widehat{\varphi})(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y+x)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i y\cdot\xi} e^{-2\varepsilon\pi^2|\xi|^2}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y+x)(2\pi\varepsilon)^{-n/2} e^{-|y|^2/(2\varepsilon)}\,\mathrm{d}y\end{aligned}$$

Con un último cambio de variable $y \mapsto \sqrt{\varepsilon} z$ se concluye

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{F}^{-1}_{\mathbb{R}^n}\widehat{\varphi})(x) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\sqrt{\varepsilon}z+x)(2\pi)^{-n/2}e^{-|z|^2/2}\,\mathrm{d}z \\
&= (2\pi)^{-n/2}\varphi(x)\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|z|^2/2}\,\mathrm{d}z = \varphi(x).
\end{aligned}
$$

Finalizando con la prueba. □

El siguiente teorema relaciona la transformada de Fourier con las convoluciones

Teorema 5.2.11. *Sean $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ entonces se cumple que $\widehat{\varphi * \psi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi)$, que $\widehat{\varphi\psi}(\xi) = (\widehat{\varphi} * \widehat{\psi})(\xi)$, y que $\int \varphi\overline{\psi} = \int \widehat{\varphi}\overline{\widehat{\psi}}$.*

Demostración. Para la primera expresión se tiene que

$$
\begin{aligned}
\widehat{\varphi * \psi}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}(\varphi * \psi)(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i (x-y)\cdot\xi}\varphi(x-y)e^{-2\pi i y\cdot\xi}\psi(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i z\cdot\xi}\varphi(z)e^{-2\pi i y\cdot\xi}\psi(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\
&= \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\psi}(\xi).
\end{aligned}
$$

Ahora, para la segunda expresión

$$
\begin{aligned}
(\widehat{\varphi} * \widehat{\psi})(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\varphi}(\xi - y)\widehat{\psi}(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot(\xi-y)}\varphi(x)\widehat{\psi}(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot y}\widehat{\psi}(y)\,\mathrm{d}y\right] e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\xi}\varphi(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x = \widehat{\varphi\psi}(\xi).
\end{aligned}
$$

Para la tercera expresión se define $\chi := \overline{\widehat{\psi}}$, entonces

$$
\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\overline{\psi} = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi\widehat{\chi} = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\varphi}\chi = \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{\varphi}\overline{\widehat{\psi}}.
$$

Completando la prueba. □

5.3. Transformada de Fourier en $\mathbb{T}^n$

Se fija la notación del toro n-dimensional como $\mathbb{T}^n := (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$. Esta identificación se realiza tanto en el contexto de grupo aditivo cociente como en el de topología cociente. Se suele identificar a $\mathbb{T}^n$ con $[0,1)^n$ como subconjunto de $\mathbb{R}^n$, y se fija su medida como la restricción de la medida euclideana. Se puede entender una función definida en el toro como una función 1-periodica. Es decir, si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ cumple que $g(x) = g(x+k)$ para cualesquiera $x \in \mathbb{R}^n$ y $k \in \mathbb{Z}^n$, entonces puede identificarse con una función $f : \mathbb{T}^n \to \mathbb{C}$ definida como $f([x]) = g(x)$, donde $[x]$ es la clase de equivalencia de $x \in \mathbb{R}^n$ en el cociente. No obstante, no es necesario realizar la distinción entre punto y clase de equivalencia y se denotará $x \in \mathbb{T}^n$, de manera similar, se dirá que $f = g$ para los fines de este trabajo.

Definición 5.3.1 (Espacio de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$)**.** Sea $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ el espacio de *funciones de decaimiento rápido* $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ que satisfacen

$$|\varphi(\xi)| \lesssim_M \langle \xi \rangle^{-M},$$

en todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$, para cualquier $M > 0$. La convergencia de este espacio está dada por las seminormas $p_k(\varphi) := \sup_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \langle \xi \rangle^k |\varphi(x)|$.

Definición 5.3.2 (Transformada de Fourier periodica)**.** Sea $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : C^\infty(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ la *transformada de Fourier periodica* definida por

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f)(\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x \cdot \xi} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

Además, se define la transformada de Fourier periodica inversa $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} : \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \to C^\infty(\mathbb{T}^n)$, como

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi)(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} \varphi(\xi).$$

Teorema 5.3.3. *La definición 5.3.2 es válida. Es decir,*

1. $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} C^\infty(\mathbb{T}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$,
2. $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n) \subset C^\infty(\mathbb{T}^n)$,
3. $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}$ *y* $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}$ *son la función identidad en* $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ *y* $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ *respectivamente.*

Demostración. Para la primera parte, se toma $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$. Entonces

$$\begin{aligned}
(-i2\pi\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi) &= \int_{\mathbb{T}^n} (-i2\pi\xi)^\alpha e^{-i2\pi x \cdot \xi} f(x)\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} [\partial_x^\alpha e^{-i2\pi x \cdot \xi}] f(x)\, \mathrm{d}x \\
&= (-1)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x \cdot \xi} [\partial_x^\alpha f(x)]\, \mathrm{d}x < \infty.
\end{aligned}$$

Por lo que $|\langle \xi \rangle^M \widehat{f}(\xi)| < \infty$ para cualquier $M < \infty$, y $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$. Para la segunda parte, se toma $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ y se tiene que

$$|\partial_x^\alpha [\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi(x)]| \leq \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \left| \partial_x^\alpha e^{i2\pi x \cdot \xi} \varphi(\xi) \right| \lesssim_M \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} |\xi^\alpha| \langle \xi \rangle^{-M} < \infty,$$

para M lo suficientemente grande. Por lo que $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi$ es suave. Para la tercera parte, primero se aprovecha la convergencia uniforme para tener que

$$\begin{aligned}
[\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi)](\xi) &= \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x \cdot \xi} \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \eta} \varphi(\eta)\, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\eta) \int_{\mathbb{T}^n} e^{i2\pi x \cdot (\eta - \xi)}\, \mathrm{d}x \\
&= \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\eta) \delta_{\eta, \xi} = \varphi(\xi).
\end{aligned}$$

Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}
[\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1}(\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} f)](x) &= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x\cdot\xi} \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi y\cdot\xi} f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} f(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \lim_{\alpha\to\infty} \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\xi\leq\alpha} e^{i2\pi y\cdot\xi} f(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&=: \lim_{\alpha\to\infty} \int_{\mathbb{T}^n} D_\alpha(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&=: \lim_{\alpha\to\infty} S_\alpha f(x).
\end{aligned}$$

A D_α se le conoce como el kernel de Dirichlet y a S_α como el operador de sumas parciales. Se puede trabajar el kernel de Dirichlet para obtener que

$$\begin{aligned}
D_\alpha(y) &= \sum_{\xi\leq\alpha} e^{i2\pi y\cdot\xi} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \sum_{\xi_j=-\alpha_j}^{\alpha_j} e^{i2\pi y_j\xi_j} \\
&= \prod_{j=1}^{n} e^{-i2\pi\alpha_j y_j} \left(\frac{e^{i2\pi(2\alpha_j+1)y_j} - 1}{e^{i2\pi y_j} - 1} \right) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \frac{\sin(\pi(2\alpha_j+1)y_j)}{\sin(\pi y_j)}.
\end{aligned}$$

Ahora, se utiliza el método de sumabilidad de Césaro, que indica que el promedio de una sucesión converge al mismo límite que el límite de la sucesión, para definir el kernel de Fejér como

$$\begin{aligned}
\sigma_N f(x) &:= \frac{1}{(N+1)^n} \sum_{\|\alpha\|_\infty\leq N} S_\alpha f(x) \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \frac{1}{(N+1)^n} \sum_{\|\alpha\|_\infty\leq N} D_\alpha(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y \\
&=: \int_{\mathbb{T}^n} F_N(y) f(x-y)\,\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

El kernel de Fejér se puede reescribir notando que $e^{i2\pi y_j\xi_j}$ aparece exactamente $N+1-|\xi_j|$ veces en la sumatoria, obteniendo que

$$\begin{aligned}
F_N(y) &= \frac{1}{(N+1)^n} \prod_{j=1}^{n} \sum_{\xi_j=-N}^{N} (N+1-|\xi_j|) e^{i2\pi y_j\xi_j} \\
&= \frac{1}{(N+1)^n} \prod_{j=1}^{n} \sum_{k=0}^{N} \sum_{\xi_j=-k}^{k} e^{i2\pi y_j\xi_j}.
\end{aligned}$$

Ahora, note que tiene una forma similar al kernel de Dirichlet para obtener que

$$
\begin{aligned}
F_N(y) &= \frac{1}{(N+1)^n}\prod_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{N}\frac{\sin(\pi(2k+1)y_j)}{\sin(\pi y_j)}\\
&= \frac{1}{(N+1)^n}\prod_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{N}\frac{\sin(\pi(2k+1)y_j)\sin(\pi y_j)}{\sin^2(\pi y_j)}\\
&= \frac{1}{2(N+1)^n}\prod_{j=1}^{n}\sum_{k=0}^{N}\frac{\cos(2k\pi y_j)-\cos(2(k+1)\pi y_j)}{\sin^2(\pi y_j)}\\
&= \frac{1}{2(N+1)^n}\prod_{j=1}^{n}\frac{1-\cos(\pi(N+1)y_j)}{\sin^2(\pi y_j)}\\
&= \frac{1}{(N+1)^n}\prod_{j=1}^{n}\left[\frac{\sin(\pi(N+1)y_j)}{\sin(\pi y_j)}\right]^2.
\end{aligned}
$$

Este kernel tiene las propiedades que $F_N \geq 0$, que $\int_{\mathbb{T}^n} F_N(y)\,\mathrm{d}y = 1$, y que para $\delta > 0$ se tiene que

$$
\lim_{N\to\infty}\int_{\delta<|y|} F_N(y)\,\mathrm{d}y \leq \lim_{N\to\infty}\frac{1}{(N+1)^n\sin^{2n}(\pi\delta)} = 0.
$$

Entonces, se puede concluir que

$$
\begin{aligned}
|\sigma_N f(x) - f(x)| &\leq \int_{\mathbb{T}^n} |f(x-y)-f(x)|F_N(y)\,\mathrm{d}y\\
&\leq \int_{|y|<\delta} |f(x-y)-f(x)|F_N(y)\,\mathrm{d}y + 2\|f\|_\infty\int_{\mathbb{T}^n} F_N(y)\,\mathrm{d}y \to 0,
\end{aligned}
$$

debido a que el primer término puede ser controlado escogiendo δ lo suficientemente pequeño gracias a la continuidad de f, y el segundo termino puede controlarse al escoger N una vez fijado δ. Esta convergencia es uniforme respecto a x debido a la compacidad de $\mathbb{T}^n$. Por lo que se justifica la definición de la transformada de Fourier y su inversa. □

Nota 5.3.4. En la demostración anterior se utilizan técnicas de sumabilidad que son frecuentes en el análisis de Fourier. Para mayor detalle sobre estas técnicas y el análisis de Fourier se recomienda al lector revisar Duoandikoetxea [10]. Por otra parte, estas técnicas pueden ser utilizadas para demostrar la convergencia de estas series en la norma L^p.

Teorema 5.3.5. *La serie de Fourier de f converge a f en la norma $L^p(\mathbb{T}^n)$.*

Demostración. Para el operador de Césaro σ_N y el kernel de Fejér se tiene que

$$
\begin{aligned}
\|\sigma_N f - f\|_{L^p} &\leq \int_{\mathbb{T}^n} \|f(\cdot-y)-f(\cdot)\|_{L^p}F_N(y)\,\mathrm{d}y\\
&\leq \int_{|y|<\delta} \|f(\cdot-y)-f(\cdot)\|_{L^p}F_N(y)\,\mathrm{d}y + 2\|f\|_{L^p}\int_{\mathbb{T}^n} F_N(y)\,\mathrm{d}y \to 0,
\end{aligned}
$$

donde, de nuevo, se puede controlar el primer término con δ y el segundo escogiendo un N apropiado. □

Definición 5.3.6 (Espacios de sucesiones $\ell^p(\mathcal{C})$)**.** El espacio de sucesiones $\ell^p(\mathcal{C})$, para $\mathcal{C}$ un conjunto enumerable, consiste de las funciones $a : \mathcal{C} :\to \mathbb{C}$, tales que

$$
\|a\|_{\ell^p} := \left(\sum_{k\in\mathcal{C}} |a_k|^p\right)^{1/p} < \infty.
$$

Generalmente, $\mathcal{C} = \mathbb{Z}^n$.

Teorema 5.3.7 (Identidad de Plancherel)**.** *Si $u \in L^2(\mathbb{T}^n)$, entonces $\widehat{u} \in \ell^2(\mathbb{Z}^n)$, y se cumple que*

$$\|\widehat{u}\|_{\ell^2} = \|u\|_{L^2}.$$

Demostración. Primero, note que

$$\begin{aligned}(u, S_N u)_{L^2} &= \int_{\mathbb{T}^n} u(x) \overline{\sum_{|\xi|\leq N} \widehat{u}(\xi) e^{i2\pi x\cdot\xi}} \, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{|\xi|\leq N} \overline{\widehat{u}(\xi)} \int_{\mathbb{T}^n} u(x) e^{-i2\pi x\cdot\xi} \, \mathrm{d}x \\ &= \sum_{|\xi|\leq N} \overline{\widehat{u}(\xi)} \widehat{u}(\xi) = \|\widehat{u}_N\|_{\ell^2}^2.\end{aligned}$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}\|u - S_N u\|_{L^2}^2 &= \|u\|_{L^2}^2 - (u, S_N u)_{L^2} - (S_N u, u)_{L^2} + \|S_N u\|_{L^2}^2 \\ &= 2\|u\|_{L^2}^2 - 2\|\widehat{u}_N\|_{\ell^2}^2.\end{aligned}$$

Por continuidad de las normas, se obtiene la identidad deseada al hacer $N \to \infty$. □

5.4. Distribuciones y espacios de Sobolev en $\mathbb{R}^n$

En esta sección se inicia introduciendo el espacio de distribuciones templadas que permite extender la transformada de Fourier a un espacio más general que $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Definición 5.4.1 (Distribuciones templadas $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$)**.** Se define el *espacio de distribuciones templadas* como el espacio de funcionales lineales continuos $u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. En este caso, se entiende la continuidad en el sentido que si $\varphi_j \to \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, entonces se tiene que $u(\varphi_j) \to u(\varphi)$ en $\mathbb{C}$. Además, se dice que $u_j \to u$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ si $u_j(\varphi) \to u(\varphi)$ para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Las funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se les conoce como las funciones de prueba del espacio de distribuciones templadas. Otra notación usual para $u(\varphi)$ es $\langle u, \varphi\rangle$.

Nota 5.4.2 (Funciones como distribuciones). Se puede considerar a $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ como una distribución templada. Se define el funcional u_f de la siguiente manera

$$\langle u_f, \varphi\rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f\varphi \, \mathrm{d}x.$$

Claramente es un funcional lineal. La continuidad es resultado de la desigualdad de Hölder y el encaje continuo de las funciones de prueba en el espacio L^q. En efecto, para $\varphi_j \to \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que

$$|\langle u_f, \varphi_j\rangle - \langle u_f, \varphi\rangle| \leq \|f\|_{L^p} \|\varphi_j - \varphi\|_{L^q} \to 0.$$

Por simplicidad se denota $\langle u_f, \varphi\rangle = \langle f, \varphi\rangle$. Además, este encaje es continuo, pues si $f_j \to f$ en $L^p(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$|\langle f_j, \varphi\rangle - \langle f, \varphi\rangle| \leq \|f_j - f\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^q}.$$

Particularmente, para $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se puede motivar la definición de distintas propiedades de distribuciones mediante la manipulación del funcional u_φ mencionado anteriormente. Por ejemplo, en vista de la integración por partes tenemos que

$$\langle \partial_j \varphi, \psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_j \varphi)\psi \, \mathrm{d}x = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\partial_j \psi) \, \mathrm{d}x = -\langle \varphi, \partial_j \psi\rangle.$$

Por lo que definimos la derivada en el sentido de distribuciones de la siguiente manera

Definición 5.4.3 (Derivada distribucional)**.** Para $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se define

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle,$$

para cualquier función de prueba φ y cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$.

Ejemplo 5.4.4. Considere la función Heaviside, o escalón, dada por

$$H(x) := \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Es claro que representa una distribución templada, así que se calcula su derivada distribucional

$$\langle \partial H, \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} H \partial \varphi \, \mathrm{d}x = -\int_0^\infty \partial \varphi \, \mathrm{d}x \; = -\varphi|_0^\infty = \varphi(0) =: \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Donde δ es el funcional conocido como la delta de Dirac. Por lo que se tiene que en el sentido de distribuciónes que $\partial H = \delta$.

Por otra parte, la fórmula de multiplicación de Fourier motiva la definición de la transformada de Fourier para distribuciones.

Definición 5.4.5 (Transformada de Fourier para distribuciones)**.** Para $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ se define

$$\langle \mathcal{F} u, \varphi \rangle := \langle u, \mathcal{F} \varphi \rangle, \quad \langle \mathcal{F}^{-1} u, \varphi \rangle := \langle u, \mathcal{F}^{-1} \varphi \rangle,$$

para cualquier función de prueba φ.

Ejemplo 5.4.6. Considere la distribución de la delta de Dirac dada por $\langle \delta, \varphi \rangle := \varphi(0)$. Se calcula su transformada de Fourier de la siguiente manera

$$\langle \mathcal{F} \delta, \varphi \rangle = \langle \delta, \widehat{\varphi} \rangle = \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, \mathrm{d}x = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Por lo que en el sentido de distribuiciones se tiene que $\widehat{\delta} = 1$ la función constante, que es acotada y por tanto una distribución. También se puede demostrar que $\widehat{1} = \delta$. En efecto

$$\langle \mathcal{F}(1), \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi} \, \mathrm{d}x = \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\varphi})(0) = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle.$$

Teorema 5.4.7. *La transformada de Fourier $\mathcal{F}$ es continua en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea $u_j \to u$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, entonces

$$\widehat{u_j}(\varphi) = u_j(\widehat{\varphi}) \to u(\widehat{\varphi}) = \widehat{u}(\varphi).$$

Por lo que es un operador continuo. □

Lema 5.4.8. *$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es secuencialmente denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ igual a uno en una vecindad del origen. Entonces se define $\psi_k(x) := \psi(x/k)$ y se puede verificar que $\psi_k \varphi \to \varphi$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Teorema 5.4.9. *$C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ es secuencialmente denso en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Sea $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ y sean ψ, ψ_k como en la demostración anterior. Entonces se define $\langle \psi u, \varphi \rangle := \langle u, \psi \varphi \rangle$, y se tiene que $\psi_k u \to u$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. En efecto, por el lema anterior se tiene que

$$\langle \psi_k u, \varphi \rangle = \langle u, \psi_k \varphi \rangle \to \langle u, \varphi \rangle.$$

Similarmente, $\psi_k\widehat{u} \to \widehat{u}$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, lo que implica que $\mathcal{F}^{-1}(\psi_k\widehat{u}) \to u$ en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ debido a la continuidad de la transformada de Fourier. Entonces, se tiene que

$$u_k := \psi_k[\mathcal{F}^{-1}(\psi_k\widehat{u})] \to u$$

en $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Solo queda demostrar $u_k \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, en el caso general, para cualquier $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$\langle \mathcal{F}^{-1}(\chi\widehat{u}), \varphi\rangle = \langle \widehat{u}, \chi\mathcal{F}^{-1}\varphi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle \widehat{u}, \chi(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi}\rangle\varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Por lo que se puede identificar $\mathcal{F}^{-1}(\chi\widehat{u})(x) = \widehat{u}(\chi(\xi)e^{2\pi i x\cdot\xi})$, que es continua respecto x y que sus derivadas respecto a x tienen soporte compacto respecto a ξ, por lo que las derivadas de $\mathcal{F}^{-1}(\chi\widehat{u})(x)$ tienen soporte compacto. □

Teorema 5.4.10 (Identidad de Parseval y Plancherel)**.** *Para $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n)$ se tiene que*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\overline{v}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{u}\overline{\widehat{v}}\,\mathrm{d}\xi.$$

Particularmente, $\widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y

$$\|\widehat{u}\|_{L^2} = \|u\|_{L^2}.$$

Demostración. Sean u_j, v_j secuencias de funciones en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que convergen respectivamente a u, v en $L^2(\mathbb{R}^n)$. Entonces, se toma el límite en el Teorema 5.2.11 para obtener el resultado deseado. □

Definición 5.4.11 (Espacios de Sobolev)**.** Sea $1 \le p \le \infty$ y sea $k \in \mathbb{N}_0$. El *espacio de Sobolev* $W_p^k(\Omega)$ consiste de todas las funciones $f \in L^p(\Omega)$ tales que para cualquier multi-índice $|\alpha| \le k$ se tiene que $\partial^\alpha f$ existe (en el sentido de distribuciones) y pertenece a $L^p(\Omega)$. Para tales funciones se define

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}^p\right)^{1/p},$$

para $1 \le p < \infty$. Para $p = \infty$ se define como

$$\|f\|_{W_\infty^k(\Omega)} := \max_{|\alpha|\le k} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty}.$$

Nota 5.4.12. Se advierte al lector que existen otras notaciones disponibles en la literatura. Por ejemplo L_k^p, o $W^{p,k}$. Además, cuando $p = 2$, se suele denotar como H^k.

Teorema 5.4.13. *Sea $f, g \in W_p^k(\Omega)$ y sea α un multi-índice con $|\alpha| \le k$, entonces se tiene que*

1. *$\partial^\alpha f \in W_p^{k-|\alpha|}$ y que $\partial^\alpha(\partial^\beta f) = \partial^{\alpha+\beta} f = \partial^\beta(\partial^\alpha f)$, para todos multi-índices que satisfacen $|\alpha| + |\beta| \le k$,*
2. *$\lambda f + \mu g \in W_p^k$ y $\partial^\alpha(\lambda f + \mu g) = \lambda\partial^\alpha f + \mu\partial^\alpha g$, para cualesquiera $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$,*
3. *$\|\cdot\|_{W_p^k}$ es una norma,*
4. *$W_p^k(\Omega)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Los primeros dos incisos son resultado de la definición de derivada en el sentido de distribuciones. En efecto, para (1) se tiene que

$$\langle \partial^\alpha(\partial^\beta f), \varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|} = \langle \partial^\beta f, \partial^\alpha\varphi\rangle = (-1)^{|\alpha|+|\beta|}\langle f, \partial^{\alpha+\beta}\varphi\rangle.$$

El otro caso es análogo. El inciso (2) es resultado de la linealidad de $\langle \cdot, \varphi\rangle$. Para el inciso (3) es claro que $\|\lambda f\|_{W_p^k} = |\lambda| \|f\|_{W_p^k}$ por lo anterior, y que $|f\|_{W_p^k} = 0$ si y solo si f se anula en casi todas partes. La desigualdad triangular para $p = \infty$ es trivial, para el caso $1 \leq p < \infty$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_{W_p^k} &= \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f + \partial^\alpha g\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} (\|\partial^\alpha f\|_{L^p} + \|\partial^\alpha g\|_{L^p})^p \right)^{1/p} \\
&\leq \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha g\|_{L^p}^p \right)^{1/p} \\
&= \|f\|_{W_p^k} + \|g\|_{W_p^k}.
\end{aligned}$$

Para el inciso (4) se toma una sucesión de Cauchy f_j en W_p^k. Entonces, $\partial^\alpha f_j$ es una sucesión de Cauchy en L^p para todo $|\alpha| \leq k$. Como L^p es completo, se tiene que $\partial^\alpha f_j$ converge a algún g_α en L^p. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \partial^\alpha g_0, \varphi\rangle &= (-1)^{|\alpha|}\langle g_0, \partial^\alpha \varphi\rangle \\
&= \lim_{j\to\infty} (-1)^{|\alpha|}\langle f_j, \partial^\alpha\varphi\rangle \\
&= \lim_{j\to\infty} \langle \partial^\alpha f_j, \varphi\rangle \\
&= \langle g_\alpha, \varphi\rangle.
\end{aligned}$$

Por lo que $\partial^\alpha g_0 = g_\alpha$ y $f_j \to g_0$ en W_p^k. □

5.5. Distribuciones y espacios de Sobolev en $\mathbb{T}^n$

Teorema 5.5.1 (Distribuciones templadas $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$)**.** *Los elementos u del espacio de distribuciones templadas $\mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$, que consiste de funcionales lineales continuos en $\mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, tienen la forma*

$$\varphi \mapsto \langle u, \varphi\rangle := \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} u(\xi)\varphi(\xi),$$

y crecen a lo más de forma polinomial.

Demostración. Note que se puede definir

$$u(\eta) := \langle u, \delta_\eta\rangle,$$

y como cada $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ puede ser escrito como

$$\varphi(\xi) = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\eta)\delta_\eta(\xi),$$

entonces se concluye que

$$\langle u, \varphi\rangle = \left\langle u, \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\eta)\delta_\eta \right\rangle = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\eta)\langle u, \delta_\eta\rangle = \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \varphi(\eta)u(\eta).$$

Por otra parte, un funcional es continuo en un espacio con contables seminormas si se tiene que

$$|\langle u, \delta_\xi\rangle| \lesssim p_M(\delta_\xi) \lesssim \langle \xi\rangle^M,$$

para algún $M > 0$. □

Definición 5.5.2. El espacio de *distribuciones periódicas* $\mathcal{D}'(\mathbb{T}^n)$ consiste de los funcionales lineales continuos definidos en $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Note que esto incluye a las funciones $f \in L^p(\mathbb{T}^n)$ con $1 \leq p \leq \infty$ definiendo su funcional correspondiente de la siguiente manera

$$\langle f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{T}^n} f\varphi \, \mathrm{d}x.$$

Además, similarmente al caso euclideano, se define la derivada distribucional como a continuación

$$\langle \partial^\alpha u, \varphi \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle u, \partial^\alpha \varphi \rangle.$$

Definición 5.5.3. Se define la transformada de Fourier periodica en el sentido de distribuciones como un operador $\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} : \mathcal{D}'(\mathbb{T}^n) \to \mathcal{S}'(\mathbb{Z}^n)$ de la siguiente manera

$$\langle \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n} u, \varphi \rangle := \langle u, \imath \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi \rangle,$$

donde $(\imath \circ \psi)(x) = \psi(-x)$. Esta definición es consistente cuando $u \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. En efecto,

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{u}, \varphi \rangle &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \widehat{u}(\xi) \varphi(\xi) \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) \int_{\mathbb{T}^n} e^{-i2\pi x \cdot \xi} u(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi) e^{i2\pi(-x)\cdot \xi} u(x) \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{T}^n} (\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi)(-x) u(x) \, \mathrm{d}x = \langle u, \imath \circ \mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}^{-1} \varphi \rangle.
\end{aligned}$$

Lo que genera el resultado deseado.

Al identificar $\mathbb{T}^n$ con $[0,1)^n \subset \mathbb{R}^n$, se puede utilizar la definición de espacios de Sobolev euclideana para el caso periodico.

Definición 5.5.4 (Espacios de Sobolev)**.** Sea $1 \leq p \leq \infty$ y sea $k \in \mathbb{N}_0$. El *espacio de Sobolev* $W_p^k(\Omega)$ consiste de todas las funciones $f \in L^p(\Omega)$ tales que para cualquier multi-índice $|\alpha| \leq k$ se tiene que $\partial^\alpha f$ existe (en el sentido de distribuciones) y pertenece a $L^p(\Omega)$. Para tales funciones se define

$$\|f\|_{W_p^k(\Omega)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^p}^p \right)^{1/p},$$

para $1 \leq p < \infty$. Para $p = \infty$ se define como

$$\|f\|_{W_\infty^k(\Omega)} := \max_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha f\|_{L^\infty}.$$

La demostración del hecho que los espacios de Sobolev son espacios de Banach es la realizada para el Teorema 5.4.13.

5.6. Espacios de Hardy en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{T}^n$

TODO TODO

CAPÍTULO 6

Operadores pseudo-diferenciales

6.1. Definición y propiedades básicas en $\mathbb{R}^n$

Definición 6.1.1 (Clases de símbolos de Hörmander $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$)**.** Sean $0\leq\delta,\rho\leq 1$. Se dice que $a\in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ si $a:=(x,\xi)$ es suave en $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ y cumple que

$$|\partial_x^\beta\partial_\xi^\alpha a(x,\xi)|\lesssim_{\alpha\beta}\langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

para cualesquiera multi-índices α,β. Se dice que estos símbolos tienen orden $m\in\mathbb{R}$.

Definición 6.1.2. Sean $0\leq\delta,\rho\leq 1$ y sea $a\in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$. El operador pseudo-diferencial con símbolo $a:=a(x,\xi)$ se define como

$$T_af(x):=\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi ix\cdot\xi}a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi,$$

donde $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. La clase de operadores pseudo-diferenciales con símbolos en $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ se denotan por $\Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$.

Proposición 6.1.3. *Para $a\in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$ y $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se tiene que $T_af\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Note que como $\widehat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, se tiene que

$$|\partial_x^\beta a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)|\lesssim\langle\xi\rangle^{m+\delta|\beta|}\langle\xi\rangle^{-N},$$

para algún $N>0$ apropiado, por lo que todas sus derivadas respecto a x son absolutamente convergentes y se tiene que $T_af\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Ahora, se define el operador

$$L_\xi:=(1+4\pi^2|x|^2)^{-1}(I-\mathcal{L}_\xi),$$

donde $\mathcal{L}_\xi$ es el laplaciano. Note que $L_\xi(e^{2\pi ix\cdot\xi})=e^{2\pi ix\cdot\xi}$ y por integracion por partes se tiene que

$$T_af(x)=\int_{\mathbb{R}^n}e^{2\pi ix\cdot\xi}L_\xi^N[a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)]\,\mathrm{d}\xi.$$

Por lo que $|T_af(x)|\lesssim_N\langle x\rangle^{-2N}$ para cualquier N y se concluye que T_af decae rapidamente. Este argumento se puede aplicar para cualquiera de sus derivadas y se obtiene que $T_af\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. □

Ejemplo 6.1.4 (Operadores diferenciales)**.** Sea $P := \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)\partial_x^\alpha$ un operador de derivadas parciales. Entonces, al considerarle como un operador pseudo-diferencial se tiene que su símbolo es simplemente su polinomio característico $p(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)(2\pi i\xi)^\alpha$. Si las funciones coeficientes a_α son continuas, este símbolo pertenece a la clase de Hörmander de orden m.

Nota 6.1.5 (Kernel de un operador pseudo-diferencial). Se puede reescribir la definición de operador pseudo-diferencial de la siguiente manera

$$\begin{aligned} T_a f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} a(x,\xi)\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi) f(y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

donde se define en el sentido de distribuciones al kernel de Schwartz del operador pseudo-diferencial como

$$k(x,y) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi$$

Teorema 6.1.6 (Composición de operadores pseudo-diferenciales)**.** *Sea* $0 \leq \delta < \rho \leq 1$*, sea* $a \in S^{m_1}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *y sea* $b \in S^{m_2}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$*. Entonces, existe un símbolo* $c \in S^{m_1+m_2}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ *tal que* $T_c = T_a \circ T_b$*. Además, se tiene la fórmula asimptótica*

$$c \sim \sum_\alpha \frac{(2\pi i)^{-|\alpha|}}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha a)(\partial_x^\alpha b).$$

Es decir, para cualquier $N > 0$*, se tiene que*

$$c - \sum_{|\alpha|<N} \frac{(2\pi i)^{-|\alpha|}}{\alpha!}(\partial_\xi^\alpha a)(\partial_x^\alpha b) \in S^{m_1+m_2-(\rho-\delta)N}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n).$$

Demostración. Fije un $x_0 \in \mathbb{R}^n$ y sea $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\operatorname{supp}\chi \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_0| \leq 2\}$ y tal que $\chi(x) = 1$ para $|x - x_0| \leq 1$. Realice la descomposición

$$b = \chi b + (1-\chi)b := b_1 + b_2.$$

Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} (T_a \circ T_{b_1})f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\eta} a(x,\eta) \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(y-z)\cdot\xi} b_1(y,\xi) f(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-z)\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)} a(x,\eta) b_1(y,\xi)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta f(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\xi, \end{aligned}$$

donde se aprovecho que $(x-y)\cdot(\eta-\xi) + (x-z)\cdot\xi = (x-y)\cdot\eta + (y-z)\cdot\xi$. Por lo que se define

$$\begin{aligned} c(x,\xi) &:= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)} a(x,\eta) b_1(y,\xi)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot(\eta-\xi)} a(x,\eta)\widehat{b_1}(\eta-\xi,\xi)\,\mathrm{d}\eta \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\eta} a(x,\eta+\xi)\widehat{b_1}(\eta,\xi)\,\mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

Como b_1 tiene soporte compacto en x, se tiene que $\widehat{b_1}$ es de decaimiento rápido uniformemente en ξ y que

$$|\widehat{b_1}(\eta,\xi)| \lesssim_M \langle\eta\rangle^{-M}\langle\xi\rangle^{m_2},$$

para todo $M \leq 0$. La expansión de Taylor en la segunda variable de $a(x, \xi + \eta)$ resulta en

$$a(x, \xi + \eta) = \sum_{|\alpha| < N} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) \eta^\alpha + R_N(x, \xi, \eta),$$

donde R_N es un residuo que se discutirá más adelante. Al sustituir esta expresión en la fórmula para $c(x, \xi)$ se obtiene que

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \eta} [\partial_\xi^\alpha a(x, \xi) \eta^\alpha] \widehat{b_1}(\eta, \xi) \, \mathrm{d}\eta = (2\pi i)^{-|\alpha|} \partial_\xi^\alpha a(x, \xi) \partial_x^\alpha b_1(x, \xi),$$

que corresponden a los términos de la expansión asimptótica. Ahora, el símbolo resultante del residuo es

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \eta} R_N(x, \xi, \eta) \widehat{b_1}(\eta, \xi) \, \mathrm{d}\eta.$$

Pero, se puede estimar mediante

$$|R_N(x, \xi, \eta)| \lesssim_N |\eta|^N \operatorname{máx}\{|\partial_\xi^\alpha a(x, \zeta)| : |\alpha| = N, \ \zeta \text{ interpolación de } \eta \text{ y } \eta + \xi\}.$$

Note que si $|\eta| \leq |\xi|/2$, entonces cualquier ζ de la expresión anterior es proporcional a ξ, por lo que para este caso se puede estimar

$$|R_N(x, \xi, \eta)| \lesssim_N |\eta|^N \langle \xi \rangle^{m_1 - (\rho - \delta) N}.$$

Por otra parte, si $\rho N \geq m_1$, se tiene la siguiente cota para cualquier caso

$$|R_N(x, \xi, \eta)| \lesssim_N |\eta|^N.$$

Combinando los estimativos y la expresión del residuo del símbolo se obtiene que

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \eta} R_N(x, \xi, \eta) \widehat{b_1}(\eta, \xi) \, \mathrm{d}\eta \right| \\ &\lesssim_{M,N} \langle \xi \rangle^{m_1 + m_2 - (\rho - \delta) N} \int_{|\eta| < |\xi|/2} \langle \eta \rangle^{-M} |\eta|^N \, \mathrm{d}\eta + \langle \xi \rangle^{m_2} \int_{|\eta| \geq |\xi|/2} \langle \eta \rangle^{-M} |\eta|^N \, \mathrm{d}\eta. \end{aligned}$$

Al escoger M lo suficientemente grande, se puede estimar el residuo simbólico por $\langle \xi \rangle^{m_1 + m_2 - \rho N}$. Ahora, note que $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta R_N(x, \xi, \eta)$ es el residuo de la expansión de $\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi + \eta)$. Por lo que un argumento similar resulta en

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \cdot \eta} [\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta R_N(x, \xi, \eta)] \widehat{b_1}(\eta, \xi) \, \mathrm{d}\eta \right| \lesssim_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m_1 + m_2 - \rho N - \rho|\alpha| + \delta|\beta|}.$$

Ahora, solo queda demostrar que $T_a \circ T_{b_2}$ tiene símbolo de orden $-\infty$ y no afecta la fórmula asimptótica. Para ello, se utiliza integración por partes para obtener propiedades de regularidad del símbolo restante. Considere el Laplaciano en η

$$\Delta_\eta^{N_1} e^{2\pi i (x - y) \cdot (\eta - \xi)} = (-4\pi^2 |x - y|^2)^{N_1} e^{2\pi i (x - y) \cdot (\eta - \xi)}.$$

Y el Laplaciano en y,

$$(1 - \Delta_y)^{N_2} e^{2\pi i (x - y) \cdot (\eta - \xi)} = (1 + 4\pi^2 |\xi - \eta|^2)^{N_2} e^{2\pi i (x - y) \cdot (\eta - \xi)}.$$

Además, se tiene que

$$\langle \xi - \eta \rangle \langle \eta \rangle = \sqrt{1 + |\xi - \eta|^2 + |\eta|^2 + |\xi - \eta|^2 |\eta|^2} \geq \sqrt{1 + |\xi|^2} = \langle \xi \rangle.$$

Combinando estos estimativos y las desigualdades simbólicas se obtiene que

$$\begin{aligned}
|c_2(x,\xi)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)} a(x,\eta) b_2(y,\xi)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)} \frac{\Delta_\xi^{N_1} a(x,\eta)}{(-4\pi^2|x-y|^2)^{N_1}} \frac{(1-\Delta_y)^{N_2} b_2(y,\xi)}{(1+4\pi^2|\xi-\eta|^2)^{N_2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta \right| \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\langle\eta\rangle^{m_1-2\rho N_1}}{\langle x-y\rangle^{2N_1}} \frac{\langle\xi\rangle^{m_2+2\delta N_2}}{\langle\xi-\eta\rangle^{2N_2}}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta \\
&\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \langle\eta\rangle^{m_1-2\rho N_1+2N_2} \langle\xi\rangle^{m_2-2(1-\delta)N_2}\,\mathrm{d}\eta \\
&\lesssim \langle\xi\rangle^{m_2-2(1-\delta)N_2},
\end{aligned}$$

donde se escoge N_1 tal que $-2\rho N_1 + 2N_2 + m_1 < -n$. Por lo que se puede escoger N_2 libremente para obtener la cota deseada. Un argumento análogo funciona para las derivadas de c_2, por lo que este pertenece a $S^{-\infty}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. □

Definición 6.1.7 (Potencial de Bessel)**.** Se define al potencial de Bessel de orden $m \in \mathbb{R}$ al operador pseudo-diferencial con símbolo $\langle\xi\rangle^m$. Este se denota por J^m.

Se puede ver que la composición con este operador no presenta la restricción $\delta < \rho$.

Teorema 6.1.8. *Sea $0 \le \delta < 1$, sea $0 < \rho \le 1$, sea $a := a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, y sea $b := b(\xi) \in S^s_{1,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Entonces T_aT_b yT_bT_a pertenecen a $S^{m+s}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$. Además, T_aT_b tiene símbolo $a(x,\xi)b(\xi)$.*

Demostración. Se tiene que para $T_c = T_aT_b$

$$\begin{aligned}
c(x,\xi) &:= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot(\eta-\xi)} a(x,\eta) b(\xi)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}\eta \\
&= b(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(y-x)\cdot\xi} \widehat{a}(x,y-x)\,\mathrm{d}y \\
&= b(\xi) a(x,\xi).
\end{aligned}$$

Para $T_c = T_bT_a$ se puede utilizar la fórmula asintótica de la fórmula de composición. Para manejar el hecho que en este caso se permite $\delta \ge \rho$ para el símbolo a, se aprovecha el hecho que

$$|\partial_\xi^\alpha b(\xi) \partial_x^\alpha a(x,\xi)| \lesssim \langle\xi\rangle^{s-|\alpha|} \langle\xi\rangle^{m+\delta|\alpha|}.$$

Por lo que se tiene el orden deseado en ambos casos. □

6.2. Definición y propiedades básicas en $\mathbb{T}^n$

El cálculo simbólico en el toro $\mathbb{T}^n$ presenta ciertas diferencias respecto al caso euclideano. Gran parte de ellas surgen del hecho que el dominio de frecuencias correspondiente es el retículo $\mathbb{Z}^n$. Por lo que es necesario definir herramientas análogas que funcionen en el caso discreto.

Definición 6.2.1. Sea $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$, entonces se definen los operadores de diferencia como

$$\Delta_{\xi_j} \varphi(\xi) := \varphi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi),$$

$$\overline{\Delta}_{\xi_j} \varphi(\xi) := \varphi(\xi) - \varphi(\xi - \delta_j).$$

Además, para un multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, se define

$$\Delta_\xi^\alpha := \Delta_{\xi_1}^{\alpha_1} \cdots \Delta_{\xi_n}^{\alpha_n},$$

$$\overline{\Delta}_{\xi}^{\alpha} := \overline{\Delta}_{\xi_1}^{\alpha_1} \cdots \overline{\Delta}_{\xi_n}^{\alpha_n}.$$

Proposición 6.2.2. *Sea $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$, entonces*

$$\Delta_{\xi}^{\alpha}\varphi(\xi) = \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \varphi(\xi + \beta).$$

Demostración. Se define el operador de traslación $E_j := (I + \Delta_{\xi_j})$, que actua de la siguiente manera

$$E_j\varphi(\xi) = (I + \Delta_{\xi_j})\varphi(\xi) = \varphi(\xi + \delta_j).$$

Entonces, por el teorema del binomio se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta_{\xi}^{\alpha}\varphi(\xi) &= (E - I)^{\alpha}\varphi(\xi) \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} E^{\beta}\varphi(\xi) \\
&= \sum_{\beta \leq \alpha} (-1)^{|\alpha-\beta|} \binom{\alpha}{\beta} \varphi(\xi + \beta).
\end{aligned}$$

Lo que completa la prueba. □

Note que este operador tiene propiedades análogas a las de la derivada en el caso continuo

Proposición 6.2.3. *Sean $\varphi, \psi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$, sean $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$, entonces*

1. $\Delta_{\xi}^{\alpha}(s\varphi + t\psi)(\xi) = s\Delta_{\xi}^{\alpha}\varphi(\xi) + t\Delta_{\xi}^{\alpha}\psi(\xi)$,
2. $\Delta_{\xi}^{\alpha}\Delta_{\xi}^{\beta} = \Delta_{\xi}^{\alpha+\beta} = \Delta_{\xi}^{\beta}\Delta_{\xi}^{\alpha}$,
3. $\Delta_{\xi}^{\alpha}(\varphi\psi)(\xi) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} [\Delta_{\xi}^{\beta}\varphi(\xi)][\Delta_{\xi}^{\alpha-\beta}\psi(\xi + \beta)]$.

Demostración. Todas estas propiedades pueden ser demostradas mediante inducción, por lo que solo se demostrarán los casos base. La primera propiedad es equivalente a decir que los operadores de diferencia son lineales. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\Delta_{\xi_j}(s\varphi + t\psi)(\xi) &= (s\varphi + t\psi)(\xi + \delta_j) - (s\varphi + t\psi)(\xi) \\
&= s\varphi(\xi + \delta_j) + t\psi(\xi + \delta_j) - s\varphi(\xi) - t\psi(\xi) \\
&= s\Delta_{\xi_j}\varphi(\xi) + t\Delta_{\xi_j}\psi(\xi).
\end{aligned}$$

La segunda propiedad quiere decir que los operadores de diferencia conmutan, es decir

$$\begin{aligned}
\Delta_{\xi_i}\Delta_{\xi_j}\varphi(\xi) &= \Delta_{\xi_i}[\varphi(\cdot + \delta_j) - \varphi(\cdot)](\xi) \\
&= \Delta_{\xi_i}[\varphi(\cdot + \delta_j)](\xi) - \Delta_{\xi_i}\varphi(\xi) \\
&= \varphi(\xi + \delta_j + \delta_i) - \varphi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi + \delta_i) + \varphi(\xi) \\
&= \Delta_{\xi_j}[\varphi(\cdot + \delta_i) - \varphi(\cdot)](\xi) \\
&= \Delta_{\xi_j}\Delta_{\xi_i}\varphi(\xi).
\end{aligned}$$

La tercera propiedad es análoga a la regla de Leibniz, o regla del producto. En efecto,

$$\begin{aligned}
\Delta_{\xi_j}(\varphi\psi)(\xi) &= \varphi(\xi + \delta_j)\psi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi)\psi(\xi) \\
&= \varphi(\xi + \delta_j)\psi(\xi + \delta_j) + \varphi(\xi)\psi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi)\psi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi)\psi(\xi) \\
&= \varphi(\xi)[\psi(\xi + \delta_j) - \psi(\xi)] + [\varphi(\xi + \delta_j) - \varphi(\xi)]\psi(\xi + \delta_j) \\
&= \varphi(\xi)[\Delta_{\xi_j}\psi(\xi)] + [\Delta_{\xi_j}\varphi(\xi)]\psi(\xi + \delta_j).
\end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba. □

Proposición 6.2.4 (Suma por partes)**.** *Sean $\varphi, \psi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$. Entonces, se tiene que*

$$\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi)[\Delta_\xi^\alpha \psi(\xi)] = (-1)^{|\alpha|} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} [\overline{\Delta}_\xi^\alpha \varphi(\xi)]\psi(\xi),$$

dado que ambas series sean absolutamente convergentes.

Demostración. Para probarlo para un multi-índice arbitrario basta con demostrarlo para los casos base y luego el resultado se obtiene por recursividad. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi)[\Delta_{\xi_j} \psi(\xi)] &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi)[\psi(\xi + \delta_j) - \psi(\xi)] \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi)\psi(\xi + \delta_j) - \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi)\psi(\xi) \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi - \delta_j)\psi(\xi) - \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} \varphi(\xi)\psi(\xi) \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} [\varphi(\xi - \delta_j) - \varphi(\xi)]\psi(\xi) \\
&= - \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} [\overline{\Delta}_{\xi_j} \varphi(\xi)]\psi(\xi)
\end{aligned}$$

Lo que concluye la prueba. □

Definición 6.2.5 (Clase de símbolos toroidales $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$)**.** Sea $m \in \mathbb{R}$, sean $0 \leq \delta, \rho \leq 1$. Entonces, la *clase de símbolos toroidales* $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ consiste de las funciones $a := a(x, \xi) : \mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ que son suaves en x para todo ξ, y que satisfacen las desigualdades simbólicas

$$|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x, \xi)| \lesssim_{\alpha\beta} \langle \xi \rangle^{m - \rho|\alpha| + \delta|\beta|},$$

para cualesquiera multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^n$.

Definición 6.2.6 (Operadores pseudo-diferenciales toroidales)**.** Para $a \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$, se denota T_a a su *operador pseudo-diferencial toroidal* correspondiente, que se define como

$$T_a f(x) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{f}(\xi).$$

Además, se dice que $T_a \in \Psi^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$

Proposición 6.2.7. *Sea $f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$, entonces $T_a f$ está bien definido y $T_a f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Además, T_a es un operador continuo de $C^\infty(\mathbb{T}^n)$ en sí mismo.*

Demostración. Se tiene que $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$, entonces la serie en la definición de $T_a f$ converge absolutamente y $T_a f \in C^\infty(\mathbb{T}^n)$. Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned}
T_a f(x) &= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{f}(\xi) \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} a(x, \xi) \int_{\mathbb{T}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} f(y) \, \mathrm{d}y \\
&= \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} a(x, \xi) \langle \xi \rangle^{-2M} \int_{\mathbb{T}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} \left(I - \frac{\mathcal{L}_y}{4\pi^2} \right)^M f(y) \, \mathrm{d}y,
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}_y$ es el Laplaciano respecto a y. Entonces, basta escoger M lo suficientemente grande para obtener convergencia absoluta de la serie. Por lo que, para $f_j \to f$ en $C^\infty(\mathbb{T}^n)$, se puede intercambiar el límite con la serie y la integral mediante la convergencia dominada de Lebesgue para obtener $T_a f_j \to T_a f$ en $C^\infty(\mathbb{T}^n)$. □

Nota 6.2.8 (Kernel de Schwartz para operadores pseudo-diferenciales toroidales). La definición de $T_a f$ para un símbolo toroidal sugiere que puede ser reescrito (ignorando preguntas acerca de convergencia) como

$$T_a f(x) = \int_{\mathbb{T}^n} \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi) f(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{T}^n} k(x,y) f(y)\,\mathrm{d}y,$$

donde $k(x,y)$ es el *kernel de Schwartz* que se expresa como

$$k(x,y) := \sum_{\xi \in \mathbb{Z}^n} e^{i2\pi(x-y)\cdot\xi} a(x,\xi),$$

y se entiende en el sentido de distribuciones.

Ahora, ha sido expuesto que la herramienta correspondiente al trabajar en el espacio de frecuencias de símbolos toroidales es el cálculo de diferencias discretas. Sin embargo, puede ser de interés extender las técnicas utilizadas en el análisis de símbolos euclideanos para obtener resultados similares. Para ello, se realiza un proceso conocido como la *extensión del símbolo toroidal*, que consiste en una interpolación suave de un símbolo definido en $\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n$ para obtener uno definido en $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$. A continuación se presetnan los detalles de dicho proceso.

Lema 6.2.9. *Existen funciones $\phi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, y una función $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, tales que*

$$\mathcal{P}\theta(x) := \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \theta(x+k) = 1,$$

$$(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\theta)|_{\mathbb{Z}^n}(\xi) = \delta_0(\xi) \quad y \quad \partial_\xi^\alpha (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\theta)(\xi) = \overline{\Delta}_\xi^\alpha \phi_\alpha(\xi),$$

para todo $\xi \in \mathbb{Z}^n$.

Demostración. Primero, considere el caso unidimensional. Sea $\theta \in C^\infty(\mathbb{R})$, tal que

$$\operatorname{supp}\theta \subset (-1,1), \quad \theta(-x) = \theta(x), \theta(1-y) + \theta(y) = 1,$$

para $x \in \mathbb{R}$ y $0 \leq y \leq 1$. Note entonces que $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, y por lo tanto $\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ también. En particular, para $\xi \in \mathbb{Z}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
(\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\theta)(\xi) &= \int_{\mathbb{R}} \theta(x) e^{-i2\pi x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 [\theta(x-1) + \theta(x)] e^{-i2\pi x\cdot\xi}\,\mathrm{d}x \\
&= \delta_0(\xi).
\end{aligned}$$

Ahora, si la $\phi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ deseada existe, entonces debe satisfacer que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi x\cdot\xi} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}}\theta)(\xi)\,\mathrm{d}\xi &= \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi x\cdot\xi} \overline{\Delta}_\xi^\alpha \phi_\alpha(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= (1 - e^{i2\pi x})^\alpha \int_{\mathbb{R}} e^{i2\pi x\cdot\xi} \phi_\alpha(\xi)\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Por lo que se obtiene la formula

$$(-i2\pi x)^\alpha \theta(x) = (1 - e^{i2\pi x})^\alpha (\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{-1}\phi_\alpha)(x).$$

Entonces, se puede definir ϕ_α como

$$\mathcal{F}_{\mathbb{R}}^{-1}\phi_\alpha)(x) := \begin{cases} \left(\frac{-i2\pi x}{1-e^{i2\pi x}}\right)^\alpha \theta(x), & 0 < |x| < 1, \\ 1, & x = 0, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

Para el caso n-dimensional se puede definir el mapa $x \mapsto \theta(x_1)\cdots\theta(x_n)$, que cumple las mismas propiedades. $\square$

Nota 6.2.10. La clase de símbolos $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ se puede definir como el conjunto de símbolos en la clase $S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ que son 1-periódicos respecto a x.

Teorema 6.2.11. *Sea $0 \leq \delta \leq 1$ y sea $0 < \rho \leq 1$. El símbolo $\tilde{a} \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n)$ es un símbolo toroidal si y solo si existe un símbolo euclideano $a \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$ tal que $\tilde{a} = a|_{\mathbb{T}^n \times \mathbb{Z}^n}$. Además, esta extensión es única modulo $S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$.*

Demostración. ($\Leftarrow$) Por el Teorema de Valor Medio se tiene que para cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$

$$\begin{aligned}\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tilde{a}(x,\xi) &= \Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)\\ &= \partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)|_{\xi=\eta},\end{aligned}$$

para algún $\eta \in Q := [\xi_1, \xi_1 + \alpha_1] \times \cdots \times [\xi_n, \xi_n + \alpha_n]$. Por lo que, se obtiene que

$$\begin{aligned}|\Delta_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tilde{a}(x,\xi)| &= |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)|_{\xi=\eta}|\\ &\lesssim_{\alpha\beta} \langle\eta\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\\ &\lesssim_{\alpha} \langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.\end{aligned}$$

($\Rightarrow$) Sea $\theta \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ como en el Lema 6.2.9, y se define

$$a(x,\xi) := \sum_{\eta \in \mathbb{Z}^n} (\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\theta)(\xi - \eta)\tilde{a}(x,\eta).$$

Se puede ver que cuando $\xi \in \mathbb{Z}^n$, entonces $a(x,\xi) = \tilde{a}(x,\xi)$. Además, se tiene que

$$\begin{aligned}|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta a(x,\xi)| &= \left|\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \partial_\xi^\alpha(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n}\theta)(\xi-\eta)\partial_x^\beta \tilde{a}(x,\eta)\right|\\ &= \left|\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \overline{\Delta}_\xi^\alpha \phi_\alpha(\xi-\eta)\partial_x^\beta \tilde{a}(x,\eta)\right|\\ &= \left|\sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \phi_\alpha(\xi-\eta)\Delta_\eta^\alpha\partial_x^\beta \tilde{a}(x,\eta)\right|\\ &\lesssim_{\alpha\beta} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} |\phi_\alpha(\xi-\eta)|\langle\eta\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\\ &\lesssim_{\alpha} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \langle\eta\rangle^{-M}\langle\xi-\eta\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}\\ &\leq \langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|} \sum_{\eta\in\mathbb{Z}^n} \langle\eta\rangle^{|m-\rho|\alpha|+\delta|\beta||-M}\\ &\lesssim_{\alpha\beta} \langle\xi\rangle^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.\end{aligned}$$

Aquí se utilizó el hecho que $\phi_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{Z}^n)$ y que $\langle\xi-\eta\rangle^q \leq \langle\xi\rangle^q\langle\eta\rangle^{|q|}$. Lo que completa la prueba de la existencia del símbolo. Para demostrar la unicidad, sean $a, b \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$, tales que $a|_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n} = b|_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n}$. Entonces, se define $c := a - b$, y para $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{Z}^n$ se escoge $\eta \in \mathbb{Z}^n$ uno de sus puntos más cercanos. Por lo que se tiene la siguiente expansión de Taylor de primer orden

$$\begin{aligned}c(x,\xi) &= c(x,\eta) + \sum_{|\alpha|=1} r_\alpha(x,\xi,\xi-\eta)(\xi-\eta)^\alpha\\ &= \sum_{|\alpha|=1} r_\alpha(x,\xi,\xi-\eta)(\xi-\eta)^\alpha,\end{aligned}$$

donde

$$r_\alpha(x,\xi,\theta) = \int_0^1 (1-t)\partial_\xi^\alpha c(x,\xi+t\theta)\,\mathrm{d}t.$$

Entonces, se tiene que $|c(x,\xi)| \lesssim \langle\xi\rangle^{m-\rho}$, y este proceso puede aplicarse recursivamente a c y a sus derivadas para concluir que $c \in S^{-\infty}(\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n)$. $\square$

Definición 6.2.12 (Periodización)**.** La *peoridización* de una función $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se define como

$$\mathcal{P}f(x) := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} f(x+k).$$

Teorema 6.2.13 (Periodización de operadores)**.** *Sea $a := a(x,\xi) \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, una función 1-periodica en x para todo ξ. Sea $\tilde{a} = a|_{\mathbb{T}^n\times\mathbb{Z}^n}$, entonces*

$$(\mathcal{P}\circ T_a)f = (T_{\tilde{a}} \circ \mathcal{P})f,$$

para toda $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Se tiene que

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(T_a f)(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} (T_a f)(x+k) \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i2\pi(x+k)\cdot\xi} a(x+k,\xi)(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}^n} e^{i2\pi k\cdot\xi}\right) e^{i2\pi x\cdot\xi} a(x,\xi)(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \delta_{\mathbb{Z}^n}(\xi) e^{i2\pi x\cdot\xi} a(x,\xi)(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi)\,\mathrm{d}\xi \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x\cdot\xi} a(x,\xi)(\mathcal{F}_{\mathbb{R}^n} f)(\xi) \\
&= \sum_{\xi\in\mathbb{Z}^n} e^{i2\pi x\cdot\xi} a(x,\xi)\mathcal{F}_{\mathbb{T}^n}(\mathcal{P}f)(\xi) \\
&= (T_{\tilde{a}} f)(x).
\end{aligned}$$

$\square$

CAPÍTULO 7

Continuidad de operadores pseudo-diferenciales

7.1. Continuidad en espacios de Lebesgue

Teorema 7.1.1. *Sea $a \in S^m_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, entonces su kernel de Schwartz cumple que*

$$|k(x,y)| \lesssim_N |x-y|^{-N},$$

para $x \neq y$, y para cualquier $N > (m+n)/\rho$.

Demostración. Con el argumento de integración por partes se tiene que

$$\begin{aligned}(2\pi i)^{|\gamma|}(x-y)^\gamma k(x,y) &= \int_{\mathbb{R}^n} \partial_\xi^\gamma[e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}]a(x,\xi)\,\mathrm{d}\xi \\ &= (-1)^{|\gamma|}\int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x-y)\cdot\xi}\partial_\xi^\gamma[a(x,\xi)]\,\mathrm{d}\xi.\end{aligned}$$

Entonces, si se fija $|\gamma| = N$, se tiene que

$$|x-y|^{-N}|k(x,y)| \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{m-\rho N}\,\mathrm{d}\xi,$$

que es finito cuando $m - \rho N < -n$. $\square$

Teorema 7.1.2. *Sea $a \in S^0_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, entonces T_a extiende a un operador acotado de $L^2(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo.*

Demostración. Primero, suponga que $a := a(x,\xi)$ tiene soporte compacto respecto a x. Además, es suficiente demostrar este enunciado para funciones $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ debido a que este es secuencialmente denso en $L^2(\mathbb{R}^n)$ y a un simple argumento analítico. Entonces, se define a la transformada de Fourier de a respecto a x como

$$\widehat{a}(\lambda,\xi) := \mathcal{F}\{a(\cdot,\xi)\}(\lambda).$$

Ahora, note que para cualquier multi-índice $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ se tiene que

$$(2\pi i\lambda)^\alpha \widehat{a}(\lambda,\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\cdot\lambda}\partial_x^\alpha a(x,\xi)\,\mathrm{d}x.$$

Entonces, $|(2\pi i\lambda)^\alpha \widehat{a}(\lambda,\xi)| \leq C_\alpha$ uniformemente en ξ. Por otra parte, se tiene que

$$\begin{aligned} T_a f(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\xi} \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\lambda} \widehat{a}(\lambda,\xi)\widehat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\lambda\,\mathrm{d}\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\cdot\lambda} T_{\widehat{a}} f(x)\,\mathrm{d}\lambda. \end{aligned}$$

Entonces, gracias a la identidad de Plancherel

$$\begin{aligned} \|T_{\widehat{a}} f\|_{L^2} &= \|\mathcal{F}(T_{\widehat{a}} f)\|_{L^2} = \|\widehat{a}(\lambda,\cdot)\widehat{f}\|_{L^2} \\ &\leq \sup_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\widehat{a}(\lambda,\xi)|\|\widehat{f}\|_{L^2} \lesssim \langle\lambda\rangle^{-N}\|f\|_{L^2}, \end{aligned}$$

para cualquier $N \geq 0$. Por lo que

$$\begin{aligned} \|T_a f\|_{L^2} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \|T_{\widehat{a}} f\|_{L^2}\,\mathrm{d}\lambda \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \langle\lambda\rangle^{-N}\|f\|_{L^2}\,\mathrm{d}\lambda \lesssim \|f\|_{L^2}, \end{aligned}$$

cuando se escoge $N > n$. Ahora, considere el caso en el que el símbolo no necesariamente tiene soporte compacto. Para ello, se fija $x_0 = 0$ y se descompone $f = f_1 + f_2$, donde f_1 y f_2 son funciones suaves tales que $|f_1| \leq |f|$, $|f_2| \leq |f|$, y que $\operatorname{supp} f_1 \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 3\}$, $\operatorname{supp} f_2 \subset \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq 2\}$. Fije $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que sea igual a uno en la bola unitaria. Entonces

$$\begin{aligned} \int_{\{|x|\leq 1\}} |T_a f_1(x)|^2\,\mathrm{d}x &= \int_{\mathbb{R}^n} |T_{\eta a} f_1(x)|^2\,\mathrm{d}x \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} |f_1(x)|^2\,\mathrm{d}x \\ &\lesssim \int_{|x|\leq 3} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Ahora, por el Teorema 7.1.1, se tiene que

$$|k(x,y)| \lesssim_N |x-y|^{-N} \lesssim_N |y|^{-N},$$

dado que $|y| \geq 2$ y $|x| \leq 1$, que implica que $|x-y| \geq 1$. Entonces, se obtiene que

$$\begin{aligned} |T_a f_2(x)| &\leq \int_{\{|y|\geq 2\}} |k(x,y)||f_2(y)|\,\mathrm{d}y \\ &\lesssim \int_{\{|y|\geq 2\}} \frac{|f_2(y)|}{|y|^N}\,\mathrm{d}y \\ &\lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|}{\langle y\rangle^N}\,\mathrm{d}y \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|^2}{\langle y\rangle^N}\,\mathrm{d}y\right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\langle y\rangle^N}\,\mathrm{d}y\right)^{1/2} \\ &\lesssim \left(\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|^2}{\langle y\rangle^N}\,\mathrm{d}y\right)^{1/2}, \end{aligned}$$

cuando se elige $N > n$. Por lo que se tiene que

$$\int_{\{|x|\leq 1\}} |T_a f_2(x)|^2\,\mathrm{d}x \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(y)|^2}{\langle y\rangle^N}\,\mathrm{d}y.$$

Note que los estimativos de f_1 y f_2 solo dependen de la dimensión n y las constantes de las desigualdades simbólicas de a. Es decir, no depende de x_0, y se puede escribir que

$$\int_{\{|x-x_0|\leq 1\}} |T_a f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \lesssim \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}{\langle x - x_0 \rangle^N}.$$

Por lo tanto, si χ_A es la función característica del conjunto A, entonces al integrar respecto a x_0 y cambiar el orden de integración se obtiene que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{\{|x-x_0|\leq 1\}} |T_a f(x)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}x_0 &\lesssim_N \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|^2 \, \mathrm{d}x}{\langle x - x_0 \rangle^N} \, \mathrm{d}x_0 \\ |B(1)| \int_{\mathbb{R}^n} |T_a f(x)|^2 \, \mathrm{d}x &\lesssim_N \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Lo que completa la prueba. $\square$

Nota 7.1.3. Los operadores $T \in \Psi^0_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ tienen propiedades que los hacen bastante especiales. En realidad, son ejemplos de los tipos de operadores que dieron inicio a la teoría de operadores integrales singulares de Calderón-Zygmund [6]. En particular, se puede utilizar esta teoría para concluir que los operadores en $\Psi^0_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ son continuos de L^p en sí mismo, para $1 < p < \infty$. Por lo que se enuncia este resultado sin demostración.

Teorema 7.1.4. *Sea $T \in \Psi^0_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$, entonces T se extiende a un operador acotado de $L^p(\mathbb{R}^n)$ en sí mismo.*

7.2. Continuidad en espacios de Sobolev

Primero, se revisita la definición de espacios de Sobolev utilizando los operadores pseudo-diferenciales que han sido definidos en apartados anteriores.

Definición 7.2.1 (Espacios de Sobolev)**.** Sea $s \in \mathbb{R}$, entonces se dice que f pertenece al *espacio de Sobolev* $W^s_p(\mathbb{R}^n)$, si $J^s f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, donde $1 \leq p \leq \infty$ y J^s es el potencial de Bessel de orden s. Además, se define la norma

$$\|f\|_{W^s_p} := \|J^s f\|_{L^p}.$$

Ahora, se extiende el resultado del Teorema 7.1.4 para estos espacios.

Teorema 7.2.2. *Sea $T \in \Psi^m_{1,0}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ sea un operador pesudo-diferencial de orden $m \in \mathbb{R}$. Entonces, el operador T se extiende a un operador continuo desde el espacio de Sobolev $W^{s-m}_p(\mathbb{R}^n)$ hacia $W^s_p(\mathbb{R}^n)$.*

Demostración. Note que $J^{s-m} T J^{-s}$ es un operador de orden cero, por lo que es continuo en L^p, en vista del Teorema 7.1.4. Por lo que se tiene que

$$\|f\|_{W^{s-m}_p} = \|J^{s-m} T f\|_{L^p} = \|J^{s-m} T J^{-s} J^s f\|_{L^p} \lesssim \|J^s f\|_{L^p} = \|f\|_{W^s_p}.$$

Completando la prueba. $\square$

Ahora, se demuestra que la definición revisitada de espacios de Sobolev coincide con la definición para regularidad entera que se dio anteriormente.

Teorema 7.2.3. *El espacio $W^s_p(\mathbb{R}^n)$ coincide con el espacio $W^k_p(\mathbb{R}^n)$ cuando $s = k$ es entero, con equivalencia de normas.*

Demostración. Se utilizará k para simplificar la notación. Para $|\alpha| \leq k$, se tiene que $\partial^\alpha_x J^{-k}$ es un operador pseudo-diferencial con símbolo $(2\pi i \xi)^\alpha \langle \xi \rangle^{-k}$, y orden $|\alpha| - k \leq 0$. Entonces, por el Teorema 7.1.4 se puede concluir que son acotados en L^p, y que

$$\sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha_x f\|_{L^p} = \sum_{|\alpha|\leq k} \|\partial^\alpha_x J^{-k} J^k f\|_{L^p} \lesssim \|J^k f\|_{L^p} = \|f\|_{W^k_p}.$$

Por otra parte, se tiene que el operador con símbolo

$$\frac{\langle \xi \rangle^k}{p_k(\xi)} := \langle \xi \rangle^k \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \xi^\alpha \right)^{-1} \leq C < \infty,$$

es acotado en L^p. Por lo que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{W_p^k} = \|J^k f\|_{L^p} &= \|J^k T_{p_k}^{-1} T_{p_k} f\|_{L^p} \\
&\lesssim \|T_{p_k} f\|_{L^p} \\
&= \left\| \mathcal{F}^{-1} \left(\sum \xi^\alpha \widehat{f}(\xi) \right) \right\|_{L^p} \\
&\leq \sum \|\mathcal{F}^{-1}(\xi^\alpha \widehat{f}(\xi))\|_{L^p} \\
&\lesssim \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial_x^\alpha f\|_{L^p}
\end{aligned}$$

Lo que completa la prueba de equivalencia de definiciones. $\square$

CAPÍTULO 8

Conclusiones

CAPÍTULO 9

Recomendaciones

Bibliografía

[1] Agranovich, M. S.: *Spectral properties of elliptic pseudodifferential operators on a closed curve*. Functional Analysis and Its Applications, 13(4):279–281, 1980.

[2] Alvarez, J. y J. Hounie: *Estimates for the kernel and continuity properties of pseudo-differential operators*. Arkiv för Matematik, 28(1–2):1–22, 1990.

[3] Bergh, J. y J. Lofstrom: *Interpolation spaces*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. 1976.

[4] Calderón, A. P. y R. Vaillancourt: *On the boundedness of pseudo-differential operators*. Journal of the Mathematical Society of Japan, 23(2), 1971.

[5] Calderón, A. P. y R. Vaillancourt: *A class of bounded pseudo-differential operators*. Proceedings of the National Academy of Sciences, 69(5):1185–1187, 1972.

[6] Calderón, A. P. y A. Zygmund: *On the existence of certain singular integrals*. Acta Mathematica, 88(0):85–139, 1952.

[7] Cardona, D.: *Weak type (1,1) bounds for a class of periodic pseudo-differential operators*. Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications, 5(4):507–515, 2014.

[8] Cardona, D. y M. A. Martinez: *Boundedness of pseudo-differential operators on the torus revisited, I*. 2025. preprint.

[9] Delgado, J.: *L P -bounds for pseudo-differential operators on the torus*. En *Pseudo-Differential Operators, Generalized Functions and Asymptotics*, páginas 103–116. 2013.

[10] Duoandikoetxea, J.: *Fourier Analysis*. American Mathematical Society, Providence, 2001.

[11] Fefferman, C.: *Lp bounds for pseudo-differential operators*. Israel Journal of Mathematics, 14(4):413–417, 1973.

[12] McLean, W.M.: *Local and global description of periodic pseudo-differential operators*. Mathematische Nachrichten, 150:151–161, 1991.

[13] Molahajloo, S. y M.W. Wong: *Pseudo-differential operators on* $\mathbb{S}^1$. En Rodino, L. y M.W. Wong (editores): *New Developments in Pseudo-differential Operators*, páginas 297–306. Birkhäuser, 2008.

[14] Nagase, M.: *On some classes of L p-bounded pseudodifferential operators*. Osaka Journal of Mathematics, 23(2):425–440, 1986.

[15] Ruzhansky, M. y M. Turunen: *On the Fourier analysis of operators on the torus.* En Toft, J., M.W. Wong y H. Zhu (editores): *Modern Trends in Pseudo-Differential Operators*, volumen 172 de *Operator Theory: Advances and Applications*, páginas 87–105. Birkhäuser, 2007.

[16] Ruzhansky, M. y V. Turunen: *Pseudo-differential operators and symmetries: Background analysis and advanced topics.* Birkhäuser, Basel, 2010.

[17] Ruzhansky, M. y V. Turunen: *Quantization of Pseudo-Differential Operators on the torus.* Journal of Fourier Analysis and Applications, 16:943–982, 2010.

[18] Wang, L.: *Pseudo-differential operators with rough coefficients.* Tesis de Doctorado, McMaster University, 1997.

[19] Wong, M. W.: *Discrete Fourier Analysis.* Birkhäuser, 2011.