Repaso de matemáticas

1.1. Álgebra

Algunas reglas básicas

Cuando se realizan operaciones algebraicas, se aplican las leyes de la aritmética. Símbolos como x, y y z se emplean normalmente para representar magnitudes no especificadas, denominadas **incógnitas**.

En primer lugar, consideremos la ecuación

$$8x = 32$$

Para despejar x, podemos dividir (o multiplicar) cada miembro de la ecuación por el mismo factor sin romper la igualdad. En este caso, dividimos ambos miembros de la ecuación por 8, obteniendo

$$\frac{8x}{8} = \frac{32}{8} \qquad \Rightarrow \qquad x = 4$$

Consideremos ahora esta ecuación:

$$x + 2 = 8$$

En este tipo de expresión, podemos sumar o restar la misma cantidad en cada miembro de la ecuación. Si restamos 2 a cada miembro, obtenemos

$$x + 2 - 2 = 8 - 2 \qquad \Rightarrow \qquad x = 6$$

En general, si $x + a = b$, entonces $x = b - a$. Consideremos ahora la siguiente ecuación:

$$\frac{x}{5} = 9$$

Si multiplicamos cada miembro de la ecuación por 5, nos queda la incógnita x en el miembro izquierdo de la ecuación y 45 en el miembro derecho:

$$\left(\frac{x}{5}\right)(5) = 9 \cdot 5 \qquad \Rightarrow \qquad x = 45$$

En todos los casos, cualquier operación que se efectúe en el miembro izquierdo debe también efectuarse en el miembro derecho.

A continuación se muestran las reglas que se debe tener presente para multiplicar, dividir, sumar y restar fracciones:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{ac}{bd} \\
&\frac{(a/b)}{(c/d)} = \frac{ad}{bc} \\
&\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}
\end{aligned}$$

Potencias

Cuando se multiplican potencias de una misma magnitud x, se aplica la siguiente regla:

$$x^n x^m = x^{n+m}$$

Cuando se dividen potencias de una misma magnitud, la regla es:

$$\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$$

Una potencia fraccionaria, tal como $1/3$, se corresponde con una raíz:

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

Por último, cualquier cantidad (x^n) elevada a la potencia m es

$$(x^n)^m = x^{nm}$$

Factorización

He aquí algunas fórmulas útiles para descomponer en factores una ecuación:

$$\begin{aligned}
&ax + ay + az = a(x + y + z) && \text{(factor común)} \\
&a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2 && \text{(cuadrado perfecto)} \\
&a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) && \text{(diferencia de cuadrados)}
\end{aligned}$$

Ecuaciones de segundo grado

La forma general de una ecuación de segundo grado es:

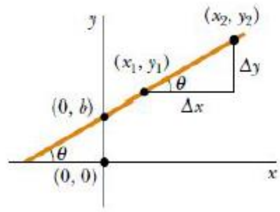
$$ax^2 + bx + c = 0$$

donde x es la incógnita y a, b y c son factores numéricos denominados **coeficientes** de la ecuación. Esta ecuación tiene dos soluciones, que se determinan mediante la expresión:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si $b^2 \geq 4ac$, las raíces son reales.

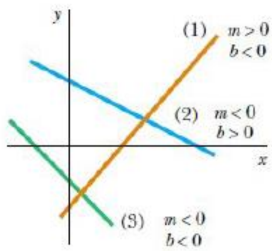
Ecuaciones lineales



Una ecuación lineal tiene la forma general siguiente:

$$y = mx + b$$

donde m y b son constantes. Esta ecuación se denomina **ecuación lineal** porque la gráfica de y en función de x es una línea recta, como se muestra en la figura. La constante b, llamada **ordenada en el origen**, representa el valor de y en el que la línea recta corta al eje y. La constante m es igual a la **pendiente** de la línea recta y también es igual a la tangente del ángulo que forma la línea con el eje x. Si dos puntos cualesquiera de la recta se especifican mediante las coordenadas (x_1,y_1) y (x_2,y_2), como se indica en la figura anterior, entonces la pendiente de la línea recta se puede expresar como sigue:



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Obsérvese que m y b pueden tomar valores positivos o negativos. En la figura anterior, tanto b como m eran positivas. En la figura adjunta se muestran otras tres posibles situaciones.

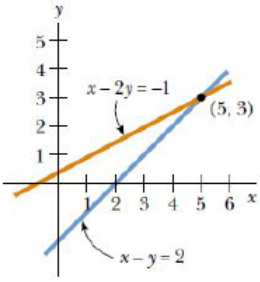
1.1.1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Consideremos la ecuación $3x + 5y = 15$, que tiene dos incógnitas, x e y. Una ecuación de este tipo no tiene una única solución. Por ejemplo, obsérvese que $(x = 0, y = 3)$, $(x = 5, y = 0)$ y $(x = 2, y = 9/5)$ son soluciones de esta ecuación.

Si un problema tiene dos incógnitas, solo es posible obtener una solución si se tienen dos ecuaciones. En general, si un problema tiene n incógnitas, su solución requiere n ecuaciones. Para resolver sistemas de dos ecuaciones que impliquen dos incógnitas, x e y, despejamos x en función de y en una de las ecuaciones y sustituimos dicha expresión en la otra ecuación.

Un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas puede resolverse gráficamente. Si las líneas rectas correspondientes a las dos ecuaciones se dibujan un sistema de ejes cartesianos, la intersección de las dos líneas representa la solución. Por ejemplo, consideremos las dos ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x - 2y = -1 \end{cases}$$



Ambas rectas se han dibujado en la figura. La intersección de las dos líneas es el punto de coordenadas ($x = 5, y = 3$), que es la solución de este sistema de dos ecuaciones. Es aconsejable comprobar esta solución por el método analítico explicado anteriormente.

Logaritmos

Supongamos que una magnitud x se expresa como una potencia de una cierta magnitud a:

$$x = a^y$$

El número a se denomina **base**. El **logaritmo** de x en base a es igual al exponente al que debe elevarse la base para satisfacer la expresión $x = a^y$:

$$y = \log_a x$$

Inversamente, el **antilogaritmo** de y es el número x:

$$x = \text{antilog}_a y$$

En la práctica, las dos bases empleadas con más frecuencia son 10, que es la base de los logaritmos decimales, y el número $e = 2.71828\ldots$, denominado constante de Euler o base de los logaritmos naturales o **neperianos**. Cuando se emplean logaritmos decimales, tenemos:

$$y = \log_{10} x \quad (\text{o } x = 10^y)$$

y para el logaritmo neperiano

$$y = \ln x \quad (\text{o } x = e^y)$$

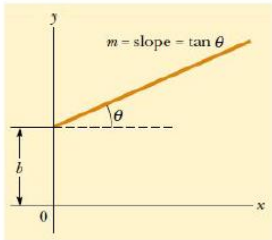
Por último, algunas propiedades útiles de los logaritmos son las siguientes:

$$\log(ab) = \log a + \log b$$
$$\log(a/b) = \log a - \log b$$
$$\log(a^n) = n \log a$$
$$\log(1/a) = -\log(a)$$
$$\log_b x = \log_b a \log_a x$$
$$\log 1 = 0$$
$$\ln e = 1$$
$$\ln e^a = a$$

1.2. Geometría

La **distancia** d entre dos puntos de coordenadas (x_1, y_1) y (x_2, y_2) es

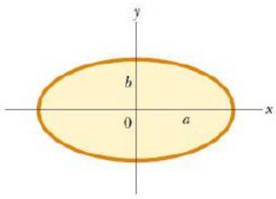
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



La ecuación de una **recta** (ver figura) es:

$$y = mx + b$$

donde b es el punto donde la recta corta al eje y y m es la pendiente de la línea.

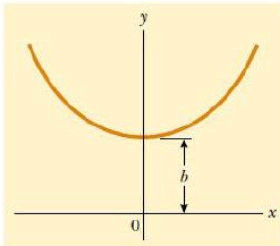


La ecuación de una **circunferencia** de radio R centrada en el origen es:

$$x^2 + y^2 = R^2$$

La ecuación de una **elipse** que tiene el origen como centro (ver figura) es:

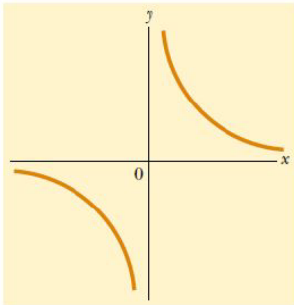
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



donde a es la longitud del semieje mayor y b es la longitud del semieje menor.

La ecuación de una **parábola** cuyo vértice se encuentra en $y = b$ (ver figura) es:

$$y = ax^2 + b$$



La ecuación de una **hipérbola rectangular** (ver figura) es:

$$xy = \text{constante}$$

La figura 1.1 muestra las áreas y volúmenes para distintas formas geométricas utilizadas durante el curso.

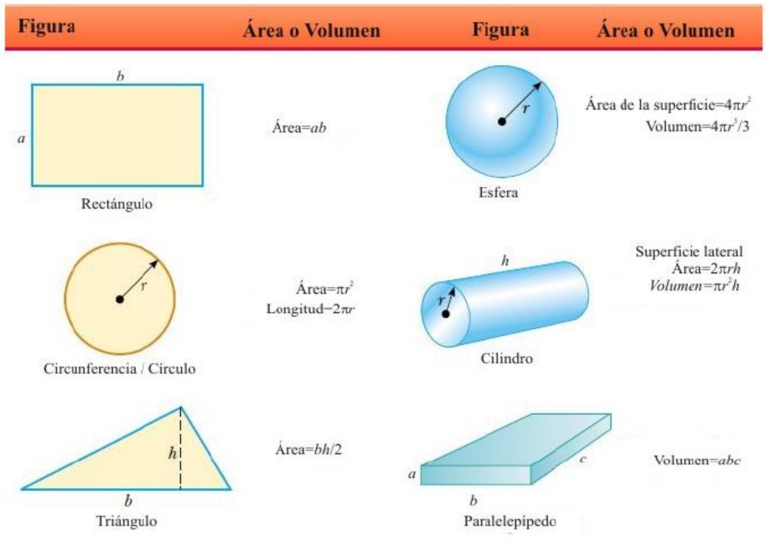
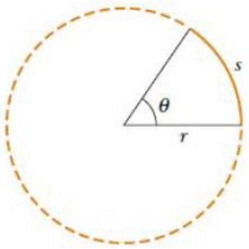


FIGURA 1.1: Áreas y volúmenes de diferentes figuras geométricas.

Ángulos



La longitud de arco s de un arco circular (ver figura) es proporcional al radio r para un valor fijo θ (en radianes):

$$s = r\theta \qquad \Rightarrow \qquad \theta = \frac{s}{r}$$

La relación entre radianes y grados sexagesimales es

$$360^{\circ} = 2\pi \text{ rad}$$

En la figura 1.2 se muestran algunas relaciones útiles entre ángulos:

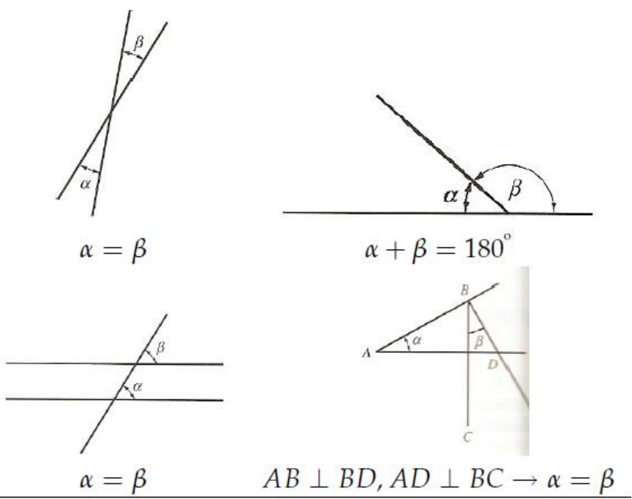
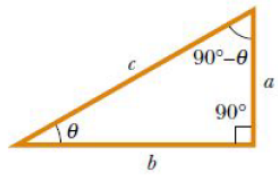


FIGURA 1.2: Relaciones entre ángulos.

1.3. Trigonometría

La parte de las matemáticas que se basa en las propiedades especiales del triángulo rectángulo se denomina **trigonometría**. Por definición, un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo de 90º. Consideremos el triángulo rectángulo de la figura, en el que el lado a es el cateto opuesto al ángulo θ, el lado b es el cateto adyacente al ángulo θ y el lado c es la hipotenusa del triángulo. Las tres funciones trigonométricas básicas definidas por este triángulo son el seno (sen), el coseno (cos) y la tangente (tan). En función del ángulo θ, estas funciones se definen del siguiente modo:



$$\operatorname{sen}\theta \equiv \frac{\text{cateto opuesto a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta \equiv \frac{\text{cateto adyacente a } \theta}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta \equiv \frac{\text{cateto opuesto a } \theta}{\text{cateto adyacente a } \theta} = \frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

El teorema de Pitágoras proporciona la siguiente relación entre los lados de un triángulo rectángulo:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

A partir de las definiciones anteriores y del teorema de Pitágoras, se deduce que:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

La funciones cosecante, secante y cotangente se definen del siguiente modo:

$$\csc\theta \equiv \frac{1}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{c}{a}$$

$$\sec\theta \equiv \frac{1}{\cos\theta} = \frac{c}{b}$$

$$\cot\theta \equiv \frac{1}{\tan\theta} = \frac{b}{a}$$

El ángulo θ cuyo seno es x se denomina arcoseno de x y se escribe $\operatorname{arc\,sen} x$. Análogamente, se definen las funciones arcocoseno y arcotangente:

$$\operatorname{sen} x = \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \operatorname{arc\,sen} x$$

$$\cos x = \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \operatorname{arc\,cos} x$$

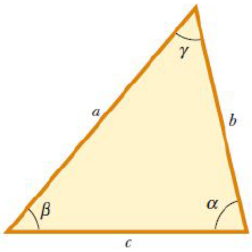
$$\tan x = \theta \quad \Rightarrow \quad \theta = \arctan x$$

Las siguientes relaciones se obtienen directamente del triángulo rectángulo mostrado en la figura anterior:

$$\operatorname{sen}\theta = \cos(90^{o} - \theta)$$
$$\cos\theta = \operatorname{sen}(90^{o} - \theta)$$
$$\cot\theta = \tan(90^{o} - \theta)$$

Algunas propiedades de las funciones trigonométricas son:

$$\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$$
$$\cos(-\theta) = \tan\theta$$
$$\tan(-\theta) = -\tan\theta$$



Las siguientes relaciones se aplican a *cualquier* triángulo, como en la figura:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^{o}$$

Teorema del coseno

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \end{aligned}$$

Teorema del seno

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{b}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{c}{\operatorname{sen}\gamma}$$

A continuación se enumeran una serie de identidades trigonométricas útiles:

$$\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$$
$$\csc^2\theta = 1 + \cot^2\theta$$
$$\operatorname{sen}2\theta = 2\operatorname{sen}\theta\cos\theta$$
$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$$
$$\operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos\theta}{2}$$
$$\cos^2\frac{\theta}{2} = \frac{1 + \cos\theta}{2}$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sen}(A \pm B) &= \sin A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B \\
\cos(A \pm B) &= \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \\
\operatorname{sen} A \pm \operatorname{sen} B &= 2 \operatorname{sen} \frac{A \pm B}{2} \cos \frac{A \mp B}{2} \\
\cos A + \cos B &= 2 \cos \frac{A + B}{2} \cos \frac{A - B}{2} \\
\cos A - \cos B &= 2 \operatorname{sen} \frac{A + B}{2} \operatorname{sen} \frac{B - A}{2}
\end{aligned}
$$

En la figura 1.3 se representan las funciones trigonométricas en función de θ. Las funciones seno y coseno tienen un periodo 2π rad (o 360º). Es decir, para cualquier valor de θ, $\operatorname{sen}(\theta + 360^o) = \operatorname{sen}\theta$. La función tangente tiene un periodo de π rad (o 180º).

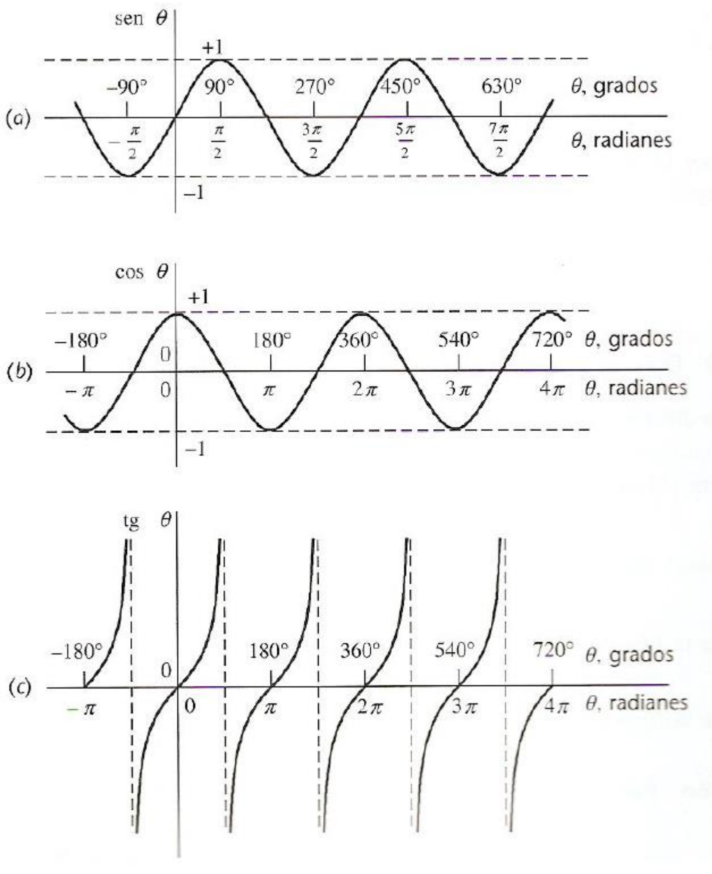


FIGURA 1.3: Funciones trigonométricas.

1.4. Desarrollos en serie

Mostramos a continuación una serie de desarrollos en serie útiles:

$$(a+b)^n = \sum_k^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k, \qquad \text{con} \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

$$(1+x)^2 = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\ln(1 \pm x) = \pm x - \frac{1}{2}x^2 \pm \frac{1}{3}x^3 - \cdots$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \qquad (|x| < \pi/2)$$

Para $x \ll 1$, se pueden utilizar las siguientes aproximaciones:

$$(1+x)^n \approx 1 + nx$$

$$e^x \approx 1 + x$$

$$\ln(1 \pm x) \approx \pm x$$

$$\operatorname{sen} x \approx x$$

$$\cos x \approx 1$$

$$\tan x \approx x$$

1.5. Cálculo diferencial

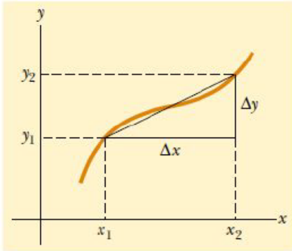
En varias ramas de la ciencia, es necesario utilizar algunas veces las herramientas básicas del cálculo infinitesimal, inventado por Newton, para describir los fenómenos físicos. El uso del cálculo infinitesimal es fundamental en el tratamiento de distintos problemas de la mecánica newtoniana, la electricidad y el magnetismo. En esta sección simplemente vamos a enunciar algunas propiedades básicas y reglas prácticas.

En primer lugar, hay que especificar una **función** que describa cómo se relaciona una variable con otra (por ejemplo, una coordenada en función del tiempo). Supongamos que llamamos y a una de las variables (la variable dependiente), y x a la otra (la variable independiente). Para estas dos variables, podríamos tener una relación funcional como la siguiente:

$$y(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Si a, b, c y d son constantes especificadas, entonces se puede calcular y para cualquier valor de x. Normalmente, trabajaremos con funciones continuas, es decir, aquellas para las que y varía *de forma suave* al hacerlo x.

La **derivada** de y con respecto de x se define como el límite, cuando Δx tiende a cero de la pendiente de la cuerda dibujada entre dos puntos de la curva que representa y en función de x. Matemáticamente, escribimos esta definición del siguiente modo:



$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y(x + \Delta x) - y(x)}{\Delta x}$$

donde Δy y Δx de definen como $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$ (ver figura). Cuando Δx tiende a cero, la cuerda se convierte en la recta tangente en un punto dado, de forma que la derivada coincide con la pendiente de dicha recta tangente. Es importante destacar que $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ no significa $\mathrm{d}y$ dividido entre $\mathrm{d}x$, sino que simplemente se trata de la notación de Leibnitz que se emplea para designar el proceso de cálculo del límite para obtener la derivada, definido en la ecuación anterior.

Una expresión útil que conviene recordar cuando $y(x) = ax^n$, donde a es una *constante* y n es *cualquier* número, positivo o negativo (entero o fraccionario), es:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = nax^{n-1}$$

Si $y(x)$ es un polinomio o función algebraica de x, aplicamos esta última ecuación a *cada* término del polinomio, siendo cero la derivada de una constante.

Propiedades especiales de las derivadas

Derivada de la suma de dos funciones. Si una función $f(x)$ es igual a la suma de dos funciones, $f(x) = g(x) + h(x)$, entonces la derivada de la suma es igual a la suma de las derivadas:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}[g(x) + h(x)]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}$$

Derivada del producto de dos funciones. Si una función $f(x)$ está dada por el producto de dos funciones, $f(x) = g(x)h(x)$, entonces la derivada de $f(x)$ se define como:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}[g(x)h(x)]}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}h(x) + g(x)\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}$$

Derivada del cociente de dos funciones. Si una función $f(x)$ está dada por el cociente entre dos funciones, $f(x) = g(x)/h(x)$, entonces la derivada de $f(x)$ se define como:

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}[g(x)/h(x)]}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{h^2(x)}\left[\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}h(x) - g(x)\frac{\mathrm{d}h(x)}{\mathrm{d}x}\right]$$

Regla de la cadena. Si $y = f(x)$ y $x = g(z)$, entonces, $\mathrm{d}y/\mathrm{d}z$ puede escribirse como el producto de dos derivadas:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$$

La segunda derivada. La segunda derivada de y con respecto de x se define como la derivada de la función $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ (la derivada de la derivada). Esto se expresa, normalmente, del siguiente modo:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$$

Derivada inversa. La derivada de x respecto de y es la inversa de la derivada de y respecto de x, siempre que ninguna de ellas se anule:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{-1}$$

Ejemplo de derivadas de funciones particulares. A continuación se enumeran algunas de las derivadas utilizadas con más asiduidad (las letras a y n representan constantes):

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a) = 0\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ax^n) = nax^{n-1}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{ax}) = ae^{ax}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x)) = \frac{1}{x}\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen}(ax)) = a\cos(ax)\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(ax)) = -a\operatorname{sen}(ax)\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\tan(ax)) = a\sec^2(ax)\\
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan(x)) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (1.1)
\end{aligned}$$

1.6. Cálculo integral

La integración es la operación inversa de la derivación. Por ejemplo, consideremos la siguiente expresión:

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 3ax^2 + b$$

la cual es el resultado de derivar la función

$$y(x) = ax^3 + bx + c$$

Podemos escribir la ecuación anterior como $dy = f(x)dx = (3ax^2 + b)dx$ y obtener $y(x)$ "sumando" todos los valores de x. Matemáticamente, escribimos esta operación inversa como sigue:

$$y(x) = \int f(x)dx$$

Para la función $f(x)$ dada en el ejemplo anterior, tenemos:

$$y(x) = \int (3ax^2 + b)dx = ax^3 + bx + c$$

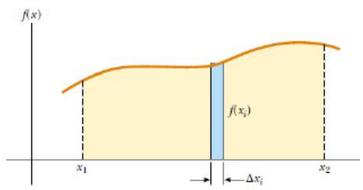
donde c es una constante de integración. Este tipo de integral se denomina **integral indefinida**, dado que su valor depende de la elección que se haga de c.

Una integral indefinida $I(x)$ se define, en general, como

$$I(x) = \int f(x)dx$$

donde $f(x)$ se denomina **integrando** y $f(x) = dy(x)/dx$.

Para una función continua cualquiera $f(x)$, la integral se puede describir como el área bajo la curva limitada por $f(x)$ y el eje x entre dos valores especificados de x, por ejemplo, x_1 y x_2, como se muestra en la figura.



El área del elemento en color azul es aproximadamente $f(x_i)\Delta x_i$. Si sumamos todos esos elementos desde x_1 hasta x_2 y calculamos el límite de esta suma cuando $\Delta x_i \to 0$, obtenemos el área *real* bajo la curva limitada por $f(x)$ y x entre los limites x_1 y x_2:

$$\text{Área} = \lim_{\Delta x_i \to 0} = \sum_i f(x_i)\Delta x_i = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = I(x_2) - I(x_1)$$

Las integrales del tipo definido por esta ecuación se denominan **integrales definidas**.

Una integral habitual que surge en situaciones prácticas es la siguiente:

$$I(x) = \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \qquad (x \neq -1)$$

Este resultado es obvio, ya que la derivada del miembro derecho de la ecuación con respecto a x es $f(x) = x^n$, como puede verificarse directamente. Si los límites de integración son conocidos, esta integral se convierte una integral definida y se expresa como sigue:

$$\int_{x_1}^{x_2} x^n dx = \frac{x_2^{n+1} - x_1^{n+1}}{n+1} \qquad (x \neq -1)$$

Integración por partes

En ocasiones, resulta útil aplicar el método de la *integración por partes* para calcular ciertas integrales. El método utiliza la propiedad que establece que

$$\int u \mathrm{d}v = uv - \int v \mathrm{d}u$$

donde u y v se eligen *cuidadosamente* de modo que sea posible reducir una integral compleja a una integral más sencilla. En muchos casos, se realizan varias reducciones. Consideremos la función siguiente:

$$I(x) = \int xe^x \mathrm{d}x$$

Esta integral se puede calcular integrando por partes. Seleccionamos $u \equiv x$ y $\mathrm{d}v \equiv e^x \mathrm{d}x$, de modo que $\mathrm{d}u = x\mathrm{d}x$ y $v = e^x$. Así,

$$I(x) = \int xe^x \mathrm{d}x = xe^x - \int e^x \mathrm{d}x = xe^x - e^x + c$$

Es decir,

$$I(x) = \int x^2 e^x \mathrm{d}x = x(e^x - 1) + c$$

Integración por sustitución

Otro método útil que debe recordarse es la integración por sustitución, en la que se realiza un cambio de variable. Por ejemplo, consideremos la siguiente integral:

$$I(x) = \int \cos^2 x \operatorname{sen} x \mathrm{d}x$$

Esta integral es fácil de calcular si expresamos $u = \cos x$, de modo que $\mathrm{d}u = -\operatorname{sen} x \mathrm{d}x$. La integral queda entonces del siguiente modo:

$$I(u) = -\int u^2 \mathrm{d}u = -\frac{u^3}{3} + C$$

Deshaciendo el cambio de variables queda, finalmente,

$$I(x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + c$$

Integrales inmediatas

A continuación se enumeran algunas integrales indefinidas de utilidad (tomando la constante de integración c igual a 0):

$$\int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \qquad \text{si } n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln[f(x)]$$

$$\int e^{ax} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} e^{ax}$$

$$\int \operatorname{sen}(ax) \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{a} \cos(ax)$$

$$\int \cos(ax) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \operatorname{sen}(ax)$$

$$\int \tan(ax) \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{a} \ln[\cos(ax)] = \frac{1}{a} \ln[\sec(ax)]$$

$$\int \frac{x}{a^2 + x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \ln \frac{a+x}{a-x} \qquad \text{si } a^2 - x^2 > 0$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \ln \frac{x-a}{x+a} \qquad \text{si } x^2 - a^2 > 0$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, \mathrm{d}x = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} = -\operatorname{arc\,cos} \frac{x}{a} \qquad \text{si } a^2 - x^2 > 0$$