Bloque II: Dinámica

- *Física Universitaria, Vol. 1; SEARS, F. F., ZEMANSKY, M. W., YOUNG, H. D y FREEDMAN, R. A. Capítulos 6, 7, 8.*
- *Física para Ciencias e Ingeniería, Vol. 1; SERWAY, R. A. y JEWET, J. W. Capítulos 7, 8, 9.*
- *Física para la Ciencia y la Tecnología, Vol.1; TIPLER, P. A. Y MOSCA, G. Capítulos 6, 7, 8.*

TEMA 3. Dinámica de la partícula II: Leyes de conservación

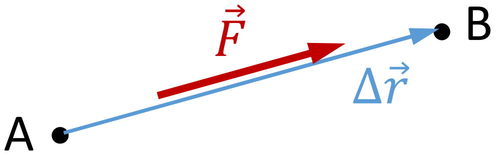
¿cuánto cuesta llevar el balón hasta la canasta?
¿qué es lo que cuesta?

Trabajo de una fuerza a lo largo de una trayectoria

El trabajo lo realiza una **fuerza** $\vec{F}$ cuando produce un **desplazamiento** $\Delta\vec{r}$

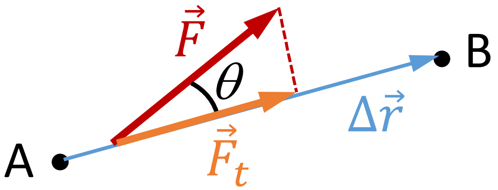
Unidad SI: Julio (J)

J.P. Joule (1818-1889)
Físico inglés, estudió la termodinámica, definió la escala absoluta de temperatura, enunció la ley de Joule



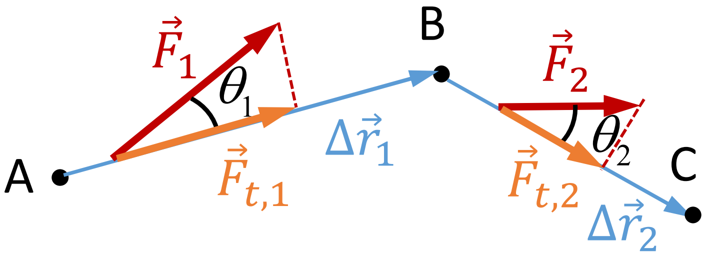
$$W_{A\to B} = F\,\Delta r$$

- Fuerza $\vec{F}$ = cte
- Dirección desplazamiento $\Delta\vec{r}$ = cte
- $\vec{F}$ y $\Delta\vec{r}$ misma dirección



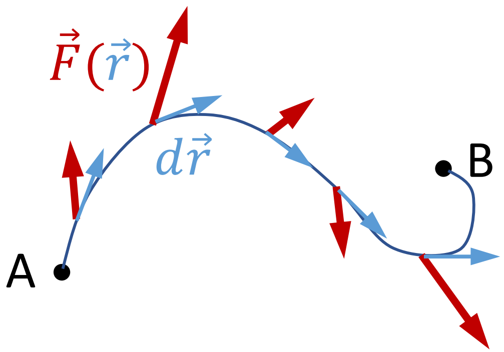
$$W_{A\to B} = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F\,\Delta r\cos\theta = F_t\,\Delta r$$

- $\vec{F}$ = cte
- $\Delta\vec{r}$ = cte
- $\vec{F}$ y $\Delta\vec{r}$ diferente dirección



$\vec{F}$ y $\Delta\vec{r}$ pueden variar

$$W_{A\to C} = W_{A\to B} + W_{B\to C} = \vec{F}_1\cdot\Delta\vec{r}_1 + \vec{F}_2\cdot\Delta\vec{r}_2 =$$
$$= F_1\Delta r_1\cos\theta_1 + F_2\Delta r_2\cos\theta_2 = F_{t,1}\Delta r_1 + F_{t,2}\Delta r_2$$



Y en general:

$$W_{A\to B} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B F\cos\theta\,dr = \int_A^B F_t\,dr$$

¿Y las fuerzas normales?

¿Y las fuerzas centrípetas?

Trabajo de una fuerza a lo largo de una trayectoria

En componentes cartesianas:

$$W_{A\to B} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz$$

$0° < \theta < 90°$ $\longrightarrow$ W positivo

$\theta = 90°$ $\longrightarrow$ $W = 0$

$90° < \theta < 180°$ $\longrightarrow$ W negativo

Ejemplo: Trabajo realizado por la fuerza de gravedad sobre un objeto que se desplaza:

$$\vec{r}_1 = x_1\hat{\imath} + y_1\hat{\jmath} + z_1\hat{k} \longrightarrow \vec{r}_2 = x_2\hat{\imath} + y_2\hat{\jmath} + z_2\hat{k} \qquad \vec{F}_g = -mg\hat{k}$$

$$W_{1\to 2} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y dy + \int_{z_1}^{z_2} F_z dz =$$

$$= \int_{z_1}^{z_2} F_z dz = \int_{z_1}^{z_2} (-mg) dz = -mg\int_{z_1}^{z_2} dz = -mg(z_2 - z_1)$$

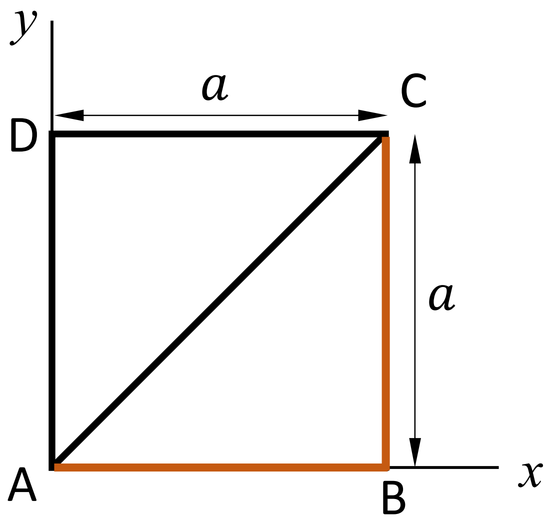
Diferencia de alturas

Solamente!

¿Qué diferencia hay entre un objeto que se deja caer y uno que se sube?

Trabajo de una fuerza a lo largo de una trayectoria: Integral de camino

Ejemplo: Trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = x^2y\hat{\imath} + xy^2\hat{\jmath}$ al ir de A a B por diferentes caminos:



Cuando se integra a lo largo de un camino, las variables x e y pueden tomar valores constantes, **o estar relacionadas**

Camino AB: $y = 0$ Camino AD: $x = 0$

Camino BC: $x = a$ Camino DC: $y = a$

Camino AC: $y = x$

Trabajo de $\vec{F}$ por el camino **ABC**: $W_{A\to B\to C} = W_{A\to B} + W_{B\to C}$

$$W_{A\to B} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{x_A}^{x_B} F_x dx + \int_{y_A}^{y_B} F_y dy + \int_{z_A}^{z_B} F_z dz$$

$$= \int_0^a x^2 y\, dx + \int_0^0 xy^2 dy = 0$$

0 0

$y = 0$ Extremos iguales

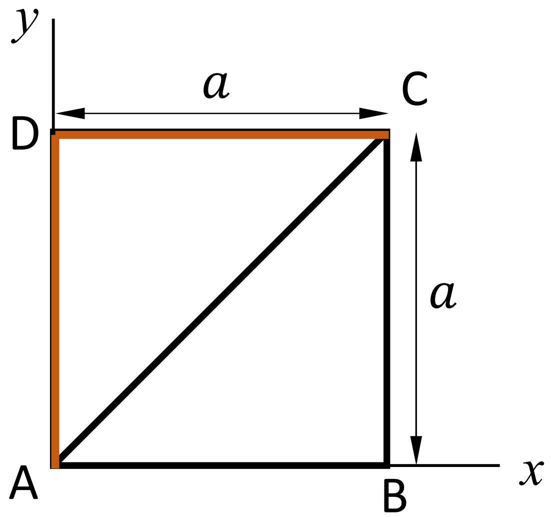
$$W_{B\to C} = \int_a^a x^2 y\, dx + \int_0^a xy^2 dy = a\int_0^a y^2 dy = a\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^4}{3} \longrightarrow W_{A\to B\to C} = \frac{a^4}{3}$$

0

Extremos iguales

Trabajo de una fuerza a lo largo de una trayectoria: Integral de camino

Ejemplo: Trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = x^2y\hat{\imath} + xy^2\hat{\jmath}$ al ir de A a B por diferentes caminos:



Cuando se integra a lo largo de un camino, las variables x e y pueden tomar valores constantes, o estar relacionadas

Camino AB: $y = 0$ Camino AD: $x = 0$

Camino BC: $x = a$ Camino DC: $y = a$

Camino AC: $y = x$

Trabajo de $\vec{F}$ por el camino **ADC**: $W_{A\to D\to C} = W_{A\to D} + W_{D\to C}$

$$W_{A\to D} = \cancelto{0}{\int_0^0 x^2y\,dx} + \cancelto{0}{\int_0^a xy^2\,dy} = 0$$

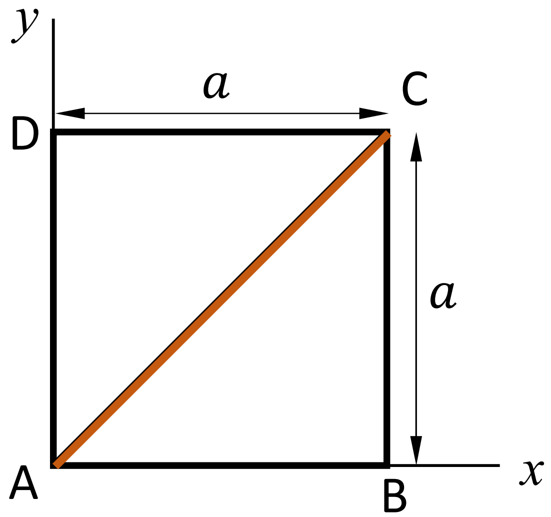
Extremos iguales $x = 0$

$$W_{D\to C} = \int_0^a x^2y\,dx + \cancelto{0}{\int_a^a xy^2\,dy} = a\int_0^a x^2\,dx = a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^a = \frac{a^4}{3} \longrightarrow W_{A\to D\to C} = \frac{a^4}{3}$$

Extremos iguales

Trabajo de una fuerza a lo largo de una trayectoria: Integral de camino

Ejemplo: Trabajo realizado por la fuerza $\vec{F} = x^2 y\hat{\imath} + xy^2\hat{\jmath}$ al ir de A a B por diferentes caminos:



Cuando se integra a lo largo de un camino, las variables x e y pueden tomar valores constantes, o estar relacionadas

Camino AB: $y = 0$

Camino AD: $x = 0$

Camino BC: $x = a$

Camino DC: $y = a$

Camino AC: $y = x$

Trabajo de $\vec{F}$ por el camino **AC**:

$$W_{A\to C} = \int_0^a x^2 y\,dx + \int_0^a xy^2\,dy = \int_0^a x^3\,dx + \int_0^a y^3\,dy = \left[\frac{x^4}{4}\right]_0^a + \left[\frac{y^4}{4}\right]_0^a = \frac{a^4}{2}$$

Depende de x: $y = x$

Depende de y: $x = y$

$$W_{A\to B\to C} = W_{A\to D\to C} \neq W_{A\to C}$$

Potencia

Es el trabajo realizado por unidad de tiempo

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int \vec{F}\cdot d\vec{r}\right) = \frac{d}{dt}\left(\int \vec{F}\cdot \frac{d\vec{r}}{dt}dt\right) = \frac{d}{dt}\left(\int \vec{F}\cdot \vec{v}dt\right) = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

J. Watt (1736-1819), ingeniero mecánico y químico escocés; inventó la máquina de vapor de agua

Unidades: Vatio (W) (J/s)

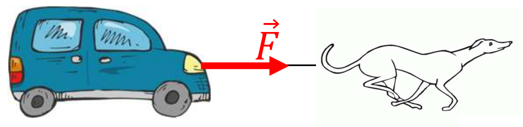
Ahora podemos definir una nueva unidad **de trabajo**: el kilovatio-hora

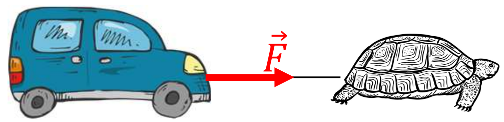
$$1\ \text{kWh} = (10^3\ \text{W})(3600\ \text{s}) = 3.6\times 10^6\ \text{J}$$

Energía cinética (debida al movimiento). Teorema de las fuerzas vivas

$$W_{A\to B} = \int_A^B dW = \int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_A^B F\cos\theta\, dr = \int_A^B F_t dr = \int_A^B mv\frac{dv}{dr}dr = \int_A^B mvdv$$

$$F_t = ma_t = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dr}\frac{dr}{dt} = m\frac{dv}{dr}v$$





$$W_{A\to B} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = E_{cB} - E_{cA} = \Delta E_c$$

Defino la **energía cinética**: $E_c \equiv \frac{1}{2}mv^2$

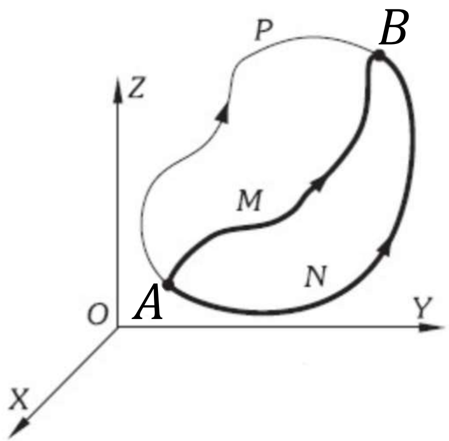
El trabajo realizado por una fuerza sobre un objeto es igual a la variación de su energía cinética

Facilita MUCHO el cálculo de velocidades

Fuerzas conservativas. Energía potencial

Fuerza conservativa: El trabajo que realiza sobre un cuerpo al desplazarse de A a B no depende del camino que se escoja (es reversible)

$$[W_{A\to B}]_M = [W_{A\to B}]_N = [W_{A\to B}]_P = W_{A\to B}$$



Cuando eso pasa, se puede definir **una propiedad** del objeto que **dependa solamente de su posición** (no del camino) y calcular el trabajo como la variación de esa propiedad

Esa propiedad la definimos como **energía potencial**, y se relaciona con el trabajo así:

$$W_{A\to B} = -\left(E_{pB} - E_{pA}\right) = -\Delta E_p$$

Atención al signo negativo!!

Podemos expresarla en función de la fuerza así:

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -W_{A\to B} = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

La fuerza conservativa se puede calcular a partir de la **energía potencial**

$$\vec{F} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\hat{k}\right) = -\vec{\nabla}E_p$$

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = -dE_p(\vec{r}) \longrightarrow F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Si la trayectoria que describe la partícula es cerrada… ⍰ $\vec{r}_B = \vec{r}_A$

$$E_p(\vec{r}_B) = E_p(\vec{r}_A) \to \quad W = -\Delta E_p = 0$$

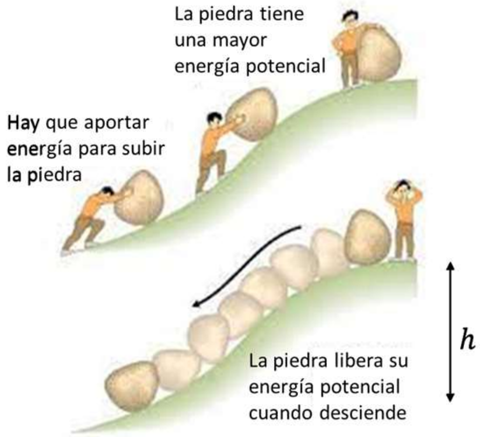
$$\oint dW = \oint \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$$

Fuerzas conservativas. Energía potencial

EJEMPLO: Gravedad constante

$$\Delta E_p = E_{pB} - E_{pA} = -W_{A\to B} = -\int_A^B \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_A^B (-mg)dz = mg(z_B - z_A)$$

$$\vec{F} = -mg\hat{k}$$

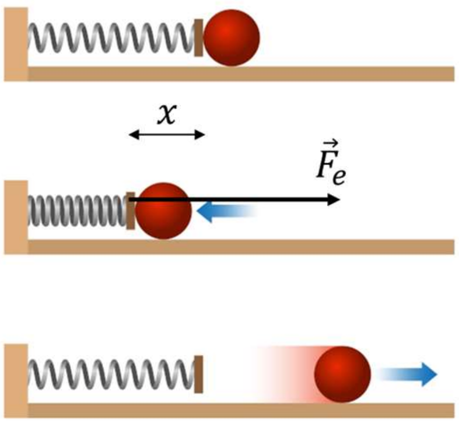


$$E_{p,gravitatoria} = mgz + Cte$$

$$\boxed{E_{p,gravitatoria} = mgz}$$

Para conocer esa Cte se toma un nivel de referencia donde E_p sea cero, y z será la distancia hasta ese nivel

EJEMPLO: Muelle



$$= -\int_A^B (-K\Delta x)dx = K\int_A^B \Delta x\, d(\Delta x) = \frac{1}{2}K[(\Delta x)^2]_A^B$$

$$\vec{F} = -K\Delta x\hat{\imath} \qquad d(\Delta x) = d(x - x_0) = dx$$

$$\Delta E_p = \frac{1}{2}K(x_B - x_0)^2 - \frac{1}{2}K(x_A - x_0)^2$$

$$\boxed{E_{p,muelle} = \frac{1}{2}K(\Delta x)^2}$$

No hace falta posición de referencia, ya que E_p es cero si Δx es cero

Energía mecánica. Conservación

Cuando las **fuerzas son conservativas**, podemos combinar las dos expresiones que hemos encontrado para el trabajo. La energía no se crea ni se destruye, solo se transforma

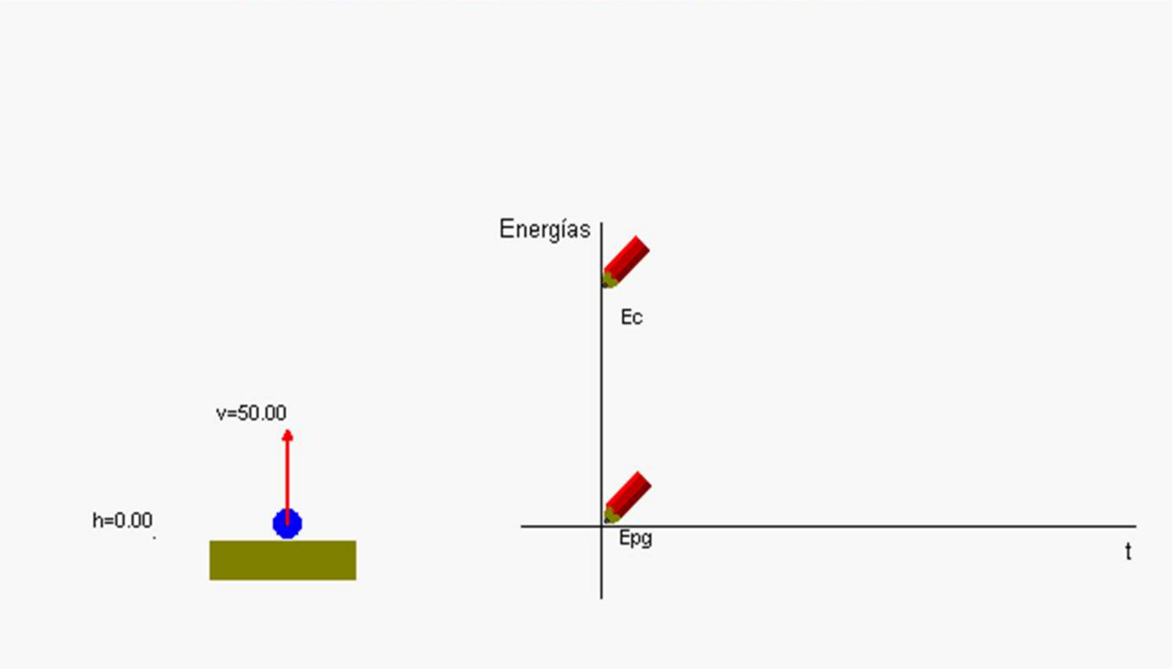
$$\left.\begin{array}{l} W_{A\to B} = \Delta E_c \\ W_{A\to B} = -\Delta E_p \end{array}\right\} \longrightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p \longrightarrow \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta\left(E_c + E_p\right) = 0 = \Delta E_m$$

Definimos la **energía mecánica** de un objeto como $E_m = E_c + E_p$

Es decir: **bajo fuerzas conservativas, la energía mecánica permanece constante**

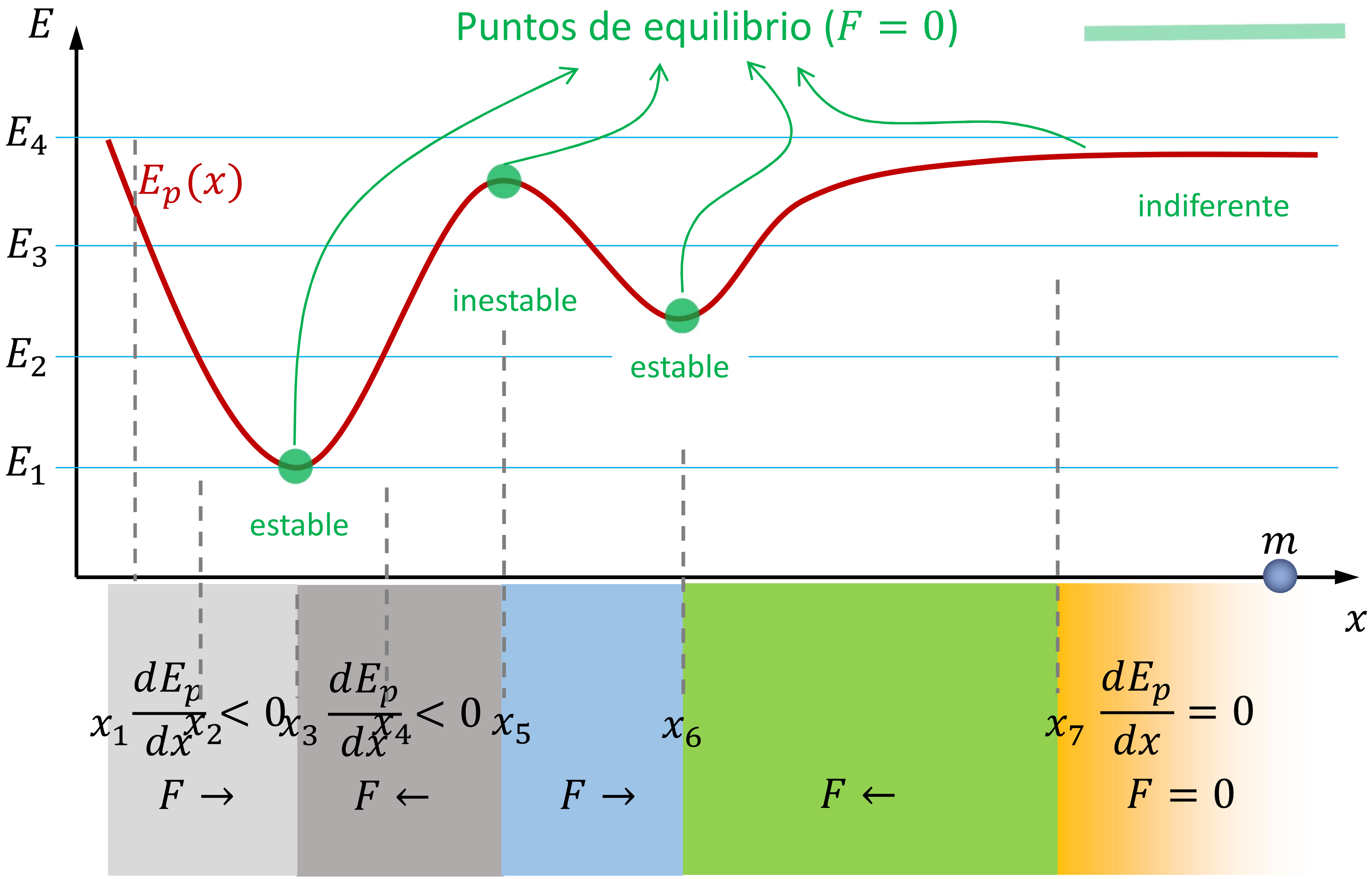
Ejemplo: Gravedad

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = cte$$



Energía mecánica. Conservación. Curva de energía

Ejemplo: supongamos que E_p sólo depende de x, $E_p(x)$ $\longrightarrow$ $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_p = -\dfrac{dE_p}{dx}\hat{\imath}$



Curva de energía potencial para distintos valores de x

Energía mecánica. Conservación

¿Y si hay fuerzas que no son conservativas? Su trabajo depende del camino recorrido

$$\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc} \longrightarrow W = W_c + W_{nc} \longrightarrow \Delta E_c = -\Delta E_p + W_{nc} \longrightarrow \Delta E_m = W_{nc}$$

Teorema energía cinética

Def. energía potencial

La **variación** de la energía mecánica es el trabajo realizado por las fuerzas **no conservativas**

Si hay rozamiento (que es no conservativa) (¿por qué?) siempre se pierde energía mecánica:

La fuerza de rozamiento siempre va en contra del desplazamiento, luego

$$\Delta E_m = W_{roz} < 0$$

¿Y dónde va esa energía?

Ejemplo: caja pasa de hielo a lija, ¿hasta dónde llega?

Trabajo total efectuado

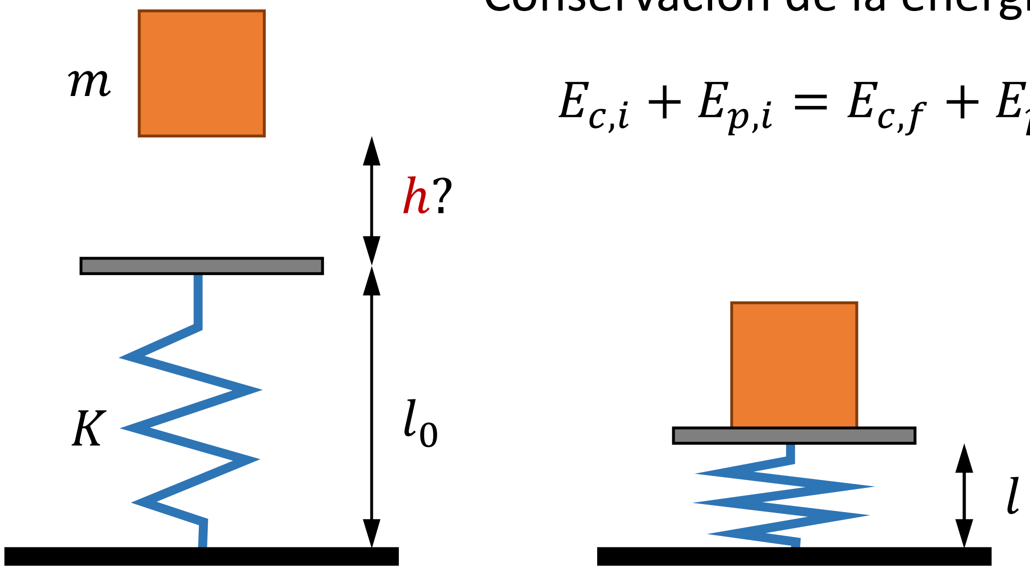
$$\boxed{W_{tot} = W_C + W_{NC} = \Delta E_c}$$

Trabajo de las fuerzas no conservativas

$$-\Delta U + W_{NC} = \Delta E_c \quad \rightarrow \quad \boxed{W_{NC} = \Delta E_c + \Delta U}$$

Energía mecánica. Conservación

EJEMPLO: Bloque se deja caer sobre un muelle



Conservación de la energía mecánica: $\Delta E_m = 0 \longrightarrow E_{m,i} = E_{m,f}$

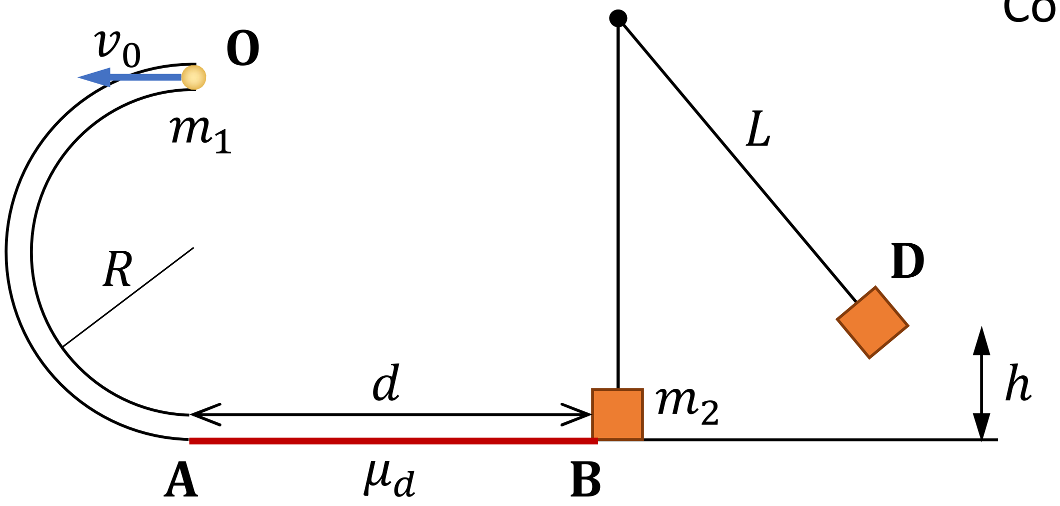
$$E_{c,i} + E_{p,i} = E_{c,f} + E_{p,f} \qquad \begin{cases} E_{c,i} = 0 \\ E_{c,f} = 0 \\ E_{p,i} = mg(h + l_0) \\ E_{p,f} = mgl + \frac{1}{2}K(l - l_0)^2 \end{cases}$$

$$0 + mg(h + l_0) = 0 + mgl + \frac{1}{2}K(l - l_0)^2 \longrightarrow h + l_0 = l + \frac{1}{2}\frac{K}{mg}(l - l_0)^2$$

$$h = l - l_0 + \frac{1}{2}\frac{K}{mg}(l - l_0)^2$$

Energía mecánica. Conservación

EJEMPLO:



$v_{1,B}$?

Cuerpo 1 va de O a A:

Conservación de la energía mecánica:

$$\Delta E_m = 0 \longrightarrow E_{m,O} = E_{m,A}$$

$$\longrightarrow E_{c,O} + E_{p,O} = E_{c,A} + E_{p,A} \longrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m_1}{v_0}^2 + \cancel{m_1}g(2R) = \frac{1}{2}\cancel{m_1}{v_{1,A}}^2 + 0$$

$$\longrightarrow {v_{1,A}}^2 = {v_0}^2 + 4gR \longrightarrow v_{1,A} = \sqrt{{v_0}^2 + 4gR}$$

Cuerpo 1 va de A a B: Conservación de la energía mecánica: $\Delta E_m = W_{roz}$

$$\longrightarrow E_{m,B} - E_{m,A} = W_{roz} \longrightarrow (E_{c,B} + E_{p,B}) - (E_{c,A} + E_{p,A}) = W_{roz}$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2}\cancel{m_1}{v_{1,B}}^2 + 0 - \frac{1}{2}\cancel{m_1}{v_{1,A}}^2 - 0 = -F_R d = -\mu_d \cancel{m_1} g d$$

$$\longrightarrow {v_{1,B}}^2 = {v_{1,A}}^2 - 2\mu_d g d \quad = {v_0}^2 + 4gR - 2\mu_d g d$$

$$\longrightarrow v_{1,B} = \sqrt{{v_0}^2 + 4gR - 2\mu_d g d}$$

En B hay un **CHOQUE** entre los cuerpos 1 y 2.
Lo veremos en el siguiente apartado

Momento lineal ¿Qué significa "momento"?

Aunque tengan la misma velocidad, un objeto de masa grande (camión) y uno de masa pequeña (pelota de ping pong) no tienen el mismo "movimiento"

¿En qué se diferencian esos dos movimientos?

Para tener eso en cuenta, se define una magnitud nueva: la **cantidad de movimiento**, también conocida como **momento lineal**

$\vec{p} \equiv m\vec{v}$ Unidades: kg·m/s **Vector!** Misma dirección y sentido que la velocidad

Conservación del momento lineal

2ª ley de Newton: $\vec{F}_{neta} = m\vec{a}$

Escrita así, esta ley sólo es válida para sistemas donde **la masa sea constante**

Para tener en cuenta **sistemas de masa variable**, la 2ª ley de Newton se debe escribir así:

$$\boxed{\vec{F}_{neta} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

Si $m = cte$ recuperamos 2ª ley ya vista $\vec{F}_{neta} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$

Si **no** hay fuerza neta actuando sobre un sistema, su momento lineal permanece **constante**

$\vec{F}_{neta} = 0 = \frac{d\vec{p}}{dt} \longrightarrow \vec{p} = cte$

Si $m = cte$ recuperamos 1ª ley ya vista: $\vec{v} = cte$

Se conserva

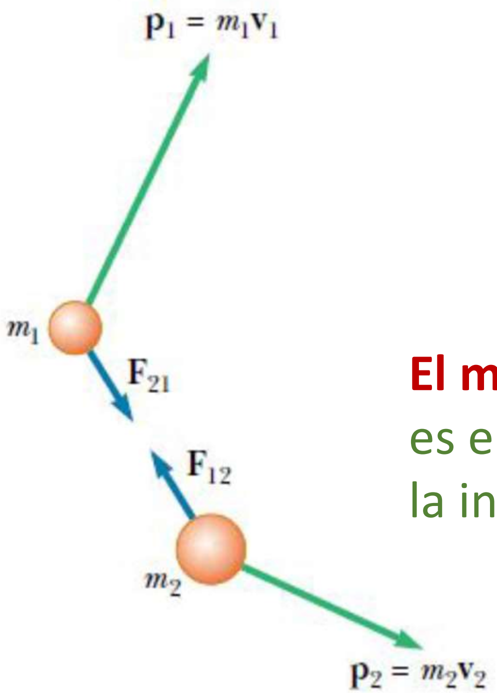
Momento lineal y sistemas aislados

¿Qué es un sistema aislado?

No hay fuerzas externas actuando sobre el sistema, o, si las hay, la fuerza neta es cero

¿Puede haber fuerzas internas? **SÍ!** Pero siempre se van a anular por parejas al sumar las fuerzas actuando en el sistema (3ª ley)

EJEMPLO: Dos partículas aisladas interactúan entre sí (chocan!)



$$\vec{p}_{total} = \sum_i \vec{p}_i = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

¿Es la partícula 1 un sistema aislado?

$$\frac{d\vec{p}_{total}}{dt} = \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

El momento total se conserva: es el mismo antes y después de la interacción

El momento de las **diferentes partes** del sistema puede variar!

$$\vec{p}_{total,i} = \vec{p}_{total,f} \longrightarrow \boxed{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}}$$

¿Puedo sostenerme en el aire si tiro de los cordones de mis zapatos?

¿Cómo funciona un helicóptero?

¿Necesita un cohete el suelo para despegar?

Choques elásticos e inelásticos

Cuando en un sistema aislado hay un choque, ¿se conserva la energía?

Puede que sí, o puede que no

Lo que se **conserva seguro** es el **momento lineal** $\boxed{\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f}}$

Choques elásticos: Se conserva la energía cinética antes y después del choque

Ejemplo: pelota elástica rebotando

$$\left.\begin{aligned} E_{c,i} = E_{c,f} &\longrightarrow \frac{1}{2}m_1 {v_{1,i}}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_{2,i}}^2 = \frac{1}{2}m_1 {v_{1,f}}^2 + \frac{1}{2}m_2 {v_{2,f}}^2 \\ \vec{p}_i = \vec{p}_f &\longrightarrow m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f} \end{aligned}\right\}$$

2 ecuaciones y 4 incógnitas: necesitamos 2 velocidades

Choques inelásticos: NO se conserva la energía cinética antes y después del choque

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \longrightarrow m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = m_1 v_{1,f} + m_2 v_{2,f}$$

1 ecuación y 4 incógnitas: necesitamos 3 velocidades

Choques perfectamente inelásticos: Además, los dos cuerpos siguen unidos después del choque   Ejemplo: bala que choca con un bloque de madera (ejercicio 3)

Los dos cuerpos siguen unidos $\longrightarrow$ Misma velocidad tras el choque

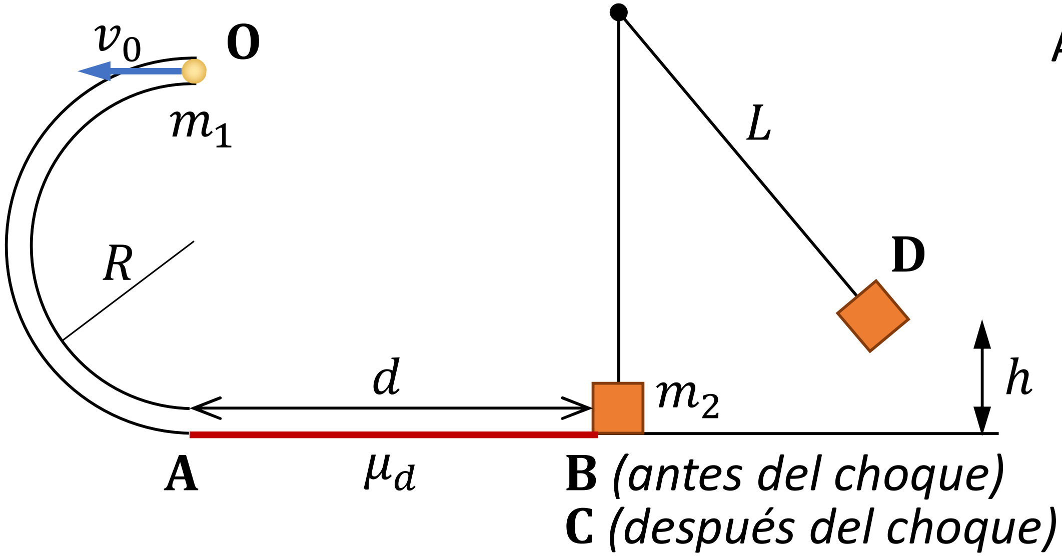
$$\vec{p}_i = \vec{p}_f \longrightarrow m_1 v_{1,i} + m_2 v_{2,i} = (m_1 + m_2) v_f$$

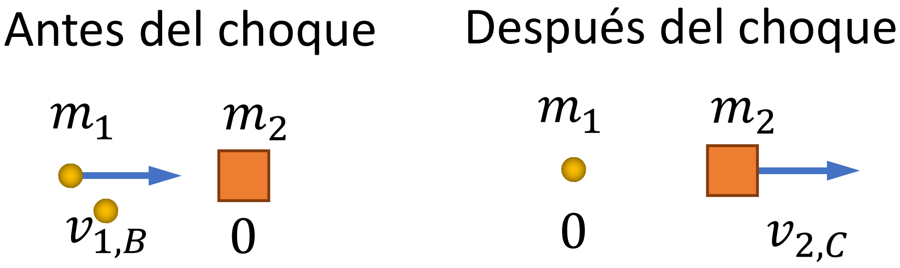
1 ecuación y 3 incógnitas: necesitamos 2 velocidades

Conservación del momento

$h?$

EJEMPLO: **Choque en B** entre cuerpo 1 y cuerpo 2





Todos los vectores en el eje X

<u>**B a C**: Choque: conservación del momento:</u>

$$\Delta\vec{p} = 0 \longrightarrow \vec{p}_B = \vec{p}_C \longrightarrow p_{1,B} + p_{2,B} = p_{1,C} + p_{2,C}$$

$$\longrightarrow m_1 v_{1,B} + 0 = 0 + m_2 v_{2,C} \longrightarrow v_{2,C} = \frac{m_1}{m_2} v_{1,B}$$

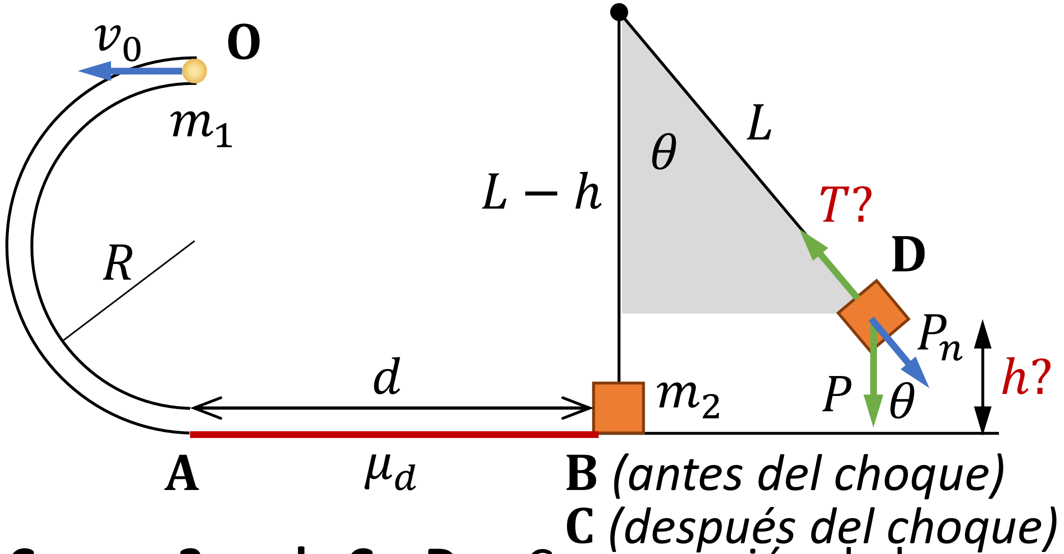
Pregunta extra: ¿Se conserva la energía en este choque?

En general, no

$$E_{c,2C} = \frac{1}{2} m_2 v_{2,C}{}^2 = \frac{1}{2} m_2 \left(\frac{m_1}{m_2} v_{1,B}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2} v_{1,B}{}^2 = \frac{m_1}{m_2} E_{c,1B} \longrightarrow E_{c,2C} \neq E_{c,1B}$$

Excepto si masas iguales (Ej. bolas de billar)

EJEMPLO:



Dato: $v_{2,D} = 0$

Cuerpo 2 va de C a D: Conservación de la energía mecánica: $\Delta E_m = 0$

$$\rightarrow E_{c,C} + E_{p,C} = E_{c,D} + E_{p,D} \rightarrow \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_2}{v_{1,B}}^2 + 0 = 0 + m_2 g h \rightarrow h = \frac{m_1^2 {v_{1,B}}^2}{2m_2^2 g}$$

$T?$ Dibujamos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo 2:

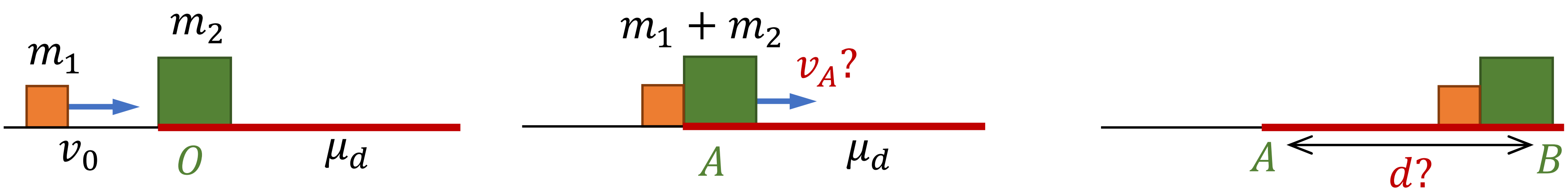
Veamos el eje normal:

$$\sum F_n = m a_n \rightarrow T - P_n = m a_n \rightarrow T - m_2 g\cos\theta = m\frac{{v_{2,D}}^2}{L} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow T = m_2 g\cos\theta = m_2 g\frac{L-h}{L}$$

Conservación del momento

EJEMPLO: Colisión completamente inelástica (cuerpos unidos tras el choque)



Lo primero que hacen es chocar. Estudiamos el choque: O → A

Conservación del momento: $\Delta\vec{p} = 0 \longrightarrow \vec{p}_O = \vec{p}_A \longrightarrow p_{1,O} + p_{2,O} = p_{1,A} + p_{2,A}$

$$\longrightarrow m_1 v_0 + 0 = (m_1 + m_2) v_A \longrightarrow v_A = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} v_0$$

Ahora veamos el desplazamiento de los dos bloques juntos: A → B

Conservación de la energía mecánica: $\Delta E_m = W_{roz} \longrightarrow E_{m,B} - E_{m,A} = W_{roz}$

$$\longrightarrow (E_{c,B} + E_{p,B}) - (E_{c,A} + E_{p,A}) = W_{roz}$$

$$\longrightarrow 0 + 0 - \frac{1}{2}(m_1 + m_2){v_f}^2 - 0 = -F_R d = -\mu_d (m_1 + m_2) g d$$

$$\longrightarrow d = \frac{{v_f}^2}{2\mu_d g} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)^2 \frac{{v_0}^2}{2\mu_d g}$$

Momento angular

Magnitud "equivalente" al momento lineal, que se usa cuando hay giros

Ejemplo: Tirar objetos a puerta para cerrarla

Ejemplo: Pasear al perro

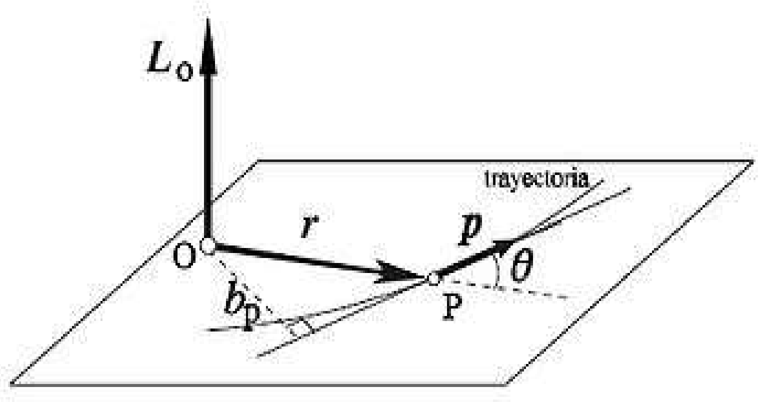
Una partícula en movimiento, desde el punto de vista de un punto fijo, va a describir un giro

¿Siempre?

Definimos el **momento angular** (respecto a un punto O) de una partícula en un punto P

$$\vec{L}_O \equiv \vec{r} \times \vec{p}$$

Vector de O a P



Conservación del momento angular

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d(\vec{r} \times \vec{p})}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{v} \times m\vec{v} = 0 \qquad \vec{F}$$

Definimos el **momento de una fuerza** (respecto a un punto O) cuando se aplica en un punto P

$$\vec{M}_O \equiv \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

2ª ley, para giros

$$\vec{M}_O = 0 \longrightarrow \vec{L}_O = cte$$

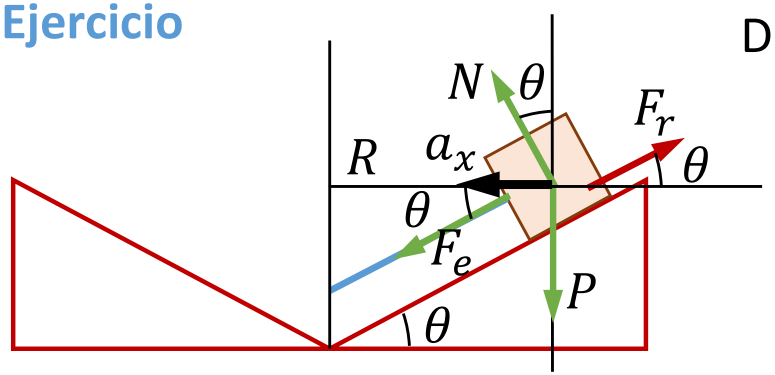
Se conserva!

1ª ley, para giros

- que $\vec{F}$ sea cero.
- que $\vec{r}$ sea cero.
- que $\vec{r}$ sea paralelo a $\vec{F}$.

https://www.youtube.com/watch?v=T2ug3mklnUA

Ejercicio



Datos: $m,\ \omega,\ \theta,\ \Delta l,\ K,\ R$

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \quad \begin{cases} \text{Eje Y:} & \sum_i F_{y,i} = ma_y \\ \text{Eje X:} & \sum_i F_{x,i} = ma_x \end{cases}$$

F_r? La supongo hacia la derecha. Si me sale negativa, es que va hacia la izquierda

<u>Eje Y:</u> $N\cos\theta - P - F_e \operatorname{sen}\theta + F_r \operatorname{sen}\theta = ma_y = 0 \longrightarrow$

$$\longrightarrow N\cos\theta - mg - K\Delta l \operatorname{sen}\theta + F_r \operatorname{sen}\theta = 0 \longrightarrow N = \frac{mg}{\cos\theta} + K\Delta l \tan\theta - F_r \tan\theta$$

<u>Eje X:</u> $F_r\cos\theta - N\operatorname{sen}\theta - F_e\cos\theta = ma_x = m(-\omega^2 R) \longrightarrow$

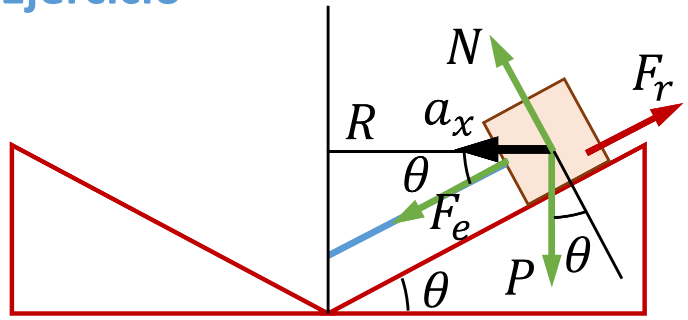
$$\longrightarrow F_r\cos\theta - N\operatorname{sen}\theta - K\Delta l\cos\theta = -m\omega^2 R$$

$$\longrightarrow F_r = N\tan\theta + K\Delta l - \frac{m\omega^2 R}{\cos\theta}$$

$$\longrightarrow F_r = \left(\frac{mg}{\cos\theta} + K\Delta l\tan\theta - F_r\tan\theta\right)\tan\theta + K\Delta l - \frac{m\omega^2 R}{\cos\theta}$$

$$\longrightarrow F_r = \frac{\frac{mg\tan\theta}{\cos\theta} + K\Delta l(1+\tan^2\theta) - \frac{m\omega^2 R}{\cos\theta}}{1+\tan^2\theta} = mg\operatorname{sen}\theta + K\Delta l - m\omega^2 R\cos\theta$$

Ejercicio



Datos: $m, \omega, \theta, \Delta l, K, R$

Ahora con otros ejes:

$$\sum_i \vec{F}_i = m\vec{a} \begin{cases} \text{Eje N:} & \sum_i F_{n,i} = ma_n \\ \text{Eje T:} & \sum_i F_{t,i} = ma_t \end{cases}$$

F_r? La supongo hacia la derecha. Si me sale negativa, es que va hacia la izquierda

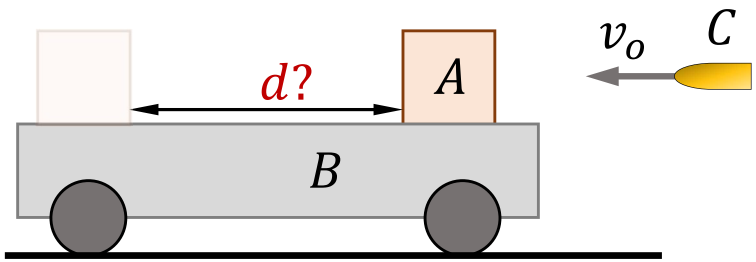
Eje N: $N - P\cos\theta = ma_n = m|a_x|\operatorname{sen}\theta = m\omega^2 R\operatorname{sen}\theta \longrightarrow$

$$\longrightarrow N = mg\cos\theta + m\omega^2 R\operatorname{sen}\theta$$

Eje T: $F_r - P\operatorname{sen}\theta - F_e = ma_t = -m\omega^2 R\cos\theta \longrightarrow$

$$\longrightarrow F_r = mg\operatorname{sen}\theta + K\Delta l - m\omega^2 R\cos\theta$$

Ejercicio

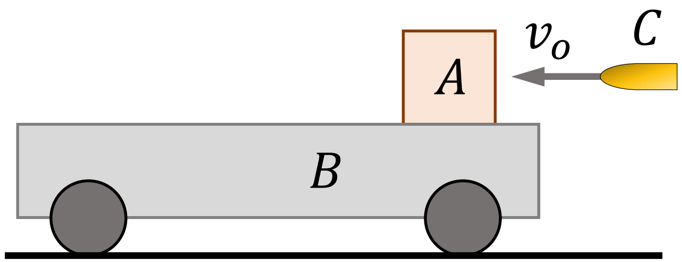


Datos: $m_A, m_B, m_C, \mu_d, v_0$

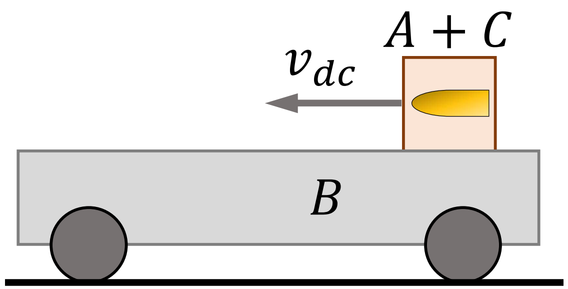
$v_{final\ A+B+C}?$

Supongamos que A no se cae, y ya veremos cuánto vale d

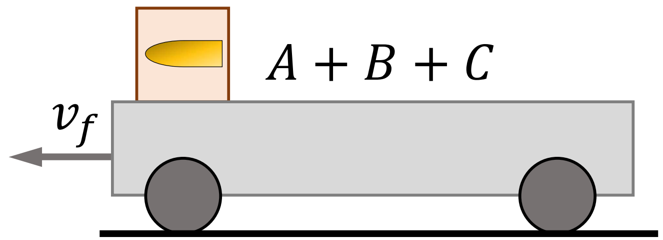
Situación inicial (0)



Situación tras choque (dc)



Situación final (f)



¿Puedo aplicar conservación de momento entre las situaciones **inicial** y **final**? **SÍ**

1) ¿Cuál es mi sistema? $A + B + C$

2) ¿Hay alguna fuerza neta actuando sobre mi sistema? No. La suma de las fuerzas que actúan sobre el sistema es cero en todo momento entre las situaciones inicial y final

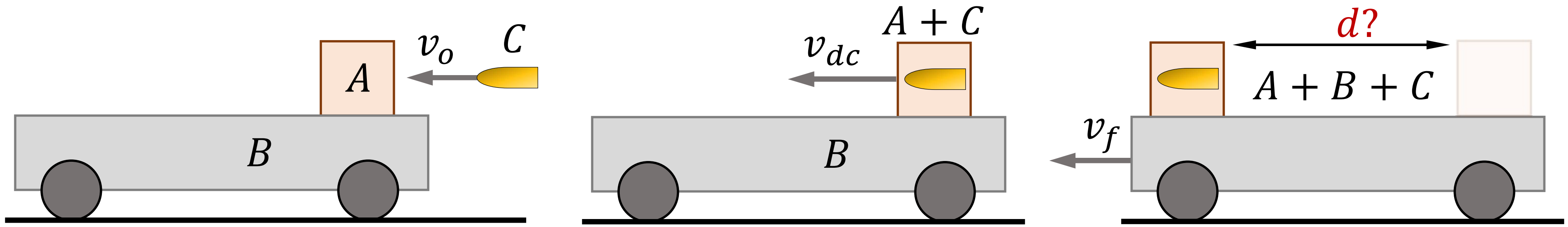
Conservación de momento: $\vec{p}_{A,0} + \vec{p}_{B,0} + \vec{p}_{C,0} = \vec{p}_{A,f} + \vec{p}_{B,f} + \vec{p}_{C,f}$ $\longrightarrow$

$$\longrightarrow \quad 0 + 0 + m_C v_o = m_A v_f + m_B v_f + m_C v_f \quad \longrightarrow \quad v_f = \frac{m_C v_o}{m_A + m_B + m_C}$$

Ejercicio

Datos: $m_A, m_B, m_C, \mu_d, v_0$

Situación inicial (0) **Situación tras choque (dc)** **Situación final (f)**



v_{dc}? Conservación de momento antes (0) y después (dc) del choque del sistema A+C:

$$\vec{p}_{A,0} + \vec{p}_{C,0} = \vec{p}_{A,dc} + \vec{p}_{C,dc} \longrightarrow 0 + m_C v_o = (m_A + m_C) v_{dc} \longrightarrow v_{dc} = \frac{m_C v_o}{m_A + m_C}$$

d? MÉTODO 1: Ver "EJEMPLO 1: Fuerza de rozamiento", apartado d)

MÉTODO 2: Conservación de la energía ¿Entre qué dos situaciones? dc **y** f

Conservación de energía mecánica del sistema A+B+C entre situaciones dc y f :

$$E_{m,dc} = E_{mA+C,dc} + E_{mB,dc} = \frac{1}{2}(m_A + m_C){v_{dc}}^2 + 0$$

$$E_{m,f} = \frac{1}{2}(m_A + m_B + m_C){v_f}^2 \qquad W_{roz} = -F_R d = -\mu_d (m_A + m_C) g d$$

$$E_{m,f} - E_{m,dc} = W_{roz} \longrightarrow \frac{1}{2}(m_A + m_B + m_C){v_f}^2 - \frac{1}{2}(m_A + m_C){v_{dc}}^2 = -\mu_d (m_A + m_C) g d$$