Bloque I: Cinemática

Tema 0. Magnitudes físicas. Vectores

0.1. Magnitudes físicas escalares y vectoriales. Sistema Internacional de Unidades
0.2. Análisis dimensional
0.3. Magnitudes escalares y vectoriales
0.4. Operaciones con vectores

Tema 1. Cinemática de la partícula

1.1. Vector de posición, velocidad y aceleración
1.2. Composición de movimientos
1.3. Componentes intrínsecas de la aceleración
1.4. Movimiento circular. Velocidad y aceleración angulares
1.5. Movimiento relativo. Velocidad y aceleración relativas

- *Física Universitaria, Vol. 1; SEARS, F. F., ZEMANSKY, M. W., YOUNG, H. D y FREEDMAN, R. A. Capítulo 1.*
- *Física para Ciencias e Ingeniería, Vol. 1; SERWAY, R. A. y JEWET, J. W. Capítulo 1.*
- *Física para la Ciencia y la Tecnología, Vol.1; TIPLER, P. A. Y MOSCA, G. Capítulo 1.*

TEMA 0. Magnitudes físicas. Vectores

¿Cuántos granos de arena hay en la playa de la Caleta?

Magnitud física: Propiedad de un sistema que puede **medirse**

¿Qué es medir?

Comparar una magnitud de un sistema con otra que tomamos como base → **Unidad**

Expresión de una magnitud física CANTIDAD + UNIDAD

Las magnitudes pueden estar relacionadas entre ellas

Magnitudes fundamentales: Conjunto de magnitudes de las que deriva el resto

Símbolo	Nombre	Magnitud
s	segundo	tiempo
m	metro	longitud
kg	kilogramo	masa
A	amperio	corriente eléctrica
K	grado kelvin	temperatura absoluta
mol	mol	cantidad de sustancia
cd	candela	intensidad luminosa

Magnitudes derivadas: Resto de magnitudes, derivadas de las fundamentales

Ejemplo: Fuerza: Newton (N) $N = kg \cdot m/s^2$

Magnitudes fundamentales en el Sistema Internacional

masa

kg

La nueva definición del kilogramo, basada en la constante de Planck *h*, invariante de la naturaleza, asegura la **estabilidad a largo plazo de la unidad SI de masa** (y otras unidades mecánicas del SI), permitiendo su **realización en cualquier instante y lugar**

$h = 6{,}626\ 070\ 15 \times 10^{-34}$ J·s

corriente eléctrica

A

La redefinición del kilogramo a partir de *h*, y **del amperio a partir de la carga elemental *e*, reduce las incertidumbres de todas las unidades SI eléctricas.**

Las constantes de Josephson ($K_J = 2e/h$) y de Von Klitzing ($R_K = h/e^2$) tiene valores exactos en el SI.

$e = 1{,}602\ 176\ 634 \times 10^{-19}$ C

temperatura termodinámica

K

La redefinición del kelvin respecto a un valor numérico exacto de la constante de Boltzmann *k*, invariante de la naturaleza, mejora la actual definición, basada en el punto triple del agua, dependiente en la práctica de su pureza y composición isotópica.

$k = 1{,}380\ 649 \times 10^{-23}$ J/K

cantidad de sustancia

mol

La redefinición del mol respecto a un valor numérico exacto de la constante de Avogadro N_A, lo libera de su dependencia del kilogramo y enfatiza la distinción entre "cantidad de sustancia" y "masa".

$N_A = 6{,}022\ 140\ 76 \times 10^{23}$ mol^{-1}

longitud

m

La definición del metro continua ligada al valor numérico exacto de la velocidad de la luz en el vacío *c*

$c = 299\ 792\ 458$ m/s

tiempo

s

La definición del segundo continua ligada al valor numérico de la frecuencia de la transición entre los niveles hiperfinos del estado fundamental no perturbado del átomo de cesio 133.

$\Delta\nu_{Cs} = 9\ 192\ 631\ 770$ Hz

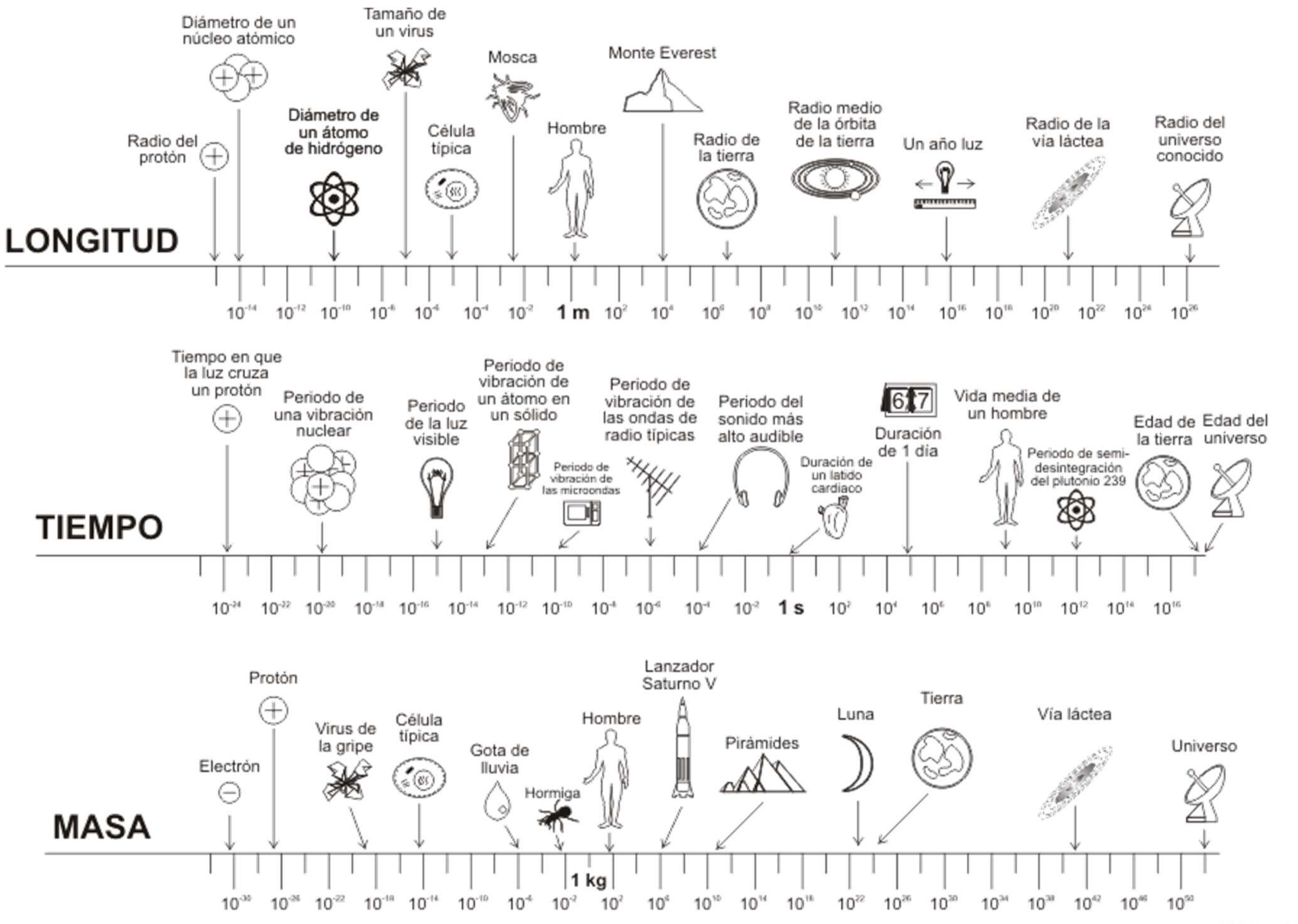
intensidad luminosa

cd

La definición de la candela continua ligada al valor numérico de la eficacia luminosa K_{cd} de la radiación monocromática de $f = 540 \times 10^{12}$ Hz

$K_{cd} = 683$ lm/W

Órdenes de magnitud en el universo…



Múltiplos de unidades y sus prefijos

Múltiplo	Prefijo	Abreviatura	Múltiplo	Prefijo	Abreviatura
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{9}	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{6}	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^{3}	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^{2}	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^{1}	deca	da	10^{-1}	deci	d

Conversión de unidades

Técnica: Factor de conversión (Multiplicar por 1)

Ejemplo: Expresar 7 nm en m

$$7nm = 7nm \underbrace{\frac{10^{-9}m}{1nm}}_{1} = 7 \times 10^{-9}m$$

Ejemplo: Expresar 5 kg en ng

$$5kg = 5kg\,\frac{10^{3}g}{1kg}\,\frac{10^{9}ng}{1g} = 5 \times 10^{12}ng$$

Ejemplos: Expresar 4 μm en cm

Expresar 6 Ms en minutos

Expresar 2 Tg en la unidad de masa del S.I.

Dimensiones de las magnitudes físicas

		Dimensión
Largo de una mesa	30 dm	L (Longitud)
Ancho de una mesa	70 cm	L
Área de una mesa	2,1 m^2	L^2
Tiempo en que una lata rodando recorre el largo de la mesa	1 min	T (Tiempo)
Velocidad (media) de la lata	5 cm/s	LT^{-1}

Los dos lados de una ecuación, y los términos de una suma, siempre tienen la misma dimensión

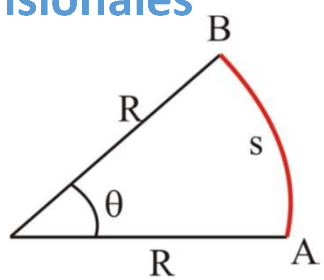
→ utilidad: repasar las dimensiones evita errores

$\cancel{A = 2\pi r}$ $\quad A = \pi r^2$ $\qquad \cancel{x(t) = x_0 + vt^2}$ $\quad x(t) = x_0 + vt$

Magnitudes adimensionales

Ángulos

$$\theta = \frac{s}{R}$$



Los argumentos de funciones transcendentes (seno, coseno, logaritmo, exponencial,…)

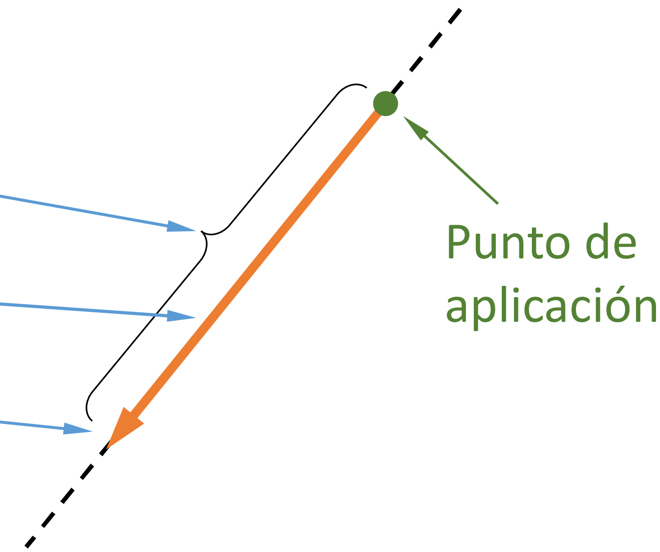
Magnitudes escalares

Quedan definidas con **un único valor numérico** (un escalar, con sus unidades)

Magnitudes vectoriales

Quedan definidas con:

- **Módulo** (un escalar, con sus unidades)
- **Dirección**
- **Sentido**



Notación vectorial:

Vector: $\vec{v}$ $\vec{F}$ (o también, en algunos libros: $\mathbf{v}$ $\mathbf{F}$)

Módulo del vector: $|\vec{v}| = v$ $\left|\vec{F}\right| = F$

El módulo de un vector **es siempre positivo**

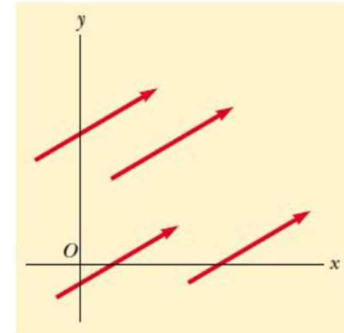
Antes de ver cómo podemos describir la dirección y el sentido de un vector, veamos algunas propiedades de los vectores

Igualdad de vectores

Dos vectores son iguales si tienen igual **módulo, dirección y sentido**

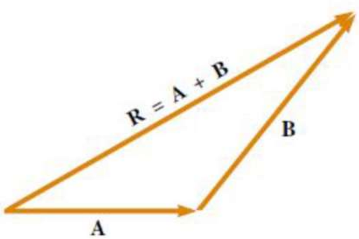
Los vectores se pueden trasladar y siguen siendo el mismo

Algunas magnitudes **sí que dependen** del punto de aplicación de un vector (e.g. momento de una fuerza)

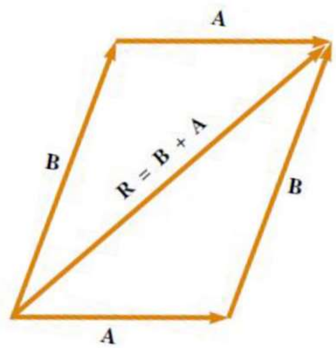


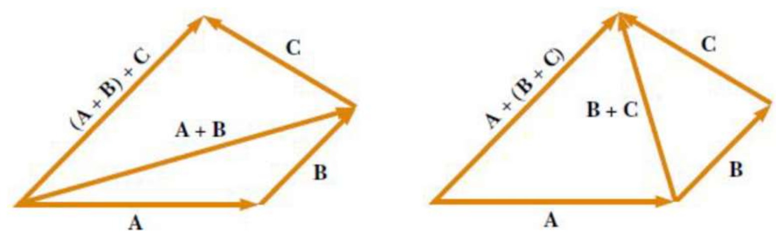
Suma de vectores

Regla del triángulo



Regla del paralelogramo





Propiedad conmutativa

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$$

Propiedad asociativa

$$\left(\vec{A} + \vec{B}\right) + \vec{C} = \vec{A} + \left(\vec{B} + \vec{C}\right)$$

Opuesto de un vector

Opuesto de $\vec{A}$: Vector que sumado con $\vec{A}$ da cero. Se representa como $-\vec{A}$

$$\vec{A} + \left(-\vec{A}\right) = \vec{0}$$

Mismo módulo y dirección, pero sentidos opuestos

Resta de vectores

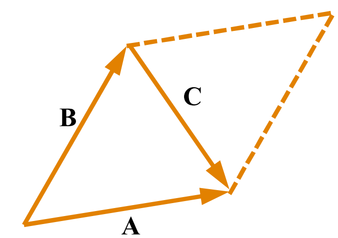
Se define la resta de dos vectores como la suma de uno con el opuesto del otro

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = \vec{C}$$

La resta es la otra diagonal del paralelogramo

Otra forma de verlo: preguntar ¿qué vector le tengo que sumar a $\vec{B}$ para que resulte $\vec{A}$?

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{C} \longrightarrow \vec{A} = \vec{B} + \vec{C}$$



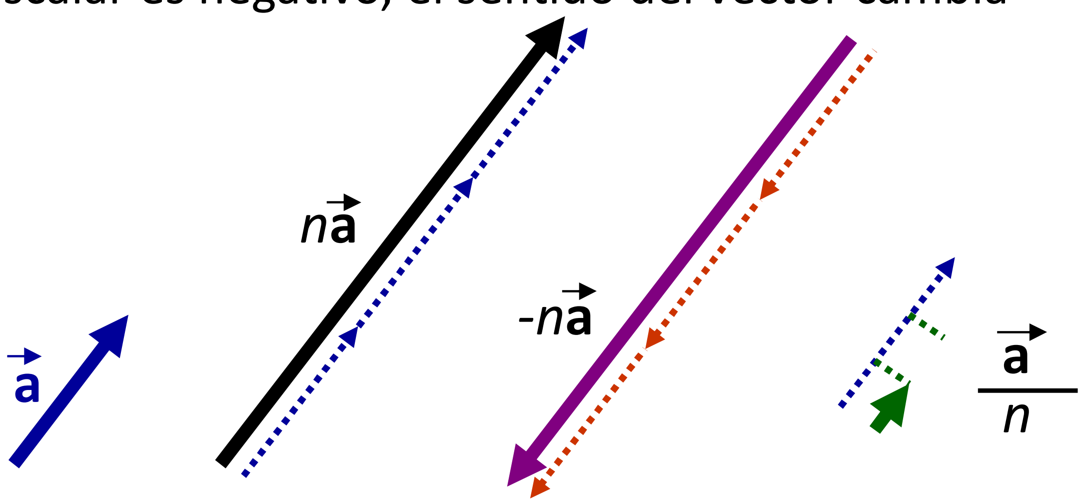
Multiplicación de un escalar por un vector

El resultado es un vector con la misma dirección

Si el escalar es positivo, solamente afecta al módulo del vector

Si el escalar es negativo, el sentido del vector cambia

n = 3



Propiedad distributiva respecto al producto escalar

$$n(\vec{A} + \vec{B}) = n\vec{A} + n\vec{B}$$

$$(n + m)\vec{A} = n\vec{A} + m\vec{A}$$

Vectores unitarios

¿Qué se obtiene si se divide un vector entre su módulo?

Un vector de la misma dirección y sentido, pero de módulo la unidad

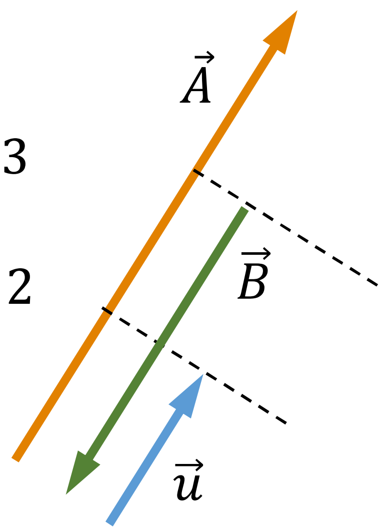
Vector: $\vec{A}$

Módulo: $|\vec{A}| = A$

Vector unitario: $\vec{u} = \frac{\vec{A}}{A} = \hat{A}$ $\quad |\vec{u}| = 1$

$|\vec{A}| = A = 3$

$|\vec{B}| = B = 2$



¿Y esto para qué sirve?

Así puedo expresar todos los vectores **que tengan la misma dirección**, como un escalar por el mismo vector unitario

$$\vec{A} = A\vec{u}$$
$$\vec{B} = -B\vec{u}$$

El vector unitario indica la dirección. El signo el sentido. Y el escalar es el módulo

Ahora puedo operar con vectores fácilmente (si tienen la misma dirección)

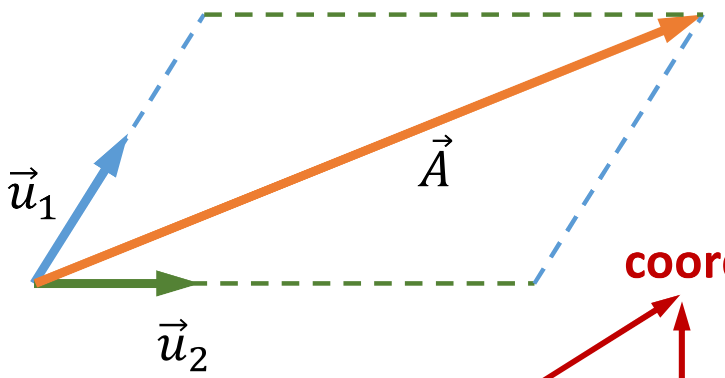
$$\vec{A} + \vec{B} = A\vec{u} - B\vec{u} = (A - B)\vec{u} = 1\vec{u}$$
$$\vec{A} - \vec{B} = A\vec{u} + B\vec{u} = (A + B)\vec{u} = 5\vec{u}$$
$$4\vec{A} - 3\vec{B} = 4A\vec{u} + 3B\vec{u} = (4A + 3B)\vec{u} = 18\vec{u}$$

¡Las operaciones se hacen con escalares!

Toda la información de la dirección queda recogida en el vector unitario

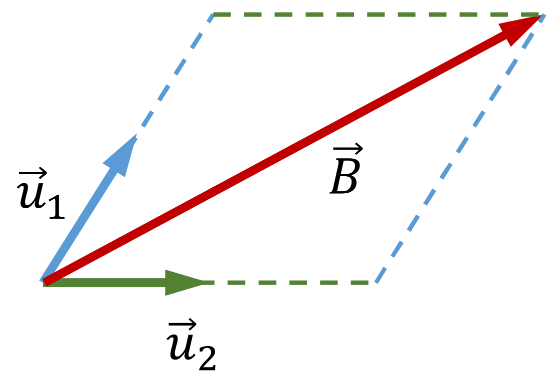
Sistemas de coordenadas

¿Qué necesito para sumar vectores de diferentes direcciones?



coordenadas

$$\vec{A} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$$



Más vectores unitarios!

$$\vec{B} = 2\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2$$

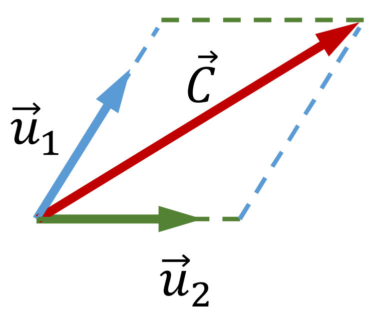
Ahora se expresa el vector como una suma de vectores, cada uno en la dirección de un vector unitario

Y ya podemos sumar usando solo las coordenadas!

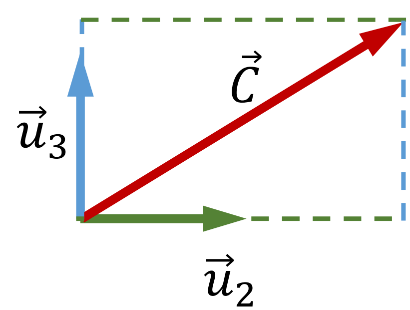
$$\vec{A} + \vec{B} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2 + 2\vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 = (2+2)\vec{u}_1 + (3+2)\vec{u}_2 = 4\vec{u}_1 + 5\vec{u}_2$$

Si estoy en 3D necesito tres vectores unitarios diferentes

Mucho más fácil calcular coordenadas si vectores unitarios son perpendiculares entre sí



$$\vec{C} = ?\,\vec{u}_1 + ?\,\vec{u}_2$$



$$\vec{C} = ?\,\vec{u}_3 + ?\,\vec{u}_2$$

Intentar. Datos: Ángulo entre unitarios, ángulo de $\vec{C}$ con $\vec{u}_2$, y módulo de $\vec{C}$

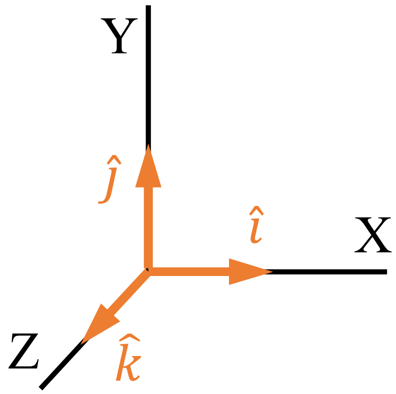
Sistema cartesiano de coordenadas

Es el que vamos a utilizar este curso

3 direcciones perpendiculares entre sí → Ejes de coordenadas: X, Y y Z

Un vector unitario para cada dirección → Vectores unitarios: $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$

$$|\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}| = |\hat{k}| = 1$$



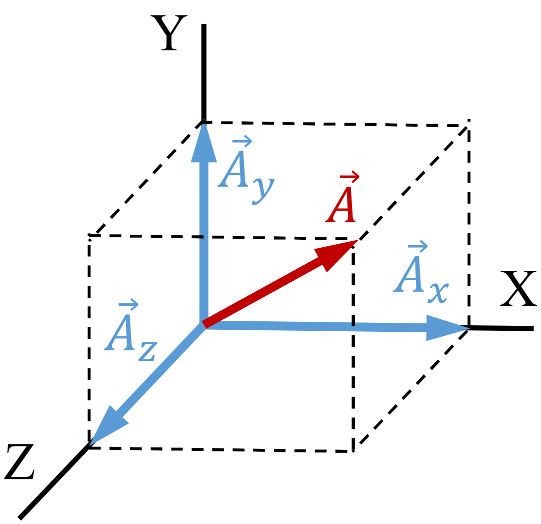
Direcciones positivas: Regla de la mano derecha

Si Eje X → Derecha

Y Eje Y → Arriba

Entonces Eje Z → Hacia fuera del papel

Cualquier vector se puede expresar como la suma de 3 vectores, cada uno sobre un eje



$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

Esos vectores pueden escribirse como

$$\vec{A}_x = A_x\hat{\imath} \qquad \vec{A}_y = A_y\hat{\jmath} \qquad \vec{A}_z = A_z\hat{k}$$

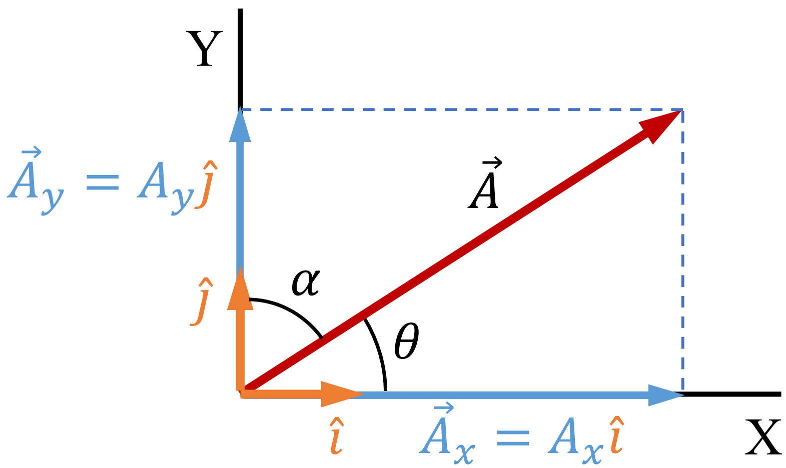
Por lo que

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$

Los valores A_x, A_y y A_z, **con sus signos**, se llaman las **componentes** del vector $\vec{A}$

Aplicación online

Sistema cartesiano de coordenadas: componentes de un vector



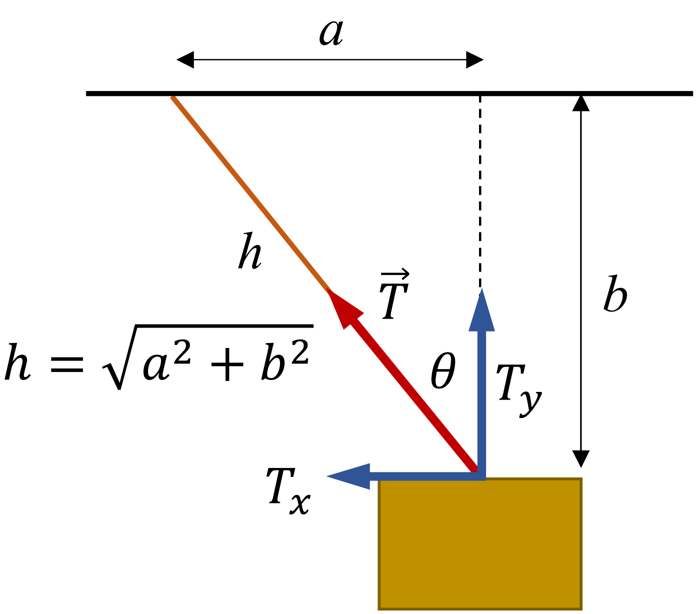
$$\begin{cases} A_x = A\cos\theta \\ A_y = A\sin\theta \end{cases} \qquad \begin{cases} A_x = A\sin\alpha \\ A_y = A\cos\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} & \text{Módulo} \\ \theta = \tan^{-1}\dfrac{A_y}{A_x} & \text{Argumento} \end{cases}$$

Coordenadas polares de un vector

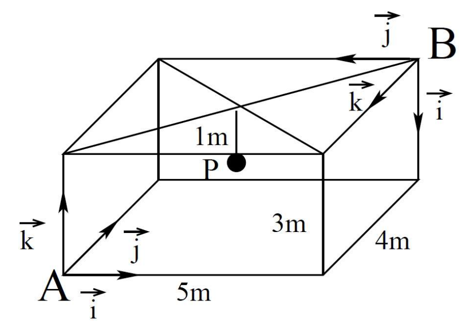
En realidad, **no hace falta el ángulo**, sino su seno y coseno

Ejemplo: Descomposición en coordenadas sin saber el ángulo



$$\begin{cases} T_x = T\sin\theta \\ T_y = T\cos\theta \end{cases} \qquad \sin\theta = \frac{a}{h} \qquad \cos\theta = \frac{b}{h}$$

$$\begin{cases} T_x = T\dfrac{a}{h} = T\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ T_y = T\dfrac{b}{h} = T\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

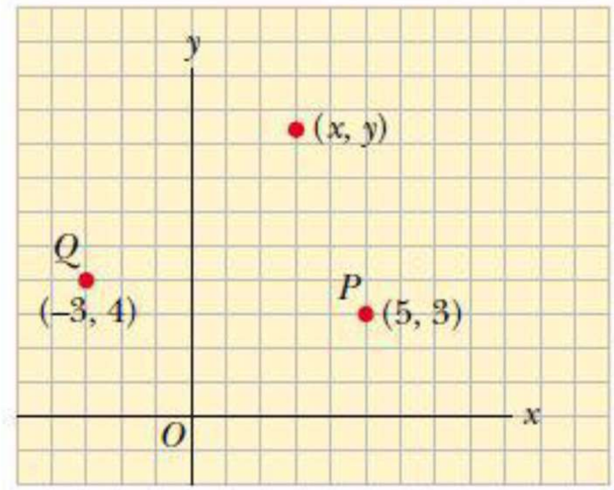


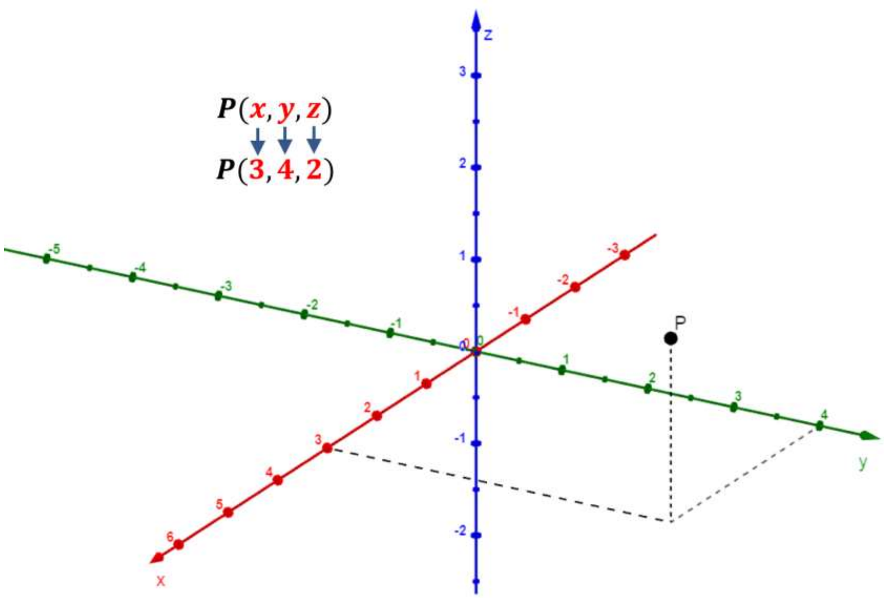
Sistema de coordenadas

Elementos de un sistema de coordenadas

- **Un punto fijo de referencia: origen (O)**
- **Un conjunto de direcciones (ejes) con unas escalas y etiquetas apropiadas**
- **Una serie de instrucciones que nos indiquen como etiquetar un punto en el espacio respecto del origen y de los ejes**

Sistema cartesiano u ortogonal



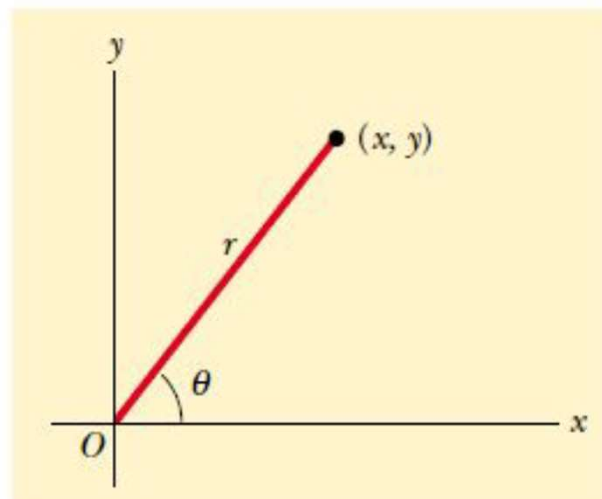


$$\sin\theta = \frac{y}{r} \rightarrow y = r\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{x}{r} \rightarrow x = r\ \cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$



Si expresamos los vectores en componentes, es fácil operar con ellos

Suma de vectores

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{A} + \vec{B} = (A_x + B_x)\hat{\imath} + (A_y + B_y)\hat{\jmath} + (A_z + B_z)\hat{k}$$

Multiplicación por un escalar

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \qquad n\vec{A} = nA_x\hat{\imath} + nA_y\hat{\jmath} + nA_z\hat{k}$$

Opuesto de un vector

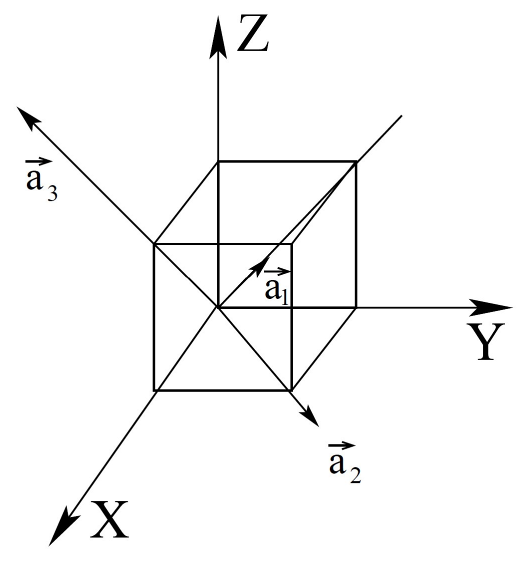
$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \qquad -\vec{A} = -A_x\hat{\imath} - A_y\hat{\jmath} - A_z\hat{k}$$

Igualdad de vectores

Ecuaciones de vectores

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{A} = \vec{B} \longrightarrow \begin{cases} A_x = B_x \\ A_y = B_y \\ A_z = B_z \end{cases}$$



Módulo de un vector

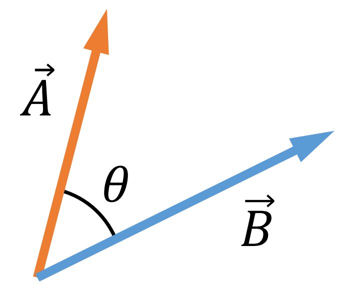
Es un escalar

$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \qquad |\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

Pero, ¿cómo **multiplicamos** dos vectores? Hay dos formas

Producto escalar Forma de "multiplicar" dos vectores, y que el resultado sea un **escalar**

Definición:



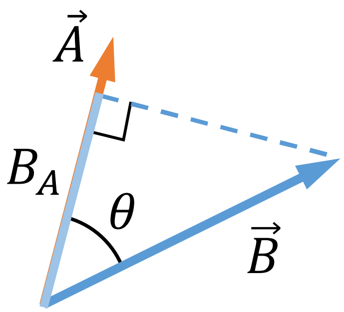
$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta$$

¿Cuánto vale si los vectores son paralelos?

¿Cuánto vale si los vectores son perpendiculares?

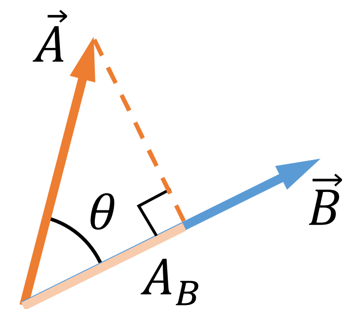
El resultado depende de cómo de alineados estén los vectores

Interpretación: Producto del módulo de un vector por **la proyección** del otro vector



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\underline{B\cos\theta} = AB_A$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \underline{A\cos\theta}\,B = A_B B$$



Propiedades:

Conmutativa $\boxed{\vec{A}\cdot\vec{B} = \vec{B}\cdot\vec{A}}$

Asociativa $\vec{A}\cdot(\vec{B}\cdot\vec{C}) \neq (\vec{A}\cdot\vec{B})\cdot\vec{C}$

Distributiva $\boxed{\vec{A}\cdot(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\vec{C}}$

Producto escalar ¿Y si expresamos los vectores **en componentes**?

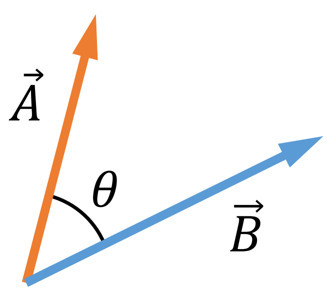
$$\vec{A} = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$$
$$\vec{B} = B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}\right)\cdot\left(B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k}\right)$$

Aplicando distributiva:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{\imath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{\imath}\cdot\hat{k} = \hat{\jmath}\cdot\hat{k} = 1 * 1 * \cos 90 = 0 \\ \hat{\imath}\cdot\hat{\imath} = \hat{\jmath}\cdot\hat{\jmath} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 * 1 * \cos 0 = 1\end{array}\right\} \longrightarrow \vec{A}\cdot\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

Cálculo de ángulo formado por dos vectores Útil!



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cos\theta \longrightarrow \cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{AB}$$

Se puede calcular fácilmente sabiendo las componentes

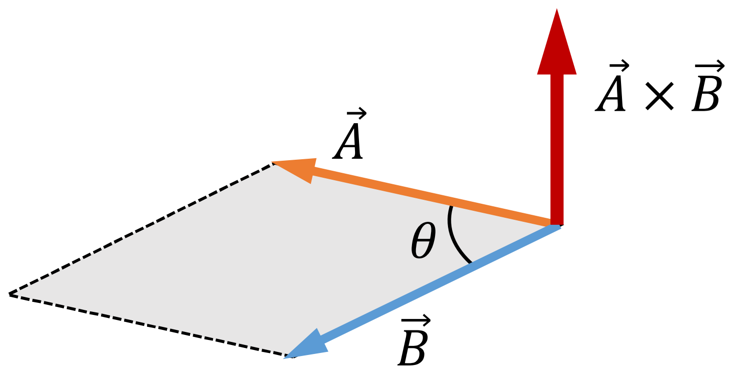
Producto vectorial Forma de “multiplicar” dos vectores, y que el resultado sea un **vector**

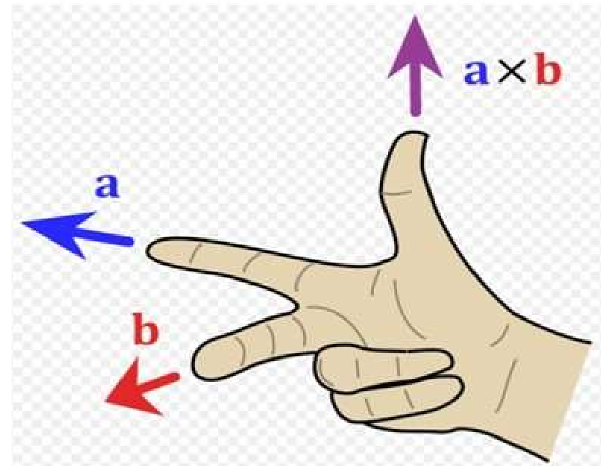
Definición: Es un vector con

Dirección: Perpendicular a $\vec{A}$ y a $\vec{B}$ Y, por lo tanto, al plano definido por $\vec{A}$ y a $\vec{B}$

Módulo: $\left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = AB|\sin\theta|$ Es el área del paralelogramo definido por $\vec{A}$ y a $\vec{B}$

Sentido: Aplicar la Regla de la Mano Derecha





Regla de la Mano Derecha (RMD)

¿Cuánto vale si los vectores son paralelos?
¿Y perpendiculares?

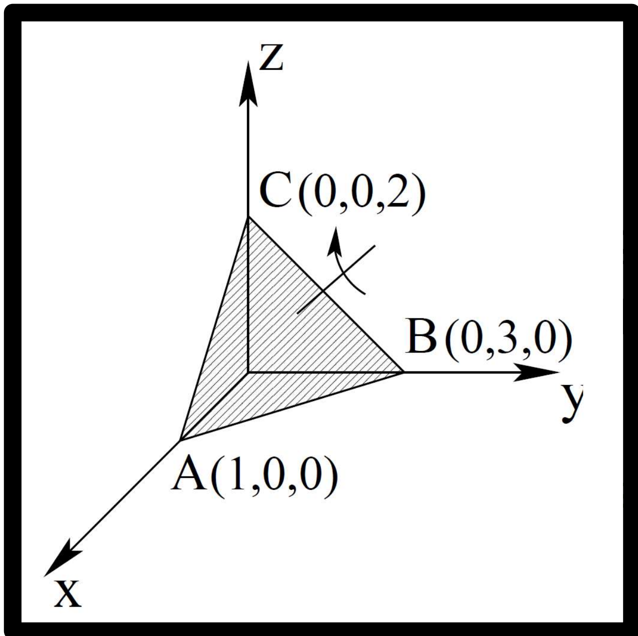
Propiedades:

Conmutativa $\vec{A}\times\vec{B} \neq \vec{B}\times\vec{A}$ ✗ $\vec{A}\times\vec{B} = -\vec{B}\times\vec{A}$ ✓

Asociativa $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) \neq (\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$ ✗

Distributiva $\boxed{\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}}$ ✓

Producto vectorial ¿Y si expresamos los vectores **en componentes**?



$$\vec{A}\times\vec{B} = \left(A_x\hat{\imath}+A_y\hat{\jmath}+A_z\hat{k}\right)\times\left(B_x\hat{\imath}+B_y\hat{\jmath}+B_z\hat{k}\right)$$

res unitarios cartesianos

$B|\sin\theta|$

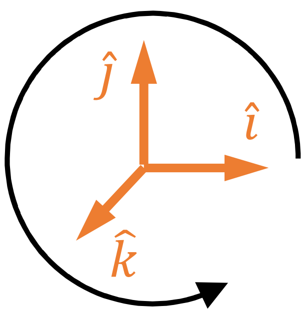
$$|\hat{\imath}\times\hat{\imath}| = |\hat{\jmath}\times\hat{\jmath}| = |\hat{k}\times\hat{k}| = 1*1*\sin 0 = 0$$

$$|\hat{\imath}\times\hat{\jmath}| = |\hat{\imath}\times\hat{k}| = |\hat{\jmath}\times\hat{k}| = 1*1*\sin 90 = 1$$

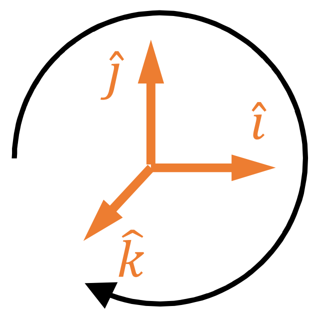
fijamos en cuando son vectores diferentes

Perpendicular a ambos → La del vector que falta

Sentido: Aplicamos Regla de Mano Derecha (RMD)



$$\hat{\imath}\times\hat{\jmath} = \hat{k}$$
$$\hat{\jmath}\times\hat{k} = \hat{\imath}$$
$$\hat{k}\times\hat{\imath} = \hat{\jmath}$$

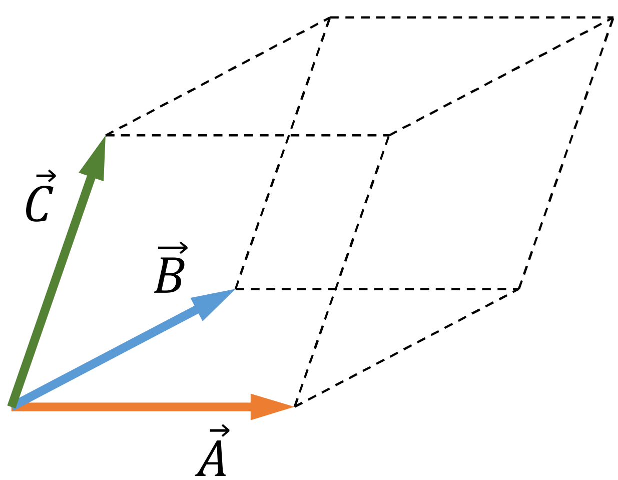


$$\hat{\imath}\times\hat{k} = -\hat{\jmath}$$
$$\hat{k}\times\hat{\jmath} = -\hat{\imath}$$
$$\hat{\jmath}\times\hat{\imath} = -\hat{k}$$

$$\vec{A}\times\vec{B} = \left(A_yB_z - A_zB_y\right)\hat{\imath} - \left(A_xB_z - A_zB_x\right)\hat{\jmath} + \left(A_xB_y - A_yB_x\right)\hat{k} = \begin{vmatrix}\hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}$$

Otras operaciones con vectores

Producto mixto de tres vectores



Resultado: volumen del paralelepípedo Escalar

$$V = \vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix}$$

Triple producto vectorial

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right) - \vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$$

Vector

Derivada de un vector

Vector

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\hat{\imath} + A_y(t)\hat{\jmath} + A_z(t)\hat{k}$$

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt} = \frac{dA_x(t)}{dt}\hat{\imath} + \frac{dA_y(t)}{dt}\hat{\jmath} + \frac{dA_z(t)}{dt}\hat{k}$$

Integral de un vector

Vector

$$\int \vec{A}(t)dt = \int A_x(t)dt\,\hat{\imath} + \int A_y(t)dt\,\hat{\jmath} + \int A_z(t)dt\,\hat{k}$$