# Bloque II: Dinámica

**Tema 2. Dinámica de la partícula I: Leyes de Newton**

2.1. Leyes de Newton
2.2. Interacciones fundamentales
2.3. Fuerzas a distancia y de contacto: rozamiento
2.4. Fuerza elástica. Movimiento Armónico Simple. Péndulo simple

**Tema 3. Dinámica de la partícula II. Leyes de conservación**

3.1. Trabajo y energía. Teorema de la energía cinética. Potencia
3.2. Fuerzas conservativas. Energía potencial
3.3. Conservación de la energía mecánica
3.4. Momento lineal. Teorema de conservación
3.5. Momento de una fuerza y momento angular. Teorema de conservación


- *Física Universitaria, Vol. 1; SEARS, F. F., ZEMANSKY, M. W., YOUNG, H. D y FREEDMAN, R. A. Capítulo 4 y 5.*
- *Física para Ciencias e Ingeniería, Vol. 1; SERWAY, R. A. y JEWET, J. W. Capítulo 5.*
- *Física para la Ciencia y la Tecnología, Vol.1; TIPLER, P. A. Y MOSCA, G. Capítulo 4 y 5.*

# ¿qué actúa sobre la semilla del diente de león durante su polinización?

## Dinámica

Parte de la Mecánica que estudia las causas que hacen que los sistemas se muevan

## Definición de fuerza

La **fuerza**, $\vec{F}$, es una **magnitud vectorial** que representa toda causa capaz de modificar el estado de movimiento o de reposo de un cuerpo o de producir una deformación en él.

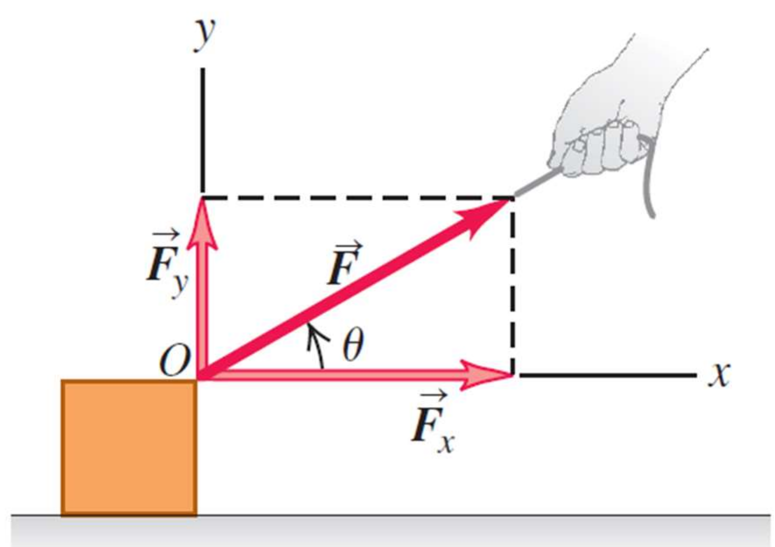
## Superposición de fuerzas

El efecto de cualquier cantidad de fuerzas que actúan sobre un mismo cuerpo es el mismo que el producido por una sola fuerza, llamada fuerza neta, igual a la suma vectorial de las fuerzas

$$\boxed{\vec{F} = \sum_{i=1} \vec{F}_i}$$

**Nota:** es más fácil trabajar por componentes

$$F_x = \sum_{i=1} F_{i,x} \qquad F_y = \sum_{i=1} F_{i,y} \qquad F_z = \sum_{i=1} F_{i,z}$$



## Leyes de Newton

Cinemática: Descripción del movimiento

Dinámica: Causas del movimiento

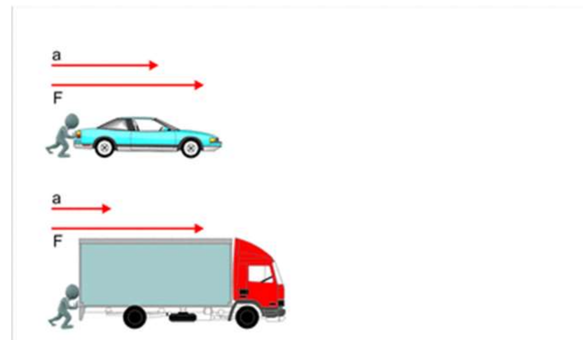
Isaac Newton (1643-1727) físico, teólogo, inventor y matemático inglés, estudió la naturaleza de la luz, la viscosidad, y el cálculo infinitesimal

## 1ª Ley de Newton: Ley de la inercia

Todo cuerpo **en reposo** sigue en reposo a menos que sobre él actúe una **fuerza externa**. Un cuerpo **en movimiento** continúa moviéndose con velocidad contante a menos que sobre él actúe una **fuerza externa**

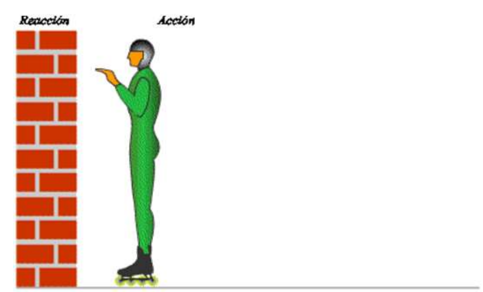
## 2ª Ley de Newton: Fuerza y masa

La aceleración de un cuerpo tiene la misma dirección y es proporcional a la fuerza externa neta que actúa sobre él. La constante de proporcionalidad recibe el nombre de masa.
La fuerza neta que actúa sobre un cuerpo es la suma de todas las fuerzas que sobre él actúan




## 3ª Ley de Newton: Ley de acción y reacción

Las fuerzas siempre actúan por pares de la misma magnitud y sentidos opuestos.
Si el cuerpo A ejerce una fuerza sobre el cuerpo B, éste ejerce una fuerza con el mismo módulo pero con sentido contrario sobre el cuerpo A



## 1ª Ley de Newton: Ley de la inercia

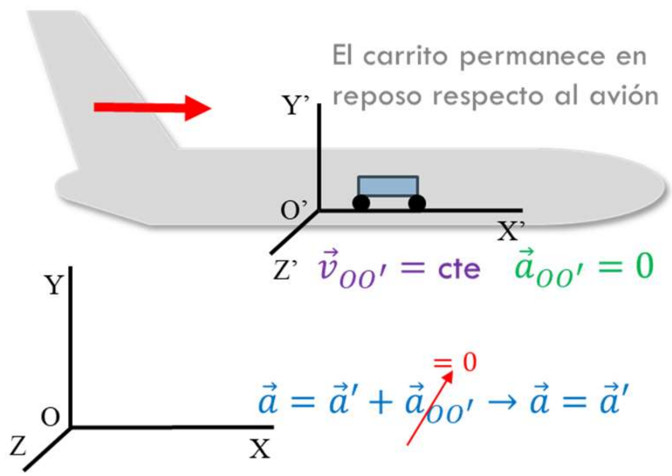
$$\sum \vec{F} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d\vec{v}}{dx} = 0$$

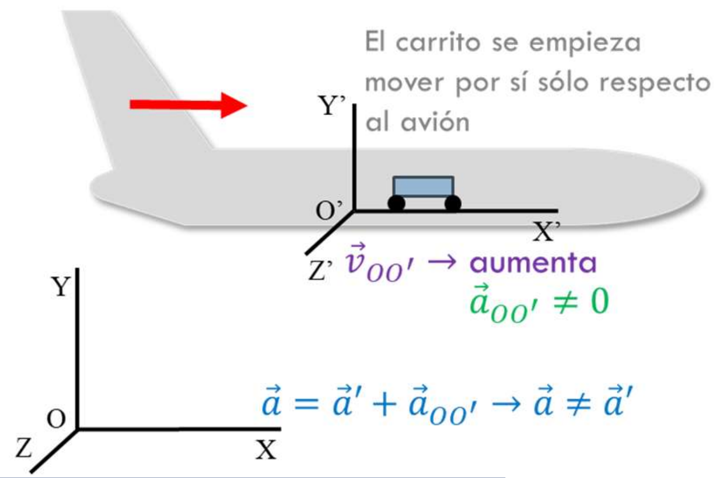
Es decir, $\vec{a} = 0$

**Sistemas de referencia inerciales** → Sistemas de referencia que se desplazan con velocidad constante (o cero) uno respecto a otro

¿Y qué pasa si observamos el movimiento de una partícula sobre la que no actúa ninguna fuerza desde un sistema de referencia no inercial? Ejemplo: Persona en ascensor

Veremos una aceleración en la partícula → **Las leyes de Newton sólo son válidas en los sistemas inerciales!!**




| | | |
|---|---|---|
| La primera ley no distingue… | Sistemas en reposo | De sistemas moviéndose a velocidad constante |

las leyes de Newton **son válidas sólo en sistemas de referencia inerciales**

## 2ª Ley de Newton: Fuerza y masa

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

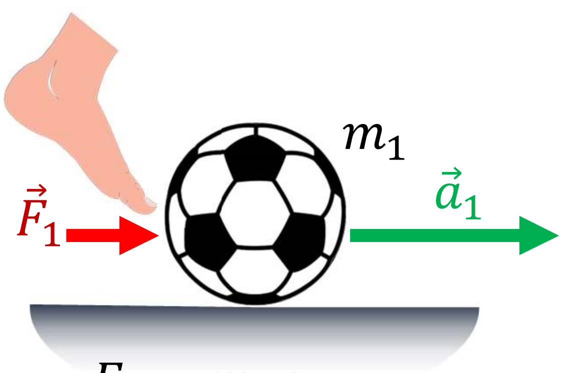
Unidades: Newton(N) (kg·m/s$^2$)

**Fuerza** ($\vec{F}$): Influencia externa sobre un cuerpo que **causa su aceleración** respecto a un sistema de referencia inercial. **VECTOR**. Misma dirección y sentido que $\vec{a}$

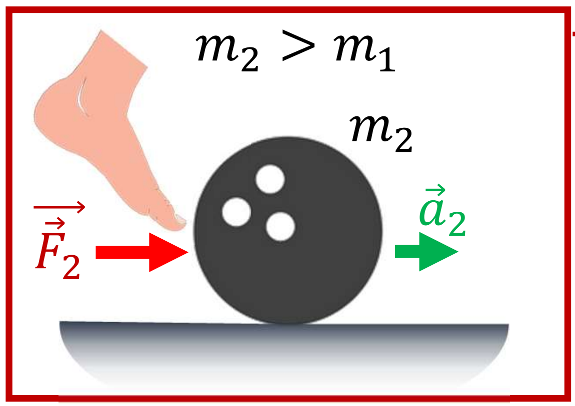
**Masa** ($m$): Una medida de la inercia (**resistencia al cambio del estado de movimiento**) de un cuerpo, *propiedad intrínseca*

A igual fuerza, ¿qué se acelera más?

¿Dónde tiene más masa una astronauta, en la Tierra o en la Luna?




$F_1 = m_1 a_1$




$F_2 = m_2 a_2$

→ Se resiste mucho más a ser acelerada.

Si $F_1 = F_2 \rightarrow \quad m_1 a_1 = m_2 a_2 \rightarrow \boxed{\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{m_2}{m_1}}$

Independiente del módulo, dirección o tipo de fuerza empleada

## 2ª Ley de Newton: Fuerza y masa

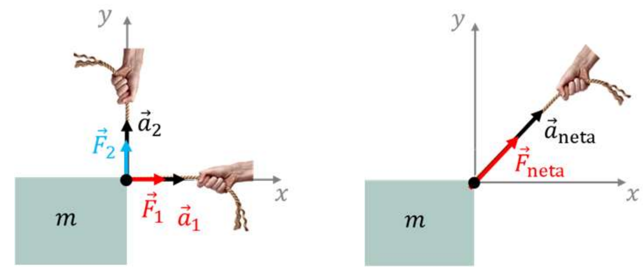
**Principio de superposición:** Fuerza neta es la **suma vectorial** de todas las fuerzas

$$\boxed{\sum \vec{F} = \vec{F}_{neta} = m\vec{a}}$$

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_{\text{neta}}$$

$$\cancel{m}\vec{a}_1 + \cancel{m}\vec{a}_2 = \cancel{m}\vec{a}_{\text{neta}}$$

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = \vec{a}_{\text{neta}}$$




**Fuerza debida a la gravedad: el peso** $\vec{g} = -9{,}81\ m/s^2\ \hat{j}$

En la superficie de la tierra, todos los cuerpos caen **con la misma aceleración**

¿Qué fuerza crea esa aceleración?

Ejercicio: calcular $\vec{g}$ a partir de ley de gravedad

$$\vec{F}_g = m\vec{g}$$

¿De qué depende $\vec{g}$?

- $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ N^2m^2/kg$
- $M_T = 5{,}972 \times 10^{24}$ kg
- $R_T = 6371$ km

ISS está a 420 km. ¿Cuánto vale allí $\vec{g}$ ? 8,63 m/s²

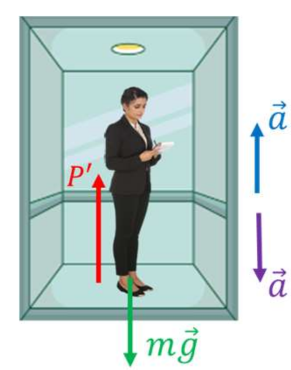
**Peso aparente:** Fuerza ejercida sobre un objeto por la superficie que lo soporta, contrarrestando su peso

Es el peso que mediría una báscula

Si no hay peso aparente: ingravidez

$P' = m(g + a) \longrightarrow$ Sube

$P' = m(g - a) \longrightarrow$ Baja

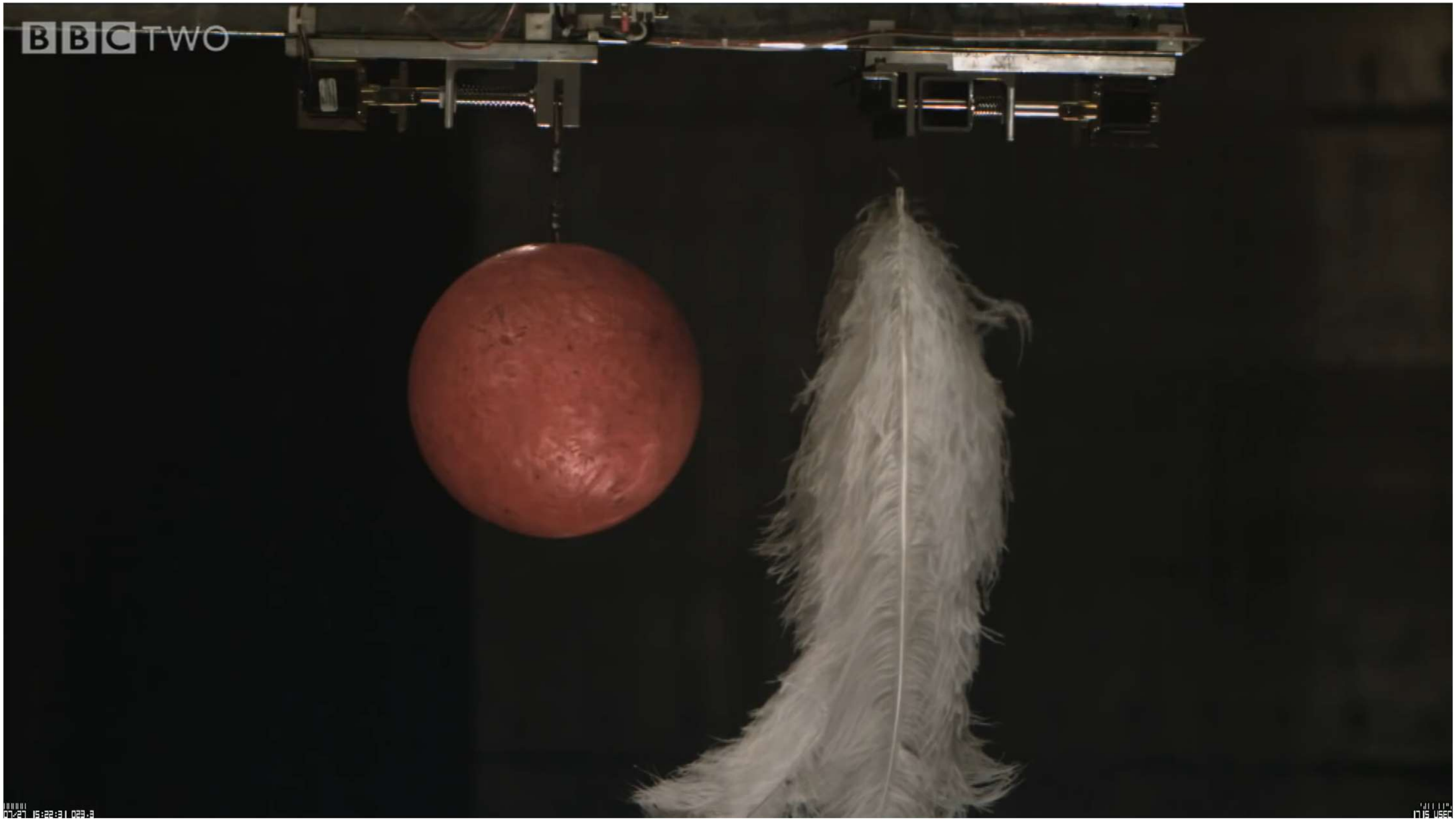



Otra unidad de fuerza (**NO S.I.**): kilopondio (kp), o kilogramo-fuerza (kgf):
Peso (en la superficie de la Tierra) de una masa de un kilogramo. 1 kp = 9,81 N

## 2ª Ley de Newton: Fuerza y masa

En la superficie de la tierra, todos los cuerpos caen **con la misma aceleración**

$$\vec{g} = -9{,}81 \ m/s^2 \ \hat{j}$$



## 2ª Ley de Newton: Fuerza y masa

En la superficie de la **Luna**, todos los cuerpos caen **con la misma aceleración**

$\vec{a} = ?$

## 3ª Ley de Newton: Acción y reacción

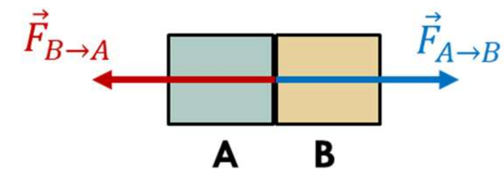
En el fondo, todas son interacciones entre dos cuerpos

Todas las fuerzas **aparecen en pares**

$$\boxed{\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}}$$

Cada una de las fuerzas actúa **sobre un cuerpo diferente**

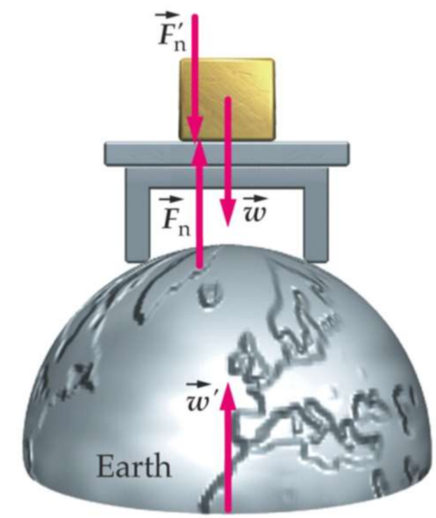
Son de igual módulo y dirección, pero de sentido contrario

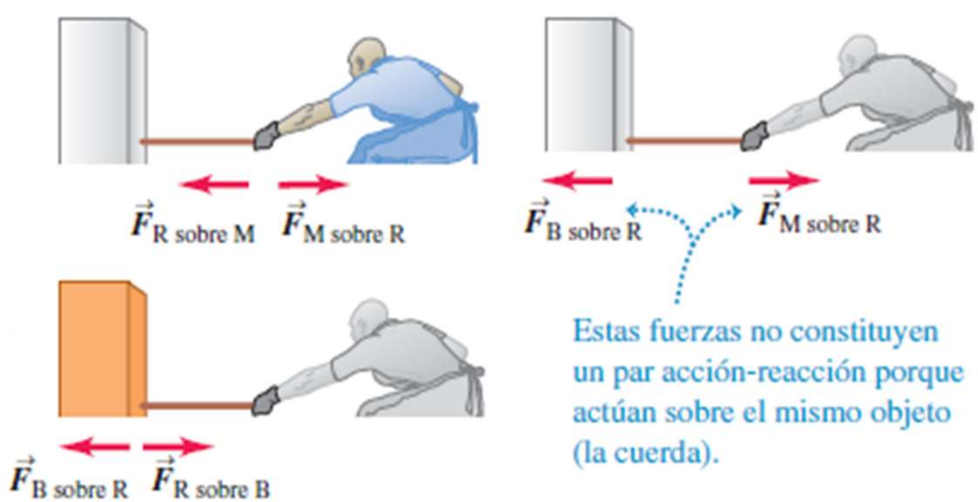


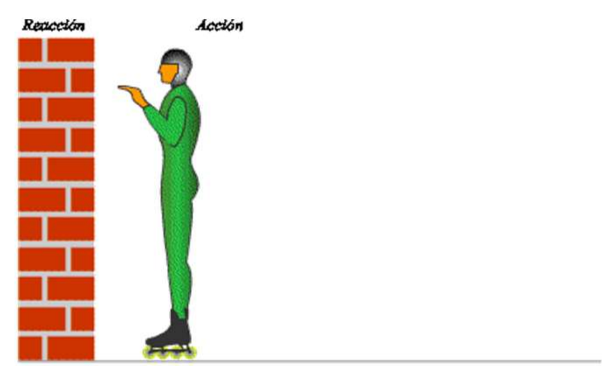

¿Qué fuerza ejerce la Tierra sobre una manzana de 100 gramos?

¿Qué fuerza ejerce una manzana de 100 gramos sobre la Tierra?

¿Qué fuerza ejerce una mesa sobre un bloque de 10 kg que está apoyado en ella?



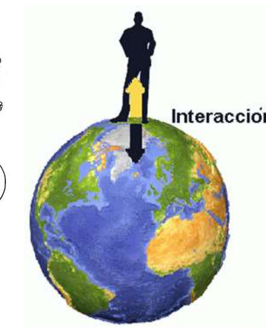
## Interacciones fundamentales

Hay **4 fuerzas fundamentales** en la naturaleza
- Gravitatoria
- Electromagnética
- Nuclear débil
- Nuclear fuerte

## Fuerza gravitatoria

$$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$G = 6{,}67 \times 10^{-11}$ N$^2$m$^2$/kg


Mucho más débil que el resto de fuerzas ($10^{40}$ veces más débil que la electromagnética)

Siempre atractiva

Predominante a GRANDES escalas

¿Por qué son los planetas y las estrellas esféricos?

## Fuerza electromagnética

Atractiva o repulsiva

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

$$F_e = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

Predominante en nuestra vida cotidiana

$k_e = 8.99 \times 10^9$ N m$^2$/C$^2$

Contacto entre 2 cuerpos

Química

Electrónica

Espectro electromagnético


Casi todas nuestras interacciones con el medio (sentidos)

Si es tan intensa, ¿por qué no es la fuerza predominante en el universo a grandes escalas?

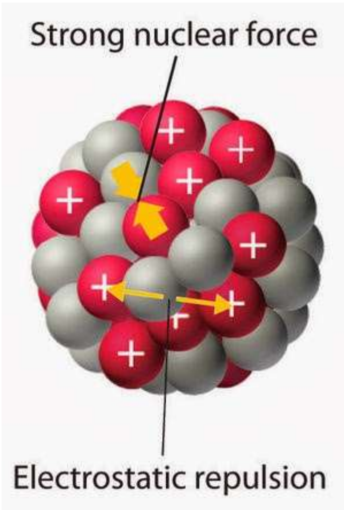
## Interacciones fundamentales

### Fuerza nuclear fuerte

¿Por qué no se repelen entre sí los protones del núcleo atómico?

Responsable de mantener unido el núcleo atómico

Predominante a MUY PEQUEÑAS escalas




Decrece muy rápido fuera del núcleo

A $10^{-15}$ m es 100 veces más fuerte que la electromagnética

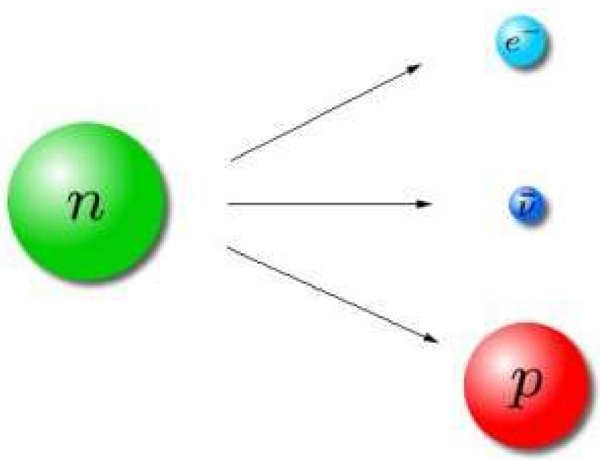
A $10^{-14}$ m es despreciable

### Fuerza nuclear débil

Responsable de las reacciones de desintegración radiactiva

Aparece también a MUY PEQUEÑAS escalas

Decrece muy rápido fuera del núcleo



## Fuerzas a distancia y de contacto

**Fuerzas a distancia** ¿Cómo sabe una masa que hay otra cerca?

Para resolver ese problema, se introduce el concepto de **campo**

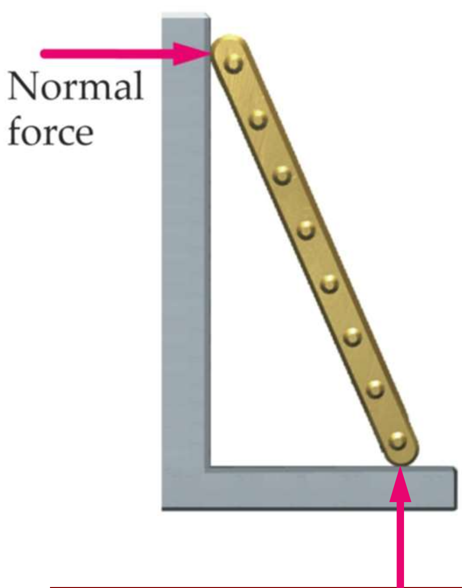
Cada masa crea un campo a su alrededor (**campo gravitatorio**). Cuando otra masa entra en una región con campo, el campo causa la fuerza

¡Aunque en realidad son fuerzas a distancia! ¿Por qué?

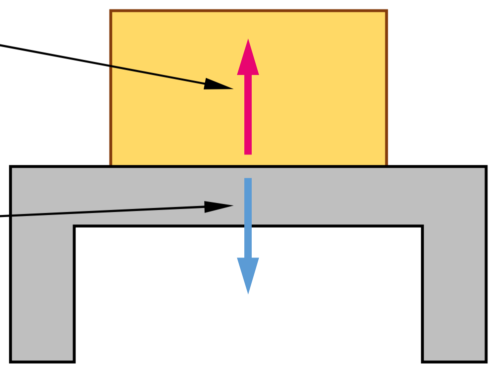
**Fuerzas de contacto** La gran mayoría de las fuerzas ordinarias.

**Sólidos: Fuerza normal** (es decir, perpendicular)

Si empujamos una superficie, la superficie devuelve el empuje



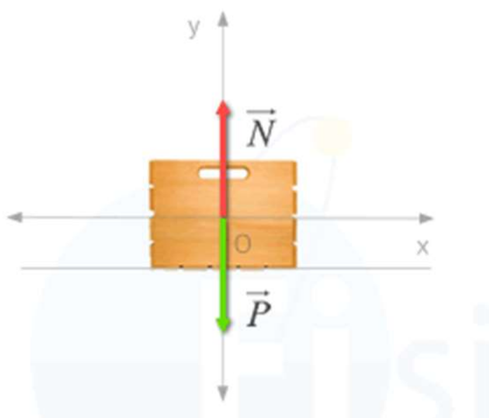

Mientras la superficie (pared, suelo, mesa,…) no se rompa, ejercerá **la fuerza necesaria** para soportar el objeto

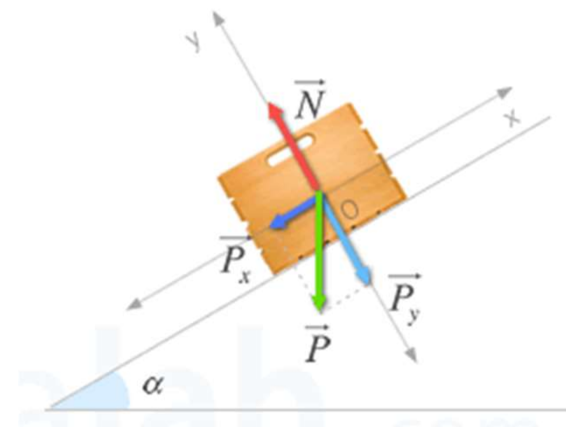


## Fuerza normal

La fuerza normal **($N$)** se define como la fuerza que ejerce una superficie sobre un cuerpo apoyado sobre ella:

- **Perpendicular** a la superficie de apoyo.
- Para calcular su valor se usa la segunda ley de Newton




**Superficie Horizontal**

La fuerza que actúa sobre la superficie coincide con todo el peso de la caja.

$$\boxed{N = P}$$

**Superficie Inclinada**

El peso se descompone en 2 fuerzas. $P_y$ empuja la superficie, y $P_x$ tira la caja pendiente abajo.

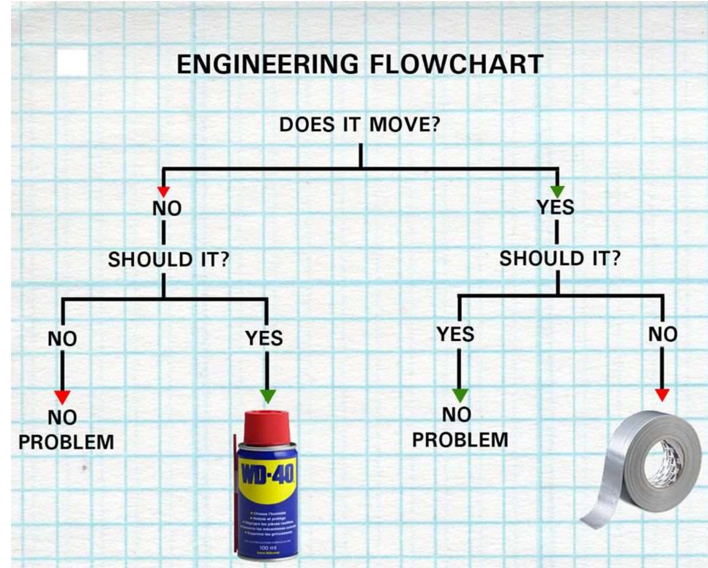
$$\boxed{N = P_y = P\cos\alpha}$$

## Sólidos: Fuerza de rozamiento

Esta fuerza es **paralela** a la superficie

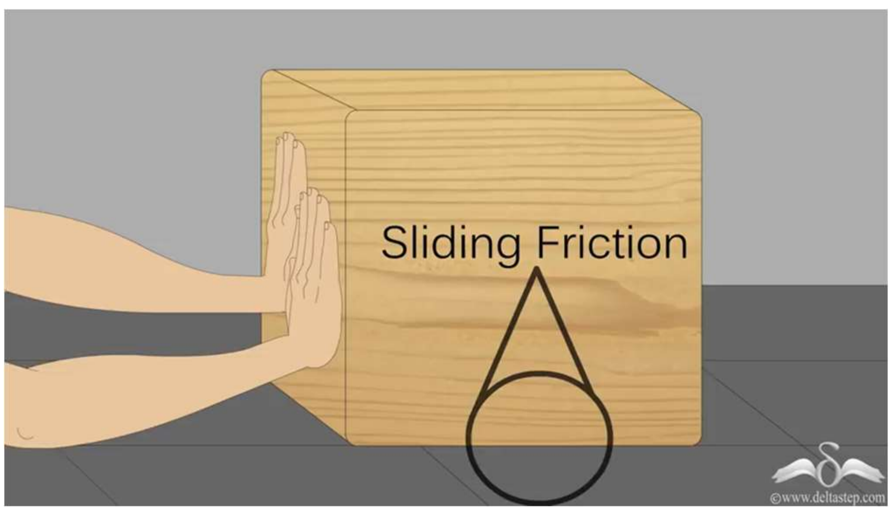
fuerza que aparece en la superficie de contacto de los cuerpos, **oponiéndose** al movimiento

- Depende del tipo de superficie en contacto.
- Es proporcional a la fuerza normal.
- No depende del área de contacto.




¿Es algo útil o algo a evitar?


$\boldsymbol{\mu}$: Constante de rozamiento




El rozamiento disminuye cuando el cuerpo ya se está moviendo

**Rozamiento estático**

$$F_{e,max} = \mu_e N$$

Si se aplica una fuerza mayor que esa, el cuerpo se mueve

**Rozamiento dinámico**

$$F_d = \mu_d N$$

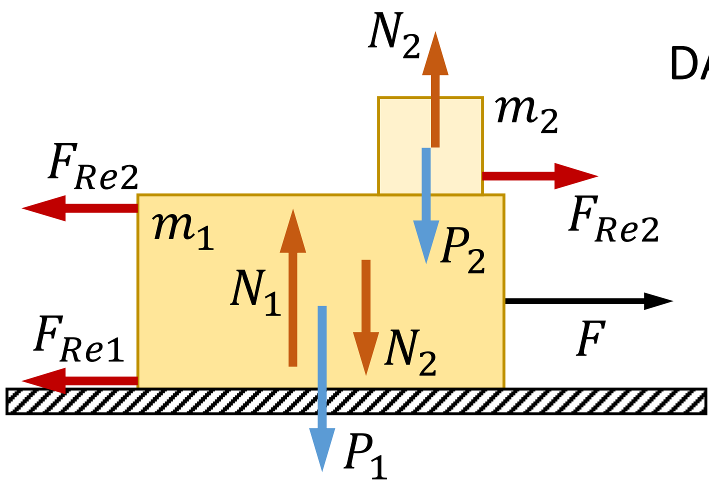
$\mu_d < \mu_e \longrightarrow$ Menos rozamiento una vez que se empieza a mover

## Sólidos: Fuerza de rozamiento

¿Cómo funcionan los frenos ABS?

APLICACIÓN 4

## EJEMPLO 1: Fuerza de rozamiento




DATOS: $m_1, m_2, F, L, \mu_e, \mu_d$ (iguales para todas superficies)

Determine los intervalos de valores de $F$ para los que:

a) **el sistema** permanece en reposo

Condición de reposo: $\sum \vec{F} = 0$

Dibujamos las fuerzas pensando en que van por parejas!

Todo el sistema:

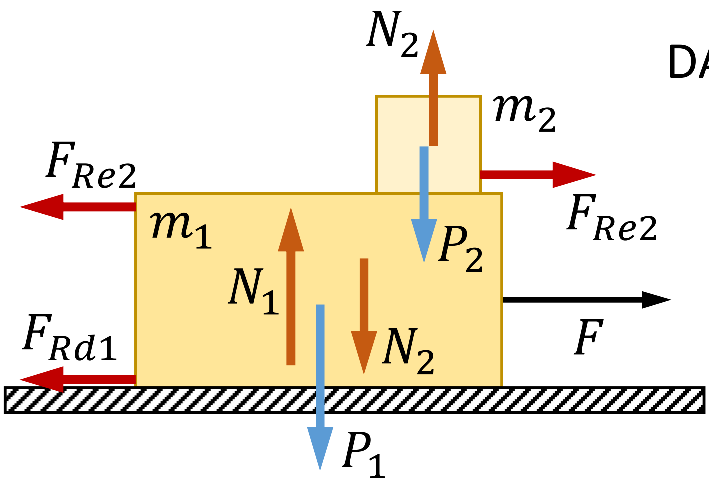
Eje Y: $\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 + N_2 - N_2 - P_1 - P_2 = 0 \rightarrow N_1 = P_1 + P_2 = (m_1 + m_2)g$

Eje X: $\sum F_x = 0 \rightarrow F + F_{Re} - F_{Re2} - F_{Re1} = 0 \rightarrow F = F_{Re1}$

Así, la fuerza máxima que se puede aplicar sin que se mueva el sistema será la fuerza de rozamiento estática máxima:

$$F_{max,caso\ a} = F_{RozEstáticoMax,1} = \mu_e N_1 = \mu_e (m_1 + m_2) g = 14{,}7\ \mathrm{N}$$

## EJEMPLO 1: Fuerza de rozamiento




DATOS: $m_1, m_2, F, L, \mu_e, \mu_d$ (iguales para todas superficies)

Determine los intervalos de valores de $F$ para los que:

b) **Las dos masas** se mueven juntas

Condición de moverse juntas: cada caja cumple

$$\sum \vec{F} = ma \quad \text{Sabiendo que} \quad a_1 = a_2 \equiv a$$

Dibujamos las fuerzas (cambia rozamiento con el suelo)

Caja 2:

Eje Y: $\sum F_y = 0 \rightarrow N_2 - P_2 = 0 \rightarrow N_2 = P_2 = m_2 g$

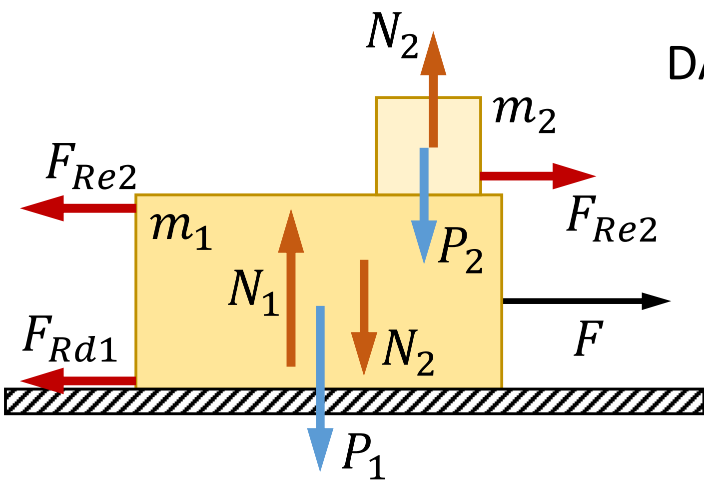
Eje X: $\sum F_x = m_2 a \rightarrow F_{Re2} = m_2 a \rightarrow a = \dfrac{F_{Re2}}{m_2}$

Así, la aceleración máxima que puede coger la caja 2 será la que sea producida por la fuerza de rozamiento estática máxima:

$$a_{max,caja2} = \frac{F_{ReMAX}}{m_2} = \frac{\mu_e N_2}{m_2} = \mu_e g$$

Y como las dos cajas deben tener la misma aceleración para que se muevan juntas, **esa es también la aceleración máxima que puede tener la caja 1**

## EJEMPLO 1: Fuerza de rozamiento




DATOS: $m_1, m_2, F, L, \mu_e, \mu_d$ (iguales para todas superficies)

Determine los intervalos de valores de $F$ para los que:

b) **Las dos masas** se mueven juntas

Condición de moverse juntas: cada caja cumple

$$\sum \vec{F} = ma \quad \text{Sabiendo que} \quad a_1 = a_2 \equiv a$$

Caja 1:

Eje Y: $\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 - N_2 - P_1 = 0 \rightarrow N_1 = P_1 + N_2 = P_1 + P_2 = (m_1 + m_2)g$

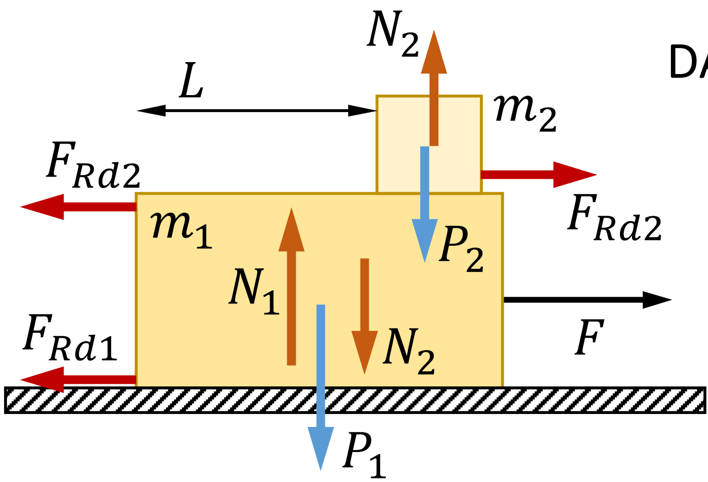
Eje X: $\sum F_x = m_1 a \rightarrow F - F_{Re2} - F_{Rd1} = m_1 a \rightarrow F = F_{Re2} + F_{Rd1} + m_1 a$

$$\rightarrow F = \mu_e N_2 + \mu_d N_1 + m_1 a = \mu_e m_2 g + \mu_d (m_1 + m_2) g + m_1 a$$

Así, la fuerza máxima que se puede aplicar sobre la caja 1 será la que produzca la aceleración máxima permitida para que las cajas sigan moviéndose juntas, $a = \mu_e g$

$$F_{max,caso\ b} = \mu_e m_2 g + \mu_d (m_1 + m_2) g + m_1 \mu_e g = (\mu_e + \mu_d)(m_1 + m_2) g = 24{,}5\ \text{N}$$

## EJEMPLO 1: Fuerza de rozamiento




DATOS: $m_1, m_2, F, L, \mu_e, \mu_d$ (iguales para todas superficies)

Determine los intervalos de valores de $F$ para los que:

c) Cada masa se mueve por separado

Condición de moverse por separado: cada caja cumple

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} \qquad \text{Sabiendo que} \qquad a_1 \neq a_2$$

Caso a (no se mueven): $0 \leq F \leq F_{max,caso\ a}$

Caso b (se mueven juntas): $F_{max,caso\ a} < F \leq F_{max,caso\ b}$

Caso c (se mueven por separado): $F > F_{max,caso\ b}$

¿Cuál tiene una aceleración mayor?

$a_1 > a_2$

d) Para una fuerza tal que se mueven por separado (caso c), ¿cuánto tarda en caer la caja 2?

Planteamiento: ¿cuánto tiempo tarda la caja 2 en recorrer una distancia $L$ sobre la caja 1?

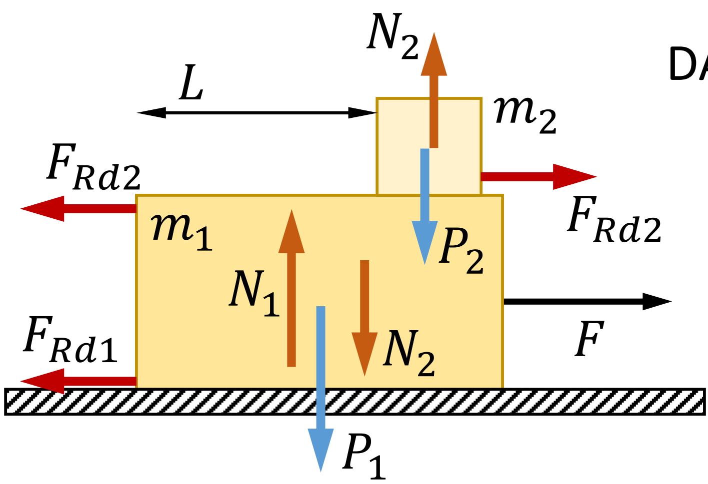
Relativa a la caja 1

$$\left.\begin{array}{l}\text{Caja 1: } a_1 = cte \\ \text{Caja 2: } a_2 = cte\end{array}\right\} \quad a_{2/1} = a_2 - a_1 = cte \longrightarrow \text{MRUA}$$

$$x_{2/1}(t) = x_{2/1,0} + v_{2/1,0}t + \frac{1}{2}a_{2/1}t^2 \longrightarrow -L = 0 + 0 + \frac{1}{2}a_{2/1}t^2 \longrightarrow t = \sqrt{\frac{-2L}{a_{2/1}}}$$

Ahora calculamos $a_1$ y $a_2$ para obtener $a_{2/1}$ :

## EJEMPLO 1: Fuerza de rozamiento




DATOS: $m_1, m_2, F, L, \mu_e, \mu_d$ (iguales para todas superficies)

Calculamos $a_1$ y $a_2$:

Caja 2:

Eje Y: $\sum F_y = 0 \rightarrow N_2 - P_2 = 0 \rightarrow N_2 = P_2 = m_2 g$

Eje X: $\sum F_x = m_2 a_2 \rightarrow F_{Rd2} = m_2 a_2 \rightarrow a_2 = \dfrac{F_{Rd2}}{m_2}$

$$\rightarrow a_2 = \frac{\mu_d N_2}{m_2} = \mu_d g = 1{,}96 \text{ m/s}^2$$

Caja 1:

Eje Y: $\sum F_y = 0 \rightarrow N_1 - N_2 - P_1 = 0 \rightarrow N_1 = P_1 + N_2 = P_1 + P_2 = (m_1 + m_2)g$

Eje X: $\sum F_x = m_1 a_1 \rightarrow F - F_{Rd2} - F_{Rd} = m_1 a_1 \rightarrow F = F_{Rd2} + F_{Rd1} + m_1 a_1$

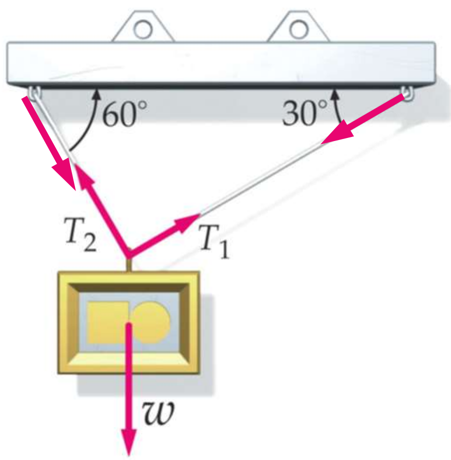
$$\rightarrow F = \mu_d N_2 + \mu_d N_1 + m_1 a_1 = \mu_d m_2 g + \mu_d (m_1 + m_2) g + m_1 a_1$$

$$\rightarrow a_1 = \frac{1}{m_1}(F - \mu_d (m_1 + 2m_2) g) = 4{,}56 \text{ m/s}^2$$

Así que:

$$t = \sqrt{\frac{-2L}{a_{2/1}}} = \sqrt{\frac{2L}{a_1 - a_2}} = 0{,}877\text{s}$$

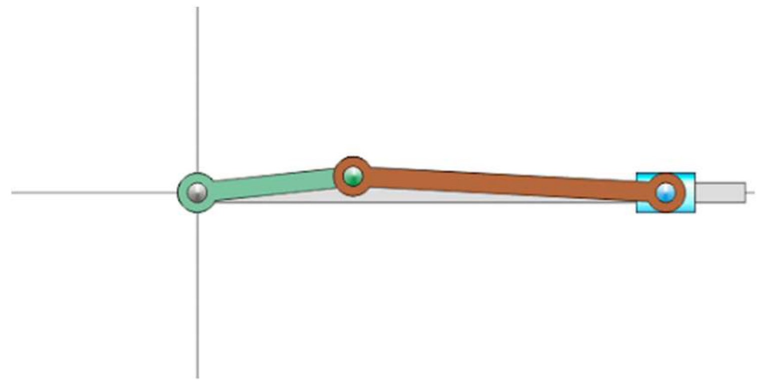
**Cuerdas: Tensión** Las cuerdas no sirven para empujar. Sólo para tirar




Las cuerdas transmiten la fuerza con que se tira de ellas a su otro extremo.

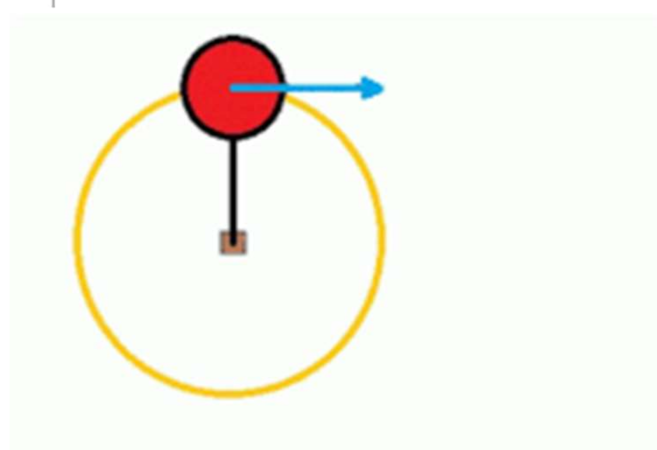
En los extremos de una cuerda tensa actúan fuerzas de igual módulo y en la dirección de la cuerda, llamadas **tensión** *(son fuerzas de **atracción**)*

**Ligaduras** Elementos que limitan el movimiento



Ej: Tren sobre las vías

**Fuerza centrípeta** Hacia el centro de la curva



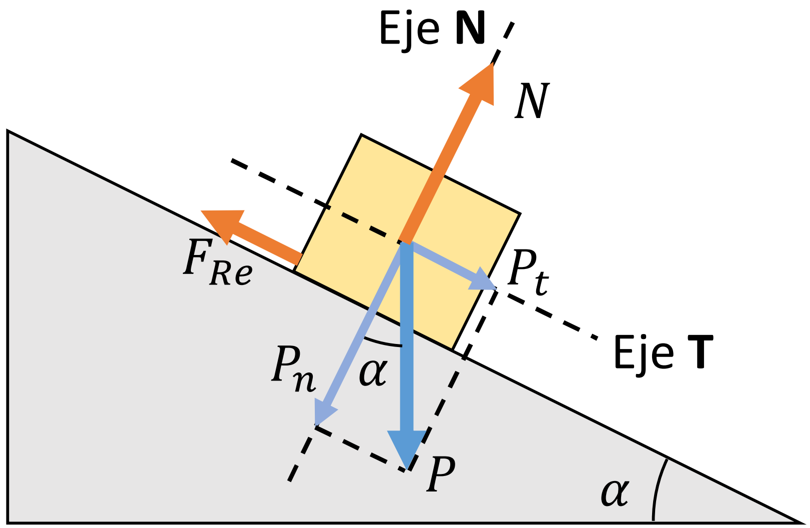
Es la fuerza que produce la aceleración normal

La componente de la fuerza neta en la dirección perpendicular a la trayectoria

$$F_c = ma_c = m\frac{v^2}{R}$$

## EJEMPLO 2: Fuerza centrípeta

Ejercicio de examen




DATOS: $v$, $\mu_e$

Hay que diseñar una curva de carretera de manera que cuando hay hielo, el coche en reposo no patine hacia el interior y cuando va a 60 km/h no patine hacia el exterior. Sabiendo que el coeficiente de rozamiento entre el hielo y el caucho del neumático es 0,08, determinar el radio de curvatura mínimo y el ángulo del peralte.

a) Cuando está en reposo, no patine hacia el interior

Dibujamos las fuerzas

$$\sum \vec{F} = 0$$

Mejor usar ejes tangencial y normal (para descomponer solo un vector, no dos)

Eje N: $\sum F_n = 0 \rightarrow N - P_n = 0 \rightarrow N = P_n = mg\cos\alpha$

Eje T: $\sum F_t = 0 \rightarrow P_t - F_{Re} = 0 \rightarrow$

$F_{Re}$ tiene un valor máximo. Si $P_t$ supera ese valor, el coche resbala. Eso pasará si $\alpha$ pasa de un valor máximo.

$$F_{Re,max} = \mu_e N = P_{t,max} \rightarrow \mu_e mg\cos\alpha_{max} = mg\sin\alpha_{max} \rightarrow \mu_e = \tan\alpha_{max}$$

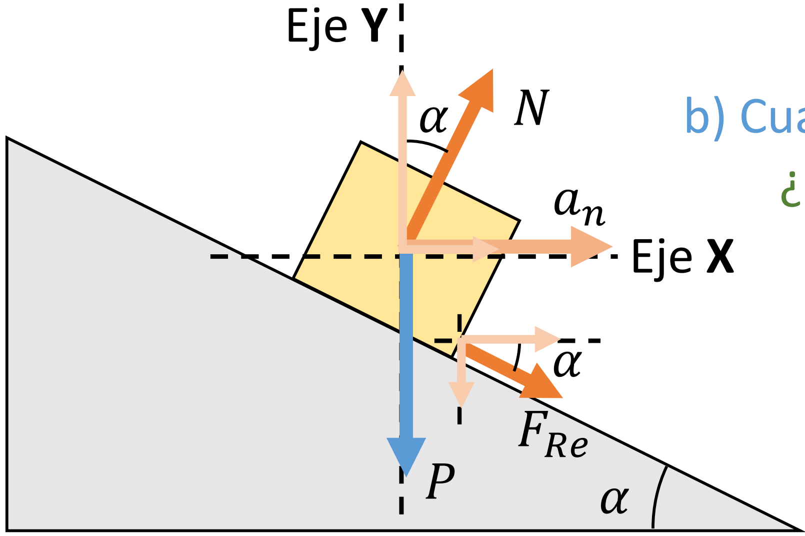
$$\rightarrow \alpha_{max} = \tan^{-1}\mu_e = 4{,}57°$$

Ya tenemos el ángulo del peralte

## EJEMPLO 2: Fuerza centrípeta

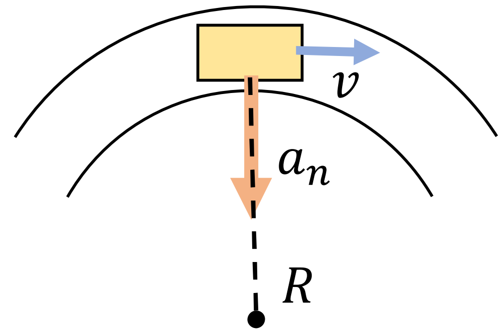
Ejercicio de examen

DATOS: $v_{max}$, $\mu_e$




b) Cuando la velocidad es $v$, que no patine hacia el exterior

¿qué aceleración tiene el coche cuando toma la curva?




Hacia el centro de la curva

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

La causa de esa aceleración debe ser la suma de las fuerzas: $\sum \vec{F} = m\overrightarrow{a_n}$

Mejor usar ejes X e Y (para que en un eje haya aceleración y en el otro no)

Eje Y: $\sum F_y = 0 \rightarrow N_y - F_{Rey} - P = 0 \rightarrow N\cos\alpha - F_{Re}\sin\alpha - P = 0 \rightarrow$

Como siempre, usamos el valor máximo de $F_{Re}$ ($\mu_e N$) para calcular la $a_n$ máxima:

$$\rightarrow N\cos\alpha - \mu_e N\sin\alpha - P = 0$$

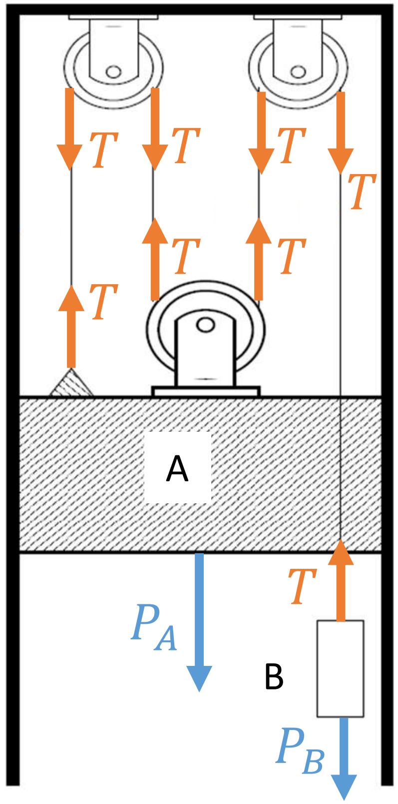
$$\rightarrow N = \frac{P}{\cos\alpha - \mu_e\sin\alpha}$$

Eje X: $\sum F_x = ma_n \rightarrow N_x + F_{Rex} = ma_n \rightarrow N\sin\alpha + F_{Re}\cos\alpha = ma_n \rightarrow$

$$\rightarrow N\sin\alpha + \mu_e N\cos\alpha = ma_n \rightarrow a_n = \frac{N}{m}(\sin\alpha + \mu_e\cos\alpha) \rightarrow R = \frac{v^2}{g}\frac{\cos\alpha - \mu_e\sin\alpha}{\sin\alpha + \mu_e\cos\alpha}$$

$$\rightarrow R = 175{,}9\ \mathrm{m}$$

## EJEMPLO 3: Tensión en cuerdas y poleas




DATOS: $m_A, m_B; v_0 = 0$ a) $v_A$ cuando $t = 5$ s?

$\sum \vec{F} = m\vec{a} \longrightarrow$ Si $\sum \vec{F} = cte \longrightarrow a = cte \longrightarrow$ MRUA: $a_A$?

Dibujamos las fuerzas (por parejas, como siempre)

Cuerpo A:

$\sum F = m_A a_A \longrightarrow 3T - P_A = m_A a_A$

Cuerpo B:

$\sum F = m_B a_B \longrightarrow T - P_B = m_B a_B$

$\longrightarrow 3P_B + 3m_B a_B - P_A = m_A a_A$

$\longrightarrow T = P_B + m_B a_B$

¿Relación entre movimiento de A y de B? $v_B = -3v_A \xrightarrow{\text{Derivando}} a_B = -3a_A$

movimiento relativo

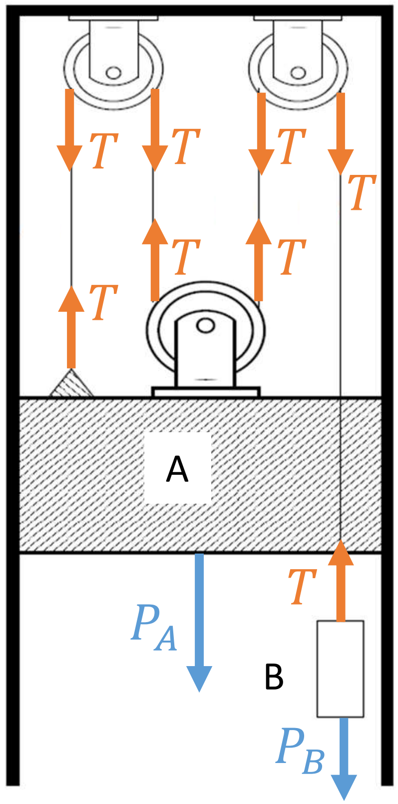
En general, habría que relacionar el movimiento de A con el de B, como se estudió en el Tema 2

$$3P_B + 3m_B a_B - P_A = m_A a_A \longrightarrow 3P_B - 9m_B a_A - P_A = m_A a_A \longrightarrow a_A = \frac{3P_B - P_A}{m_A + 9m_B} \longrightarrow$$

$$a_A = \frac{3m_B - m_A}{m_A + 9m_B} g$$

Así, $v_A(t) = v_{A0} + a_A t \longrightarrow v_A(t) = \dfrac{3m_B - m_A}{m_A + 9m_B} gt = 2{,}13 \text{ m/s}$

## EJEMPLO 3: Tensión en cuerdas y poleas




DATOS: $m_A, m_B; v_0 = 0$

b) $y_A$ cuando $v_A = 2{,}5\ \mathrm{m/s}$?

$y_A(t) = y_{A0} + v_{A0}t + \frac{1}{2}a_A t^2 \rightarrow y_A = \frac{1}{2}a_A t^2$ $\quad t$?

¿En qué momento será $v_A = 2{,}5\ \mathrm{m/s}$ ?

$v_A(t) = v_{A0} + a_A t \rightarrow v_A = a_A t \rightarrow t = \frac{v_A}{a_A}$

$y_A = \frac{v_A^2}{2a_A} = 7{,}33\ \mathrm{m}$

c) La masa de B cambia. ¿$P_B$ cuando $a_A = 1\ \mathrm{m/s^2}$?

De las ecuaciones de Newton y el estudio del movimiento, en el apartado a) obtuvimos

$$a_A = \frac{3m_B - m_A}{m_A + 9m_B}g$$

Ahora conocemos $a_A$ , y necesitamos saber $m_B$: $a_A = \frac{3m_B - m_A}{m_A + 9m_B}g$

$$m_A a_A + 9m_B a_A = 3m_B g - m_A g \rightarrow m_A a_A + m_A g = m_B(3g - 9a_A) \rightarrow$$

$$\rightarrow m_B = \frac{a_A + g}{3g - 9a_A}m_A \rightarrow P_B = m_B g = \frac{a_A + g}{3g - 9a_A}m_A g = 259{,}5\ \mathrm{N}$$

d) Igual que el c), pero ahora $a_A = 6\ \mathrm{m/s^2}$ ¿Es posible?

$$m_B = \frac{a_A + g}{3g - 9a_A}m_A < 0$$

No es posible!

## Fuerza elástica

**Muelles** Cuando un muelle se comprime o se alarga una pequeña distancia $\Delta x$, la fuerza que ejerce el muelle es:

**Ley de Hooke:** $F_x = -k\Delta x$

$\boldsymbol{\Delta x}$**:** Desplazamiento del extremo del resorte.

La fuerza se **opone** al desplazamiento!

Constante elástica del muelle

La fuerza elástica es la fuerza que ejerce un resorte o muelle sobre un objeto cuando es estirado o cuando es comprimido.

- Su dirección corresponde a la dirección del resorte extendido.
- Siempre apunta en el sentido contrario en el que se ha desplazado el extremo del resorte.
- Podemos calcularla usando la ley de Hookes.

$$\boxed{\vec{F}_e = -k\Delta\vec{l}}$$

## Movimiento Armónico Simple (MAS)

Movimiento periódico oscilante en torno a una posición de equilibrio producido por una fuerza de restitución proporcional al desplazamiento→fuerza elástica

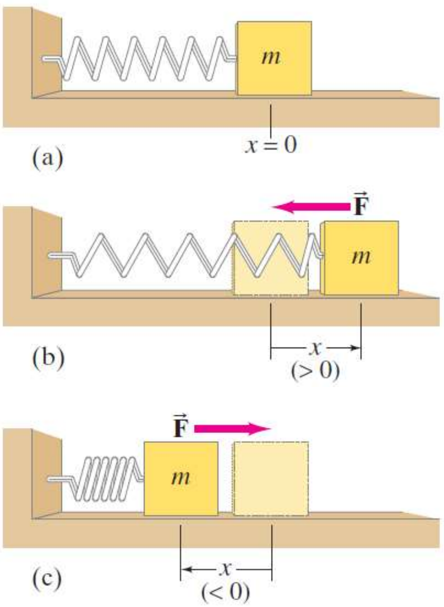
Aparece al perturbar un sistema que está en equilibrio **estable**

¿Y si es inestable?

**Condición**: Que aparezcan fuerzas dirigidas a recuperar la posición de equilibrio.

### Partícula unida a un muelle

$$F_x = -kx$$




Posición de equilibrio: $x = 0, F_x = 0$

(Llamamos $x$ a $\Delta x$)

Desplazamiento a la derecha: $x > 0$, $F_x < 0$.

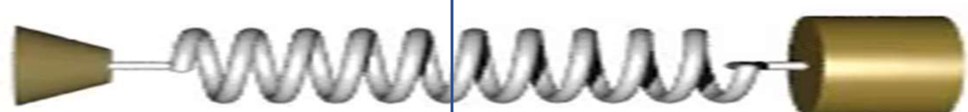
Desplazamiento a la izquierda: $x < 0$, $F_x > 0$.

2ª ley de Newton: $F_x = ma \longrightarrow -kx = ma$

$$\longrightarrow a = -\frac{k}{m}x$$

La aceleración es proporcional a la posición, con signo cambiado

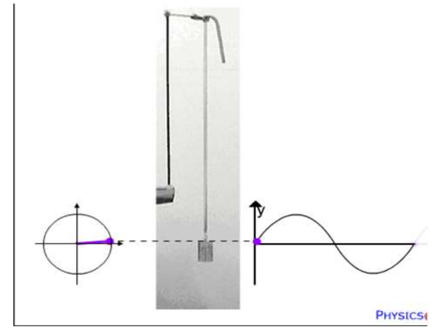
| | | | |
|---|---|---|---|
| $a$ | $max$ | $0$ | $-max$ |
| $x$ | $-max$ | $0$ | $max$ |
| $v$ | $0$ | $max$ | $0$ |



## Movimiento Armónico Simple (MAS)

¿Qué función matemática cumple esto?

$$\left.\begin{aligned} F_x &= -kx \\ F_x &= ma \end{aligned}\right\} \quad a = -\frac{k}{m}x \longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$



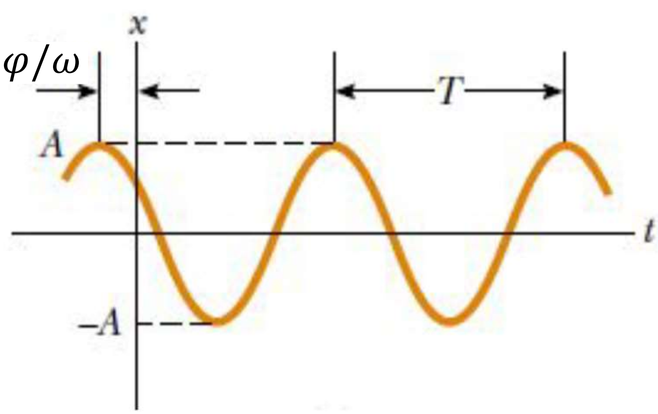

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= A\cos(\omega t+\varphi) \\ v(t) &= -\omega A\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi) \\ a(t) &= -\omega^2 A\cos(\omega t+\varphi) = -\omega^2 x(t) \end{aligned}\right\}$$

**Amplitud** $(A)$: Desplazamiento máximo

**Fase inicial** $(\varphi)$: Ángulo inicial. Argumento del coseno cuando $t = 0$

**Frecuencia angular** $(\omega)$: Ángulo recorrido por unidad de tiempo

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$




**Periodo** $(T)$: Tiempo en realizar una oscilación completa

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

IMPORTANTE: NO depende de la amplitud A

**Frecuencia** $(f)$: Número de oscilaciones por unidad de tiempo

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

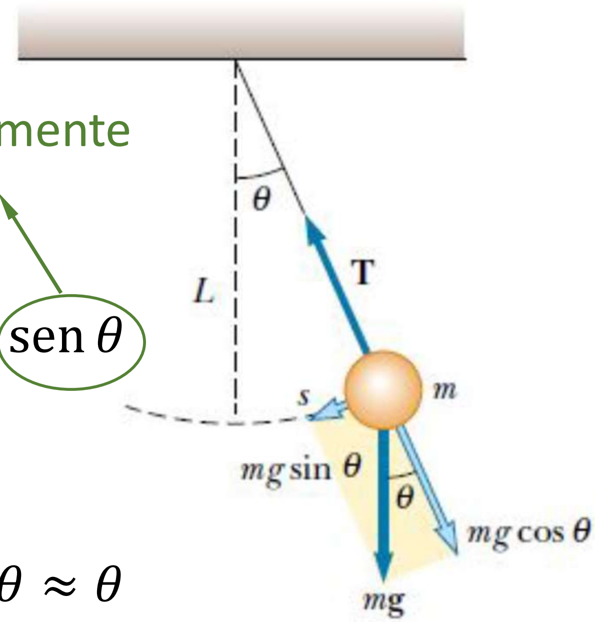
**Valores máximos de $v$ y $a$:**

$$v_{max} = \omega A$$

$$a_{max} = \omega^2 A$$

**APLICACIÓN 5**

## El péndulo simple




$$\left.\begin{array}{l} F_t = -mg\,\mathrm{sen}\,\theta \\ F_t = ma_t \end{array}\right\} \longrightarrow a_t = -g\,\mathrm{sen}\,\theta$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} \xrightarrow{s = L\theta} a_t = L\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\,\mathrm{sen}\,\theta$$

No exactamente un MAS

**PERO**: Si el desplazamiento es pequeño ($\theta < 10°$) $\longrightarrow$ $\mathrm{sen}\,\theta \approx \theta$

Aproximación para ángulos pequeños

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\theta \longrightarrow$$ Movimiento Armónico Simple en $\theta$

$$\theta(t) = \theta_{max}\cos(\omega t + \varphi)$$

**APLICACIÓN 6**

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

IMPORTANTE: NO depende de $\theta_{max}$

IMPORTANTE: NO depende de la masa del péndulo