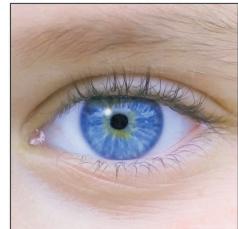


# Apuntes de Apoyo de la asignatura

## Física II



Grado en Ingeniería Química Industrial  
Escuela Politécnica Superior  
Universidad de Sevilla

Profesor Jesús Cuevas Maraver



# Índice general

<b>1. Electrostática en el vacío</b>	<b>1</b>
1.1. Introducción . . . . .	1
1.2. Carga eléctrica . . . . .	2
1.2.1. Propiedades de la carga eléctrica . . . . .	2
1.2.2. Cuantización de la carga . . . . .	3
1.2.3. Conservación de la carga . . . . .	3
1.2.4. Aislantes y conductores . . . . .	4
1.3. Ley de Coulomb. Fuerza y campo . . . . .	5
1.3.1. Fuerza electrostática . . . . .	5
1.3.2. El campo electrostático . . . . .	8
1.4. Potencial eléctrico . . . . .	12
1.4.1. Diferencia de potencial . . . . .	12
1.4.2. Potencial debido a un sistema de cargas puntuales . . .	14
1.4.3. Energía potencial electrostática de un sistema de car- gas puntuales . . . . .	15
1.4.4. Determinación del campo eléctrico a partir del potencial	16
1.4.5. Superficies equipotenciales . . . . .	17
1.5. Distribuciones continuas de carga . . . . .	18
1.6. Teorema de Gauss . . . . .	21
1.6.1. Flujo eléctrico . . . . .	21
1.6.2. Enunciado cuantitativo del teorema de Gauss . . . .	23
1.6.3. Cálculo del campo eléctrico mediante el teorema de Gauss . . . . .	24
<b>2. Electrostática en la materia</b>	<b>29</b>
2.1. Introducción . . . . .	29
2.2. Conductores en equilibrio electrostático . . . . .	29
2.3. Condensadores . . . . .	33
2.3.1. Capacidad . . . . .	33

2.3.2. Condensador plano . . . . .	35
2.3.3. Asociaciones de condensadores . . . . .	35
2.3.4. Energía almacenada en un condensador . . . . .	39
2.4. Dieléctricos . . . . .	40
2.4.1. Constante dieléctrica . . . . .	40
2.4.2. Estructura molecular de un dieléctrico . . . . .	42
2.4.3. El teorema del Gauss en los dieléctricos . . . . .	46
<b>3. Corriente eléctrica</b>	<b>49</b>
3.1. Introducción . . . . .	49
3.2. Corriente y movimiento de cargas . . . . .	50
3.3. Ley de Ohm. Conductividad y resistencia . . . . .	52
3.4. Potencia en los circuitos eléctricos . . . . .	53
3.5. Fuerza electromotriz y baterías . . . . .	54
3.6. Combinaciones de resistencias . . . . .	57
3.6.1. Resistencias en serie . . . . .	57
3.6.2. Resistencias en paralelo . . . . .	58
3.7. Reglas de Kirchhoff . . . . .	59
3.7.1. Circuitos de una sola malla . . . . .	60
3.7.2. Circuitos de múltiples mallas . . . . .	60
<b>4. Magnetostática en el vacío</b>	<b>63</b>
4.1. Introducción . . . . .	63
4.2. Fuerza creada por un campo magnético . . . . .	64
4.3. Movimiento de una carga puntual en un campo magnético . .	67
4.4. Momento sobre una espira . . . . .	70
4.5. Campo magnético creado por corrientes . . . . .	72
4.5.1. Ley de Biot y Savart . . . . .	72
4.5.2. Fuerza magnética entre dos conductores paralelos . .	75
4.6. Flujo magnético. Teorema de Gauss para el magnetismo . .	76
4.7. Ley de Ampère . . . . .	77
<b>5. Magnetostática en la materia</b>	<b>83</b>
5.1. Introducción . . . . .	83
5.2. Imanación y susceptibilidad magnética . . . . .	84
5.3. Teoría microscópica del magnetismo . . . . .	86
5.4. Paramagnetismo . . . . .	88
5.5. Ferromagnetismo . . . . .	88

5.6. Diamagnetismo . . . . .	91
<b>6. Inducción magnética</b>	<b>93</b>
6.1. Introducción . . . . .	93
6.2. Fuerza electromotriz inducida. Ley de Faraday . . . . .	94
6.2.1. Ley de Faraday . . . . .	94
6.2.2. Ley de Lenz . . . . .	95
6.2.3. Fuerza electromotriz de movimiento . . . . .	97
6.3. Corrientes de Foucault . . . . .	98
6.4. Autoinducción e inducción mutua . . . . .	101
6.4.1. Autoinducción . . . . .	101
6.4.2. Inducción mutua . . . . .	102
6.4.3. Energía magnética . . . . .	103
6.5. Corriente de desplazamiento y Ley de Ampère generalizada .	105
6.6. Ecuaciones de Maxwell . . . . .	106
<b>7. Ondas</b>	<b>109</b>
7.1. Introducción . . . . .	109
7.2. Movimiento ondulatorio simple . . . . .	110
7.2.1. Ondas transversales y longitudinales . . . . .	110
7.2.2. Pulso de onda . . . . .	110
7.2.3. Velocidad de las ondas . . . . .	111
7.2.4. Ondas en tres dimensiones . . . . .	112
7.2.5. Propagación de las ondas. Principio de Huygens . . .	113
7.3. Ondas armónicas en una cuerda . . . . .	114
7.4. Ondas electromagnéticas . . . . .	116
7.4.1. El espectro electromagnético . . . . .	118
7.5. Energía de las ondas armónicas . . . . .	120
7.5.1. Transferencia de energía a una cuerda mediante ondas	120
7.5.2. Intensidad de una onda . . . . .	121
7.5.3. Energía de una onda electromagnética . . . . .	122
7.6. Interferencia de ondas armónicas . . . . .	123
7.6.1. Principio de superposición . . . . .	123
7.6.2. Interferencia de ondas armónicas con la misma frecuencia y amplitud . . . . .	123
7.6.3. Interferencia causada por la diferencia de caminos . .	124
7.6.4. El experimento de la doble rendija de Young . . . . .	127
7.7. Ondas estacionarias en cuerdas . . . . .	129

7.8. Difracción . . . . .	131
7.8.1. Diagrama de difracción de una sola rendija . . . . .	132
7.8.2. Resolución . . . . .	135
<b>8. Óptica</b>	<b>137</b>
8.1. Introducción . . . . .	137
8.2. Interacción de la luz con una interfase . . . . .	138
8.2.1. Reflexión y refracción. Ley de Snell . . . . .	138
8.2.2. Reflexión interna total . . . . .	139
8.2.3. Dispersión . . . . .	140
8.3. Espejos . . . . .	140
8.3.1. Espejos planos . . . . .	140
8.3.2. Espejos esféricos . . . . .	142
8.3.3. Diagrama de rayos para los espejos . . . . .	144
8.3.4. Resultados generales para espejos . . . . .	148
8.4. Lentes . . . . .	149
8.4.1. Imágenes formadas por refracción (dioptrios) . . . . .	149
8.4.2. Lentes delgadas . . . . .	150
8.4.3. Diagramas de rayos para las lentes . . . . .	153
8.5. Aberraciones . . . . .	156
<b>A. Polímetros</b>	<b>159</b>
<b>B. Transitorios en circuitos RC y circuitos RL</b>	<b>163</b>
B.1. Circuitos RC . . . . .	163
B.1.1. Descarga de un condensador . . . . .	163
B.1.2. Carga de un condensador . . . . .	165
B.2. Circuitos RL . . . . .	167
<b>C. Generadores de corriente alterna</b>	<b>169</b>
<b>D. Transformadores</b>	<b>171</b>

## Tema 1

# Electrostática en el vacío

---

### 1.1. Introducción

Nuestra vida diaria depende extraordinariamente de la electricidad. Las leyes de la electricidad y el magnetismo juegan un papel fundamental en el funcionamiento de aparatos tales como la radio, la televisión, los motores eléctricos, los ordenadores, los aceleradores de partículas y muchos aparatos electrónicos usados en medicina. Sin embargo, es más importante aun el hecho de que las fuerzas interatómicas e intermoleculares responsables de la formación de sólidos y líquidos tienen un origen eléctrico. Es más, la fuerzas resultantes de empujar o tirar de un cuerpo, o la fuerza elástica de un muelle, provienen de fuerzas eléctricas que se producen a nivel atómico.

Aunque el uso generalizado de la electricidad es muy reciente, su estudio tiene una larga historia que empieza mucho antes de que apareciese hace un siglo la primera bombilla eléctrica. Las primeras observaciones de la atracción eléctrica fueron realizadas por los antiguos griegos: al frotar el ámbar, este atraía pequeños objetos como trozos de paja o plumas. De hecho, la palabra “eléctrico” procede del vocablo griego asignado al ámbar, *elektron*. En el siglo XVII de nuestra era, William Gilbert descubrió que el fenómeno de la electrificación no estaba restringido al ámbar, sino que era un fenómeno general. Los científicos procedieron entonces a electrificar diversos objetos, incluido gallinas y personas. Los experimentos de Charles Coulomb en 1785 confirmaron la ley del inverso del cuadrado para la fuerza electrostática, análoga a la fuerza gravitatoria.

En este capítulo comenzaremos el estudio de la electricidad con la electrostática en el vacío, que trata de las cargas eléctricas en reposo. Después de introducir el concepto de carga eléctrica estudiaremos brevemente el concepto de conductores y aislantes así como la forma en que un conductor puede adquirir una carga. A continuación consideraremos la Ley de Coulomb, que describe la fuerza ejercida por una carga eléctrica sobre otra. Posteriormente introduciremos el concepto de campo eléctrico y veremos cómo puede describirse mediante las líneas de campo. A continuación abordaremos el estudio del potencial eléctrico y la energía potencial electrostática. Finalmente, se acometerá el estudio del campo y del potencial creados por distribuciones continuas de carga, haciendo especial énfasis en el teorema de Gauss como método para el cálculo de campos eléctricos en situaciones con alta simetría.

## 1.2. Carga eléctrica

### 1.2.1. Propiedades de la carga eléctrica

Muchos experimentos sencillos demuestran la existencia de fuerzas electrostáticas. Por ejemplo, después de peinarse el pelo, puede comprobarse que el peine atrae trocitos de papel. La fuerza de atracción electrostática es a veces tan intensa que puede suspender los trocitos de papel en el aire. Se produce el mismo efecto cuando se frotan otros materiales como el vidrio y el caucho. Otro experimento sencillo consiste en frotar un globo inflado con lana o con pelo. En un día seco, el globo que se ha frotado se quedará pegado a la pared de una habitación, generalmente durante horas. Cuando los materiales se comportan de este modo, decimos que está **cargados eléctricamente**. Podemos cargar eléctricamente nuestro cuerpo al caminar sobre una alfombra de lana o deslizarnos sobre el asiento de un coche. Podemos entonces sentir y eliminar la carga de un cuerpo tocando a otra persona. En las condiciones adecuadas, será visible una pequeña chispa cuando se toca a la otra persona, y ambas personas sentirán un ligero cosquilleo<sup>1</sup>.

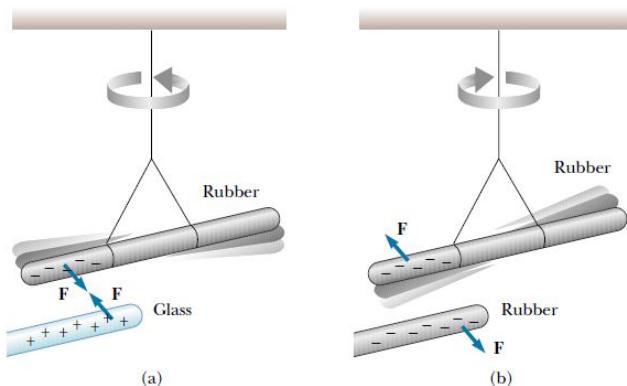


FIGURA 1.1: (a) Una varilla de caucho cargada negativamente, suspendida de un hilo, es atraída por una varilla de vidrio cargada positivamente. (b) Una varilla de caucho cargada negativamente es repelida por otra varilla de caucho cargada negativamente.

Los experimentos muestran que hay dos tipos de carga eléctrica, denominados carga **positiva** y **negativa** por Benjamin Franklin. La Figura 1.1 muestra la interacción entre los dos tipos de carga. Una varilla de caucho (o plástico) que se ha frotado con piel de animal (o un tejido acrílico) se suspende de un hilo. Cuando se acerca a la varilla de caucho una varilla de vidrio que se ha frotado con seda, la varilla de caucho es atraída hacia la de vidrio (Figura 1.1a). Por el contrario, si se acercan dos varillas de caucho (o dos varillas de vidrio), como se observa en la Figura 1.1b, la fuerza que aparece entre ambas es repulsiva. Este hecho experimental demuestra que el caucho y el vidrio tienen diferentes tipos de carga. Usaremos el convenio propuesto por Franklin: la carga eléctrica de la varilla de vidrio es denominada *positiva* y la de la varilla de caucho se denomina *negativa*. A partir de observaciones como esta, podemos generalizar diciendo que *las cargas del mismo signo se repelen y las cargas de signo contrario se atraen*.

<sup>1</sup>Este experimento funciona mejor si el tiempo es seco, puesto que, si el aire está excesivamente húmedo, puede proporcionar un camino para que la carga salga del cuerpo

Sabemos que sólo existen dos tipos de carga porque cualquier carga desconocida para la que se observa experimentalmente que es atraída por una carga positiva es también repelida por una carga negativa. Nadie ha observado nunca que un objeto cargado sea repelido por cargas positivas y negativas, o atraído por ambas.

### 1.2.2. Cuantización de la carga

La materia está formada por átomos eléctricamente neutros. Cada átomo posee un núcleo pequeño pero masivo, que contiene protones y neutrones. Los protones están cargados positivamente, mientras que los neutrones no poseen carga. El número de protones en el núcleo es el número atómico  $Z$  del elemento. Rodeando al núcleo existe un número igual de electrones negativamente cargados, de modo que el átomo posee una carga neta cero. La masa del electrón es aproximadamente 2000 veces menor que la del protón. Sin embargo, sus cargas son exactamente iguales pero opuestas en signo. La carga del protón es  $+e$  y la del electrón  $-e$ , siendo  $e$  la **unidad fundamental de carga**. La carga de un electrón o protón es una propiedad intrínseca de la partícula; del mismo modo, la masa y el spin de estas partículas son también propiedades intrínsecas de la misma.

Todas las cargas observables se presentan en múltiplos enteros de la unidad fundamental de carga  $e$ . Es decir, *la carga está cuantizada*. Toda carga  $q$  presente en la naturaleza puede escribirse en la forma  $q = \pm Ne$ , siendo  $N$  un número natural. Sin embargo, en objetos ordinarios,  $N$  es normalmente un número muy grande y la carga parece ser continua, del mismo modo que el aire parece ser un medio continuo y realmente consta de muchas moléculas discretas. Por ejemplo, al cargar una barra de plástico frotándola con un trozo de piel se transfieren del orden de  $10^{10}$  electrones a la barra.

### 1.2.3. Conservación de la carga

Otra propiedad importante es que *la carga neta de un sistema aislado siempre se conserva*. Existe, por tanto, un principio de conservación de la carga eléctrica para un sistema aislado. Cuando dos objetos, inicialmente descargados, se cargan frotando uno contra otro, no se crea carga en el proceso. Los objetos se cargan porque hay una *transferencia de carga* de un objeto a otro. Un objeto gana una cantidad determinada de carga gracias a que recibe electrones, mientras que el otro pierde una cantidad equivalente de carga negativa y, por lo tanto, resulta cargado positivamente. Para el sistema aislado formado por ambos objetos, no hay transferencia de carga a través de la frontera del sistema; el único cambio es que se ha transferido carga entre dos partes del sistema. Un objeto descargado contiene un número enorme de electrones (del orden de  $10^{23}$ ), pero por cada electrón (de carga negativa) hay presente un protón (de carga positiva). Por tanto, un objeto descargado no tiene carga neta de ningún signo.

La unidad del Sistema Internacional de carga es el **Coulombio** (C) el cual se define en función de la unidad de corriente o intensidad eléctrica, el *Ampere* (A). El Coulombio es la cantidad de carga que fluye a través de un cable conductor en un segundo cuando la intensidad de corriente en el mismo es de 1 A. La unidad fundamental de carga eléctrica  $e$  está relacionada con el Coulombio por:

## Unidad fundamental de carga

$$e = 1.602177 \times 10^{-19} \text{ C} \approx 1.60 \times 10^{-19} \text{ C} \quad (1.1)$$

### 1.2.4. Aislantes y conductores

Hemos estudiado la transferencia de carga de un objeto a otro. Las cargas eléctricas pueden también desplazarse de una posición a otra dentro de un objeto; este desplazamiento de carga se denomina **conducción eléctrica**. Es conveniente clasificar las sustancias dependiendo de la facilidad con la que permiten que la carga se desplace en su interior. Un **conductor** es un material en el que la carga puede moverse de manera relativamente libre; un **aislante** es un material en el que la carga no puede moverse libremente.

Materiales como el vidrio, el caucho o la resina son aislantes. Cuando se carga uno de estos materiales frotándolos contra otro, sólo la región frotada se carga, y la carga no tiende a desplazarse a otras partes del objeto. Sin embargo, los materiales como el cobre, el aluminio o la plata son buenos conductores. Cuando se carga una región pequeña de estos materiales, la carga se distribuye rápidamente por toda la superficie del material. Si se sostiene una varilla de cobre en la mano y se frota con un trozo de lana o piel de animal, no atraerá trocitos de papel. Eso podría sugerir que un metal no puede cargarse, pero si se sostiene el cobre por medio de un material aislante y se frota, entonces el cobre permanece cargado y atrae al papel. En el primer caso, la carga eléctrica producida al frotar el cobre pasa rápidamente a nuestro cuerpo, que es conductor, y, finalmente al suelo. En el segundo caso, el material aislante con el que se sujetó el cobre evita el flujo de carga hacia la mano.

#### Carga por inducción

Cuando se conecta un conductor a la Tierra por medio de un cable o un tubo, se dice que el conductor está **conectado a tierra** o **conectado a masa**. Podemos considerar que la Tierra es una reserva infinita de electrones, es decir, que puede aceptar o ceder una cantidad de electrones ilimitada. Teniendo esto en cuenta, podemos entender cómo puede cargarse un conductor por el proceso denominado **carga por inducción**.

Supongamos una esfera conductora neutra que se encuentra aislada, de modo que no hay conexión a tierra (Figura 1.2a). Se sitúa la varilla de caucho cargada negativamente cerca de la esfera. La fuerza repulsiva entre los electrones de la varilla y los de la esfera causa una redistribución de carga en la esfera, de modo que algunos electrones se desplazan al extremo de la esfera más alejado de la varilla (Figura 1.2b). La región de la esfera más cercana a la varilla tiene un exceso de carga positiva debido a la migración de electrones hacia la región opuesta. Si entonces se conecta a la esfera un cable conductor con toma de tierra cerca de la acumulación de electrones, como se ve en la Figura 1.2c, algunos electrones abandonan la esfera y se desplazan hacia la tierra. Al retirar el cable conductor (Figura 1.2d), la esfera queda cargada positivamente. Finalmente, cuando se retira la varilla de caucho de las cercanías de la esfera (Figura 1.2e) la carga positiva inducida permanece en la esfera aislada. Este exceso de carga positiva se distribuye uniformemente sobre la superficie de la esfera debido a las fuerzas repulsivas entre las cargas de igual signo y a la gran movilidad de los portadores de carga en un metal.

### 1.3. Ley de Coulomb. Fuerza y campo

En el proceso de inducción de carga en la esfera, la varilla de caucho no pierde su carga negativa, puesto que nunca llega a estar en contacto con la esfera. *La carga de un objeto por inducción no requiere contacto con el objeto que induce la carga.* En este aspecto es diferente de la carga por frotamiento, que requiere contacto entre ambos objetos.

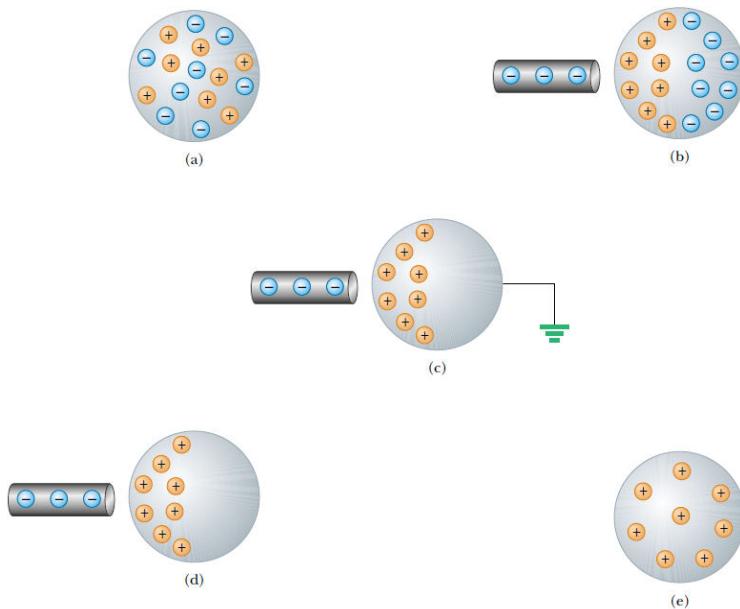


FIGURA 1.2: Carga de un objeto metálico por inducción. (a) Una esfera metálica neutra, con igual número de cargas positivas y negativas. (b) La carga de la esfera neutra se redistribuye al situar una varilla de caucho cargada cerca de la esfera. (c) Cuando se conecta la esfera a tierra, algunos electrones la abandonan a través del cable conductor. (d) Cuando se retira la conexión a tierra, la esfera resulta cargada positivamente, con distribución de carga no uniforme. (e) Al retirar la varilla de caucho, la carga positiva en exceso se redistribuye uniformemente sobre la superficie de la esfera.

## 1.3. Ley de Coulomb. Fuerza y campo

### 1.3.1. Fuerza electrostática

La fuerza ejercida por una carga sobre otra fue estudiada por Charles Coulomb mediante una balanza de torsión de su propia invención. En el experimento de Coulomb los radios de las esferas cargadas eran mucho menores que la distancia entre ellas, de modo que las cargas podían considerarse como puntuales. Coulomb utilizó el fenómeno de inducción para producir esferas igualmente cargadas y poder variar la carga depositada sobre ellas. Por ejemplo, comenzando con una carga  $q_0$  sobre cada esfera, podría reducir la carga a  $q_0/2$  conectando a tierra una de las esferas para descargarla y después poniendo las dos esferas en contacto. Los resultados de los experimentos de Coulomb y otros científicos se resumen en la **Ley de Coulomb**:

### Ley de Coulomb. Enunciado

*La fuerza ejercida por una carga puntual sobre otra está dirigida a lo largo de la línea que las une. La fuerza varía inversamente con el cuadrado de la distancia que separa las cargas y es proporcional al producto de las mismas. Es repulsiva si las cargas tienen el mismo signo, y atractiva si las cargas tienen signos opuestos.*

El módulo de la fuerza eléctrica ejercida por una carga  $q_1$  sobre otra  $q_2$  a la distancia  $r$  viene dada por:

$$F = k \frac{|q_1 q_2|}{r^2} \quad (1.2)$$

en donde  $k$  es una constante determinada experimentalmente llamada *constante de Coulomb*, que tiene el valor  $k = 8.99 \times 10^9 \text{ (N} \cdot \text{m}^2/\text{C}^2)$ . Es costumbre escribir la constante de Coulomb  $k$  en función de otra constante  $\epsilon_0$  denominada **permitividad del vacío** o **constante dieléctrica del vacío**:

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (1.3)$$

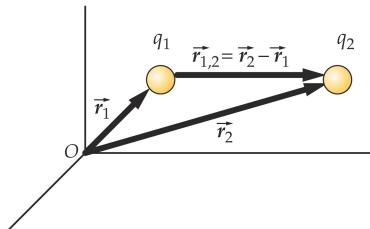
El valor de  $\epsilon_0$  en unidades del Sistema Internacional es:

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \times 10^{-12} \text{ C} \cdot \text{m}^2/\text{N} \quad (1.4)$$

Si  $q_1$  se encuentra en la posición  $\vec{r}_1$  y  $q_2$  en  $\vec{r}_2$ , la fuerza  $\vec{F}_{1,2}$  ejercida por  $q_1$  sobre  $q_2$  es:

### Ley de Coulomb

$$\vec{F}_{1,2} = k \frac{q_1 q_2}{r_{1,2}^2} \hat{r}_{1,2} \quad (1.5)$$



donde  $\vec{r}_{1,2} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  es el vector que apunta desde  $q_1$  a  $q_2$  y  $\hat{r}_{1,2} = \vec{r}_{1,2}/r_{1,2}$  es un vector unitario con la dirección y sentido de  $\vec{r}_{1,2}$ .

De acuerdo con la Tercera Ley de Newton, la fuerza  $\vec{F}_{2,1}$  ejercida por  $q_2$  sobre  $q_1$  es de sentido contrario a la fuerza  $\vec{F}_{1,2}$ . Obsérvese la semejanza entre la Ley de Coulomb y la Ley de Newton de la gravitación universal. Ambas son leyes que dependen de la inversa del cuadrado de la distancia. Sin embargo, la fuerza gravitatoria entre dos partículas es proporcional a las masas de las partículas y es siempre atractiva, mientras que la fuerza eléctrica es proporcional a las cargas de las partículas y es repulsiva si ambas cargas tienen el mismo signo y atractiva si tienen signos contrarios.

Puesto que la fuerza eléctrica y la fuerza gravitatoria entre dos partículas varían como la inversa del cuadrado de su separación, la relación entre estas dos fuerzas es independiente de la distancia que separa las partículas. Podemos, pues, comparar las intensidades relativas de estas fuerzas para partículas elementales, tales como el electrón y el protón (ver ejemplo 1.1).

Aunque la fuerza gravitatoria es increíblemente pequeña comparada con la fuerza eléctrica y esencialmente no desempeña papel alguno a nivel atómico, la gravedad es la fuerza dominante entre sistemas grandes como planetas y estrellas porque poseen números casi iguales de cargas positivas y negativas y, por lo tanto, se neutralizan las fuerzas eléctricas. Por tanto, la fuerza neta entre objetos astronómicos es esencialmente la fuerza de atracción gravitatoria.

### 1.3. Ley de Coulomb. Fuerza y campo

#### EJEMPLO 1.1 Comparación cuantitativa entre las fuerzas eléctricas y gravitatoria

**Calcular la relación entre la fuerza eléctrica y la fuerza gravitatoria ejercidas sobre el protón y el electrón de un átomo de hidrógeno.**

Utilizaremos la Ley de Coulomb con  $q_1 = e$  y  $q_2 = -e$  para determinar la fuerza eléctrica y la Ley de la Gravitación Universal de Newton con la masa del protón,  $m_p = 1.67 \times 10^{-27}$  Kg y la masa del electrón,  $m_e = 9.11 \times 10^{-31}$  Kg.

De ese modo, los módulos de la fuerza eléctrica y la fuerza gravitatoria cuando el electrón y el protón están separados un distancia  $r$  vendrán dados por las expresiones:

$$F_e = k \frac{e^2}{r^2}, \quad F_g = G \frac{m_p m_e}{r^2}$$

Determinamos a continuación la relación entre ambas fuerzas dividiendo sendas expresiones. Obsérvese que la distancia de separación  $r$  se anula:

$$\frac{F_e}{F_g} = \frac{k e^2}{G m_p m_e}$$

Sustituyendo los valores numéricos:

$$\frac{F_e}{F_g} = 2.27 \times 10^{39}$$

Este resultado demuestra por qué los efectos de la gravedad no se consideran al tratar las interacciones atómicas o moleculares.

En un sistema de cargas, cada una de ellas ejerce una fuerza dada por la ecuación (1.5) sobre cada una de las restantes. Así, la fuerza neta sobre cada carga es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre dicha carga por las restantes cargas del sistema. Esta es una consecuencia del **principio de superposición** de las fuerzas.

Para que un sistema de cargas permanezca estacionario deben existir otras fuerzas no eléctricas actuando sobre las cargas, de modo que la fuerza resultante de todas las fuentes que actúan sobre cada carga sea cero.

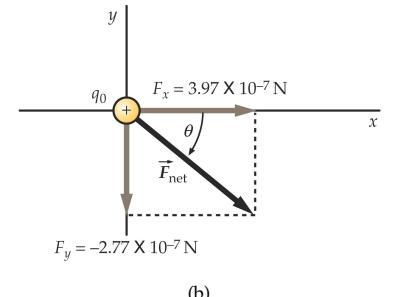
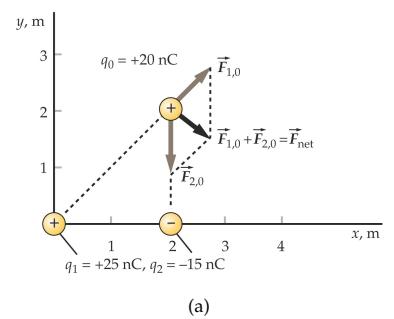
#### EJEMPLO 1.2 Fuerza neta

**La carga  $q_1 = +25$  nC está en el origen, la carga  $q_2 = -15$  nC está sobre el eje  $x$  en  $x = 2$  m, y la carga  $q_0 = 20$  nC está en el punto  $x = 2$  m,  $y = 2$  m como se indica en la figura (a). Determinar el vector de la fuerza resultante sobre  $q_0$ .**

La fuerza resultante es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas por cada una de las cargas sobre  $q_0$ . Calcularemos cada una de las fuerzas a partir de la Ley de Coulomb y la escribiremos en función de sus componentes rectangulares. La figura (a) muestra la fuerza resultante sobre la carga  $q_0$  como la suma vectorial de las fuerzas  $\vec{F}_{1,0}$  debida a  $q_1$  y  $\vec{F}_{2,0}$  debida a  $q_2$ . La figura (b) muestra la fuerza neta de la figura (a) y sus componentes  $x$  e  $y$ .

$$\vec{F}_{\text{neta}} = \sum_i \vec{F}_{i,0} = \vec{F}_{1,0} + \vec{F}_{2,0} \left\{ \begin{array}{l} F_{\text{neta},x} = F_{1,0,x} + F_{2,0,x} \\ F_{\text{neta},y} = F_{1,0,y} + F_{2,0,y} \end{array} \right.$$

La fuerza  $\vec{F}_{1,0}$  está dirigida a lo largo de la línea que une  $q_1$  con  $q_0$ . Esta línea forma un ángulo de  $45^\circ$  con la horizontal, por lo que  $r_{1,0} = 2\sqrt{2}$  m. El módulo de  $\vec{F}_{1,0}$  viene dado por:



$$F_{1,0} = k \frac{|q_1 q_0|}{r_{1,0}^2} = 5.62 \times 10^{-7} \text{ N}$$

Como  $\vec{F}_{1,0}$  forma un ángulo de  $45^\circ$  con la horizontal, sus componentes  $x$  e  $y$  son iguales entre sí:

$$F_{1,0x} + F_{1,0y} = F_{1,0} \cos 45^\circ = 3.97 \times 10^{-7} \text{ N}$$

La fuerza  $\vec{F}_{2,0}$  ejercida por  $q_2$  sobre  $q_0$  es atractiva, por lo que apunta hacia el sentido negativo del eje  $y$ . Así:  $F_{2,0x} = 0$  y  $F_{2,0y} = -F_{2,0}$ , con

$$F_{2,0} = k \frac{|q_2 q_0|}{r_{2,0}^2} = 6.74 \times 10^{-7} \text{ N}$$

Por tanto,

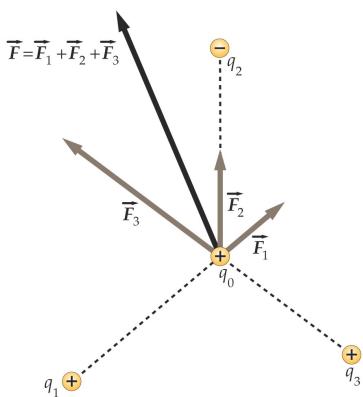
$$\vec{F}_{\text{neta}} = F_{\text{neta},x} \hat{i} + F_{\text{neta},y} \hat{j} = (3.97 \hat{i} - 2.77 \hat{j}) \times 10^{-7} \text{ N}$$

El módulo de la fuerza resultante será  $F_{\text{neta}} = \sqrt{F_{\text{neta},x}^2 + F_{\text{neta},y}^2} = 8.84 \times 10^{-7} \text{ N}$ . La fuerza resultante apunta hacia la derecha y hacia abajo como muestra la figura (b) formando un ángulo  $\theta$  con el eje  $x$  dado por

$$\tan \theta = \frac{F_{\text{neta},y}}{F_{\text{neta},x}} = -0.698 \quad \Rightarrow \quad \theta = -34.9^\circ$$

### 1.3.2. El campo electrostático

La fuerza eléctrica ejercida por una carga sobre otra es un ejemplo de acción a distancia, semejante a la fuerza gravitatoria ejercida por una masa sobre otra. La idea de acción a distancia presenta un problema conceptual difícil. ¿Cuál es el mecanismo según el cual una partícula puede ejercer una fuerza sobre otra a través del espacio vacío que existe entre las partículas? Supongamos que una partícula cargada situada en un punto determinado se mueve súbitamente. ¿Variaría instantáneamente la fuerza ejercida sobre la segunda partícula situada a una distancia  $r$  de la primera? Para evitar el problema de la acción a distancia se introduce el concepto de **campo eléctrico**. Una carga crea un campo eléctrico  $\vec{E}$  en todo el espacio y este campo ejerce una fuerza sobre la otra carga. La fuerza es así ejercida *por el campo*  $\vec{E}$  existente en la posición de la segunda carga, más que por la propia primera carga que se encuentra a cierta distancia. Los cambios del campo se propagan a través del espacio con la velocidad de la luz  $c$ . Así, si una carga se mueve súbitamente, la fuerza que ejerce sobre otra carga a la distancia  $r$  no se modifica hasta que transcurre el tiempo  $r/c$ .



La figura muestra una serie de cargas puntuales  $q_1$ ,  $q_2$  y  $q_3$  dispuestas arbitrariamente en el espacio. Estas cargas producen un campo eléctrico  $\vec{E}$  en cualquier punto del espacio. Si situamos una pequeña **carga de prueba**  $q_0$  en algún punto próximo, ésta experimentará la acción de una fuerza debido a las otras cargas. La fuerza resultante ejercida sobre  $q_0$  es la suma vectorial de las fuerzas individuales ejercidas sobre  $q_0$  por cada una de las otras cargas del sistema. Como cada una de estas fuerzas es proporcional a  $q_0$ , la fuerza neta será proporcional a  $q_0$ . El campo eléctrico  $\vec{E}$  en un punto se define por esta fuerza dividida por  $q_0$ :

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} \quad (1.6) \quad \text{Definición de campo eléctrico}$$

La unidad del Sistema Internacional para el campo eléctrico es N/C.

El campo eléctrico es un vector que describe la condición en el espacio creada por el sistema de cargas puntuales. Desplazando la carga de prueba  $q_0$  de un punto a otro, podemos determinar  $\vec{E}$  en todos los puntos del espacio (excepto el ocupado por una carga  $q$ ). El campo eléctrico  $\vec{E}$  es, por lo tanto, una función vectorial de la posición. La fuerza ejercida sobre una carga de prueba  $q_0$  en cualquier punto está relacionada con el campo eléctrico en dicho punto por:

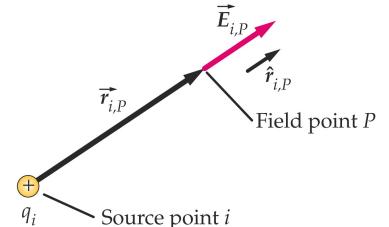
$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

El campo eléctrico debido a una sola carga puntual  $q_i$  en la posición  $\vec{r}_i$  puede calcularse a partir de la Ley de Coulomb. Si situamos una pequeña carga de prueba positiva  $q_0$  en algún punto P a la distancia  $r_{i,P}$  de la carga  $q_i$ , la fuerza que actúa sobre ella es

$$\vec{F}_{i,0} = k \frac{q_i q_0}{r_{i,P}^2} \hat{r}_{i,P}$$

El campo eléctrico en el punto P debido a la carga  $q_i$  (ver figura) es, por lo tanto,

$$\vec{E}_i = k \frac{q_i}{r_{i,P}^2} \hat{r}_{i,P} \quad (1.7)$$



Ley de Coulomb para el campo creado por una carga puntual

en donde  $\hat{r}_{i,P}$  es un vector unitario que apunta desde el punto de la fuente  $i$  al punto de observación del campo P. El campo eléctrico resultante debido a una distribución de carga puntuales se determina sumando los campos originados por cada carga separadamente:

$$\vec{E}_P = \sum_i \vec{E}_{i,P} = k \sum_i \frac{q_i}{r_{i,P}^2} \hat{r}_{i,P} \quad (1.8)$$

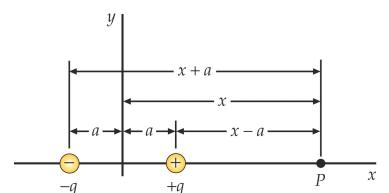
Campo eléctrico debido a un sistema de cargas puntuales

**EJEMPLO 1.3** Campo eléctrico debido a dos cargas iguales en módulo y opuestas en signo

Una carga  $+q$  se encuentra en  $x = a$  y una segunda carga  $-q$  en  $x = -a$ , como muestra la figura. (a) Determinar el campo eléctrico sobre el eje x en un punto arbitrario  $x > a$ . (b) Determinar la forma límite del campo para  $x \gg a$ .

Calcularemos el campo eléctrico a partir de la ecuación (1.8):

$$\vec{E} = k \sum_i \frac{q_i}{r_{i,P}^2} \hat{r}_{i,P}$$



Para  $x > a$ , el vector unitario del campo para cada carga es  $\hat{i}$ . Las distancias son  $x - a$  para la carga positiva y  $x - (-a) = x + a$  para la carga negativa. Así, para  $x > a$ :

$$\vec{E} = k \frac{q}{(x-a)^2} \hat{i} + k \frac{(-q)}{(x+a)^2} \hat{i} = kq \frac{4ax}{(x^2-a^2)^2} \hat{i} \quad (\text{para } x > a)$$

En el límite  $x \gg a$  podemos despreciar  $a^2$  comparado con  $x^2$  en el denominador:

$$\vec{E} \approx k \frac{4qa}{x^3} \hat{i} \quad (\text{para } x > a)$$

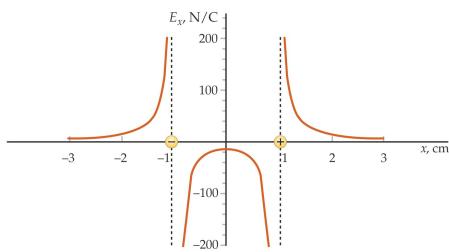
Obsérvese que para  $x < -a$ , los signos de los campos creados por cada una de las cargas individuales se invierte, por lo que también lo hace el campo neto:

$$\vec{E} = -kq \frac{4ax}{(x^2-a^2)^2} \hat{i} \quad (\text{para } x < -a)$$

Para  $|x| < a$ , los signos de los campos creados por cada una de las cargas individuales son negativos, y el campo será:

$$\vec{E} = -kq \frac{2(x^2+a^2)}{(x^2-a^2)^2} \hat{i} \quad (\text{para } |x| < a)$$

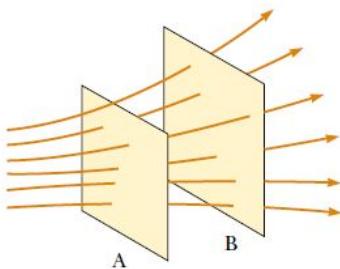
La figura muestra  $E_x(x)$  para  $q = 1 \text{ nC}$  y  $a = 1 \text{ cm}$ .



### Líneas de campo eléctrico

Puede realizarse una representación gráfica que resulta muy conveniente para visualizar el campo eléctrico, dibujando líneas que muestren la dirección y sentido del vector campo eléctrico en cada punto. Estas líneas, denominadas **líneas de campo eléctrico** están relacionadas con el campo eléctrico en cualquier región del espacio de la siguiente manera:

- El vector campo eléctrico  $\vec{E}$  es tangente a la línea de campo eléctrico en cada punto.
- El número de líneas de campo eléctrico por unidad de superficie perpendicular a dichas líneas es proporcional al módulo del campo en esa región del espacio. Es decir,  $E$  es grande cuando las líneas están cercanas unas a otras y pequeño cuando están alejadas entre sí.



Estas propiedades se muestran en la figura. La densidad de líneas a través de la superficie A es mayor que la densidad de líneas a través de la superficie B. Por tanto, el módulo del campo eléctrico sobre la superficie A es mayor que el módulo del campo eléctrico sobre la superficie B. Además, el campo representado en la figura no es uniforme, puesto que las líneas que pasan por puntos diferentes tienen direcciones distintas. En la Figura 1.3a se representan algunas líneas de campo significativas para el caso de una carga puntual positiva. Debe tenerse en cuenta que esta representación bidimensional sólo mostramos las líneas de campo que se encuentran en el plano del papel. En la realidad, las líneas se dirigen radialmente hacia fuera en *todas* las direcciones desde la carga, de forma parecida a como lo hacen las espinas de un erizo. Puesto que una carga de prueba positiva situada en este campo sería repelida por la carga  $q$ , las líneas se alejan radialmente de  $q$ . De modo similar, las líneas de campo eléctrico creadas por una carga puntual negativa

se dirigen hacia la carga (1.3b). En ambos casos, las líneas son radiales y se extienden hasta el infinito. Como puede verse, las líneas se encuentran más cercanas unas a otras cerca de la carga, indicando que el módulo del campo aumenta.

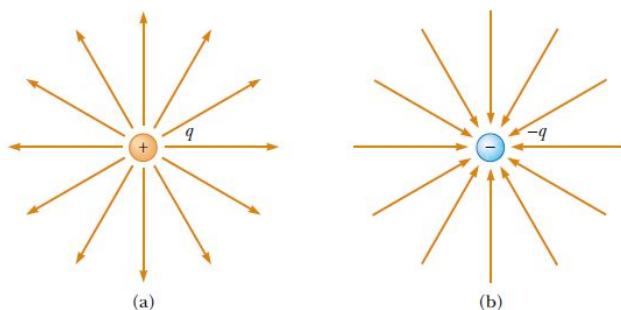


FIGURA 1.3: Líneas de campo eléctrico de una carga puntual. (a) Para una carga puntual positiva, las líneas se dirigen radialmente hacia fuera. (b) Para una carga puntual negativa, las líneas se dirigen radialmente hacia dentro.

Las reglas para representar las líneas de campo eléctrico para cualquier distribución de carga son las siguientes:

- Las líneas de un grupo de cargas puntuales deben salir de las cargas positivas y terminar en las cargas negativas. En el caso de que haya un exceso de un tipo de carga, algunas líneas saldrán o terminarán infinitamente lejos.
- El número de líneas representadas que salen de una carga positiva o terminan en una carga negativa es proporcional a la carga de la partícula.
- Las líneas de campo nunca pueden cruzarse.

Las líneas de campo eléctrico para dos cargas de igual magnitud pero signos distintos (un dipolo eléctrico) se muestran en la Figura 1.4a. En este caso, el número de líneas que salen de la carga positiva debe ser igual al número de líneas que terminan en la carga negativa. En puntos muy cercanos a las cargas, las líneas son casi radiales. La gran densidad de líneas en la región comprendida entre las dos cargas representa una región de campo eléctrico muy intenso. La naturaleza atractiva de la fuerza que aparece entre las cargas también se muestra en la Figura 1.4a con las líneas de una partícula terminando en la otra partícula.

La Figura 1.4b representan las líneas de campo eléctrico en las proximidades de dos cargas puntuales positivas iguales. Una vez más, cerca de cada carga las líneas son casi radiales. De cada carga sale el mismo número de líneas, porque ambas cargas son de igual valor. A distancias muy grandes de ambas partículas, el campo es aproximadamente igual al que crearía una única carga puntual de valor  $2q$ . La naturaleza repulsiva de la fuerza eléctrica existente entre ambas partículas puede verse en la figura, en el hecho de que las líneas no conectan las partículas y se desvían hacia fuera de la región situada entre ambas cargas.

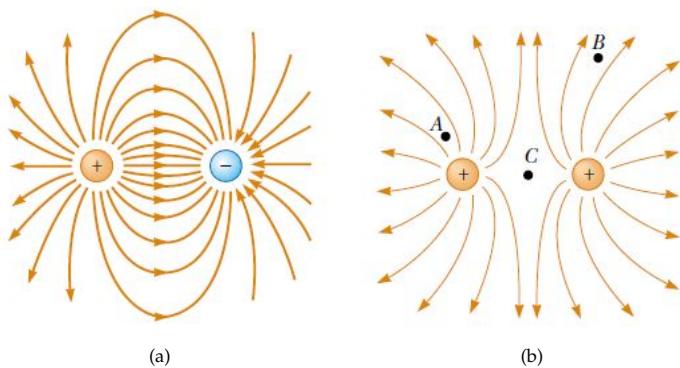


FIGURA 1.4: (a) Líneas de campo eléctrico creadas por dos cargas de igual valor y signo contrario (un dipolo eléctrico). Obsérvese que el número de líneas que salen de la carga positiva es igual al de líneas que terminan en la carga negativa. (b) Líneas de campo eléctrico creadas por dos cargas puntuales positivas.

## 1.4. Potencial eléctrico

### 1.4.1. Diferencia de potencial

La forma funcional de la fuerza electrostática (1.5) es la misma (salvo constantes y signos) que la fuerza gravitatoria. Como el campo gravitatorio es conservativo, el campo electrostático también debe serlo. Por tanto, el campo eléctrico, al igual que el gravitatorio, será conservativo y podrá definirse una energía potencial. En general, cuando el punto de aplicación de una fuerza conservativa  $\vec{F}$  experimenta un desplazamiento  $d\ell$ , la variación de energía potencial  $dU$  viene definida por

$$dU = -\vec{F} \cdot d\ell$$

La fuerza ejercida por un campo eléctrico  $\vec{E}$  sobre una carga puntual es

$$\vec{F} = q_0 \vec{E}$$

y, en consecuencia, podemos expresar la variación de energía potencial en función del campo eléctrico  $\vec{E}$ :

$$dU = -q_0 \vec{E} \cdot d\ell \quad (1.9)$$

Como se puede observar en la expresión anterior, la variación de energía potencial es proporcional a la carga de prueba  $q_0$ . La variación de energía potencial por unidad de carga se denomina **diferencia de potencial**,  $dV$ :

Diferencial de potencial. Definición

$$dV = \frac{dU}{q_0} = -\vec{E} \cdot d\ell \quad (1.10)$$

Para un desplazamiento finito desde el punto  $a$  al punto  $b$ , la diferencia de potencial es

Diferencial de potencial finita

$$\Delta V \equiv V_b - V_a = \frac{\Delta U}{q_0} = - \int_a^b \vec{E} \cdot d\ell \quad (1.11)$$

La diferencia de potencial  $V_b - V_a$  es el opuesto del trabajo por unidad de carga realizado por el campo eléctrico sobre una carga de prueba positiva cuando esta se desplaza del punto  $a$  al punto  $b$ . Para realizar este cálculo, las posiciones del resto de las cargas deben permanecer invariables.

La función  $V$  se denomina **potencial eléctrico** o simplemente **potencial**. El potencial  $V$ , al igual que las componentes del campo eléctrico, es una función de la posición. Al contrario que el campo eléctrico,  $V$  es una función escalar, mientras que  $\vec{E}$  es una función vectorial. Del mismo modo que en la energía potencial  $U$ , sólo tiene importancia la variación del potencial  $V$ . Tenemos la libertad de elegir el potencial de modo que sea cero en el punto que más nos convenga, lo mismo que hacíamos con la energía potencial. Si el potencial eléctrico y la energía potencial de una carga de prueba se eligen de modo que sean iguales a cero en el mismo punto, ambas magnitudes están relacionadas por

$$U = q_0 V \quad (1.12)$$

[Relación entre energía potencial  \$U\$  y potencial  \$V\$](#)

Como el potencial eléctrico es la energía potencial electrostática por unidad de carga, la unidad del Sistema Internacional para el potencial es J/C, llamado **voltio** (V). Como la diferencia de potencial se mide en voltios, a veces se le llama voltaje. En la ecuación (1.10) se observa que las dimensiones del potencial son también las mismas que las del campo eléctrico multiplicado por la distancia. Así pues, la unidad de campo eléctrico también es igual a  $1 \text{ V/m} = 1 \text{ N/C}$ , de modo que podemos interpretar la intensidad del campo eléctrico como una fuerza por unidad de carga o como la variación de  $V$  respecto a la distancia. En física atómica y nuclear se trata frecuentemente con partículas elementales que poseen cargas cuyo valor absoluto es  $e$  tales como electrones y protones que se mueven a través de diferencias de potencial de miles e incluso millones de voltios. Como la energía tiene dimensiones del producto de carga eléctrica por potencial eléctrico, una unidad conveniente de energía es el producto de la unidad de carga fundamental  $e$  por un voltio. Esta unidad se llama **electrón-voltio** (eV). En física atómica y molecular las energías son típicamente de unos cuantos eV, de modo que el electrón-voltio es una unidad de magnitud adecuada para describir procesos atómicos y moleculares. La conversión de electrón-voltios a Julios se obtiene expresando la carga electrónica en coulombios:

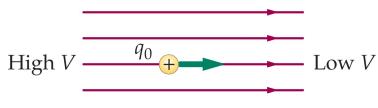
$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J} \quad (1.13)$$

[Electrón-voltio](#)

## Potencial y líneas de campo eléctrico

Si situamos una carga de prueba positiva  $q_0$  en el seno de un campo eléctrico  $\vec{E}$  y la dejamos en libertad, se acelerará siguiendo el sentido de  $\vec{E}$  a lo largo de una línea de campo. La energía cinética de la carga se incrementará y su energía potencial disminuirá. Así, la carga se moverá hacia una región de menor energía potencial del mismo modo que un cuerpo masivo cae hacia una región de menor energía potencial gravitatoria (Figura 1.5). Si situamos en cambio una carga de prueba negativa, se acelerará siguiendo el sentido opuesto de la línea de campo. Análogamente a la carga positiva, disminuirá

su energía potencial, pero ahora se moverá de una región de menor potencial a una de mayor potencial.



Como se indica en la figura adyacente las líneas del campo eléctrico señalan en la dirección y sentido en la que el potencial disminuye más rápidamente. Un vector que apunta en la dirección y sentido de crecimiento máximo de un campo escalar (como lo es el potencial) recibe el nombre de *gradiente*. Por tanto, el campo eléctrico es igual al opuesto del gradiente del potencial, tal como veremos en la sección 1.4.4.

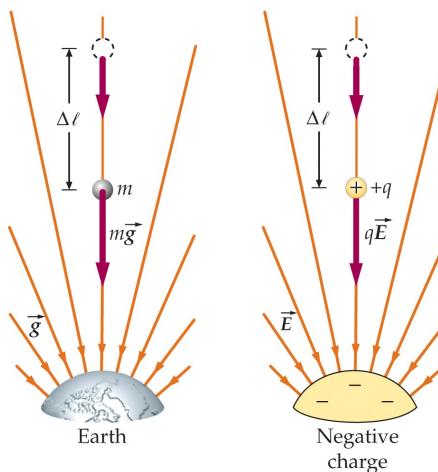


FIGURA 1.5: (a) El trabajo realizado por el campo gravitatorio  $\vec{g}$  sobre una masa disminuye la energía potencial gravitatoria. (b) El trabajo realizado por el campo eléctrico  $\vec{E}$  sobre una carga positiva  $+q$  es igual a la pérdida de energía potencial electrostática.

## 1.4.2. Potencial debido a un sistema de cargas puntuales

El potencial eléctrico a una distancia  $r$  de una carga puntual  $q$  situada en el origen de coordenadas puede calcularse a partir del campo eléctrico:

$$\vec{E} = \frac{kq}{r^2} \hat{r}$$

Para un desplazamiento infinitesimal  $d\vec{\ell}$ , la variación de potencial es:

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = k \frac{kq}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{kq}{r^2} dr \quad (1.14)$$

Haciendo la integral de línea desde un punto arbitrario (ver figura), que lo consideramos punto de referencia, al punto  $P$  se obtiene

$$\int_{\text{ref}}^P dV = - \int_{\text{ref}}^P \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -kq \int_{r_{\text{ref}}}^{r_P} \frac{dr}{r^2} = \frac{kq}{r_P} - \frac{kq}{r_{\text{ref}}}$$

Esta integral es independiente del camino a recorrer desde el punto de referencia hasta  $P$  (sólo depende de la posición de estos puntos), lo que demuestra que el campo eléctrico es conservativo. El valor de esta integral será:

Potencial debido a una carga puntual

$$V - V_{\text{ref}} = \frac{kq}{r} - \frac{kq}{r_{\text{ref}}} \quad (1.15)$$

donde hemos reemplazado  $r_P$ , que es la distancia desde el origen al punto donde consideramos el potencial, por  $r$ . Como el punto de referencia es arbitrario, podemos elegir aquel que nos proporcione la expresión algebraica más sencilla. Tomando como el cero de potencial o potencial de referencia el de  $r_{\text{ref}} = \infty$ , tenemos

$$V = k \frac{q}{r} \quad (1.16) \quad \text{Potencial de Coulomb}$$

Este potencial se denomina **potencial de Coulomb**. Es positivo o negativo según el signo de la carga  $q$ .

La energía potencial  $U$  de una carga de prueba  $q_0$  situada a una distancia  $r$  de la carga puntual  $q$  es:

$$U = q_0 V = k \frac{q_0 q}{r} \quad (1.17) \quad \text{Energía potencial electrostática de un sistema de dos cargas}$$

Esta es la energía potencial electrostática del sistema de dos cargas cuando consideramos la condición de que  $U = 0$  a separación infinita. Si dejamos libre una carga de prueba que esté previamente en reposo a una distancia  $r$  de  $q$  (y mantenemos  $q$  fija en el origen), dicha carga se acelerará alejándose (suponiendo que  $q$  tiene el mismo signo que  $q_0$ ). Su energía cinética a gran distancia de  $q$  será  $kq_0q/r$ . Alternativamente, el trabajo que debemos hacer en contra del campo eléctrico para llevar una carga de prueba  $q_0$  desde una gran distancia hasta la distancia  $r$  de  $q$  es  $kq_0q/r$ . El trabajo por unidad de carga es  $kq/r$ , que es el potencial en el punto  $P$  tomando como origen de potenciales el infinito.

El potencial en un punto debido a diversas cargas puntuales es igual a la suma de los potenciales debidos a cada carga por separado. (Esta es una consecuencia del principio de superposición del campo eléctrico). El potencial debido a un sistema de  $N$  cargas puntuales  $q_i$  será, por lo tanto:

$$V = \sum_{i=1}^N k \frac{q_i}{r_i} \quad (1.18) \quad \text{Potencial debido a un sistema de cargas puntuales}$$

en donde  $r_i$  es la distancia desde la carga  $i$  al punto  $P$  donde deseamos calcular el potencial.

Obsérvese que, a partir de (1.14) puede deducirse que si la carga de prueba se mueve siguiendo un arco de circunferencia (es decir, manteniendo  $r$  constante),  $dr = 0$  y, en consecuencia,  $dV = 0$ . Es decir, el potencial (y la energía potencial) se mantiene constante lo que implica que el trabajo realizado contra el campo para producir este movimiento es nulo.

### 1.4.3. Energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales

Supongamos una carga puntual  $q_1$  situada en el punto 1. El potencial  $V_2$  en un punto 2 situado a una distancia  $r_{1,2}$  viene dado por

$$V_2 = k \frac{q_1}{r_{1,2}}$$

Para traer una segunda carga puntual  $q_2$  desde una distancia infinita donde se halla en reposo, hasta el punto 2, dejándola también en reposo, debe realizarse el trabajo

$$W_2 = q_2 V_2 = k \frac{q_2 q_1}{r_{1,2}}$$

El potencial en el punto 3, situado a una distancia  $r_{1,3}$  de  $q_1$  y a una distancia  $r_{2,3}$  de  $q_2$  viene dado por:

$$V_3 = k \frac{q_1}{r_{1,3}} + k \frac{q_2}{r_{2,3}}$$

Para traer una tercera carga puntual  $q_3$  desde el infinito, donde se halla en reposo, hasta el punto 3, volviéndola a dejar en reposo, se requiere un trabajo adicional

$$W_3 = q_3 V_3 = k \frac{q_3 q_1}{r_{1,3}} + k \frac{q_3 q_2}{r_{2,3}}$$

El trabajo total para reunir las tres cargas puntuales es la **energía potencial electrostática**  $U$  del sistema de las tres cargas:

$$U = k \frac{q_2 q_1}{r_{1,2}} + k \frac{q_3 q_1}{r_{1,3}} + k \frac{q_3 q_2}{r_{2,3}} \quad (1.19)$$

Esta cantidad de trabajo es independiente del orden en el cual las cargas se transportan hasta alcanzar sus posiciones finales. En general, la energía potencial electrostática de un sistema de cargas puntuales es el trabajo necesario para transportar las cargas desde una distancia infinita hasta sus posiciones finales.

La expresión (1.19) puede generalizarse para un sistema con un número arbitrario  $N$  de cargas:

**Energía potencial electrostática debida a un sistema de cargas puntuales**

$$U = \sum_{i=1}^N \sum_{j>i} k \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ (j \neq i)}}^N k \frac{q_i q_j}{r_{i,j}} \quad (1.20)$$

El factor  $1/2$  que se introduce en la segunda igualdad se debe introducir porque, al extender el segundo sumatorio desde 1, se cuenta dos veces la misma contribución a la energía.

#### 1.4.4. Determinación del campo eléctrico a partir del potencial

Si el potencial es conocido, puede utilizarse para calcular el campo eléctrico. Consideremos un pequeño desplazamiento  $d\vec{\ell}$  en el seno de un campo eléctrico arbitrario  $\vec{E}$ . La variación del potencial es

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -E \cos \theta d\ell = -E_t d\ell \quad (1.21)$$

en donde  $E_t$  es la componente de  $\vec{E}$  paralela al desplazamiento  $d\vec{\ell}$ . Por lo tanto,

$$E_t = -\frac{dV}{d\ell}$$

Si el desplazamiento  $d\vec{l}$  es perpendicular al campo eléctrico,  $dV = 0$  (el potencial no varía). La variación más grande de  $V$  se produce cuando el desplazamiento  $d\vec{l}$  está dirigido a lo largo de  $\vec{E}$ . Un vector que señala en la dirección de la máxima variación de una función escalar y cuyo módulo es igual a la derivada de la función con respecto a la distancia en dicha dirección, se denomina **gradiente** de la función. El campo eléctrico  $\vec{E}$  es opuesto al gradiente del potencial  $V$ . Las líneas de campo señalan en la dirección de máxima disminución de la función potencial.

Si el potencial  $V$  depende sólo de  $x$ , no habrá cambios de  $V$  para los desplazamientos en las direcciones  $y$  o  $z$  y, por lo tanto,  $E_y = E_z = 0$ . Para un desplazamiento en la dirección  $x$ ,  $d\vec{l} = dx\hat{x}$ , y la ecuación (1.11) se convierte en:

$$dV(x) = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_x dx$$

por lo tanto,

$$E_x = -\frac{dV(x)}{dx} \quad (1.22)$$

De un modo semejante, para una distribución de carga con simetría esférica, el potencial es una función exclusiva de la distancia radial  $r$ . Los desplazamientos perpendiculares a la dirección radial no producen cambio en  $V(r)$  y, por lo tanto, el campo eléctrico debe ser radial. Un desplazamiento en la dirección radial se expresa en la forma  $d\vec{l} = dr\hat{r}$ . Por tanto, la ecuación (1.11) será:

$$dV(r) = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -E_r dr$$

y

$$E_r = -\frac{dV(r)}{dr} \quad (1.23)$$

En el caso de que el potencial dependa de las tres coordenadas espaciales, el campo eléctrico se puede calcular, en coordenadas rectangulares, de la forma:

$$\vec{E} = -\nabla V = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial V}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial V}{\partial z}\hat{z}\right) \quad (1.24)$$

[Gradiente de un potencial](#)

Si conocemos el potencial o el campo eléctrico en una región del espacio, podemos utilizar una de estas magnitudes para calcular la otra. Con frecuencia es más fácil calcular el potencial, porque se trata de una función escalar, mientras que el campo eléctrico es una función vectorial. Obsérvese que no es posible calcular  $\vec{E}$  si sólo conocemos el valor de  $V$  en un punto; es necesario conocer  $V$  en una región del espacio para calcular  $\vec{E}$ .

#### 1.4.5. Superficies equipotenciales

En un campo eléctrico es interesante representar gráficamente la distribución del potencial mediante **superficies equipotenciales** en las que el potencial tiene el mismo valor en todos sus puntos. Lógicamente, en todos los puntos de la superficie equipotencial, la energía potencial de un cuerpo cargado es la misma. Por lo tanto, mover el cuerpo cargado sobre dicha superficie no requiere realizar trabajo. Como  $dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$ , el campo eléctrico ha de ser perpendicular en cada punto a la superficie equipotencial para que

$dV = 0$ . Es decir, las líneas de campo son perpendiculares a las superficies equipotenciales. En la figura 1.6 vemos algunos ejemplos.

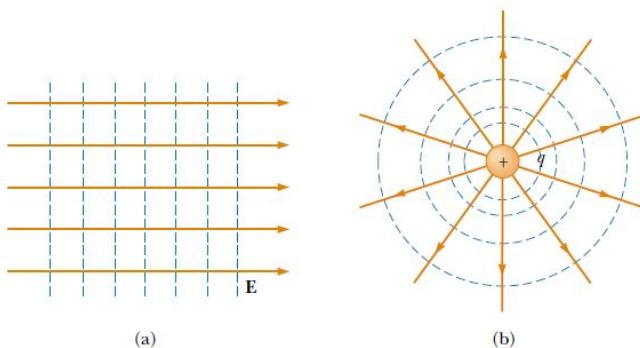
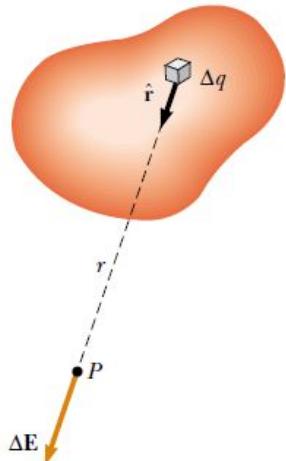


FIGURA 1.6: Superficies equipotenciales (líneas discontinuas) y líneas de campo eléctrico (flechas continuas) de (a) un campo eléctrico uniforme creado por una lámina infinita de carga, ecuación (1.43) y (b) una carga puntual, ecuación (1.16).

## 1.5. Distribuciones continuas de carga



En la mayor parte de las situaciones prácticas (por ejemplo, un objeto cargado por frotamiento), la separación media entre las cargas es muy pequeña comparada con la distancia de cada una hasta el punto en el que se calcula el campo. En dichos casos, el sistema de cargas fuente puede representarse como si fuera **continuo**. Es decir, imaginamos que el sistema de cargas muy cercanas unas a otras es equivalente a una carga total distribuida de manera continua a lo largo de un volumen o una superficie.

Para calcular el campo eléctrico creado por una distribución continua de carga, se utiliza el siguiente procedimiento. En primer lugar, dividimos la distribución de carga en elementos muy pequeños, cada uno de los cuales contiene una pequeña cantidad de carga  $\Delta q$ , como se muestra en la figura. A continuación, suponiendo que dicho elemento es una carga puntual, utilizamos la ecuación (1.7) para calcular el campo eléctrico  $\Delta \vec{E}$  en el punto  $P$  debido al elemento de carga. Finalmente, calculamos el campo total en  $P$  debido a la distribución de carga realizando una suma vectorial de las contribuciones de cada uno de los elementos de carga (es decir, aplicamos el principio de superposición).

El campo eléctrico creado en  $P$  por un elemento de carga  $\Delta q_i$  viene dado por la expresión:

$$\Delta E_i = k \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

donde el índice  $i$  se refiere al elemento  $i$ -ésimo de la distribución,  $r_i$  es la distancia del elemento al punto  $P$ , y  $\hat{r}_i$  es el vector unitario dirigido del elemento al punto. El campo eléctrico total  $\vec{E}$  en  $P$  debido a todos los elementos de la distribución de carga es, aproximadamente,

$$\vec{E} \approx k \sum_i \frac{\Delta q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$$

Ahora, aplicamos la simplificación de que la distribución de carga es continua, es decir, hacemos que los elementos de carga sean infinitesimalmente pequeños. Con esta suposición, el campo total en  $P$  en el límite  $\Delta q_i \rightarrow 0$ , se convierte en:

$$\vec{E} = k \int \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (1.25)$$

Campo eléctrico de una distribución continua de carga

donde  $dq$  es una carga infinitesimalmente pequeña y la integración se realiza para toda la distribución de carga que está creando el campo eléctrico. La integración es una operación vectorial y debe ser realizada cuidadosamente. Puede calcularse en términos de componentes, o pueden utilizarse argumentos de simetría para reducirla a una integral escalar. Ilustraremos este tipo de cálculos con varios ejemplos, en los que supondremos que la carga se encuentra distribuida *uniformemente* a lo largo de una línea, de una superficie o de un volumen. Al realizar cálculos de este tipo, es conveniente utilizar el concepto de **densidad de carga** con el siguiente convenio:

- Si una carga total  $Q$  está distribuida uniformemente en un volumen  $V$ , la **densidad volumétrica de carga**  $\rho$  se define como:

$$\rho \equiv \frac{Q}{V} \quad (1.26)$$

Densidad volumétrica de carga

- Si  $Q$  está distribuida uniformemente sobre una superficie de área  $A$ , la **densidad superficial de carga**  $\sigma$  se define como:

$$\sigma \equiv \frac{Q}{A} \quad (1.27)$$

Densidad superficial de carga

- Si  $Q$  está distribuida uniformemente a lo largo de una línea de longitud  $\ell$ , la **densidad lineal de carga**  $\lambda$  se define como:

$$\lambda \equiv \frac{Q}{\ell} \quad (1.28)$$

Densidad lineal de carga

Podemos calcular el potencial creado por una distribución continua de carga de una forma análoga. Así, el potencial creado por un elemento  $\Delta q_i$  se puede expresar de la forma:

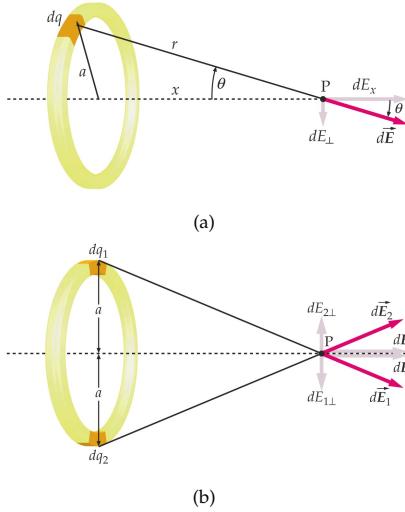
$$\Delta V_i = k \frac{\Delta q_i}{r_i}$$

por lo que el potencial creado por la distribución continua de carga será:

$$V = k \int \frac{dq}{r} \quad (1.29)$$

Potencial eléctrico de una distribución continua de carga

---

**EJEMPLO 1.4 Campo eléctrico y potencial en el eje de un anillo cargado**


La figura (a) muestra un anillo con una carga total  $Q$  uniformemente distribuida. El campo  $d\vec{E}$  en un punto  $P$  del eje debido a la carga elemental  $dq$  viene indicado en la figura (a). Este campo tiene una componente  $dE_x$  dirigida a lo largo del eje del anillo y una componente  $dE_{\perp}$  perpendicular al eje. Los elementos diferenciales de la componente perpendicular del campo se anulan por pares, tal como se puede ver en la figura (b). Siempre existe, para un elemento diferencial de carga  $dq_1$ , otro elemento simétrico  $dq_2$  de tal forma que la suma de las componentes del campo perpendiculares al eje  $x$ , generadas por todos los elementos del anillo, es cero. Por tanto, el campo resultante debido al anillo completo debe estar dirigido a lo largo del eje del anillo.

La componente axial del campo debido al elemento de carga indicado es:

$$dE_x = k \frac{dq}{r^2} \cos \theta = k \frac{dq}{r^2} \frac{x}{r} = k \frac{dq x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

en donde

$$r^2 = x^2 + a^2$$

y

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

El campo debido al anillo completo cargado es

$$E_x = \int_{\text{anillo}} \frac{k x dq}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

Como  $x$  no varía al integrar para los elementos de carga, podemos sacarlo fuera de la integral. Por lo tanto,

$$E_x = \frac{kx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \int_{\text{anillo}} dq$$

o

$$E_x(x) = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (1.30)$$

Para calcular el potencial aplicamos la ecuación (1.29):

$$V = \int_{\text{anillo}} \frac{k dq}{r} = \int_{\text{anillo}} \frac{k dq}{\sqrt{x^2 + a^2}}$$

De nuevo podemos sacar  $x$  fuera de la integral y se obtiene:

$$V(x) = \frac{kQ}{\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (1.31)$$

Podemos utilizar la ecuación (1.24) para calcular el campo a partir del potencial y comprobar que coincide con (1.30). Como  $V$  depende solamente de  $x$ :

$$E_x = -\frac{dV}{dx} = \frac{kQx}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

## 1.6. Teorema de Gauss

La descripción cualitativa del campo eléctrico mediante líneas de campo está relacionada con una ecuación matemática denominada teorema de Gauss. Para cargas estáticas el teorema de Gauss y la ley de Coulomb son equivalentes. Este teorema permite calcular fácilmente los campos eléctricos que resultan de distribuciones simétricas de carga, tales como una corteza esférica o un hilo infinito. A continuación daremos un argumento plausible del teorema de Gauss basado en las propiedades de las líneas de campo eléctrico.

Se entiende por superficie cerrada aquella que divide el espacio en dos regiones diferentes: la interior y la exterior a dicha superficie. La Figura 1.7a muestra una superficie de forma arbitraria que encierra un dipolo. El número de líneas de campo eléctrico que salen de la carga positiva y cruzan la superficie, saliendo del recinto limitado por esta, depende de donde se dibuje la superficie, pero toda línea que cruza la superficie para salir la vuelve a cruzar para entrar. Para contar el número neto de líneas que salen de la superficie, debe tomarse cualquier línea que la cruce del interior como +1 y cualquier penetración desde el exterior como -1. Así pues, para la superficie indicada (Figura 1.7a), el balance total de líneas que cruzan la superficie es cero. Para superficies que encierran otras distribuciones de carga, como ocurre en la figura 1.7b, el número neto de líneas que sale por cualquier superficie que encierra las cargas es proporcional a la carga encerrada dentro de dicha superficie. Este es un enunciado cualitativo del teorema de Gauss.

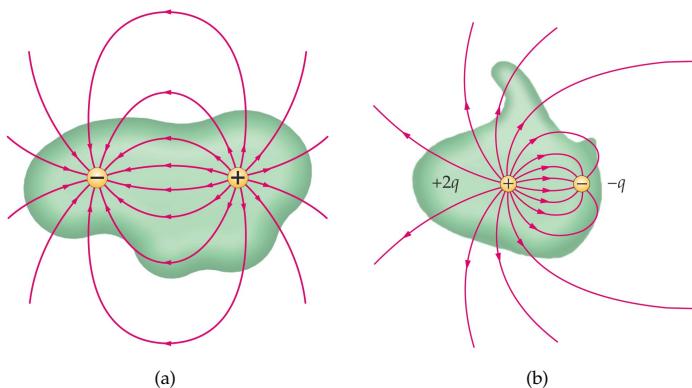
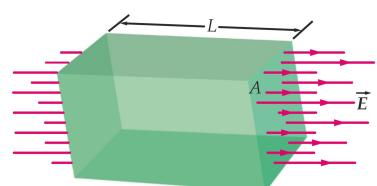


FIGURA 1.7: (a) Dipolo eléctrico encerrado en una superficie de forma arbitraria. El número de líneas que abandonan la superficie es exactamente igual al número de líneas que entran en ella sin que importe dónde se dibuje la superficie, siempre que se encierran dentro de ella ambas cargas del dipolo. (b) Superficie de forma arbitraria que incluye las cargas  $+2q$  y  $-q$ . Las líneas de campo que terminan en  $-q$  o bien no pasan a través de la superficie o bien salen y vuelven a entrar. El número neto de líneas que salen y no vuelven a entrar, el mismo que correspondería a una sola carga  $+q$ , es proporcional a la carga neta dentro de la superficie.

### 1.6.1. Flujo eléctrico

La magnitud matemática que está relacionada con el número de líneas de campo que atraviesa una superficie se llama **flujo eléctrico**  $\phi$ . Para una superficie perpendicular a  $\vec{E}$  (ver figura) se define como el producto del módulo del campo  $E$  y el área  $A$ :

$$\phi = EA$$



Las unidades del flujo eléctrico son  $N \cdot m^2/C$ . Como el campo eléctrico es proporcional al número de líneas por unidad de área, el flujo eléctrico es proporcional al número de líneas de campo que atraviesan el área.

En la figura adyacente, la superficie de área  $A_2$  no es perpendicular al campo eléctrico  $\vec{E}$ . Sin embargo, el número de líneas que atraviesan el área  $A_2$  es el mismo que atraviesa el área  $A_1$ , que es perpendicular a  $\vec{E}$ . Las áreas están relacionadas por:

$$A_1 = A_2 \cos \theta$$

donde  $\theta$  es el ángulo existente entre  $\vec{E}$  y el vector unitario  $\hat{n}$  perpendicular a la superficie  $A_2$ , como se indica en la figura. El flujo de un campo uniforme a través de una superficie viene definido entonces por

$$\phi = \vec{E} \cdot \hat{n} A = EA \cos \theta = E_n A \quad (1.32)$$

en donde  $E_n = \vec{E} \cdot \hat{n}$  es la componente de  $\vec{E}$  perpendicular, o normal, a la superficie.

La figura muestra una superficie de forma arbitraria sobre la cual el campo  $\vec{E}$  puede variar. Si el área  $\Delta A_i$  del elemento de área que elegimos es suficientemente pequeña, podemos considerar a este elemento como un plano y la variación del campo eléctrico a través del elemento puede despreciarse. El flujo del campo eléctrico a través de este elemento es:

$$\Delta\phi_i = E_{n,i} \Delta A_i = \vec{E} \cdot \hat{n}_i \Delta A_i$$

donde  $\hat{n}_i$  es el vector unitario perpendicular al elemento de área y  $E_i$  es el campo eléctrico en todo este elemento de área. Si la superficie es curva, los vectores unitarios de los distintos elementos tendrán direcciones diferentes. El flujo total a través de la superficie es la suma de  $\Delta\phi_i$  extendida a todos los elementos. En el límite, cuando el número de elementos se aproxima a infinito y el área de cada elemento tiende a cero, esta suma se convierte en una integral. La definición general de flujo eléctrico es, por lo tanto:

**Flujo eléctrico. Definición**

$$\phi = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA \quad (1.33)$$

en donde el índice  $S$  nos recuerda que estamos integrando sobre una superficie.

En una superficie *cerrada* el vector normal unitario  $\hat{n}$  se define de modo que está dirigido hacia fuera en cada punto. La integral extendida a una superficie cerrada se indica por el símbolo  $\oint$ . El flujo neto a través de una superficie cerrada viene dado, por lo tanto, por:

**Flujo neto a través de una superficie cerrada**

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA = \oint_S E_n dA \quad (1.34)$$

El flujo total o neto  $\phi_{\text{neto}}$  a través de la superficie cerrada es positivo o negativo dependiendo de que  $\vec{E}$  sea predominantemente hacia fuera o hacia dentro de la superficie. En los puntos de la superficie en que  $\vec{E}$  está dirigido hacia dentro,  $E_n < 0$ .

### 1.6.2. Enunciado cuantitativo del teorema de Gauss

La figura muestra una superficie esférica de radio  $R$  con su centro en la carga puntual  $Q$ . El campo eléctrico en un punto cualquiera de la superficie es perpendicular a la superficie y tiene el módulo

$$E_n = k \frac{Q}{R^2}$$

El flujo neto de  $\vec{E}$  a través de esta superficie esférica es:

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_n dA = E_n \oint dA$$

en donde  $E_n$  puede salir de la integral por ser constante en todos los puntos. La integral de  $dA$  extendida a toda la superficie es precisamente el área total igual a  $4\pi R^2$ . Con este valor y sustituyendo  $kQ/R^2$  por  $E_n$  se obtiene:

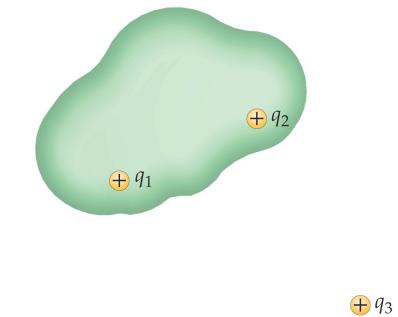
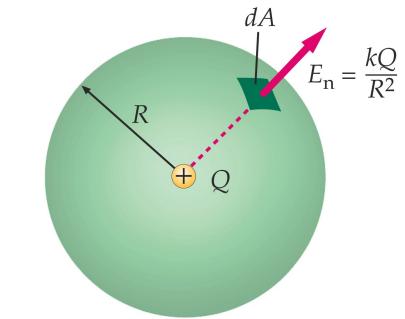
$$\phi_{\text{neto}} = k \frac{Q}{R^2} \cdot 4\pi R^2 = 4\pi k Q = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (1.35)$$

donde hemos tenido en cuenta que, según la ecuación (1.4),  $4\pi k = 1/\epsilon_0$ . Así pues, el flujo neto a través de una superficie esférica con una carga puntual en el centro es independiente del radio de la esfera y es igual al valor de dicha carga dividido por  $\epsilon_0$ . Esto está de acuerdo con nuestras observaciones anteriores de que el número neto de líneas que atraviesan una superficie es proporcional a la carga neta interior a la superficie. Este número de líneas es el mismo para cualquier superficie que encierre a la carga, independientemente de su forma. Así, el flujo neto a través de cualquier superficie que rodea a una carga puntual  $Q$  es igual a  $Q/\epsilon_0$ .

Podemos ampliar este resultado a sistemas de más de una carga puntual. La superficie de la figura encierra dos cargas puntuales  $q_1$  y  $q_2$  y existe una tercera carga puntual  $q_3$  fuera de la superficie. Puesto que el campo eléctrico en cualquier punto de la superficie es el vector suma de los campos eléctricos producidos por cada una de las tres cargas, el flujo neto  $\phi_{\text{neto}}$  a través de la superficie es precisamente la suma de los flujos debidos a las cargas individuales. El flujo originado por la carga  $q_3$ , que está fuera de la superficie, es cero debido a que cada línea de campo procedente de  $q_3$  que entra en la superficie en un punto abandona la misma en algún otro punto. El flujo a través de la superficie debido a la carga  $q_1$  es  $q_1/\epsilon_0$  y el debido a la carga es  $q_2/\epsilon_0$ . El flujo neto a través de la superficie es igual a  $(q_1 + q_2)/\epsilon_0$  que puede ser positivo, negativo o cero, dependiendo de los signos y valores de las dos cargas.

En resumen, el flujo neto a través de cualquier superficie es igual a la carga neta dentro de la superficie dividida por  $\epsilon_0$ :

$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E_n dA = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0} \quad (1.36)$$



Teorema de Gauss

Este es el **teorema de Gauss**. Su validez depende del hecho de que el campo eléctrico debido a una carga puntual aislada varía inversamente con el cuadrado de la distancia desde la carga. Esta propiedad del campo eléctrico es la que hace posible que exista un número fijo de líneas de campo desde

una carga y que la densidad de líneas sea proporcional a la intensidad del campo.

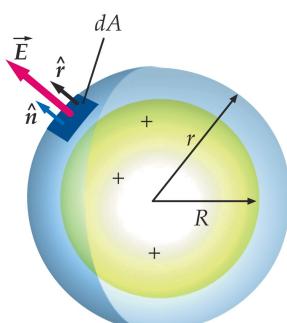
El teorema de Gauss es válido para todas las superficies y distribuciones de carga. Como veremos a continuación, puede utilizarse para calcular el campo eléctrico en algunas distribuciones especiales de carga con altos grados de simetrías. En los campos eléctricos que resultan de distribuciones de carga estáticas, el teorema de Gauss y la ley de Coulomb son equivalentes. Sin embargo, el teorema de Gauss es más general, pues también puede aplicarse a distribuciones de carga no estáticas.

### 1.6.3. Cálculo del campo eléctrico mediante el teorema de Gauss

El campo eléctrico debido a una distribución de carga altamente simétrica puede calcularse fácilmente mediante el teorema de Gauss. En primer lugar determinaremos una superficie cerrada imaginaria llamada **superficie gaussiana**. La superficie gaussiana óptima es aquella en la que en cada una de sus partes, o bien  $E_n$  es constante y  $\vec{E}$  y  $\hat{n}$  son paralelos o perpendiculares, o bien  $\vec{E}$  es cero. Con estas condiciones, el flujo que atraviesa cada una de las partes es  $E_n A$ , y de esta forma el teorema de Gauss permite relacionar el campo con las cargas contenidas dentro de la superficie gaussiana elegida.

#### Campo debido a una distribución de carga con simetría esférica

Consideremos una **esfera maciza** y homogénea de radio  $R$  con densidad de carga uniforme  $\rho$  y carga total  $Q$ . Calcularemos en primer lugar el campo eléctrico en un *punto exterior* a la esfera. Puesto que la distribución de carga tiene simetría esférica, elegimos una superficie gaussiana de radio  $r > R$  concéntrica a la esfera, como muestra la figura. Por simetría, el campo  $\vec{E}$  debe ser radial y su módulo dependerá sólo de la distancia  $r$  respecto al centro de la esfera. Por tanto, el campo será perpendicular a la superficie gaussiana (es decir, paralelo a  $\hat{n}$ ) y constante en módulo en todos los puntos de la misma. Así, el flujo que atraviesa la superficie es



$$\phi_{\text{neto}} = \oint_S E \cdot \hat{n} dA = \oint_S E_r dA = E_r \oint_S dA = 4\pi r^2 E_r(r)$$

Como la carga total dentro de la superficie gaussiana es la carga total  $Q$  de la esfera, resulta, por el teorema de Gauss:

$$\phi_{\text{neto}} = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Igualando ambas expresiones se llega a:

$$E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} = k \frac{Q}{r^2} \quad (\text{para } r > R) \quad (1.37)$$

Así pues, el campo eléctrico en el exterior de una esfera maciza y homogénea de carga  $Q$  es el mismo que tendría una carga puntual  $Q$  situada en el centro de la esfera.

Para calcular el campo en el *interior* de la esfera elegimos una superficie gaussiana esférica de radio  $r < R$  concéntrica a la esfera maciza, como se muestra en la figura

Aplicando el teorema de Gauss, llegamos a la expresión

$$E_r(r) = \frac{Q_{\text{interior}}}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

donde  $Q_{\text{interior}}$  es la carga en el interior de la superficie gaussiana, que en este caso será menor que la carga total  $Q$  de la esfera. Como la esfera es maciza,  $Q_{\text{interior}} = \rho V$ , donde  $V = 4\pi r^3/3$  es el volumen interceptado por la superficie gaussiana. Introduciendo este valor en la ecuación anterior se llega a:

$$E_r(r) = \frac{\rho}{3\epsilon_0} r$$

Teniendo en cuenta que:

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

y la relación (1.4) entre  $\epsilon_0$  y  $k$ , nos queda:

$$E_r(r) = k \frac{Q}{a^3} r \quad (\text{para } r < R) \quad (1.38)$$

Este valor de  $E(r)$  difiere del obtenido en la ecuación (1.37). En este caso,  $E \rightarrow 0$  cuando  $r \rightarrow 0$ . La figura adyacente muestra el campo  $E$  en función de  $r$ . Obsérvese que las expresiones (1.37) y (1.38) coinciden en  $r = R$ .

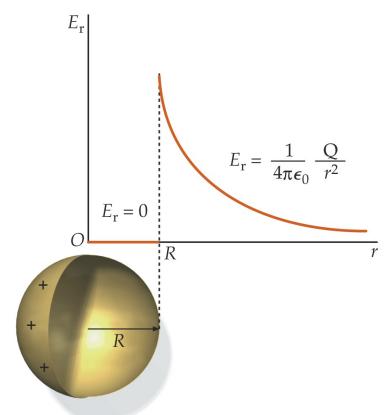
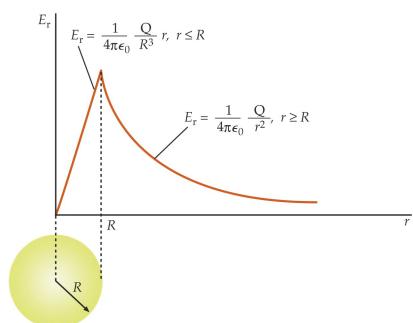
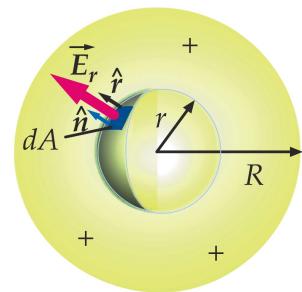
En el caso de una **corteza esférica**, el campo en el exterior no cambia, pero sí lo hace el campo en el interior. Si tomamos una esfera gaussiana cuyo radio es menor que el de la esfera, la carga encerrada en su interior será cero ( $Q_{\text{interior}} = 0$ ), por lo que, según el teorema de Gauss, el campo en el interior será cero. La figura adyacente muestra la función  $E(r)$  para una corteza esférica de radio  $R$ . Obsérvese que el campo es discontinuo en  $r = R$ , donde la densidad de carga superficial es  $\sigma = Q/(4\pi R^2)$ . Justamente fuera de la corteza, para  $r \rightarrow R^+$ , el campo eléctrico  $E_r$  tiende a  $Q/(4\pi\epsilon_0 R^2) = \sigma/\epsilon_0$ . Como el campo  $E_r$  tiende a cero cuando  $r \rightarrow R^-$ , el campo eléctrico es discontinuo en la magnitud  $\sigma/\epsilon_0$  al atravesar la esfera. Este resultado es general para cualquier distribución de carga con una discontinuidad en el campo generado.

### Potencial debido a una distribución de carga con simetría esférica

A continuación determinaremos el potencial debido a una **esfera maciza** de radio  $R$  con densidad de carga uniforme  $\rho$  y carga total  $Q$ . Estamos interesados en hallar el potencial en todos los puntos del interior, del exterior y en la superficie de la esfera. Para determinar el potencial, usaremos la expresión  $dV = \vec{E} \cdot d\vec{l}$ , donde  $\vec{E}$  es el campo calculado usando el teorema de Gauss [ecuaciones (1.37) y (1.38)].

En el exterior de la esfera, el campo es radial y su valor es (1.37):

$$\vec{E}(r) = k \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$



La variación de potencial correspondiente a un desplazamiento  $d\vec{r}$  realizado fuera de la corteza es, por tanto

$$dV = -\vec{E} \cdot d\vec{l} = -k \frac{Q}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{l}$$

El producto escalar  $\hat{r} \cdot d\vec{l}$  es  $dr$  (la componente de  $d\vec{l}$  en la dirección de  $\hat{r}$ ). Integrando a lo largo de cualquier camino desde el punto  $r$  hasta el infinito, obtenemos

$$V(r) - V_\infty = - \int_\infty^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = -kQ \int_\infty^r \frac{dr}{r^2} = \frac{kQ}{r}$$

Si se toma como origen de potenciales el infinito ( $V_\infty = 0$ ) obtenemos:

$$V(r) = \frac{kQ}{r} \quad (\text{para } r > R) \quad (1.39)$$

que, como cabía esperar, es el potencial creado por una carga puntual  $Q$  situada en el centro de la circunferencia. Puesto que **el potencial es continuo**, podemos utilizar la expresión anterior para obtener el potencial justo en la superficie de la esfera. Es decir,

$$V(r) = \frac{kQ}{R} \quad (\text{para } r = R) \quad (1.40)$$

Para el potencial en el interior, resolvemos la integral anterior, pero teniendo en cuenta que el campo viene dado por (1.38) y que los límites de la integral deben corresponder a puntos del interior de la esfera. En consecuencia, debemos integrar entre  $R$  y  $r$ :

$$V(r) - V(R) = - \int_R^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = -k \frac{Q}{R^3} \int_R^r r dr = k \frac{Q}{R^3} (R^2 - r^2)$$

Sustituyendo el valor de  $V(R)$  dado por la expresión (1.40) y despejando  $V(r)$  tenemos

$$V(r) = k \frac{Q}{2R} \left( 3 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (\text{para } r < R) \quad (1.41)$$

La figura muestra una gráfica de  $V(r)$  para esta distribución de carga.

El campo en el exterior de una **corteza esférica** es el mismo que en una esfera maciza, por lo que el potencial para esta distribución vendrá dado por también por (1.39). Análogamente, el potencial justo en la superficie puede expresarse por la ecuación (1.40). Como el campo es nulo en el interior de la esfera (al no haber carga en su interior), el potencial debe ser constante (ya que la derivada de una constante es cero). Así, el potencial en el interior de la corteza esférica será el mismo que en la superficie. La figura representa la dependencia de esta función potencial.

### Campo debido a una distribución de carga con simetría cilíndrica

Una distribución de carga tiene simetría cilíndrica si desde todos los puntos de otra superficie cilíndrica cualquiera de longitud infinita y coaxial a la

distribución se observa el mismo sistema electrostático. Consideremos una distribución de carga con estas condiciones. Para calcular el campo eléctrico debido a distribuciones de carga con esta simetría utilizaremos una superficie gaussiana cilíndrica. Ilustraremos este caso calculando el campo eléctrico a una distancia  $r$  de una carga lineal (hilo) infinitamente larga de densidad de carga lineal uniforme  $\lambda$ .

Como consecuencia de la simetría del sistema, el campo es perpendicular a la línea de carga, apuntando hacia fuera de ésta si la densidad  $\lambda$  es positiva y con la misma dirección y sentido opuesto si  $\lambda$  es negativa. Además, el módulo del campo depende exclusivamente de la distancia radial del punto de observación a la línea cargada. Por lo tanto, la superficie gaussiana que elegimos es la de un cilindro de radio  $R$  y longitud  $L$ , cuyo eje sea el hilo (ver figura). Esta superficie se compone de dos bases y una superficie lateral. En cada punto de esta,  $\hat{n} = \hat{R}$ , siendo  $\hat{R}$  el vector unitario en la dirección radial del sistema de coordenadas cilíndricas:

$$\phi_{SL} = \vec{E} \cdot \hat{n} A_{SL} = \vec{E} \cdot \hat{R} A_{SL} = E_R \cdot 2\pi RL$$

Calculamos el flujo que sale por las bases. En estas los vectores  $\vec{E}$  y  $\hat{n}$  son perpendiculares:

$$\phi_{base,izquierda} = \phi_{base,derecha} = \vec{E} \cdot \hat{n} A_{base} = 0$$

Por tanto, el flujo neto será igual al flujo que atraviesa la superficie lateral:  $\phi_{neto} = \phi_{SL}$ .

Aplicamos finalmente el teorema de Gauss para relacionar el campo con la carga total encerrada en la superficie gaussiana,  $Q_{interior}$ , que será la carga contenida en el segmento del hilo de longitud  $L$  encerrado por el cilindro, es decir,  $Q_{interior} = \lambda L$ . Así,

$$\phi_{neto} = \frac{Q_{interior}}{\epsilon_0} \rightarrow E_R(R) \cdot 2\pi RL = \frac{\lambda L}{\epsilon_0}$$

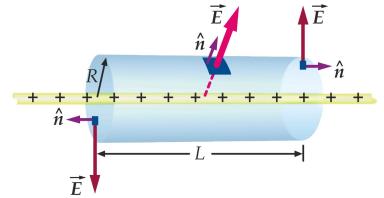
Despejando  $E_R(R)$  tenemos que:

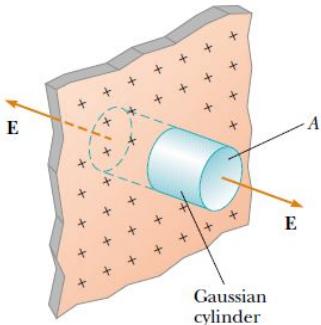
$$E_R(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R} \quad (1.42)$$

Es importante destacar que aunque para usar el teorema de Gauss en el cálculo de campos eléctricos es necesaria la existencia de un alto grado de simetría, este teorema es válido para cualquier superficie que rodee cualquier distribución de carga. En el cálculo anterior fue necesario suponer que el punto en el que se medía el campo estaba muy alejado de los extremos del hilo, de tal modo que  $E_n$  fuese constante en todos los puntos de la superficie gaussiana cilíndrica (esto equivale a suponer que a la distancia  $R$  del hilo, este parece infinitamente largo). En las proximidades del extremo de una carga lineal de longitud finita no podemos suponer que  $\vec{E}$  es perpendicular a la superficie cilíndrica o que  $E_n$  es constante para todos los puntos de la misma y, por lo tanto, no es útil el teorema de Gauss para calcular el campo eléctrico.

### Campo debido a un plano infinito

Calcularemos finalmente el campo eléctrico creado por una lámina plana infinita, con densidad de carga superficial  $\sigma$ .





La simetría nos indica que  $\vec{E}$  debe ser perpendicular al plano cargado y que tendrá el mismo módulo en puntos situados a ambos lados de la lámina y a la misma distancia de esta.

El hecho de que  $\vec{E}$  esté siempre dirigido alejándose de las cargas positivas nos indica que el sentido de  $\vec{E}$  a un lado de la lámina debe ser opuesto al que tiene en el lado opuesto, como se muestra en la figura. Una superficie gaussiana que refleja la simetría del problema es un pequeño cilindro (o caja de pastillas) perpendicular al plano cuyas bases tienen área  $A$  y son equidistantes de la lámina. Puesto que  $\vec{E}$  es paralelo a la superficie lateral, y por lo tanto perpendicular a  $\hat{n}$  en cada punto de la superficie,  $\vec{E} \cdot \hat{n} = 0$  y la superficie lateral no contribuye al flujo neto. En las bases del cilindro, el campo será constante y paralelo a  $\hat{n}$ , por lo que  $\vec{E} \cdot \hat{n} = E$ ; el flujo que atraviesa cada base es  $EA$ . Por tanto, el flujo total a través de la superficie gaussiana es  $\phi_{\text{neto}} = 2EA$ .

Teniendo en cuenta que la carga total en el interior de la superficie gaussiana es  $Q_{\text{interior}} = \sigma A$ , podemos utilizar el teorema de Gauss para obtener

$$\phi_{\text{neto}} = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0} \rightarrow 2EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

Es decir,

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.43)$$

Puesto que la distancia entre las bases y la lámina no aparece en la ecuación anterior, podemos concluir que este valor del campo eléctrico es válido a cualquier distancia del plano. Es decir, el campo es uniforme en todo el espacio.

## Tema 2

# Electrostática en la materia

---

### 2.1. Introducción

Al comenzar el estudio de la electrostática describimos una serie de experimentos básicos que ponían de manifiesto las propiedades eléctricas de la materia tales como la electrización por frotamiento o la carga por inducción. Estas experiencias nos llevaban ya a agrupar las sustancias dentro de dos grandes grupos: **conductores** en los que la carga eléctrica puede moverse de un lugar a otro, y **aislantes o dieléctricos** en los que las cargas están atrapadas en posiciones fijas. Así, por ejemplo, si frotamos una barra metálica en lugar de vidrio, madera o ámbar, no observamos efectos de naturaleza eléctrica ya que el exceso de carga, al poder moverse en el metal, escapará a nuestra mano y, en definitiva, a tierra. Será necesario aislar la barra de nuestra mano con un mango para poder observar fenómenos eléctricos.

En este tema se mostrarán las propiedades eléctricas de conductores en equilibrio electrostático. A continuación se considerarán las propiedades de los condensadores, que son dispositivos que permiten almacenar carga. Finalmente, se estudiará la influencia que tiene la introducción de un dieléctrico en el interior de un condensador y, a partir de ahí, inferir una serie de propiedades generales de los dieléctricos.

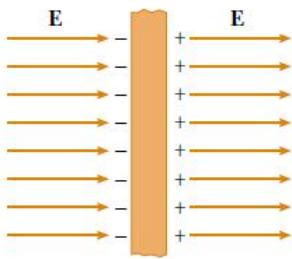
### 2.2. Conductores en equilibrio electrostático

Un buen conductor eléctrico, como el cobre, contiene cargas (electrones) que no se encuentran ligadas a ningún átomo, sino que son libres de moverse por todo el metal. Si no hay desplazamiento de cargas en el interior del conductor, se dice que este se encuentra en **equilibrio electrostático**. En esta situación, todas las cargas del conductor se consideran partículas en equilibrio, experimentando una fuerza total nula. Como veremos, un conductor aislado (es decir, no conectado a tierra) en equilibrio electrostático tiene las siguientes propiedades:

1. El campo eléctrico es nulo en cualquier punto situado en el interior del conductor.
2. Si el conductor aislado tiene una carga neta, se encontrará distribuida únicamente sobre su superficie.

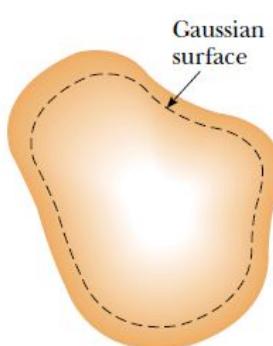
3. El campo eléctrico justo en el exterior del conductor cargado es perpendicular a la superficie de este y tiene módulo  $\sigma/\epsilon_0$ , donde  $\sigma$  es la densidad superficial de carga en dicho punto.
4. Todos los puntos de un conductor se encuentran al mismo potencial eléctrico.
5. Si el conductor tiene forma irregular, la densidad superficial de carga es máxima en los puntos en los que el radio de curvatura es mínimo.

Comprobaremos estas propiedades en el siguiente análisis.



La primera propiedad puede entenderse considerando un bloque rectangular conductor situado en el seno de un campo eléctrico exterior  $\vec{E}$  (ver figura). El campo eléctrico en el interior del conductor debe ser nulo, puesto que hemos supuesto que el conductor se encuentra en equilibrio electrostático. Si el campo fuera distinto de cero, las cargas libres del conductor se acelerarían bajo la acción de la fuerza eléctrica. Sin embargo, este movimiento de electrones significaría que el conductor no se encuentra en equilibrio electrostático. Por tanto, la existencia de equilibrio electrostático sólo tiene sentido si el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor.

Veamos cómo puede conseguirse un campo eléctrico nulo en el interior del conductor. Antes de aplicar el campo externo, los electrones libres se encuentran distribuidos uniformemente sobre el conductor. Al aplicar el campo externo, los electrones libres aceleran hacia la izquierda del conductor de la figura anterior, creando un plano de carga negativa en la superficie izquierda. El movimiento de electrones hacia la izquierda, crea un plano de carga positiva en la superficie derecha. Estos dos planos de carga, a su vez, crean un campo eléctrico adicional en el interior del conductor que se opone al campo externo. A medida que los electrones se mueven, la densidad superficial de carga aumenta hasta que el módulo del campo interno es igual al del campo externo, dando como resultado un campo eléctrico neto nulo en el interior del conductor.



Podemos utilizar el teorema de Gauss para comprobar la segunda propiedad de los conductores en equilibrio electrostático. La figura muestra un conductor de forma arbitraria. Se ha dibujado una superficie gaussiana justo en el interior del conductor y que puede estar tan cerca de la superficie de este como deseemos. Como hemos visto, el campo en cualquier punto del interior del conductor en equilibrio electrostático es nulo. Por tanto, el campo eléctrico debe ser nulo en cada punto de esta superficie gaussiana. A partir de este resultado y del teorema de Gauss, podemos concluir que la carga neta en el interior de la superficie gaussiana es cero. Puesto que no hay carga neta en el interior de la superficie gaussiana (que se encuentra arbitrariamente cerca de la superficie física del conductor), cualquier carga neta existente en el conductor debe encontrarse sobre la superficie del conductor. El teorema de Gauss no indica cómo está distribuida dicha carga sobre la superficie, sino únicamente que debe encontrarse en la superficie.

Podemos entender conceptualmente el hecho de que las cargas se sitúen sobre la superficie imaginando que colocamos muchas cargas en el centro del conductor. La repulsión mutua entre las cargas haría que se alejaran unas de otras tanto como pudieran, es decir, hasta la superficie.

Para comprobar la tercera propiedad, podemos usar una vez más el teorema de Gauss. Dibujamos una superficie gaussiana con forma de pequeño cilindro (caja de pastillas), con sus bases situadas paralelamente a la superficie

del conductor (ver figura). La altura del cilindro se toma infinitesimalmente pequeña, de forma que la superficie del conductor encerrada por aquel se pueda considerar plana. Parte del cilindro se encuentra en el exterior del conductor, mientras que otra parte se encuentra dentro. El campo es normal a la superficie del conductor, porque el conductor se encuentra en equilibrio electrostático: si  $\vec{E}$  tuviera una componente paralela a la superficie, las cargas libres se moverían por la superficie en la dirección de dicha componente, con lo que el conductor no se encontraría en equilibrio. Por tanto, no hay flujo a través de la superficie lateral del cilindro, puesto que  $\vec{E}$  es paralelo a la superficie lateral. Tampoco hay flujo a través de la base del cilindro que se encuentra en el interior del conductor, porque  $\vec{E}$  es igual a cero. Por tanto, el flujo neto a través de la superficie gaussiana se produce a través de la base externa del cilindro, donde el campo es perpendicular a la superficie. Así, el flujo neto a través de la superficie gaussiana es  $EA$ , donde  $E$  es el módulo del campo eléctrico justo en el exterior del conductor, y  $A$  es el área de la base del cilindro. Al aplicar el teorema de gauss a esta superficie tenemos:

$$\phi_{\text{neto}} = \frac{Q_{\text{interior}}}{\epsilon_0} \rightarrow EA = \frac{\sigma A}{\epsilon_0}$$

donde hemos utilizado que  $Q_{\text{interior}} = \sigma A$ . Despejando  $E$ , obtenemos

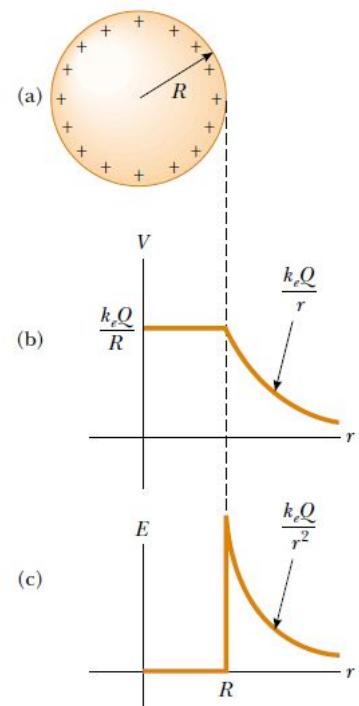
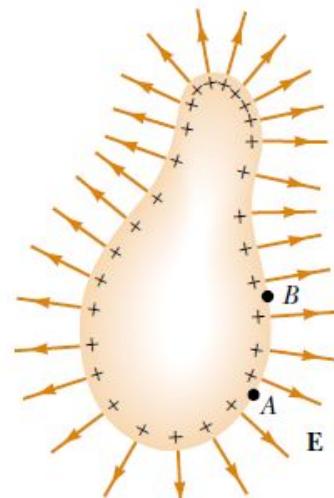
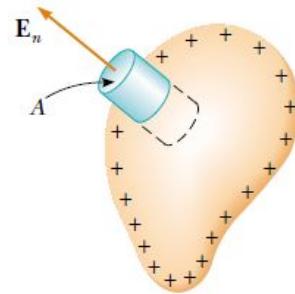
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.1)$$

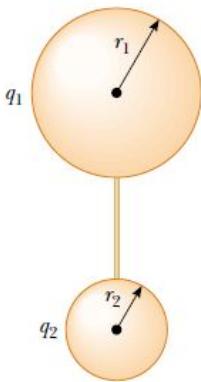
Demostraremos a continuación el punto número cuatro. Consideremos dos puntos  $A$  y  $B$  sobre la superficie de un conductor cargado, como se muestra en la figura. A lo largo de cualquier línea que conecte dichos puntos, trazada sobre la superficie, el campo  $\vec{E}$  es siempre perpendicular al desplazamiento  $d\vec{l}$  y, por tanto,  $\vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ . En consecuencia, la diferencia de potencial entre  $A$  y  $B$  es necesariamente cero. Es decir,  $V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ .

Este resultado es aplicable a cualquier par de puntos situados sobre la superficie. Por lo tanto,  $V$  es constante a lo largo de la superficie de un conductor cargado en equilibrio, y, en consecuencia, dicha superficie es equipotencial. Además, puesto que el campo eléctrico es nulo en el interior del conductor, podemos concluir que el potencial eléctrico es constante en todos los puntos del interior del conductor e igual al valor de dicho potencial sobre la superficie. Por consiguiente, no es necesario trabajo para desplazar una carga de prueba desde el interior de un conductor cargado hasta su superficie.

Por ejemplo, consideremos una esfera metálica maciza de radio  $R$  y carga positiva total  $Q$ , como la de la figura (a). El campo eléctrico en el exterior de la esfera tiene módulo  $kQ/r^2$  y se dirige radialmente hacia fuera. Teniendo en cuenta que la esfera conductora se comportaría como una corteza esférica, al estar toda la carga concentrada en la superficie del conductor, el potencial en el interior y en la superficie de la esfera debe ser  $kQ/R$  tomando origen de potenciales en el infinito, según vimos en el tema anterior. El potencial en el exterior de la esfera  $kQ/r$ . La figura (b) muestra una gráfica del potencial en función de  $r$  y la figura (c) muestra la variación del campo eléctrico en función de  $r$ .

Cuando un conductor esférico tiene carga neta distinta de cero, la densidad superficial de carga es uniforme, como se muestra en la figura (a). Sin embargo, si el conductor no es esférico, la densidad superficial de carga no es uniforme. Para determinar cómo se distribuye la carga sobre un conductor no esférico, imaginaremos un modelo simplificado en el que un conductor





no esférico se representa mediante el sistema de la figura. El sistema consiste en dos esferas conductoras cargadas de radios  $r_1$  y  $r_2$ , donde  $r_1 > r_2$ , conectados por un hilo conductor. Imaginemos que ambas esferas están lo suficientemente alejadas entre sí, de modo que el campo eléctrico de una no afecte a la otra (mucho más lejos de lo que se muestra en la figura). Como resultado, el campo eléctrico de cada esfera puede aproximarse mediante el campo debido a una distribución de carga con simetría esférica, que es el mismo que el de una carga puntual.

Puesto que ambas esferas se encuentran conectadas por un alambre conductor, el sistema completo puede considerarse como un único conductor y todos sus puntos se encuentran al mismo potencial. En particular, el potencial sobre la superficie de ambas esferas debe ser el mismo. Como el potencial de cada una de las esferas es el correspondiente al de una carga puntual, igualando el potencial sobre la superficie de cada una de las esferas tenemos:

$$k \frac{q_1}{r_1} = k \frac{q_2}{r_2} \quad \rightarrow \quad \frac{q_1}{r_1} = \frac{q_2}{r_2}$$

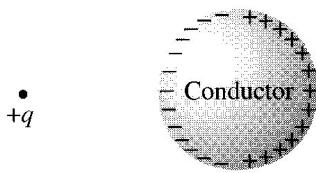
Por lo tanto, la esfera mayor tiene mayor carga. Sin embargo, si comparamos la densidad superficial de ambas esferas:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma_1} = \frac{\frac{q_2}{4\pi r_2^2}}{\frac{q_1}{4\pi r_1^2}} = \frac{q_2 r_1^2}{q_1 r_2^2} = \frac{r_2 r_1^2}{r_1 r_2^2} = \frac{r_1}{r_2}$$

Es decir, aunque la esfera mayor tiene una mayor carga total, la esfera menor tiene mayor densidad superficial de carga. Esta es la quinta propiedad mencionada anteriormente para conductores en equilibrio electrostático. Según la ecuación (2.1), el campo eléctrico cerca de la superficie de un conductor es proporcional a la densidad superficial de carga. Por lo tanto, el campo eléctrico cerca de la esfera más pequeña es mayor que el campo cerca de la esfera más grande.

Podemos generalizar este resultado diciendo que *el campo eléctrico creado por un conductor cargado es mayor cerca de las superficies convexas del conductor que tienen un radio de curvatura pequeño, y es menor cerca de las superficies convexas con radio de curvatura grande*. Las zonas puntiagudas de un conductor son regiones con radios de curvatura muy pequeños, con lo que el campo eléctrico es muy grande cerca de dichas zonas.

### Cargas inducidas en conductores en equilibrio. Cavidades



Como vimos al comienzo del Tema 1, si colocamos una carga  $+q$  cerca de un conductor descargado, ambas cargas se atraerán entre sí. Esto se debe a que la carga  $+q$  atraerá a las cargas negativas hacia la cara más cercana del conductor y repelerá a las cargas positivas hacia la cara más lejana (una manera alternativa de deducirlo es pensando que la carga se mueve de forma que cancela el campo de  $+q$  para puntos interiores del conductor donde el campo total debe ser cero). Como la carga negativa inducida es más cercana a  $+q$ , habrá una fuerza neta de atracción.

Otro mecanismo para inducir cargas en un conductor en equilibrio electrostático consiste en introducir una carga en el interior de una cavidad practicada en el interior del mismo, como muestra la figura. En ese caso, el campo

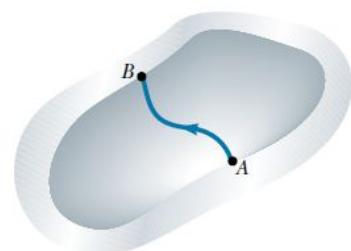
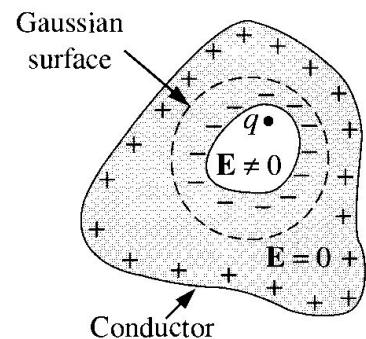
en el interior de la cavidad no puede ser cero. Sin embargo, como demostraremos a continuación, la cavidad y su contenido están eléctricamente aislados del mundo exterior debido al conductor que las rodea.

En primer lugar, podemos ver que se induce en las paredes de la cavidad una carga que es igual y opuesta a la carga interna, ya que si rodeamos la cavidad con una superficie gaussiana, el flujo a través de la misma será cero porque el campo eléctrico en todos los puntos de la superficie es nulo al estar en el interior de un conductor en equilibrio. Por tanto, debido al teorema de Gauss, la carga neta encerrada será cero. Como  $Q_{\text{interior}} = q + q_{\text{ind}} = 0$ , tendremos que la carga inducida en la superficie de la cavidad es  $q_{\text{ind}} = -q$ . El conductor no tenía inicialmente carga neta; por conservación de la carga, debe mantener nula la carga neta en el interior del conductor en todo instante, por lo que debe distribuirse una carga  $+q$  en la superficie externa del conductor (debe tenerse en cuenta que la carga sólo puede estar en las superficies del conductor; en este caso, la cara interna de la cavidad y la superficie externa del mismo). En consecuencia, la carga dentro de la cavidad se refleja en la superficie exterior del conductor.

Consideremos ahora un conductor de forma arbitraria con un hueco, tal como muestra la figura. Supongamos ahora que no hay cargas en el interior de la cavidad. Demostraremos que el campo eléctrico en el interior de la cavidad debe ser nulo independientemente de la distribución de carga sobre la superficie exterior del conductor. Es más, el campo eléctrico en el interior del hueco es nulo incluso si hay un campo eléctrico en el exterior del conductor.

Para demostrar esta afirmación, haremos uso del hecho de que cualquier punto de un conductor se encuentra al mismo potencial y, por lo tanto, dos puntos cualesquieras de la superficie del hueco,  $A$  y  $B$ , deben encontrarse al mismo potencial. Supongamos que existe un campo eléctrico  $\vec{E}$  en el interior del hueco. Podemos calcular la diferencia de potencial  $V_B - V_A$ , definida por la expresión  $V_B - V_A = - \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$ . Si  $\vec{E}$  es no nulo, siempre podemos encontrar un camino entre  $A$  y  $B$  a lo largo del cual  $\vec{E} \cdot d\vec{l}$  siempre es positivo (un camino en la dirección y sentido de  $\vec{E}$ ) con lo que la integral debe ser positiva. Pero, puesto que  $V_B - V_A = 0$ , la integral también debe ser cero. Esta contradicción sólo puede evitarse si  $\vec{E} = 0$  en el interior del hueco. Por lo tanto, podemos concluir que una cavidad rodeada por paredes conductoras es una región libre de campo eléctrico si no hay cargas en el interior del hueco. Además, no habrá carga en la superficie de la cavidad.

Este resultado tiene algunas aplicaciones interesantes. Por ejemplo, es posible apantallar un dispositivo electrónico, o incluso un laboratorio entero, frente a los campos externos rodeándolo con paredes conductoras, constituyendo el dispositivo conocido como **jaula de Faraday**. Este apantallamiento es necesario muy a menudo cuando se realizan medidas eléctricas muy precisas.

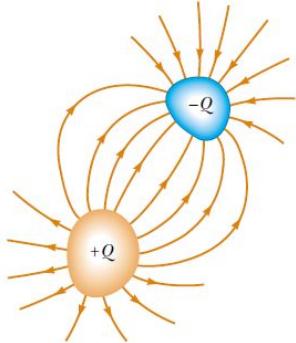


## 2.3. Condensadores

### 2.3.1. Capacidad

Al continuar nuestro estudio sobre la electricidad y el magnetismo, construiremos circuitos compuestos por elementos de circuito. Un circuito consta, generalmente, de una serie de componentes eléctricos (elementos de circui-

to) conectados entre sí por cables conductores, formando uno o más bucles cerrados. Dichos circuitos pueden considerarse como sistemas que tienen un tipo de comportamiento determinado. El primer elemento de circuito que estudiaremos es el **condensador**.



En general, un condensador consta de dos conductores de forma arbitraria, llamados **electrodos**. Consideremos dos conductores con una diferencia de potencial  $V \equiv V_+ - V_-$  entre ellos. Supongamos que ambos conductores tienen cargas iguales y de signo contrario, como se muestra en la figura. Esto puede conseguirse conectando dos conductores neutros a los polos de una batería. Después de hacer esto y desconectar la batería, la carga permanece en los conductores. Describiremos este comportamiento diciendo que el condensador es capaz de almacenar carga.

La diferencia de potencial entre los electrodos es proporcional a la carga  $Q$  del condensador, que se define como el valor de la carga en uno de los dos conductores. La **capacidad**  $C$  del condensador es el cociente entre la carga del condensador y el valor de la diferencia de potencial entre los electrodos:

Capacidad de un condensador

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.2)$$

Por definición, la capacidad es siempre una magnitud positiva. Puesto que la diferencia de potencial es siempre proporcional a la carga, el cociente  $Q/V$  es constante para un condensador determinado. La ecuación (2.2) indica que la capacidad de un sistema es una medida de la cantidad de carga que puede almacenarse en el condensador para una diferencia de potencial determinada.

A partir de la ecuación (2.2), vemos que las unidades de la capacidad en el Sistema Internacional son  $C/V$ , lo que se denomina **Faradio** (F) en honor a Michael Faraday. El Faradio es una unidad de capacidad muy grande. En la práctica, los dispositivos normales tienen capacidades que van de los microfaradios a los picofaradios.

La capacidad de un dispositivo depende de la estructura geométrica de los conductores. Para ilustrar este punto, calcularemos la capacidad de un conductor esférico aislado de radio  $R$  y carga  $Q$ <sup>1</sup>. Puesto que el potencial de la esfera es simplemente  $V = kQ/R$  (y  $V = 0$  para la esfera de radio infinito), la capacidad de la esfera es:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{kQ/R} = \frac{R}{k} = 4\pi\epsilon_0 R \quad (2.3)$$

Esta ecuación muestra que la capacidad de una esfera cargada aislada es proporcional al radio de la esfera, y es independiente de la carga y de la diferencia de potencial.

La capacidad de dos conductores cargados con sendas cargas de distinto signo puede calcularse de la siguiente manera. Se supone un valor de carga igual a  $Q$ , y se determina la diferencia de potencial utilizando las técnicas expuestas en el Tema 1. Una vez hecho esto, se utiliza la ecuación (2.2). Como puede suponerse, el cálculo es sencillo si la geometría del condensador es simple.

<sup>1</sup>Basándonos en la forma de las líneas de campo creadas por un conductor esférico, podemos aproximar el segundo conductor como una superficie esférica concéntrica con la primera, pero de radio infinito.

Aclararemos este proceso con una geometría conocida: las placas paralelas. En este ejemplo supondremos que los conductores cargados se encuentran separados por el vacío (el efecto de introducir un material entre los conductores se estudiará en la sección 2.4).

### 2.3.2. Condensador plano

Un condensador plano consta de dos placas paralelas de superficie  $A$ , separadas por una distancia  $d$ , como se muestra en la figura. Una placa tiene una carga igual a  $Q$  y la otra, una carga igual a  $-Q$ . La densidad superficial de carga en cada placa es  $\sigma = Q/A$ . Si las placas se encuentran muy próximas (en relación con su anchura y longitud), podemos realizar la aproximación de considerar las placas infinitas y el campo será uniforme entre las placas y nulo en cualquier otro punto, de acuerdo con la ecuación (1.43). Así, el campo eléctrico entre las placas es:

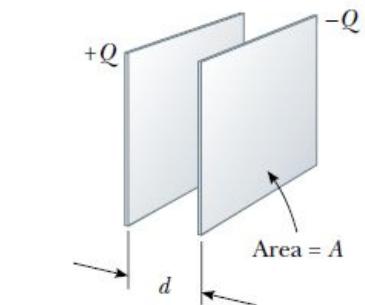
$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 A} \quad (2.4)$$

Puesto que el campo es uniforme, la diferencia de potencial entre las placas será

$$V = Ed = \frac{Qd}{\epsilon_0 A} \quad (2.5)$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación (2.2), tenemos que la capacidad es:

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \quad (2.6)$$

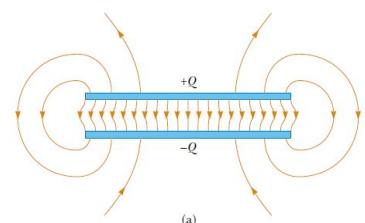


Capacidad de un condensador plano

Es decir, la capacidad de un condensador plano es proporcional a la superficie de las placas e inversamente proporcional a la distancia que las separa.

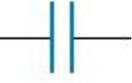
Como puede observarse en la definición de capacidad,  $C = Q/V$ , la cantidad de carga que un condensador determinado puede almacenar para una diferencia de potencial dada entre sus placas aumenta a medida que se incrementa la capacidad. Parece por lo tanto razonable, que un condensador construido con placas de gran superficie sea capaz de almacenar una gran cantidad de carga.

Un estudio cuidadoso de las líneas de campo eléctrico en un condensador plano revela que el campo es uniforme en la región central entre las placas, pero no lo es cerca de los bordes de las mismas. La figura muestra las líneas de campo eléctrico de un condensador de placas paralelas, y en ella se observa el campo no uniforme cerca del borde de las placas. Si la separación entre placas es pequeña comparada con las dimensiones de las placas, el **efecto de borde** puede ignorarse, y podemos utilizar el modelo simplificado en el que el campo eléctrico es uniforme entre las placas.



### 2.3.3. Asociaciones de condensadores

En los circuitos eléctricos se suelen asociar a menudo dos o más condensadores. La capacidad equivalente de un conjunto de condensadores puede

Capacitor symbol	
Battery symbol	
Switch symbol	

calcularse utilizando los métodos descritos en esta sección.

Al estudiar circuitos eléctricos utilizaremos una representación gráfica simplificada denominada **diagrama de circuito**. Dicho diagrama utiliza **símbolos de circuito** para representar los diferentes elementos de circuito. Los símbolos de circuito se conectan por medio de líneas rectas que representan los cables tendidos entre dichos elementos. La figura adyacente muestra los símbolos de un condensador, una batería y un interruptor abierto. Obsérvese que el símbolo de un condensador consta de dos líneas paralelas de igual longitud que representan las placas de un condensador plano, mientras que las líneas del símbolo de la batería son de diferente longitud. El polo positivo es el de mayor potencial y se representa mediante la línea más larga del símbolo de la batería.

### Asociación en paralelo

Dos condensadores conectados como se muestra en la representación gráfica de la Figura 2.1a forma lo que se denomina una **asociación de condensadores en paralelo**. La Figura 2.1b muestra el diagrama de circuito de esta combinación. Las placas izquierdas de ambos condensadores están conectadas mediante sendos cables al polo positivo de la batería, de modo que ambas placas se encuentran al mismo potencial que el polo positivo. De igual manera, las placas derechas se encuentran conectadas al polo negativo de la batería, y, estén, por tanto, al mismo potencial que dicho polo. La diferencia de potencial a través de la asociación de condensadores, es, por lo tanto, igual a la diferencia de potencial entre los terminales de la batería. Es más, la diferencia de potencial entre las placas de *cada condensador* es igual a la diferencia de potencial entre los terminales de la batería.

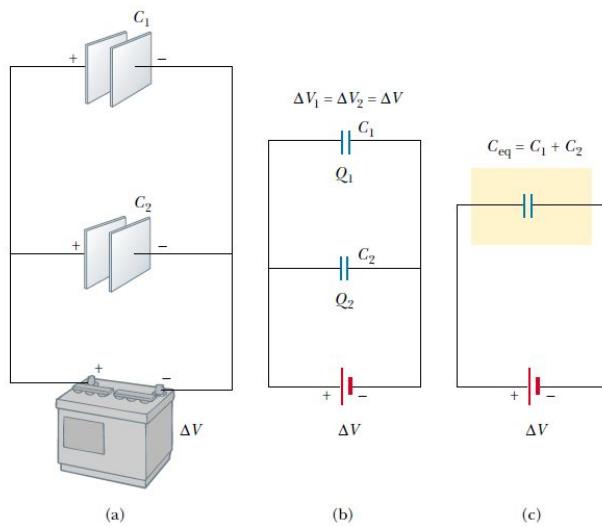


FIGURA 2.1: (a) Combinación en paralelo de dos condensadores conectados a una batería. (b) Diagrama de circuito de la combinación en paralelo. La diferencia de potencial es la misma a través de ambos condensadores. (c) Capacidad equivalente  $C_{eq} = C_1 + C_2$ .

Cuando ambos condensadores se conectan por primera vez al circuito, se transfieren electrones entre los cables y las placas, haciendo que las placas izquierdas se carguen positivamente y las placas derechas se carguen nega-

tivamente. El flujo de carga cesa cuando la diferencia de potencial entre las placas de los condensadores es igual a la de la batería. En este momento, los condensadores habrán alcanzado su carga máxima. Denominemos a la carga máxima de cada condensador  $Q_1$  y  $Q_2$ , respectivamente. Entonces, la carga total  $Q$  almacenada por ambos condensadores es

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad (2.7)$$

Supongamos que deseamos reemplazar ambos condensadores de la Figura 2.1b por un solo condensador equivalente de capacidad  $C_{\text{eq}}$ . Dicho condensador equivalente (Figura 2.1c) debe tener exactamente el mismo efecto en el circuito que los dos originales, es decir, debe almacenar una carga  $Q$  cuando se conecta a la batería. En la Figura 2.1c, vemos que la diferencia de potencial a través del condensador equivalente es  $V$ . Por lo tanto,

$$Q = C_{\text{eq}}V$$

y para cada condensador individual,

$$Q_1 = C_1V \quad Q_2 = C_2V$$

Sustituyendo dichos resultados en la ecuación (2.7) tenemos

$$C_{\text{eq}}V = C_1V + C_2V$$

o, lo que es lo mismo,

$$C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 \quad (2.8)$$

Si extendemos este resultado a una combinación en paralelo de  $N$  condensadores, la capacidad equivalente es

$$C_{\text{eq}} = \sum_{i=1}^N C_i \quad (2.9) \quad \text{Asociación en paralelo}$$

Es decir, vemos que *la capacidad equivalente de una asociación en paralelo de condensadores es la suma de las capacidades individuales de cada condensador, y es mayor que todas ellas.*

### Asociación en serie

Consideremos ahora dos condensadores conectados en serie, como se muestra en la Figura 2.2a. Para esta combinación de condensadores, el valor de la carga almacenada es igual en todas las placas.

Para ver por qué es esto cierto, estudiemos el proceso de transferencia de carga en detalle. Inicialmente, los condensadores están descargados, y, a continuación, se conecta la batería al circuito. Cuando se realiza esta conexión, la placa derecha de  $C_1$  y la placa izquierda de  $C_2$  constituyen un conductor aislado. Por lo tanto, la carga negativa que entra en una placa, procedente del cable que une a las dos, deberá ser igual a la carga positiva de la otra placa, para que el conductor aislado siga siendo neutro. Como resultado, ambos condensadores deben tener la misma carga  $Q$ .

Supongamos que se desea determinar la capacidad de un condensador equivalente que produzca el mismo efecto sobre el circuito que la combinación en serie. Es decir, cuando se cargue el condensador equivalente, deberá

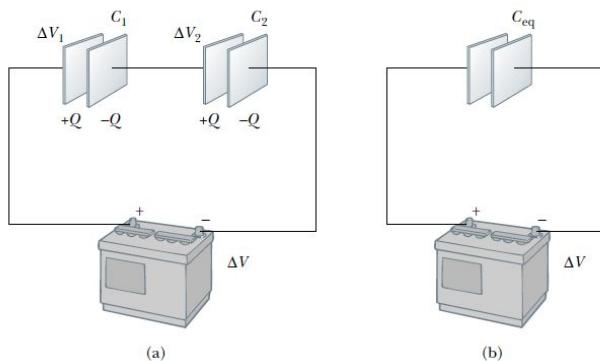


FIGURA 2.2: (a) Combinación en serie de dos condensadores conectados a una batería. (b) Diagrama de circuito de la combinación en serie. La carga de cada condensador es la misma. (c) La capacidad equivalente puede calcularse mediante la relación  $1/C_{eq} = 1/C_1 + 1/C_2$ .

entrar una carga  $-Q$  en la placa derecha desde el cable, y la carga de la placa izquierda deberá ser  $+Q$ . Aplicando la definición de capacidad al circuito de la figura 2.2b tenemos que

$$V = \frac{Q}{C_{eq}}$$

donde  $V$  es la diferencia de potencial entre los polos de la batería y  $C_{eq}$  es la capacidad equivalente.

Puesto que la placa derecha de  $C_1$  y la placa izquierda de  $C_2$  forman un conductor aislado, ambos placas están al mismo potencial  $V_{aisl}$ . Representaremos el potencial de la placa izquierda de  $C_1$  como  $V_{izq}$  y el potencial de la placa derecha de  $C_2$  como  $V_{der}$ . Puesto que estas placas están conectadas directamente a la batería, la diferencia de potencial entre ellas debe ser:

$$V = V_{izq} - V_{der}$$

Si sumamos y restamos  $V_{aisl}$  a esta relación, tenemos:

$$V = (V_{izq} - V_{aisl}) + (V_{aisl} - V_{der})$$

que podemos escribir como

$$V = V_1 + V_2 \quad (2.10)$$

donde  $V_1$  y  $V_2$  son las diferencias de potencial a través de los condensadores  $C_1$  y  $C_2$ . En general, la diferencia de potencial a través de un conjunto de condensadores en serie es igual a la suma de las diferencias de potencial a través de cada uno de ellos. Puesto que puede aplicarse  $Q = C/V$  para cada uno de los condensadores, la diferencia de potencial a través de cada uno es:

$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (2.10) y recordando que  $V = Q/C_{eq}$ , tenemos:

$$\frac{Q}{C_{eq}} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2}$$

Eliminando  $Q$ , obtenemos la relación:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \quad \rightarrow \quad C_{\text{eq}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \quad (2.11)$$

Si aplicamos este análisis a un conjunto de  $N$  condensadores asociados en serie, la capacidad equivalente resulta ser:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{C_i} \quad (2.12) \quad \text{Asociación en serie}$$

Esta expresión muestra que *la inversa de la capacidad equivalente es igual a la suma de las inversas de las capacidades de cada condensador, y la capacidad equivalente de una combinación de condensadores en serie es siempre menor que cada una de las capacidades de la combinación.*

### 2.3.4. Energía almacenada en un condensador

Cualquiera que haya trabajado con dispositivos electrónicos habrá comprobado alguna vez que un condensador almacena energía. Si las placas de un condensador cargado se conectan mediante un conductor, como un cable, la carga se transfiere a lo largo del cable hasta que ambas placas se descargan. A menudo puede observarse la descarga como una chispa visible. Si se toca accidentalmente las placas de un condensador, los dedos actuarán como conductores que cortocircuitan las placas del condensador, produciendo una descarga eléctrica. La intensidad de la descarga depende de la capacidad y del voltaje aplicado al condensador. Cuando se aplican altos voltajes al sistema, como en el caso de la fuente de alimentación de un televisor, la descarga puede ser mortal.

Consideremos un condensador plano inicialmente descargado, de modo que la diferencia de potencial entre las placas es cero. A continuación, se conecta el condensador a una batería hasta que almacena una carga máxima  $Q$ . La diferencia de potencial final en el condensador será  $V = Q/C$ .

Para calcular la energía almacenada en el condensador, imaginemos que cargamos el condensador de una manera diferente pero que lleve al mismo resultado: un agente externo toma elementos diferenciales de carga y los transfiere de una placa a la otra. Supongamos que la carga del condensador en un instante determinado de este proceso de carga es  $q$ . En ese instante, la diferencia de potencial entre los terminales del condensador es  $V(q) = q/C$ . Ahora imaginemos que el agente externo transfiere una carga diferencial  $dq$  de la placa  $-q$  a la placa  $+q$  (que está a un potencial mayor), aplicando una fuerza para mover la carga  $dq$  a través del campo eléctrico existente entre las placas. El trabajo requerido para transferir el diferencial de carga  $dq$  de una placa a la otra es:

$$dW = V(q)dq = \frac{q}{C}dq$$

Por lo tanto, el trabajo total requerido para cargar el condensador desde  $q = 0$  hasta  $q = Q$  será:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C}dq = \frac{Q^2}{2C} \quad (2.13)$$

El trabajo realizado sobre el sistema por el agente externo empleado en cargar el condensador, aparece en forma de energía potencial  $U$  almacenada en el condensador. En realidad, esta energía no es el resultado de un trabajo mecánico realizado por un agente externo que mueve cargas de una placa a la otra, sino que se debe a la transformación de la energía química de la batería. Utilizando  $Q = CV$ , la energía almacenada en el interior de un condensador cargado puede expresarse de varias maneras alternativas:

Energía almacenada en un condensador

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 \quad (2.14)$$

Este resultado puede aplicarse cualquier condensador, independientemente de su geometría. Vemos que la energía almacenada se incrementa cuando lo hacen la capacidad y la diferencia de potencial. En la práctica, la energía máxima (y la carga máxima) que puede almacenarse es limitada. Esto es debido al hecho de que, para un valor de  $V$  suficientemente grande, se produce una descarga eléctrica entre las placas, como veremos en la Sección 2.4. Por esta razón, los condensadores suelen marcarse con un valor de tensión (voltaje) máxima.

En el caso de una masa unida a un muelle estirado, la energía potencial clásica puede considerarse almacenada en el muelle. La energía interna de una sustancia asociada a su temperatura se encuentra en el interior de la sustancia. ¿Dónde está la energía almacenada en el condensador? La energía almacenada en un condensador puede considerarse almacenada *en el campo eléctrico* existente entre las placas del condensador. En el caso de un condensador plano, la diferencia de potencial está relacionada con el campo eléctrico según la relación  $V = Ed$ . Además,  $C = \epsilon_0 A/d$ . Sustituyendo ambas expresiones en la ecuación (2.14) tenemos que

$$U = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 A}{d} (Ed)^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 (Ad) E^2$$

Puesto que el volumen ocupado por el campo en un condensador de placas paralelas es  $Ad$ , la energía por unidad de volumen  $u = U/(Ad)$ , denominada **densidad de energía**, es

Densidad de energía eléctrica

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (2.15)$$

Aunque esta ecuación se ha obtenido para un condensador plano, la ecuación es válida para el caso general. Es decir, *la densidad de energía de un campo eléctrico es proporcional al cuadrado del módulo del campo eléctrico en un punto dado*.

## 2.4. Dieléctricos

### 2.4.1. Constante dieléctrica

Un material no conductor, como, por ejemplo, el vidrio, el papel o la madera, se denomina **dieleéctrico**. Michael Faraday descubrió que cuando el espacio entre los dos conductores de un condensador se ve ocupado por un

dieléctrico, la capacidad aumenta en un factor  $\epsilon_r$  que es característico del dieléctrico. La razón de este incremento es que el campo eléctrico entre las placas de un condensador se debilita por causa del dieléctrico. Así, para una carga determinada sobre las placas, la diferencia de potencial se reduce y la relación  $Q/V$  se incrementa.

Consideramos inicialmente un condensador cargado aislado y sin dieléctrico entre sus placas (al estar aislado, la carga se mantiene constante). Se introduce después una lámina de dieléctrico, llenando todo el espacio entre las mismas. Si el campo eléctrico original entre las placas de un condensador sin dieléctrico es  $E_0$ , el campo en el interior del dieléctrico introducido entre las placas puede considerarse que cumple la relación:

$$E = \frac{E_0}{\epsilon_r} \quad (2.16)$$

donde  $\epsilon_r$  es la **constante dieléctrica relativa**. Si se cumple la relación anterior, se dice que el dieléctrico es *lineal*, ya que  $\epsilon_r$  no depende del campo aplicado.

En un condensador plano de separación  $d$ , la diferencia de potencial  $V$  entre las placas es:

$$V = Ed = \frac{E_0 d}{\epsilon_r} = \frac{V_0}{\epsilon_r}$$

siendo  $V$  la diferencia de potencial con dieléctrico y  $V_0 = E_0 d$  la diferencia de potencial original sin dieléctrico. La nueva capacidad es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{V_0/\epsilon_r} = \epsilon_r \frac{Q}{V_0}$$

Es decir,

$$C = \epsilon_r C_0 \quad (2.17)$$

en donde  $C_0 = Q/V_0$  es la capacidad sin el dieléctrico. La capacidad de un condensador plano lleno de un dieléctrico de constante  $\epsilon_r$  es, por lo tanto,

$$C = \epsilon_r \epsilon_0 \frac{A}{d} = \epsilon \frac{A}{d} \quad (2.18)$$

en donde  $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$  es la **permitividad** del dieléctrico o **constante dieléctrica**.

En la exposición anterior hemos supuesto que la carga de las placas del condensador no cambiaba cuando se introducía el dieléctrico. Esto es cierto si el condensador se carga y después se separa de la fuente (la batería) antes de insertar el dieléctrico. Si el dieléctrico se inserta durante el proceso de carga, la batería suministra más carga para mantener la diferencia de potencial original. En este caso, la carga total en las placas es  $Q = \epsilon_r Q_0$ . En cualquier caso, la capacidad ( $Q/V$ ) se incrementa en el factor  $\epsilon_r$ .

### Ruptura dieléctrica

Cuando se somete un material dieléctrico a un campo eléctrico suficientemente intenso, se produce una ruptura del dieléctrico y el dieléctrico se convierte en conductor. Esto sucede cuando el campo eléctrico es tan intenso que arranca electrones de sus moléculas y los lanza sobre otras moléculas, con lo cual se liberan aún más electrones. Esta avalancha de carga en movimiento, que forma una chispa o descarga de arco, suele iniciarse repentinamente.

Debido a la ruptura del dieléctrico, los condensadores siempre tienen voltajes máximos nominales. Cuando se somete un condensador a un voltaje excesivo, se puede formar a través de una capa de dieléctrico un arco que produce un orificio por combustión o fusión. Este arco crea un camino conductor (un cortocircuito) entre los conductores. Si queda una trayectoria conductora después que el arco se ha extinguido, el dispositivo queda inutilizado permanentemente como condensador.

Material	Constante dieléctrica relativa $\epsilon_r$	Rigidez dieléctrica (KV/mm)
Aire	1.00059	3
Baquelita	4.9	24
Mica	5.4	10-100
Neopreno	6.9	12
Papel	3.7	16
Parafina	2.1-2.5	10
Plexiglás	3.4	40
Poliestireno	2.55	24
Porcelana	7	5.7
Vidrio (Pyrex)	5.6	14

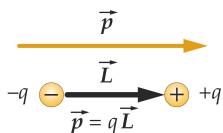
El campo eléctrico máximo que un material puede soportar sin que ocurra una ruptura se conoce como su **rigidez dieléctrica**,  $K$ . Los dielécticos no solo incrementan la capacidad de un condensador, sino que además proporcionan un medio para separar las placas conductoras paralelas y elevan la rigidez dieléctrica. Consideremos un condensador plano formado por dos hojas de metal separadas por un lámina delgada de plástico. El plástico permite que las hojas metálicas se encuentren muy próximas sin llegar a ponerse en contacto eléctrico, y como la resistencia del plástico a la ruptura es mayor que la del aire, se pueden alcanzar mayores diferencias de potencial antes de que ocurra la ruptura dieléctrica. La tabla adyacente presenta la constante dieléctrica y la rigidez dieléctrica de algunas sustancias aislantes. Obsérvese que para el aire  $\epsilon_r \approx 1$ , de modo que para la mayor parte de los casos, no necesitamos distinguir entre el aire y el vacío.

## 2.4.2. Estructura molecular de un dieléctrico

### Dipolos eléctricos

Para entender la estructura microscópica de un dieléctrico debemos considerar, en primer lugar, el concepto de **dipolo eléctrico**, que no es más que un sistema de dos cargas iguales y opuestas de valor absoluto  $q$  separadas por una distancia pequeña  $L$ . Su intensidad y orientación se describen mediante el vector **momento dipolar eléctrico**  $\vec{p}$ , que es un vector que apunta desde la carga negativa a la positiva y cuyo módulo es  $qL$  (ver figura):

Momento dipolar eléctrico



$$\vec{p} = q\vec{L} \quad (2.19)$$

donde  $\vec{L}$  es un vector cuyo origen está en la carga negativa y su extremo en la carga positiva.

Un campo eléctrico externo uniforme no ejerce una fuerza neta sobre un dipolo, pero aparece un par de fuerzas que tiende a alinear el dipolo en la dirección del campo. En la figura vemos que el módulo del momento de las fuerzas ejercidas sobre las cargas es  $F_1L \sin \theta = qEL \sin \theta = pE \sin \theta$ . El momento está dirigido perpendicularmente al papel, hacia dentro, de tal modo que tiende a situar el momento dipolar  $\vec{p}$  en la dirección del campo eléctrico  $\vec{E}$ . El momento del par puede escribirse convenientemente como el producto vectorial del momento dipolar  $\vec{p}$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$ :

$$\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E} \quad (2.20)$$

El dipolo girará, en consecuencia, hasta que el momento se anule, hecho que tiene lugar cuando  $\vec{p}$  y  $\vec{E}$  son paralelos ( $\theta = 0^\circ$ ) o antiparalelos ( $\theta = 180^\circ$ ). Cuando  $\theta = 0^\circ$ , corresponde a una posición de equilibrio estable (las líneas de campo entran por la carga negativa del dipolo); si  $\theta = 180^\circ$ , el

equilibrio es inestable (las líneas de campo entran por la carga positiva del dipolo) y bastaría una pequeña perturbación para que adquiriese la posición de equilibrio estable.

### Polarización de un dieléctrico

Un dieléctrico debilita el campo eléctrico entre las placas de un condensador porque sus moléculas producen un campo eléctrico adicional de sentido opuesto al del campo eléctrico producido por las placas. Este campo eléctrico se debe a los momentos dipolares eléctricos de las moléculas del dieléctrico.

Aunque los átomos y moléculas son eléctricamente neutros, se ven afectados por los campos eléctricos debido a que contienen cargas positivas y negativas que pueden responder a campos eléctricos externos. Un átomo puede considerarse como un núcleo muy pequeño, cargado positivamente, rodeado por una nube electrónica cargada negativamente. En algunos átomos y moléculas la nube electrónica es esféricamente simétrica, de modo que su "centro de cargas" está en el centro del átomo o la molécula, coincidiendo con la carga positiva. Un átomo o molécula de este tipo posee un momento dipolar cero y se llama **no polar**. Sin embargo, en presencia de un campo eléctrico externo, la carga positiva y la carga negativa experimentan fuerzas en direcciones opuestas. Las cargas positivas y negativas se separan hasta que la fuerza atractiva que ellas ejercen entre sí equilibra las fuerzas debidas al campo eléctrico externo (ver figura). Se dice entonces que la molécula está polarizada y que se comporta como un dipolo eléctrico.

En algunas moléculas (por ejemplo, HCl y H<sub>2</sub>O) los centros de la carga positiva y la carga negativa no coinciden incluso en ausencia de un campo eléctrico externo. Estas moléculas se llaman **moléculas polares** y tienen un momento dipolar eléctrico permanente. La figura muestra el ejemplo de la molécula de agua, en la que el momento dipolar permanente se encuentra dirigido desde el centro del átomo con carga negativa (O) al "centro" de las cargas positivas.

Cuando un dieléctrico se sitúa en el campo de un condensador, sus moléculas se polarizan de modo que se produce un momento dipolar neto paralelo al campo. Si las moléculas son polares, sus momentos dipolares, orientados originalmente al azar, tienden a alinearse debido al momento de fuerza ejercido por el campo. Si las moléculas no son polares, el campo induce momentos dipolares que son paralelos al campo. En cualquier caso, las moléculas del dieléctrico se *polarizan* en la dirección y sentido del campo eléctrico (ver figura adjunta).

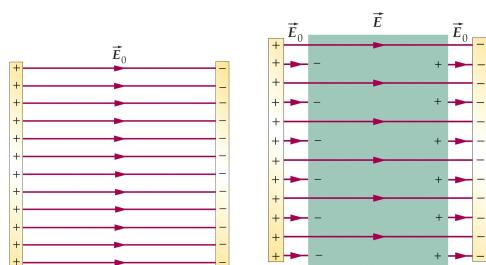
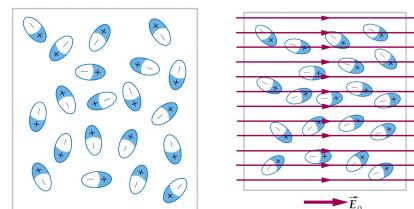
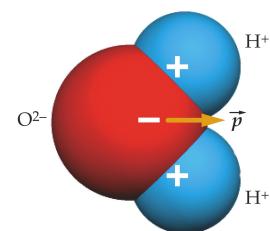
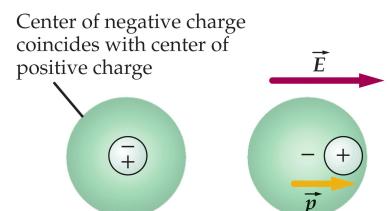
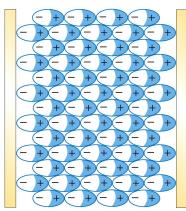


FIGURA 2.3: Campo eléctrico entre las placas de un condensador (a) sin dieléctrico y (b) con un dieléctrico. La carga superficial en el dieléctrico debilita el campo eléctrico entre las placas.



El efecto neto de la **polarización** de un dieléctrico homogéneo en un condensador es la creación de una carga superficial sobre las caras del dieléctrico próximas a las placas, como se indica en la figura adyacente. Esta carga superficial se denomina **carga ligada** porque está unida a las moléculas del dielectrónico y no puede desplazarse como la carga libre que existe sobre las placas conductoras del condensador. La carga ligada produce un campo eléctrico de sentido opuesto al creado por la carga libre de los conductores. Así, el campo eléctrico neto entre las placas se debilita como indica la figura 2.3.

## Densidad de carga ligada

**La densidad de la carga ligada** o densidad de carga de polarización  $\sigma_b$  de las superficies del dieléctrico está relacionada con la constante dieléctrica  $\epsilon_r$  y la densidad de carga libre  $\sigma_f$  de las placas. Consideremos un bloque dieléctrico situado entre las placas de un condensador plano, como indica la figura. Si las placas del condensador están muy próximas, de modo que el bloque es muy delgado, el campo eléctrico interior al dieléctrico debido a las densidades de carga ligadas  $+\sigma_b$  a la derecha y  $-\sigma_b$  a la izquierda, es igual al campo debido a dos densidades de carga planas infinitas. El campo  $E_b$  tiene así el valor

$$E_b = \frac{\sigma_b}{\epsilon_0} \quad (2.21)$$

Este campo está dirigido hacia la izquierda y se resta del campo eléctrico  $E_0$  debido a la densidad de carga libre situada en las placas del condensador. El campo original  $E_0$  tiene el valor

$$E_0 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_0} \quad (2.22)$$

El valor del campo resultante  $E$  es así la diferencia de estos valores. Por la ecuación (2.16), este campo es también igual a  $E_0/\epsilon_r$ :

$$E = E_0 - E_b = \frac{E_0}{\epsilon_r} \quad (2.23)$$

Despejando  $E_b$ , obtenemos

$$E_b = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) E_0$$

y escribiendo  $\sigma_b/\epsilon_0$  en lugar de  $E_b$  y  $\sigma_f/\epsilon_0$  en lugar de  $E_0$ , tenemos:

## Densidad de carga ligada

$$\sigma_b = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \sigma_f \quad (2.24)$$

La densidad de carga ligada  $\sigma_b$  es así siempre menor que la densidad de carga libre  $\sigma_f$  situada en las láminas del condensador y es cero si  $\epsilon_r = 1$ , que es el caso de ausencia de dieléctrico.

Podemos llegar a otra relación interesante para dieléctricos lineales. Para ello usamos la relación  $\sigma_f = \epsilon_0 E_0$  junto a la ecuación (2.16) para llegar a

$$\sigma_f = \epsilon_r \epsilon_0 E = \epsilon E \quad (2.25)$$

Teniendo en cuenta (2.24) se llega a:

$$\sigma_b = \chi_e E \quad (2.26)$$

donde la constante de proporcionalidad  $\chi_e$  recibe el nombre de **susceptibilidad eléctrica**, cuyo valor es:

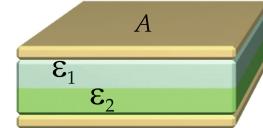
$$\chi_e = \epsilon_0(\epsilon_r - 1) = \epsilon - \epsilon_0 \quad (2.27) \quad \text{Susceptibilidad eléctrica}$$

Haciendo uso de esta última ecuación, la relación entre  $\sigma_b$  y  $\sigma_f$  puede escribirse de la forma:

$$\sigma_b = \frac{\chi_e}{\epsilon} \sigma_f \quad (2.28)$$

#### EJEMPLO 2.1 Condensador con dos dieléctricos (I)

Un condensador plano tiene una capacidad  $C$  y una separación entre placas  $d$ . Se insertan entre las placas, como se indica en la figura, dos láminas dieléctricas de constantes  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , cada una de ellas con espesor  $d_1$  y  $d_2$ , y con la misma área de las placas. Demostrar que este sistema puede considerarse como una asociación de condensadores en serie con espesor  $d_1$  y  $d_2$ , respectivamente llenos de dieléctricos de permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ .



La capacidad del condensador será  $C = Q/V$ , donde  $V = V_1 + V_2$  siendo  $V_1$  la diferencia de potencial entre los extremos del primer dieléctrico y  $V_2$  la diferencia de potencial entre los extremos del segundo dieléctrico. Estas diferencias de potencial se pueden expresar en función de los campos eléctricos en cada dieléctrico. Es decir,

$$V = E_1 d_1 + E_2 d_2$$

Haciendo uso de la ecuación (2.25), los campos pueden expresarse en función de la carga libre:

$$E_1 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_1} = \frac{Q}{A\epsilon_1} \quad E_2 = \frac{\sigma_f}{\epsilon_2} = \frac{Q}{A\epsilon_2}$$

Por tanto,

$$V = \frac{Q}{A} \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)$$

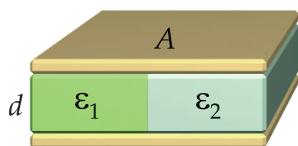
Si llamamos  $C_j$  a la capacidad que tendría un condensador de área  $A$ , separación entre las placas  $d_j$  y lleno de un dieléctrico de permitividad  $\epsilon_j$ , es decir,  $C_j = \epsilon_j A / d_j$ , podemos expresar la diferencia de potencial  $V$  en función de  $C_1$  y  $C_2$ :

$$V = \frac{Q}{1/C_1 + 1/C_2}$$

y, en consecuencia,

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

que sería la capacidad equivalente de dos condensadores de capacidades  $C_1$  y  $C_2$  asociados en serie.




---

**EJEMPLO 2.2 Condensador con dos dieléctricos (II)**

Un condensador plano tiene una capacidad  $C$  y una separación entre placas  $d$ . Se insertan entre las placas, como se indica en la figura, dos láminas dieléctricas de constantes  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , cada una de ellas con área  $A_1$  y  $A_2$ , y con la misma separación entre las placas. Demostrar que este sistema puede considerarse como una asociación de condensadores en paralelo con áreas  $A_1$  y  $A_2$ , respectivamente llenos de dieléctricos de permitividades  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ .

La capacidad del condensador será  $C = Q/V$ , donde  $Q = Q_1 + Q_2$  siendo  $Q_1$  la carga libre en la superficie del electrodo próximo al primer dieléctrico y  $Q_2$  la carga libre en la superficie del electrodo próximo al segundo dieléctrico.

Haciendo uso de la ecuación (2.25), las cargas libres pueden expresarse en función de los campos  $E_1$  y  $E_2$  en el interior de cada dieléctrico:

$$Q_1 = A_1\sigma_{f,1} = A_1\epsilon_1 E_1 \quad Q_2 = A_2\sigma_{f,2} = A_2\epsilon_2 E_2$$

Por otro lado,  $V = E_1 d = E_2 d$ , con lo que podemos escribir  $Q$  de la forma:

$$Q = A_1\epsilon_1 E_1 + A_2\epsilon_2 E_2 = \frac{V}{d}(A_1\epsilon_1 + A_2\epsilon_2)$$

Si llamamos  $C_j$  a la capacidad que tendría un condensador de área  $A_j$  lleno de un dieléctrico de permitividad  $\epsilon_j$  y separación entre las placas  $d$ , es decir,  $C_j = \epsilon_j A_j / d$ , podemos expresar la carga  $Q$  en función de  $C_1$  y  $C_2$ :

$$Q = V(C_1 + C_2)$$

y, en consecuencia,

$$C = C_1 + C_2$$

que sería la capacidad equivalente de dos condensadores de capacidades  $C_1$  y  $C_2$  asociados en paralelo.

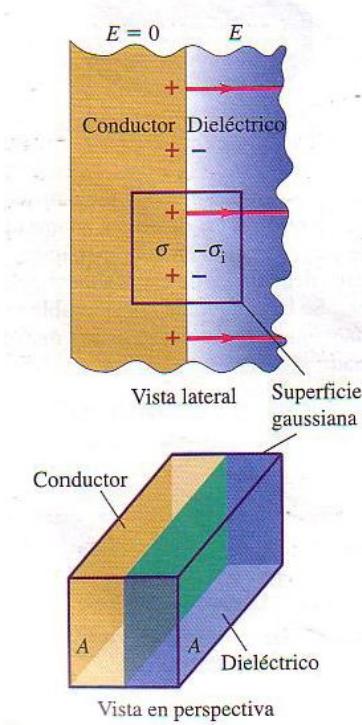
---

#### 2.4.3. El teorema del Gauss en los dieléctricos

En el análisis de las secciones anteriores se puede ampliar a fin de reformular el Teorema de Gauss en una forma que resulta particularmente útil en el caso de los dieléctricos. La figura es una ampliación de la placa izquierda del condensador y de la superficie izquierda del dieléctrico analizado en la sección anterior. Aplicemos el teorema de Gauss a la caja rectangular (o de pastillas) que se muestra en corte transversal mediante la línea violeta. El área total de los lados izquierdo y derecho es  $A$ . El lado izquierdo está incrustado en el conductor que constituye la placa izquierda del condensador; por tanto, el campo eléctrico en todas las partes de esa superficie es cero. El lado derecho está incrustado en el dieléctrico, donde el módulo del campo eléctrico es  $E$ , y  $E_n = 0$  en todos los puntos de los otros cuatro lados. La carga total encerrada, incluida tanto la carga de la placa del condensador como la carga inducida en la superficie del dieléctrico, es  $Q_{\text{interior}} = (\sigma_f - \sigma_b)A$ ; por tanto, aplicando el teorema de Gauss, se obtiene:

$$EA = \frac{(\sigma_f - \sigma_b)A}{\epsilon_0} \quad (2.29)$$

Esta ecuación no es muy esclarecedora tal como se muestra porque relaciona dos magnitudes desconocidas:  $E$  en el interior del dieléctrico y la densidad de carga superficial ligada  $\sigma_b$ . Pero ahora podemos aplicar la ecuación



(2.24), formulada para esta misma situación a fin de simplificar la ecuación eliminando  $\sigma_b$ :

$$\sigma_f - \sigma_b = \frac{\sigma_f}{\epsilon_r}$$

Combinando esto con la ecuación (2.29) se obtiene:

$$EA = \frac{\sigma_f A}{\epsilon_r \epsilon_0} = \frac{\sigma_f A}{\epsilon}$$

Esta ecuación, equivalente a (2.25), afirma que el flujo de  $\vec{E}$  a través de la superficie gaussiana de la figura anterior es igual al cociente de la carga libre encerrada  $\sigma_f A$  entre  $\epsilon$ , no  $\epsilon_0$ . Resulta que, con respecto a *cualquier* superficie gaussiana, siempre que la carga inducida es proporcional al campo eléctrico en el material, el teorema de Gauss se puede escribir como:

$$\oint_S E_n dA = \frac{Q_{\text{interior,f}}}{\epsilon} \quad (2.30)$$

[Teorema de Gauss generalizado](#)

donde  $Q_{\text{interior,f}}$  es la carga libre neta (no carga ligada) encerrada por la superficie gaussiana. La trascendencia de estos resultados es que los lados derechos contienen sólo la carga *libre* del conductor, no la carga ligada. De hecho, aunque no lo hemos probado, el Teorema de Gauss generalizado conserva su validez incluso cuando distintas partes de la superficie gaussiana están incrustadas en dieléctricos con valores diferentes de  $\epsilon_r$ , siempre y cuando el valor de  $\epsilon_r$  en cada dieléctrico sea independiente del campo eléctrico y se utilice el valor apropiado de  $\epsilon_r$  con respecto a cada punto de la superficie gaussiana.

Como las leyes de la electrostática pueden deducirse a partir del Teorema de Gauss, las leyes obtenidas en el vacío pueden trasladarse a los dieléctricos sustituyendo las cargas por cargas libres y la permitividad del vacío por la permitividad del medio. Por ejemplo, la ecuación para la densidad de energía electrostática (2.15) para un dieléctrico viene dada por la expresión:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \epsilon_r \epsilon_0 E^2 \quad (2.31)$$

[Densidad de energía en un dieléctrico](#)



## Tema 3

# Corriente eléctrica

---

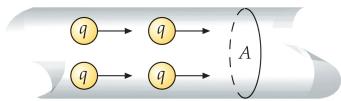
### 3.1. Introducción

Hasta el momento, nuestra exposición sobre los fenómenos eléctricos se ha centrado en las cargas en reposo, es decir, en el estudio de la electrostática. Ahora vamos a ocuparnos de situaciones que implican cargas eléctricas en movimiento. El término **corriente eléctrica** se usa para describir el flujo de carga a través de una cierta región del espacio. La mayor parte de las aplicaciones prácticas de la electricidad implican corrientes eléctricas. Por ejemplo, cuando se enciende una luz, conectamos el filamento metálico de la bombilla a través de una diferencia de potencial, lo cual hace fluir la carga eléctrica por el filamento de un modo parecido a como la diferencia de presión en una manguera de riego hace fluir el agua por su interior. El flujo de carga constituye la corriente eléctrica. Normalmente asociamos las corrientes al movimiento de cargas en el interior de cables conductores, pero el haz de electrones de un tubo de rayos catódicos y el haz de iones cargados procedentes de un acelerador de partículas también son corrientes eléctricas.

Cuando el sentido de la corriente en un elemento de un circuito no varía, se dice que el circuito es de corriente continua (cc). Las corrientes continuas están producidas normalmente por baterías conectadas a resistencias y condensadores. En los circuitos de corriente alterna (ca), la corriente cambia alternativamente de sentido. En este tema centraremos nuestra atención en los circuitos del primer tipo.

Cuando un interruptor cierra un circuito, una pequeña cantidad de carga se acumula en la superficie de los cables y otros elementos conductores del circuito, creando un campo eléctrico que pone en movimiento cargas dentro de los materiales conductores. Al establecerse la corriente y acumularse la carga en diversos puntos del circuito tienen lugar cambios muy complicados, pero rápidamente se alcanza un equilibrio o estado estacionario. El tiempo necesario para establecer el equilibrio depende del tamaño y de la conductividad de los elementos del circuito, pero es prácticamente instantáneo para la mayor parte de los objetivos. En el equilibrio, la carga ya no se acumula en los distintos puntos del circuito y la corriente es estacionaria.

### 3.2. Corriente y movimiento de cargas



La **corriente eléctrica** se define como el flujo de cargas eléctricas que, por unidad de tiempo, atraviesan un área transversal. La figura muestra un segmento de hilo conductor de corriente en el cual los portadores de carga se mueven. Si  $\Delta Q$  es la carga eléctrica que fluye a través del área transversal  $A$  en el tiempo  $\Delta t$ , la intensidad de corriente media  $I_{\text{media}}$  es:

$$I_{\text{media}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

El ritmo en el que fluye la carga puede variar en el tiempo. Definimos la **intensidad de corriente instantánea**  $I$  como el límite de la intensidad media cuando  $\Delta t$  tiende a cero:

Intensidad de corriente

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{dQ}{dt} \quad (3.1)$$

La unidad del Sistema Internacional de intensidad es el **Amperio (A)**. Un amperio es igual a 1 C/s.

Se toma como sentido de la corriente el del flujo de las cargas positivas. Este convenio fue establecida antes de que se conociera que los electrones libres, negativamente cargados, son las partículas que realmente se mueven y producen la corriente en un alambre conductor. Así pues, los electrones se mueven en sentido opuesto a la corriente convencional.

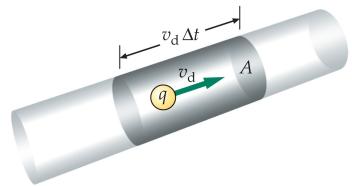
El movimiento real de los electrones libres en un cable conductor metálico es muy complejo. Si en el cable no existe campo eléctrico, estos electrones se mueven en direcciones aleatorias y con velocidades relativamente grandes, del orden de  $10^6$  m/s. Además, los electrones chocan repetidamente con los iones reticulares del alambre. Como los vectores velocidad de los electrones están orientados al azar, la velocidad vectorial *media* es cero. Cuando se aplica un campo eléctrico, un electrón libre experimenta una aceleración debida a la fuerza  $-e\vec{E}$  y adquiere una velocidad adicional en sentido opuesto al campo. Sin embargo, la energía cinética que adquiere es disipada rápidamente mediante choques con los iones fijos del alambre. Durante el tiempo que transcurre entre choques sucesivos, los electrones adquieren, en término medio, una velocidad adicional en el sentido opuesto al campo. El resultado neto de esta aceleración y disipación de energía repetida es que el electrón posee una pequeña velocidad media, llamada **velocidad de deriva** o de arrastre, opuesta al campo eléctrico.

El movimiento de los electrones libres en un metal es semejante al de las moléculas de un gas, tal como el aire. En el aire en calma, las moléculas de gas se mueven con velocidades instantáneas grandes entre cada choque, pero la velocidad vectorial media es cero. Cuando existe una brisa, las moléculas de aire tienen una pequeña velocidad de deriva en la dirección de la brisa, superpuesta a las velocidades instantáneas que son mucho mayores. De modo similar, en ausencia de un campo eléctrico aplicado, la velocidad vectorial media del gas de *electrones* de un metal es cero, pero cuando se le aplica un campo eléctrico, este gas de electrones adquiere una pequeña velocidad de deriva.

Consideraremos una corriente en un cable conductor de sección transversal  $A$ . Sea  $n$  el número de partículas libres portadoras de carga por unidad de

volumen. Este número  $n$  suele llamarse **densidad de los portadores de carga**. Supongamos que cada partícula transporta una carga  $q$  y se mueve con una velocidad de deriva  $v_d$ . En el tiempo  $\Delta t$  todas las partículas contenidas en el volumen  $A v_d \Delta t$  sombreado en la figura, pasan a través del área  $A$ . El número de partículas en este volumen es  $n A v_d \Delta t$  y la carga total es

$$\Delta Q = q n A v_d \Delta t$$



La intensidad de la corriente es, por lo tanto,

$$I = \left| \frac{\Delta Q}{\Delta t} \right| = n |q| A v_d \quad (3.2)$$

**Relación entre la intensidad y la velocidad de deriva**

donde aparece  $|q|$  debido a que la intensidad de corriente es una cantidad positiva. Esta ecuación puede utilizarse para la calcular la corriente debida al flujo de cualquier clase de partícula cargada, simplemente sustituyendo la velocidad de deriva  $v_d$  por la velocidad media de las partículas de dicha clase.

El número de portadores de carga de un conductor puede medirse por el llamado efecto Hall. El resultado es que en la mayor parte de los metales existe un electrón libre por átomo.

La intensidad de corriente que atravesase una superficie  $S$  puede definirse como el flujo del vector **densidad de corriente**  $\vec{J}$  a través de dicha superficie:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot dA$$

En consecuencia, el vector  $\vec{J}$  tiene como sentido el de la corriente. En el caso de conductores rectilíneos y homogéneos, el módulo de la densidad de corriente será igual a la intensidad de corriente por unidad de área. A partir de la ecuación (3.2), se obtiene que el modulo de la densidad de corriente es:

$$J = \frac{I}{A} = n |q| v_d$$

La unidad del Sistema Internacional para la densidad de corriente será  $A/m^2$ . El vector densidad de corriente puede definirse incluyendo el carácter vectorial de la velocidad de deriva:

$$\vec{J} = n q \vec{v}_d \quad (3.3)$$

**Relación entre la densidad de corriente y la velocidad de deriva**

Esta ecuación no contiene ningún valor absoluto. Si  $q$  es positiva,  $\vec{v}_d$  tiene el mismo sentido que  $\vec{E}$ . Si  $q$  es negativa, los sentidos de  $\vec{v}_d$  y  $\vec{E}$  son opuestos. En ambos casos,  $\vec{J}$  tiene la misma dirección y sentido que  $\vec{E}$ .

Diremos que la corriente es estacionaria cuando el vector densidad de corriente permanece constante en el tiempo en cada punto del conductor. En consecuencia, si consideramos una porción de conductor, la carga que contiene permanece constante, no aumenta ni disminuye en el tiempo; es decir, en régimen estacionario el flujo de carga entrante ha de ser igual al flujo de carga saliente.

### 3.3. Ley de Ohm. Conductividad y resistencia

Hemos visto que el movimiento de las cargas en un conductor depende tanto del campo eléctrico aplicado como de la naturaleza del conductor. La dependencia de la densidad de corriente con el campo puede ser bastante compleja. Sin embargo, un gran número de sustancias conductoras se pueden considerar conductores lineales, recibiendo el nombre de **conductores óhmicos**. En estos conductores se cumple la **Ley de Ohm**:

Ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (3.4)$$

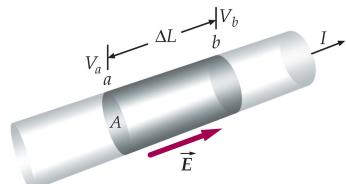
La constante de proporcionalidad  $\sigma$  se denomina **conductividad eléctrica**. Es una magnitud característica del conductor. A la inversa de la conductividad se le denomina **resistividad**,  $\rho$ :

Resistividad

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{E}{J} \quad (3.5)$$

La resistividad representa una medida de la oposición que encuentran las cargas para moverse en el conductor y, al igual que la conductividad, es una característica del material que constituye el conductor.

Habitualmente es difícil medir directamente cantidades como  $E$  y  $J$ . Es mucho más fácil medir diferencias de potencial e intensidades. Por ello, la Ley de Ohm se suele reformular de forma que intervengan estas otras cantidades medible más fácilmente. Para ello consideremos un trozo de conductor de sección  $A$  constante y longitud  $L$ , como muestra la figura. Consideremos también un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$  en el interior del conductor. La diferencia de potencial entre sus extremos será entonces



$$V = EL$$

Como

$$I = JA$$

sustituyendo en (3.4) tenemos:

$$I = \frac{VA}{\rho L} = \frac{V}{\rho L/A}$$

O bien,

Ley de Ohm circuital

$$V = RI \quad (3.6)$$

Esta relación recibe el nombre de **Ley de Ohm circuital**. La constante  $R$ , llamada **resistencia** está relacionada con la resistividad, la longitud y la sección del conductor:

Resistencia

$$R = \rho \frac{L}{A} \quad (3.7)$$

La resistencia es directamente proporcional a la resistividad y la longitud del conductor e inversamente proporcional a la sección del mismo.

La unidad de la resistencia en el Sistema Internacional es el V/A, que recibe el nombre de **ohmio** ( $\Omega$ ). En consecuencia, la unidad de resistividad es  $\Omega \cdot \text{m}$ , y la de conductividad eléctrica es  $(\Omega \cdot \text{m})^{-1}$ , que recibe también el nombre de Siemens (S). La tabla adjunta muestra la resistividad de varios materiales a 20°C.

Existen materiales que no cumplen la relación (3.6), llamados **materiales no óhmicos**. En ellos, la resistencia depende de la corriente  $I$ , de modo que  $V$  no es proporcional a  $I$ . La Figura 3.1 muestra la intensidad  $I$  en función de la diferencia de potencial  $V$  para materiales óhmicos y no óhmicos. En consecuencia, la Ley de Ohm no es una relación fundamental de la naturaleza, como las leyes de Newton, sino más bien una descripción empírica de una propiedad compartida por muchos materiales.

Material	Resistividad a 20°C ( $\Omega \cdot \text{m}$ )
Plata	$1.6 \times 10^{-8}$
Cobre	$1.7 \times 10^{-8}$
Aluminio	$2.8 \times 10^{-8}$
Wolframio	$5.5 \times 10^{-8}$
Hierro	$10 \times 10^{-8}$
Plomo	$22 \times 10^{-8}$
Mercurio	$96 \times 10^{-8}$
Nicrón	$100 \times 10^{-8}$
Carbono	$3500 \times 10^{-8}$
Germanio	0.45
Silicio	640
Madera	$10^8 - 10^{14}$
Vidrio	$10^{10} - 10^{14}$
Goma dura	$10^{13} - 10^{16}$
Ámbar	$5 \times 10^{14}$
Azufre	$10^{15}$

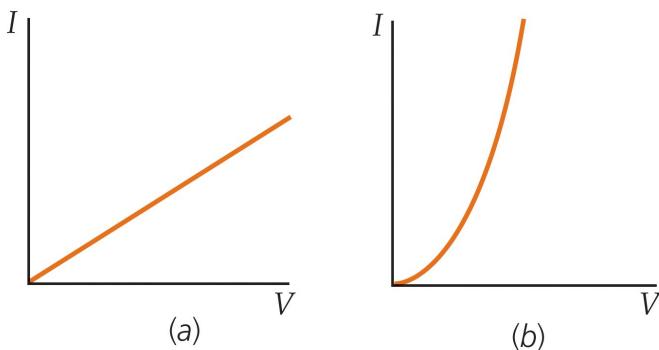
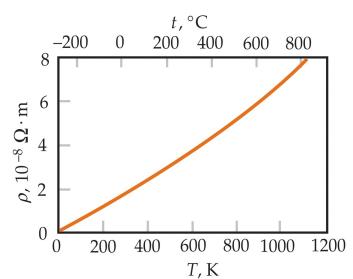


FIGURA 3.1: Gráficas de  $I$  en función de  $V$  para (a) materiales óhmicos y (b) no óhmicos. La resistencia  $R = V/I$  es independiente de  $I$  para materiales óhmicos, como indica la pendiente constante de la línea en (a).

La resistividad de cualquier metal depende de la temperatura. La figura muestra la dependencia con la temperatura de la resistividad del cobre, para valores intermedios de la temperatura. Este gráfico es casi una línea recta, lo cual significa que la resistividad varía casi linealmente con la temperatura.

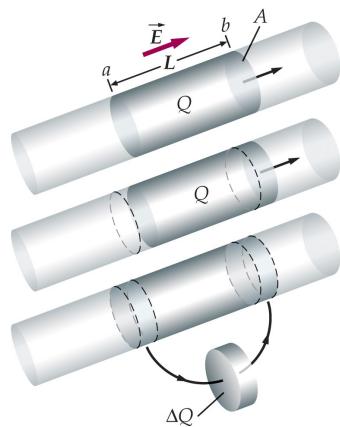


## 3.4. Potencia en los circuitos eléctricos

Cuando se establece un campo eléctrico en un conductor, el gas de electrones incrementa su energía cinética debido al trabajo que el campo realiza sobre los electrones libres. Sin embargo, pronto se va alcanzando el estado estacionario, ya que esta energía adicional se convierte rápidamente en energía térmica del conductor por las colisiones entre los electrones y los iones reticulares del material. El mecanismo por el que el incremento de energía interna del conductor da lugar a un aumento de su temperatura se denomina **efecto Joule**.

Consideremos el segmento de hilo de longitud  $L$  y área transversal  $A$  indicado en la figura. El cable transporta una corriente estacionaria dirigida hacia la derecha. La carga libre en el segmento es inicialmente  $Q$ , y durante un intervalo de tiempo  $\Delta t$ , esta carga sufre un pequeño desplazamiento hacia la derecha. Este desplazamiento equivale a que una cantidad de carga  $\Delta Q$  se

haya movido desde el extremo de la izquierda, donde la energía potencial es  $V_a \Delta Q$ , hasta el extremo de la derecha del segmento de cable, en el cual la energía potencial es  $V_b \Delta Q$ . El cambio neto de energía potencial de  $Q$  es:



$$\Delta U = (V_b - V_a) \Delta Q$$

Como las cargas positivas se mueven de forma que disminuya su potencial, se tendrá que  $V_a > V_b$ , lo que implica una pérdida neta en la energía potencial de  $Q$ . La energía perdida es, por lo tanto:

$$-\Delta U = V \Delta Q$$

donde  $V = V_a - V_b$  es la caída de potencial de un lado a otro del segmento. La variación temporal de la pérdida de energía potencial es:

$$-\frac{\Delta U}{\Delta t} = V \frac{\Delta Q}{\Delta t} = VI$$

en donde  $I = \Delta Q / \Delta t$  es la intensidad de corriente. La energía perdida por unidad de tiempo es la potencia  $P$  disipada en el segmento conductor:

$$P = VI \quad (3.8)$$

Si  $V$  se expresa en voltios e  $I$  en amperios, la potencia perdida viene expresada en **watios**. La pérdida de potencia es el producto de la disminución de energía potencial por unidad de carga,  $V$ , y el flujo de carga por unidad de tiempo,  $I$ . Esta ecuación puede aplicarse a cualquier dispositivo del circuito. La potencia suministrada al dispositivo es el producto de la caída potencial por la intensidad de la corriente. En un conductor, la energía potencial se disipa como energía térmica. Utilizando  $V = IR$  o  $I = V/R$  (3.6), la ecuación puede expresarse en otras formas útiles:

Potencia disipada en una resistencia

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R} \quad (3.9)$$

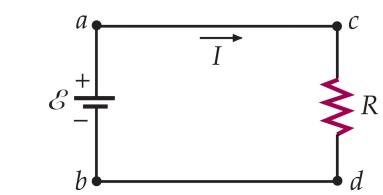
### 3.5. Fuerza electromotriz y baterías

Con objeto de mantener una corriente estacionaria en un conductor necesitamos disponer de un suministro de energía eléctrica. Un aparato o dispositivo que suministra energía eléctrica recibe el nombre de **fuente de fem** (las letras *fem* corresponden a *fuerza electromotriz*). Esta denominación constituye un abuso del lenguaje porque no se trata de una fuerza). Ejemplos de estas fuentes son una batería o pila, que convierte la energía química en energía eléctrica, o un generador, que convierte la energía mecánica en energía eléctrica. Una fuente de fem realiza trabajo sobre la carga que pasa a través de ella, elevando la energía potencial de la carga. El trabajo por unidad de carga recibe el nombre de **fem**,  $\mathcal{E}$ . La unidad de fem es el voltio, la misma que la unidad de diferencia de potencial.

Una **batería ideal** es una fuente de fem que mantiene una diferencia de potencial constante entre sus dos terminales, independientemente del flujo de carga que exista entre ellos. La diferencia de potencial entre los terminales de una batería ideal es igual, en valor absoluto, a la fem de la batería. En la

figura adyacente se muestra un circuito sencillo compuesto por una resistencia  $R$  conectada a una batería ideal. Las líneas rectas del circuito representan hilos conductores de conexión cuya resistencia es despreciable. La fuente de fem mantiene una diferencia de potencial  $\mathcal{E}$  entre los puntos  $a$  y  $b$ , en donde el punto  $a$  corresponde al potencial mayor. No existe ninguna diferencia de potencial entre los puntos  $a$  y  $c$  o entre los puntos  $b$  y  $d$ , ya que se admite que el cable de conexión posee una resistencia despreciable. Por lo tanto, la diferencia de potencial entre los puntos  $c$  y  $d$  también es  $\mathcal{E}$  y la intensidad de corriente que circula por la resistencia es  $I = \mathcal{E}/R$ . Como se indica en la figura, la corriente circula en sentido horario. Obsérvese que dentro de la fuente de fem, la carga fluye de una región de bajo potencial a otra de mayor potencial, de modo que aumenta su energía potencial. Cuando una carga  $\Delta Q$  fluye a través de la fuente de fem  $\mathcal{E}$ , su energía potencial se ve aumentada en la cantidad  $\mathcal{E}\Delta Q$ . En consecuencia, la carga fluye a través de la resistencia donde esta energía potencial se disipa como energía térmica. El ritmo con el que la fuente de fem suministra energía es la potencia de salida:

$$P = \mathcal{E} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \mathcal{E} I \quad (3.10)$$



Potencia suministrada por una fuente de fem

En el circuito simple de la figura anterior, la potencia suministrada por la fuente de fem es igual a la disipada en la resistencia.

Una fuente de fem puede considerarse como una especie de bomba de carga que eleva la carga eléctrica desde una región de baja energía potencial a otra región de alta energía potencial. La figura 3.2 muestra una analogía mecánica del circuito eléctrico simple analizado anteriormente.

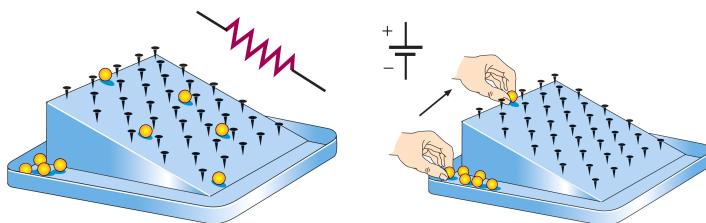


FIGURA 3.2: Analogía mecánica de un circuito simple formado por una resistencia y una fuente de fem. (a) La bolitas parten de una altura  $h$  sobre el fondo y se aceleran entre las colisiones con los clavos por la acción del campo gravitatorio. Los clavos son análogos a los iones reticulares de la resistencia. Durante los choques, las bolitas transfieren la energía cinética que ganan entre las colisiones a los clavos. Debido a las múltiples colisiones, las bolitas poseen una velocidad de deriva hacia el fondo pequeña, y aproximadamente constante. (b) Cuando llegan al fondo, un muchacho las recoge y las devuelve a su altura original  $h$ , comenzando de nuevo el proceso. El muchacho, que realiza el trabajo  $mgh$  sobre cada bolita, es una analogía de la fuente de fem. La fuente de energía en este caso es la energía interna química del muchacho.

En una **batería real**, la diferencia de potencial entre los bornes de la batería, denominada **tensión en los bornes**, no es simplemente igual al valor de la fem de la batería. Consideremos el circuito formado por una batería real y una resistencia de la figura adjunta. Si la corriente se varía modificando la resistencia  $R$  y se mide la tensión en los bornes resulta que esta decrece ligeramente a medida que crece la intensidad de la corriente, es como si existiera una pequeña resistencia dentro de la batería (ver figura 3.3a). Así pues, una batería real puede considerarse como una batería de fem  $\mathcal{E}$  más una pequeña resistencia  $r$ , denominada **resistencia interna** de la batería.



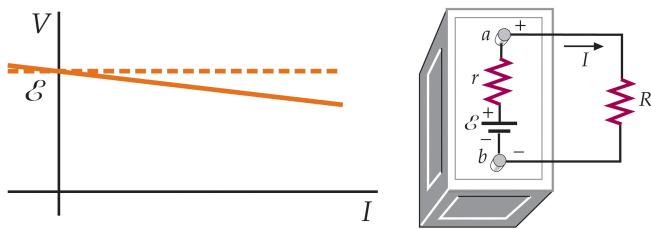


FIGURA 3.3: (a) Tensión en los bornes  $V$  en función de  $I$  para una batería real. La línea de puntos muestra la tensión en los bornes de una batería ideal que tiene la misma fem. (b) Diagrama del circuito para una batería real conectada a una resistencia. Una batería real puede representarse por una batería ideal de fem  $\mathcal{E}$  y una pequeña resistencia  $r$ .

La figura 3.3b muestra el diagrama de un circuito formado por una batería real y una resistencia. Si la corriente del circuito es  $I$ , el potencial en el punto  $a$  se relaciona con el potencial en el punto  $b$  mediante

$$V_a = V_b + \mathcal{E} - Ir$$

Por tanto, la tensión en los bornes es

$$V_a - V_b = \mathcal{E} - Ir \quad (3.11)$$

La tensión en los bornes de la batería disminuye linealmente con la intensidad de corriente, como se indica en la figura 3.3a. La caída de potencial a lo largo de la resistencia  $R$  es  $IR$  y es igual a la tensión en los bornes:

$$IR = V_a - V_b = \mathcal{E} - Ir$$

De aquí resulta, para la intensidad de corriente

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r} \quad (3.12)$$

Si se conecta una batería como en la figura 3.3b, la tensión en los bornes dada por la ecuación (3.11) es inferior a la fem de la batería, debido a la caída de potencial que tiene lugar dentro de la resistencia interna de la batería. Las baterías reales, tales como una buena batería de coche, poseen una resistencia interna del orden de unas pocas centésimas de ohmio, de tal modo que la tensión en los bornes es, aproximadamente igual a la fem, a menos que la intensidad de corriente sea muy grande. Un síntoma de mala batería es poseer una resistencia interna elevada. Si sospechamos que la resistencia de la batería de un automóvil es elevada, comprobar la tensión en los bornes con un voltímetro, que extrae una corriente pequeña para hacer una medida, no siempre es suficiente. Hay que comprobar la tensión en los bornes mientras se extrae corriente, por ejemplo, tratando de arrancar el coche. Si la tensión en los bornes cae considerablemente, es una prueba de que la batería posee una alta resistencia interna y, por lo tanto, es de mala calidad.

La potencia que suministra al circuito una batería real es igual a la tensión en los bornes multiplicada por la intensidad,  $P = (V_a - V_b)I$ . Teniendo en cuenta la ecuación (3.11), esta potencia será igual a:

$$P = \mathcal{E}I - I^2r \quad (3.13)$$

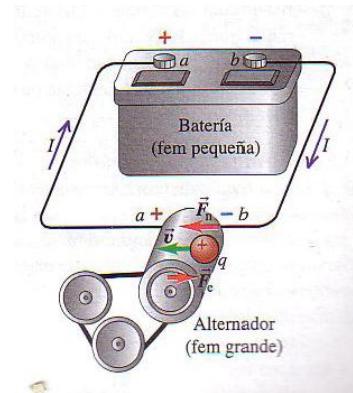
El primero de los términos de la ecuación representa la potencia generada por la fuente de fem, mientras que el segundo representa la potencia disipada en el resistencia interna. Como se puede comprobar a partir de (3.12), esta potencia es igual a la que se disipa en la resistencia  $R$ .

Supongamos ahora que en el circuito se encuentran dos fuentes de fem diferentes con polaridades opuestas. La figura muestra un ejemplo práctico: el proceso de carga de una batería de automóvil (el elemento de circuito superior) por el alternador del vehículo (el elemento inferior). La corriente  $I$  en el circuito es en este caso opuesta a la que se muestra en la Figura 3.3; la fuente inferior está empujando corriente en dirección contraria a través de la fuente superior. Debido a esta inversión de la corriente, en lugar de la ecuación (3.11) se tiene, con respecto a la fuente superior,

$$V_a - V_b = \mathcal{E} + Ir \quad (3.14)$$

y la ecuación (3.13) se convierte en:

$$P = \mathcal{E}I + I^2r \quad (3.15)$$



En lugar de que la fuente de fem superior realice trabajo, se está realizando trabajo sobre dicha fuente. En la fuente superior hay una conversión de energía eléctrica en energía no eléctrica en una proporción  $\mathcal{E}I$ . El término  $I^2r$  de la ecuación anterior es una vez más el ritmo con el que se disipa la energía en la resistencia interna de la fuente superior, y la suma  $\mathcal{E}I + I^2r$  es la potencia eléctrica total de alimentación en la fuente superior. Esto es lo que sucede cuando se conecta una batería recargable a un cargador. El cargador suministra energía eléctrica a la batería; una parte de esta energía se transforma en energía química, para someterse más tarde a una reconversión, y el resto se disipa en la resistencia interna de la batería calentándola y provocando un flujo de calor hacia afuera de ella.

Frecuentemente las baterías se especifican en amperio-horas ( $A \cdot h$ ), lo que indica la carga total que pueden suministrar:

$$1 A \cdot h = (1 C/s)(3600 s) = 3600 C \quad (3.16)$$

La energía total almacenada en la batería es la fem multiplicada por la carga total:

$$U = \mathcal{E}Q \quad (3.17)$$

## 3.6. Combinaciones de resistencias

El análisis de un circuito puede simplificarse reemplazando dos o más resistencias por una sola resistencia equivalente que transporte la misma corriente con la misma caída de potencial que las resistencias originales. La sustitución de una serie de resistencias por una resistencia equivalente es una operación análoga a la sustitución de una serie de condensadores por un condensador equivalente, que fue analizada en el Tema 2.

### 3.6.1. Resistencias en serie

Cuando dos o más resistencias están conectadas como  $R_1$  y  $R_2$  de la figura 3.4a, de modo que a través de ellas circula la misma corriente  $I$ , se dice que

las resistencias están conectadas en serie. La caída de potencial a través de  $R_1$  es  $IR_1$ , y a través de  $R_2$  es  $IR_2$ . La caída de potencial a través de las dos resistencias es la suma de las caídas de potencial a través de las resistencias individuales:

$$V = IR_1 + IR_2 = I(R_1 + R_2) \quad (3.18)$$

La resistencia equivalente  $R_{\text{eq}}$  que presenta la misma caída de potencial  $V$  cuando circula a través de ella la misma corriente  $I$  se encuentra haciendo  $V = IR_{\text{eq}}$  (figura 3.4b). Por lo tanto,  $R_{\text{eq}}$  viene dada por:

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 \quad (3.19)$$

Cuando hay más de dos resistencias en serie, la resistencia equivalente es:

**Resistencia equivalente para resistencias en serie**

$$R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots \quad (3.20)$$

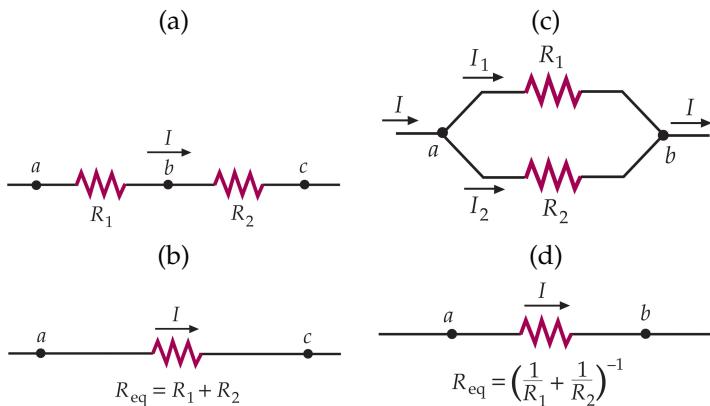


FIGURA 3.4: (a) Dos resistencias en serie transportan la misma corriente. (b) La resistencias de la figura (a) pueden sustituirse por una sola resistencia equivalente  $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2$ , que proporciona la misma caída de potencial total cuando circula la misma corriente que en (a). (c) Dos resistencias están combinadas en paralelo cuando se conectan juntas en ambos extremos, de modo que la caída de potencial es la misma a través de cada una de ellas. (d) Las dos resistencias de la figura (a) pueden sustituirse por una sola resistencia equivalente  $R_{\text{eq}} = R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$ .

### 3.6.2. Resistencias en paralelo

Dos resistencias conectadas como indica la figura 3.4c, de modo que entre ellas se establece la misma diferencia de potencial, se dicen que están conectadas en paralelo. Obsérvese que las resistencias están conectadas en ambos extremos por cables. Sea  $I$  la corriente que fluye del punto  $a$  al punto  $b$ . En el punto  $a$  la corriente se divide en dos partes,  $I_1$  que circula por la rama superior que contiene  $R_1$  e  $I_2$  que circula por la rama inferior donde se encuentra  $R_2$ . Las dos **derivaciones de corrientes** suman la intensidad de corriente que circula por el punto  $a$ :

$$I = I_1 + I_2 \quad (3.21)$$

En el punto  $b$  las diferentes derivaciones de corriente se unen, de tal forma que la corriente que continúa por el hilo a partir de este punto es también

igual a  $I = I_1 + I_2$ . La caída de potencial de un extremo a otro de cualquiera de las resistencias es  $V = V_a - V_b$ , la cual se relaciona con la corriente mediante:

$$V = I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad (3.22)$$

La resistencia equivalente de una combinación de resistencias en paralelo se define como aquella resistencia  $R_{\text{eq}}$  para la cual la misma corriente total  $I$  produce la misma caída de potencial  $V$  (figura 3.4d):

$$R_{\text{eq}} = \frac{V}{I} \quad (3.23)$$

Despejando  $I$  en esta ecuación y teniendo en cuenta que  $I = I_1 + I_2$ , tenemos:

$$I = \frac{V}{R_{\text{eq}}} \leftrightarrow I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (3.24)$$

En donde hemos usado la ecuación (3.22) para  $I_1$  e  $I_2$ . La resistencia equivalente de las dos resistencias en paralelo viene dada por:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (3.25)$$

Este resultado puede generalizarse para combinaciones en las que se conecten tres o más resistencias en paralelo:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots \quad (3.26)$$

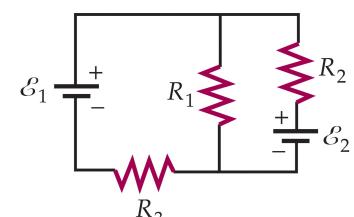
**Resistencia equivalente para resistencias en paralelo**

## 3.7. Reglas de Kirchhoff

Existen muchos circuitos simples, tales como el indicado en la figura, que no pueden analizarse meramente reemplazando combinaciones de resistencias por una resistencia equivalente. Por ejemplo, las dos resistencias  $R_1$  y  $R_2$  del circuito de la figura parecen estar en paralelo, pero no es así. La caída de potencial no es la misma a través de ambas resistencias, debido a la presencia de la fuente de fem  $\mathcal{E}_2$  en serie con  $R_2$ . Además  $R_1$  y  $R_2$  no transportan la misma corriente, pues no están en serie.

Existen dos reglas, llamadas **reglas de Kirchhoff**, que se aplican a este y a cualquier otro circuito:

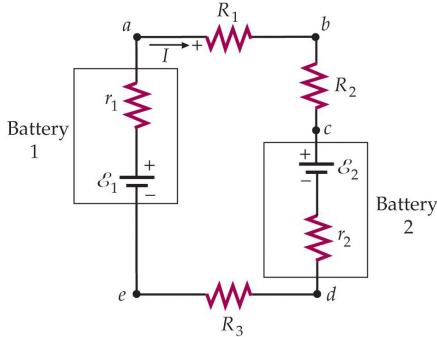
1. La suma algebraica de las variaciones de potencial a lo largo de cualquier bucle o malla del circuito debe ser cero.
2. En un punto o nudo de ramificación de un circuito en donde puede dividirse la corriente, la suma de las intensidades de corriente que entran en el nudo debe ser igual a la suma de las intensidades de corriente que salen del mismo.



La primera regla de Kirchhoff, llamada **regla de las mallas**, es una consecuencia directa de que el campo eléctrico es conservativo. La segunda regla de Kirchhoff, llamada **regla de los nudos**, se deduce de la conservación de la carga.

### 3.7.1. Circuitos de una sola malla

Como ejemplo de aplicación de la regla de las mallas, consideremos el circuito de la figura, formado por dos baterías con resistencias internas  $r_1$  y  $r_2$  y tres resistencias externas. Deseamos determinar la corriente en función de las fems y las resistencias.



Elegimos el sentido de las agujas del reloj como positivo, según está indicado en la figura, y aplicamos la regla de las mallas recorriendo el circuito en el sentido positivo, comenzando en el punto  $a$ . Obsérvese que hay una caída de potencial al atravesar la fuente de fem entre  $c$  y  $d$  y un incremento de potencial al atravesar la fuente entre  $e$  y  $a$ . Suponiendo que  $I$  es positivo, se produce una caída de potencial al atravesar cada una de las resistencias. Comenzando en el punto  $a$ , la regla de las mallas nos da:

$$-IR_1 - IR_2 - \mathcal{E}_2 - Ir_2 - IR_3 + \mathcal{E}_1 - Ir_1 = 0 \quad (3.27)$$

Despejando el valor de la intensidad, se obtiene

$$I = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2}{R_1 + R_2 + R_3 + r_1 + r_2} \quad (3.28)$$

Si  $\mathcal{E}_2 > \mathcal{E}_1$ , se obtiene un número negativo para la intensidad de corriente  $I$ , indicando que esta circula en sentido negativo (opuesto al sentido que hemos supuesto positivo, es decir, el de las agujas del reloj).

### 3.7.2. Circuitos de múltiples mallas

En circuitos con múltiples mallas, los sentidos de las corrientes de cada rama suelen ser desconocidos inicialmente. Afortunadamente, para aplicar las reglas de Kirchhoff no necesitamos conocer de entrada dichos sentidos. De hecho, estas reglas nos permiten, entre otras cosas, determinarlos. Para resolver el problema, debemos asignar un determinado sentido en cada rama que definiremos como positivo y cuya representación vendrá dada por una flecha que indica el flujo de la corriente (véase la figura). Si cuando determinamos mediante las reglas de Kirchhoff cada una de las intensidades, la correspondiente a una rama determinada es negativa, esto implicará que el sentido es el contrario del inicialmente asignado, y si es positiva, el sentido asignado será el correcto.



La corriente siempre circula por una resistencia de mayor a menor potencial. Por consiguiente, siempre que se atraviesa una resistencia en el sentido de la corriente, el cambio de potencial es negativo y viceversa. Se puede aplicar la siguiente regla: Por cada rama del circuito, dibujamos una flecha indicando el sentido positivo de la corriente. La diferencia de potencial  $\Delta V$  entre los extremos final e inicial de una determinada resistencia, definido estos por el sentido de la corriente, es igual a  $-IR$ , y entre el inicial y el final es  $IR$ .

Si atravesamos una resistencia en sentido positivo e  $I$  es positiva, entonces  $-IR$  es negativo. Esto es así porque la corriente va siempre en el sentido de potencial decreciente. Si atravesamos la resistencia en sentido positivo e  $I$  es negativa, entonces  $-IR$  es una cantidad positiva. De forma similar, si atravesamos las resistencias en sentido negativo e  $I$  es positiva,  $IR$  es positivo y si lo hacemos en sentido negativo e  $I$  es negativa el resultado es que  $IR$  es una cantidad negativa.

Para analizar circuitos que contienen más de una ramas necesitamos utilizar ambas reglas de Kirchhoff. La regla de los nudos se aplica en los puntos del circuito en los que la corriente se distribuye por diferentes conductores.

#### EJEMPLO 3.1 Aplicación de las reglas de Kirchhoff

##### Determinar la corriente en cada parte del circuito mostrado en la figura

Como existen tres intensidades de corriente a determinar  $I$ ,  $I_1$  e  $I_2$ , necesitamos tres ecuaciones. Una ecuación procede de aplicar la regla de los nudos al punto  $b$  (podría aplicarse igualmente al punto  $e$ , pero obtendríamos la misma información). Las otras dos ecuaciones se obtienen mediante la regla de las mallas. Existen tres mallas en el circuito: las dos interiores  $abefa$  y  $bcdeb$  y la exterior  $abcdefa$ . Podemos utilizar dos cualesquiera de ellas (la tercera nos daría una información redundante). Existe un sentido fijado por la flecha en cada rama del circuito de la figura. El sentido que indica la flecha en cada rama es por definición la positiva. Si nuestro cálculo determina que la corriente en una rama tiene valor negativo, esto implicará que la corriente va en esta rama en sentido opuesto al de la flecha.

Procedemos a continuación al planteamiento de las ecuaciones del circuito:

1. Aplicamos la regla de los nudos al punto  $b$ :

$$I = I_1 + I_2 \quad (3.29)$$

2. Aplicamos la regla de las mallas al circuito exterior  $abcdefa$  (las intensidades vendrán dadas en Amperios):

$$12 - 2I_2 - 5 - 3(I_1 + I_2) = 0 \quad \rightarrow \quad 7 - 3I_1 - 5I_2 = 0 \quad (3.30)$$

3. Para la tercera ecuación, se aplica la regla de las mallas a la malla de la derecha  $bcdeb$ :

$$-2I_2 - 5 + 4I_1 = 0 \quad (3.31)$$

Las ecuaciones (3.30) y (3.31) forman un sistema con dos incógnitas

$$\begin{cases} 3I_1 + 5I_2 = 7 \\ 4I_1 - 2I_2 = 5 \end{cases}$$

cuya resolución nos proporciona los valores de  $I_1$  e  $I_2$ :

$$I_1 = 1.5 \text{ A}, \quad I_2 = 0.5 \text{ A}$$

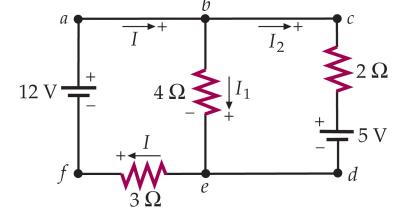
Aplicando, finalmente, la ecuación (3.29) se obtiene el valor de  $I$ :

$$I = 2 \text{ A}$$

---

El ejemplo anterior ilustra el método general para el análisis de circuitos con múltiples mallas:

1. Dibujar un esquema del circuito.
2. Reemplazar cualquier asociación de resistencias en serie o paralelo por su resistencia equivalente.
3. Elegir un sentido para la corriente en cada rama del circuito e indicar el sentido positivo con una flecha. Especificar las corrientes de cada rama, añadir los signos + y - para indicar los extremos, los terminales de potencial mayor y menor de cada fuente de fem.



4. Aplicar la regla de los nudos a cada una de las uniones en donde la corriente se divide.
5. Aplicar la regla de las mallas a cada uno de los bucles cerrados hasta obtener tantas ecuaciones como incógnitas. Cuando se atraviesa una resistencia en sentido positivo, el cambio en el potencial es  $-IR$ . Cuando se atraviesa una batería desde el terminal negativo al positivo, el cambio en el potencial es  $\mathcal{E} - IR$ .
6. Resolver las ecuaciones para deducir los valores de las incógnitas.

## Tema 4

# Magnetostática en el vacío

---

### 4.1. Introducción

La lista de las aplicaciones tecnológicas del magnetismo es muy larga. Por ejemplo, se utilizan grandes electroimanes para acarrear cargas pesadas en los desguaces. Los imanes se utilizan en dispositivos como medidores, motores y altavoces. El funcionamiento de los discos duros que se utilizan para el almacenamiento de datos en los ordenadores está basado en fenómenos magnéticos. Se utilizan campos magnéticos intensos generados por imanes superconductores como medio para confinar plasmas, a temperaturas del orden de  $10^8$  °C, que se utilizan en investigaciones sobre fusión nuclear controlada.

A medida que investiguemos el magnetismo en este capítulo, descubriremos que no puede desligarse de la electricidad. Por ejemplo, los campos magnéticos afectan a las cargas eléctricas en movimiento y las cargas en movimiento producen campos magnéticos.

Muchos historiadores de la ciencia creen que la brújula, que utiliza una aguja magnética, se utilizaba en China ya en el siglo XIII a.C., siendo su invención de origen árabe o hindú. El fenómeno del magnetismo era conocido por los griegos ya en el año 800 a.C. Los griegos descubrieron que ciertas piedras hechas de un mineral hoy llamado *magnetita* ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ), atraían trozos de hierro.

En 1269, Pierre de Maricourt descubrió que si una aguja se deja libremente en distintas posiciones sobre un imán natural esférico, se orienta a lo largo de líneas que, rodeando el imán, pasan por puntos situados en extremos opuestos de la esfera. Estos puntos fueron llamados polos del imán. Posteriormente, muchos experimentadores observaron que todo imán, cualquiera que sea su forma, posee dos polos, llamados polo norte y polo sur, en donde la fuerza ejercida por el imán tiene su máxima intensidad. También se observó que los polos iguales de dos imanes se repelen entre sí y los polos distintos se atraen mutuamente.

En 1600, William Gilbert descubrió que la Tierra es un imán natural, con polos magnéticos próximos a los polos geográficos norte y sur. Como el polo norte de la aguja de una brújula apunta al polo sur de un imán, lo que llamamos polo norte de la Tierra es realmente un polo sur magnético.

En 1750, John Mitchell utilizó una balanza de torsión para demostrar que

los polos magnéticas ejercen fuerzas atractivas o repulsivas entre sí y que esas fuerzas varían según el inverso del cuadrado de su separación. Aunque la fuerza entre dos polos magnéticos es similar a la fuerza entre dos cargas eléctricas, existe una diferencia fundamental: los polos magnéticos siempre se presentan por parejas. Si se rompe un imán por la mitad, aparecen polos iguales y opuestos a cada lado del punto de rotura; es decir, aparecen dos imanes, cada uno con un polo norte y un polo sur. A lo largo del tiempo se ha especulado mucho sobre la posible existencia de un polo magnético aislado, y más recientemente se ha realizado un considerable esfuerzo experimental a fin de encontrar tal objeto. Hasta ahora no existe una evidencia concluyente de un polo magnético aislado.

La relación entre magnetismo y electricidad se descubrió en 1819 cuando, mientras se preparaba para una demostración en una conferencia, el científico danés Hans Ørsted descubrió que una corriente eléctrica en un cable afectaba a la aguja de una brújula cercana. Poco después, André-Marie Ampère dedujo las leyes cuantitativas de la fuerza magnética entre conductores portadores de corriente. También sugirió que las espiras de corriente eléctrica de tamaño molecular son responsables de *todos* los fenómenos magnéticos.

Alrededor de 1820, Faraday y Joseph Henry identificaron de forma independiente más conexiones entre la electricidad y el magnetismo. Demostraron que se podía generar una corriente eléctrica en un circuito moviendo un imán cerca del circuito o bien cambiando la corriente de un circuito próximo. Sus observaciones demostraron que un campo magnético variable produce un campo eléctrico. Años después, la obra teórica de James Clerk Maxwell demostró que lo contrario también es cierto: un campo eléctrico variable genera un campo magnético.

En este capítulo estudiaremos los efectos de los campos magnéticos estacionarios (o magnetostáticos) sobre cargas y corrientes, y estudiaremos las fuentes de campos magnéticos.

## 4.2. Fuerza creada por un campo magnético

### Fuerza sobre una carga móvil

Experimentalmente, se demuestra que cuando una carga  $q$  se mueve en el seno de un **campo magnético**  $\vec{B}$  con una velocidad  $\vec{v}$ , aparece una fuerza cuyo módulo es proporcional a  $q$  y a  $v$  y al seno del ángulo que forman  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ . Además, la fuerza es perpendicular a ambos, velocidad y campo magnético. Estos resultados experimentales pueden resumirse del modo siguiente: cuando una carga  $q$  se mueve con velocidad  $\vec{v}$  en un campo magnético  $\vec{B}$ , la fuerza magnética  $\vec{F}$  que actúa sobre la carga es

Fuerza magnética sobre una carga móvil

$$\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} \quad (4.1)$$

Como  $\vec{F}$  es perpendicular a ambos,  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$ , resulta ser perpendicular al plano definido por estos dos vectores. El sentido de  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  viene dado según la regla de la mano derecha (es decir, sería el eje de rotación cuando  $\vec{v}$  gira hacia  $\vec{B}$ ), como se muestra en la Figura 4.1. Si  $q$  es positiva,  $\vec{F}$  está dirigida en el mismo sentido que  $\vec{v} \wedge \vec{B}$ .

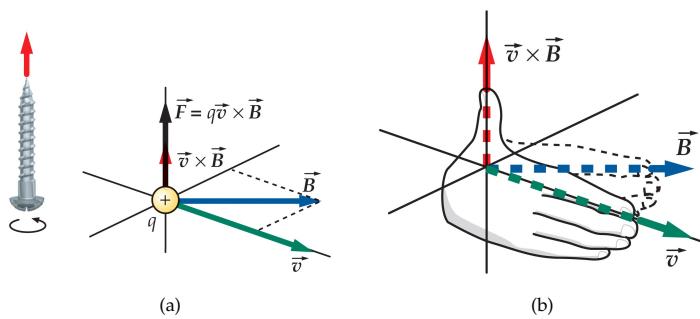


FIGURA 4.1: Regla de la mano derecha para determinar el sentido de la fuerza magnética ejercida sobre una carga que se mueve en un campo magnético. Si  $q$  es positiva,  $\vec{F}$  tiene el mismo sentido que  $\vec{v} \wedge \vec{B}$ . (a) El producto vectorial  $\vec{v} \wedge \vec{B}$  es perpendicular a ambos vectores  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  y su sentido es el que correspondería a un tornillo que avanza cuando gira en el mismo sentido que lo haría si  $\vec{v}$  girara hacia  $\vec{B}$ . (b) Si los dedos de la mano derecha señalan el sentido de  $\vec{v}$  de tal modo que pueden curvarse hacia  $\vec{B}$ , el pulgar señala el sentido de  $\vec{F}$ .

En la Figura 4.2 se muestran algunos ejemplos del sentido de las fuerzas ejercidas sobre las cargas móviles cuando el vector campo magnético  $\vec{B}$  se encuentra en la dirección vertical hacia arriba. Obsérvese que la dirección de cualquier campo magnético particular  $\vec{B}$  puede encontrarse experimentalmente midiendo  $\vec{F}$  y  $\vec{v}$  para varias velocidades en diferentes direcciones y aplicando después la ecuación (4.1).

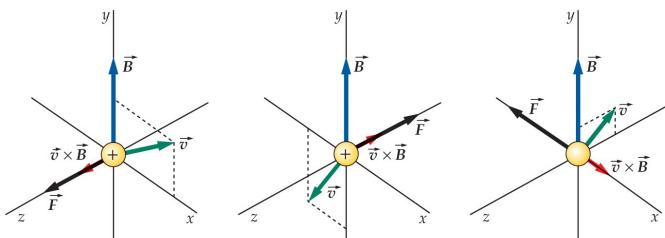
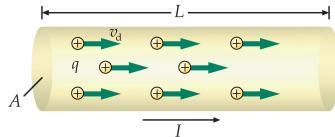


FIGURA 4.2: Sentido de la fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada que se mueve con velocidad  $\vec{v}$  en un campo magnético  $\vec{B}$ .

Esa ecuación define el campo magnético  $\vec{B}$  en función de la fuerza ejercida sobre una carga móvil. La unidad del Sistema Internacional del campo magnético es el **Tesla** (T). Una carga de 1 C que se mueve con una velocidad de 1 m/s perpendicular a un campo magnético de 1 T, experimenta una fuerza de 1 N.

Esta unidad es bastante grande. El campo magnético terrestre es algo menor que  $10^{-4}$  T en la superficie de la Tierra. Los campos magnéticos próximos a imanes permanentes poderosos suelen ser de 0.1 a 0.5 T y los grandes electroimanes de laboratorios y de la industria producen campos de 1 a 2 T. Campos magnéticos superiores a 10 T son muy difíciles de producir, pues las fuerzas magnéticas resultantes romperían los imanes en pedazos, o los aplastarían. Una unidad usada corrientemente, deducida del sistema cgs, es el **Gauss** (G), que está relacionada con el Tesla por  $1 \text{ G} = 10^{-4} \text{ T}$ .

### Fuerza sobre un conductor



Cuando circula una corriente a través de un cable situado en el seno de un campo magnético, existe una fuerza que se ejerce sobre el conductor que es simplemente la suma de las fuerzas magnéticas sobre cada una de las partículas cargadas cuyo movimiento produce la corriente. La figura muestra un segmento de alambre de sección transversal  $A$  y longitud  $L$  por el cual circula una corriente  $I$ . Si el alambre está en el interior de un campo magnético  $\vec{B}$ , la fuerza magnética sobre cada carga es  $q\vec{v}_d \wedge \vec{B}$ , siendo  $v_d$  la velocidad de deriva de los portadores de carga. El número de cargas en el interior del segmento de alambre es igual al número de cargas por unidad de volumen,  $n$ , multiplicado por el volumen  $AL$ . Así, la fuerza total sobre el segmento del cable será

$$\vec{F} = (q\vec{v}_d \wedge \vec{B})nAL$$

Según la ecuación (3.2), la corriente que circula por el hilo es

$$I = nqv_d A$$

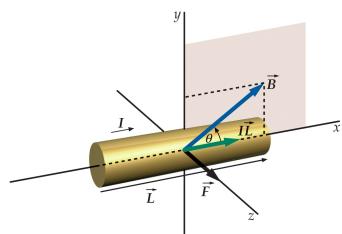
Por tanto, la fuerza sobre el hilo puede escribirse en la forma:

**Fuerza magnética sobre un segmento de alambre portador de corriente**

$$\vec{F} = I\vec{L} \wedge \vec{B} \quad (4.2)$$

en donde  $\vec{L}$  es un vector cuyo módulo es la longitud del hilo y cuya dirección es paralela a la corriente, siguiendo el mismo sentido de esta. Si la corriente circula en el sentido positivo del eje  $x$  y el campo magnético está situado en el plano  $xy$ , tal como muestra la figura, la fuerza sobre el hilo estará dirigida hacia el sentido positivo del eje  $z$ .

En la ecuación (4.2) se considera que el segmento de cable es recto y que el campo magnético no varía en toda su longitud. Esta ecuación se puede generalizar fácilmente para el caso de un conductor de forma arbitraria eligiendo simplemente un segmento de hilo suficientemente pequeño  $d\ell$ , siendo  $d\vec{F}$  la fuerza que actúa sobre dicho segmento:



**Fuerza magnética sobre un elemento de corriente**

$$d\vec{F} = Id\vec{\ell} \wedge \vec{B} \quad (4.3)$$

en donde  $\vec{B}$  es el vector campo magnético en el segmento. La magnitud  $Id\vec{\ell}$  se denomina **elemento de corriente**. Se halla la fuerza total que actúa sobre el conductor integrando respecto a todos los elementos de corriente y utilizando el valor del campo en cada uno de ellos. La ecuación anterior es equivalente a (4.1) con el elemento de corriente  $Id\vec{\ell}$  sustituyendo a  $q\vec{v}$ .

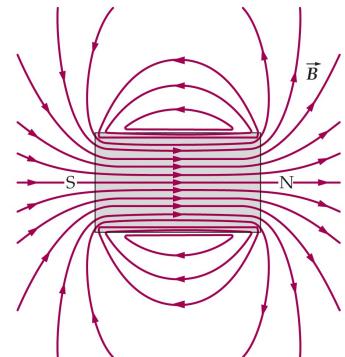
### Líneas de campo magnético

Del mismo modo que el campo eléctrico  $\vec{E}$  puede representarse mediante líneas de campo eléctrico, también el campo magnético  $\vec{B}$  puede ser representado mediante **líneas de campo magnético**. En ambos casos, la dirección y el sentido del campo vienen indicados por la dirección y el sentido de las líneas de campo, ya que las líneas de campo son tangentes al campo magnético. Análogamente, el módulo del campo está relacionado con la densidad

de líneas de campo. Existen, sin embargo, dos diferencias importantes entre las líneas del campo eléctrico y las líneas del campo magnético:

- Las líneas de campo eléctrico poseen la dirección de la fuerza eléctrica actuando sobre una carga positiva, mientras que las líneas de campo magnético son perpendiculares a la fuerza magnética sobre una carga móvil.
- Las líneas de campo eléctrico comienzan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas; las líneas de campo magnético son cerradas.

La figura muestra las líneas de campo magnético tanto fuera como dentro de una barra imantada.



### 4.3. Movimiento de una carga puntual en un campo magnético

La fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada que se mueve a través de un campo magnético es siempre perpendicular a la velocidad de la partícula. Por lo tanto, la fuerza magnética modifica la dirección de la velocidad, pero no su módulo. En consecuencia, *los campos magnéticos no realizan trabajo sobre las partículas y no modifican su energía cinética*.

En el caso especial en el que la velocidad de una partícula sea perpendicular a un campo magnético uniforme, como se ve en la figura, la partícula se mueve describiendo una órbita circular. La fuerza magnética proporciona la fuerza centrípeta necesaria para que la partícula adquiera la aceleración  $v^2/r$  del movimiento circular. Utilizando la segunda ley de Newton podemos relacionar el radio  $r$  de la circunferencia con el campo magnético  $\vec{B}$  y la velocidad  $\vec{v}$  de la partícula. Si la velocidad es  $\vec{v}$ , el módulo de la fuerza resultante es  $qvB$ , ya que  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  son perpendiculares. La segunda ley de Newton nos da:

$$\begin{aligned} F &= ma \\ qvB &= m \frac{v^2}{r} \end{aligned}$$

o sea,

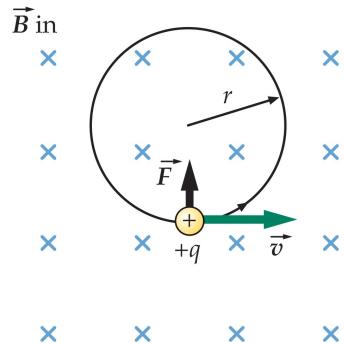
$$r = \frac{mv}{qB} \quad (4.4)$$

El periodo del movimiento circular es el tiempo que la partícula tarda en dar una vuelta completa alrededor de la circunferencia. El periodo viene relacionado con la velocidad por:

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

Aplicando (4.4) podemos obtener el periodo del movimiento circular de la partícula, llamado **periodo ciclotrón**:

$$T = \frac{2\pi m}{qB} \quad (4.5)$$

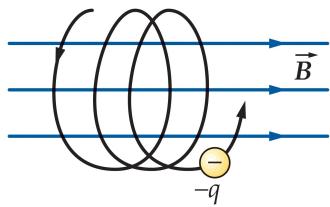


La velocidad (o frecuencia) angular del movimiento circular, llamada **frecuencia ciclotrón**, es igual a  $\omega = 2\pi/T$ :

Frecuencia ciclotrón

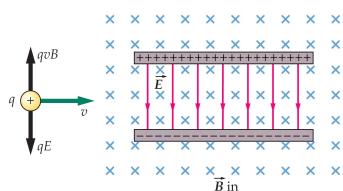
$$\omega = \frac{q}{m} B \quad (4.6)$$

Obsérvese que el periodo y la frecuencia dados por las ecuaciones anteriores dependen de la relación  $q/m$ , pero son independientes del radio  $r$  y de la velocidad  $v$ . Dos aplicaciones importantes del movimiento circular de las partículas cargadas en un campo magnético uniforme, el espectrómetro de masas y el ciclotrón, serán estudiados más adelante en esta sección.



Si una partícula cargada entra en una región del espacio donde existe un campo magnético uniforme, con una velocidad que no es perpendicular a  $\vec{B}$ , no existe una componente de la fuerza, ni por lo tanto de la aceleración, que sea paralela a  $\vec{B}$ , de modo que la componente de velocidad paralela a  $\vec{B}$  se mantiene constante. La fuerza magnética que actúa sobre la partícula es perpendicular a  $\vec{B}$ , por lo que la variación del movimiento de la partícula debida a esta fuerza es la misma que la que ya se ha estudiado. La trayectoria de la partícula es una hélice, como muestra la figura.

### Selector de velocidades



La fuerza magnética que actúa sobre una partícula cargada que se mueve en el interior de un campo magnético uniforme puede equilibrarse por una fuerza electrostática si se eligen adecuadamente los valores, direcciones y sentidos de los campos magnéticos y eléctricos. Puesto que la fuerza eléctrica tiene la dirección y el sentido del campo eléctrico (en el caso de partículas con carga positiva) y la fuerza magnética es perpendicular al campo magnético, los campos eléctrico y magnético deben ser perpendiculares entre sí para que se contrarresten estas fuerzas. Una región de estas características se dice que tiene los **campos cruzados**.

La figura muestra una región del espacio entre las placas de un condensador en donde existe un campo eléctrico y un campo magnético perpendicular al primero (producido por un imán con los polos magnéticos por encima y por debajo del papel). Consideraremos una partícula de carga  $q$  entrando desde la izquierda en esta región. La fuerza neta sobre la partícula es

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Si  $q$  es positiva, la fuerza eléctrica de módulo  $qE$  está dirigida hacia abajo y la fuerza magnética de módulo  $qvB$  está dirigida hacia arriba. Si la carga es negativa, estarán invertidas ambas fuerzas. Las dos fuerzas se equilibrarán si  $qE = qvB$ , o sea,

$$v = \frac{E}{B} \quad (4.7)$$

Las fuerzas se equilibrarán sólo para partículas cuya velocidad sea la dada por la ecuación anterior. Cualquier partícula con esta velocidad, independientemente de su masa o carga, atravesará el espacio sin desviarse. Una partícula de velocidad mayor se desviará en el sentido de la fuerza magnética, y otra de velocidad menor, se desviará en el sentido de la fuerza eléctrica.

Un dispositivo de campos cruzados de esta forma se denomina, por ello, **selector de velocidades**. Sólo pasarán y serán seleccionadas aquellas partículas cuya velocidad venga dada por la ecuación (4.7).

### Espectrómetro de masas

El **espectrómetro de masas**, diseñado por vez primera por Francis William Aston en 1919, fue desarrollado para medir las masas de los isótopos. Estas medidas constituyen un medio importante para la determinación de la existencia de isótopos y su abundancia en la naturaleza. Por ejemplo, así se comprobó que el magnesio natural está formado por un 78.7 % de  $^{24}\text{Mg}$ , un 10.1 % de  $^{25}\text{Mg}$  y un 11.2 % de  $^{26}\text{Mg}$ . Estos isótopos poseen masas en la relación aproximada 24:25:26.

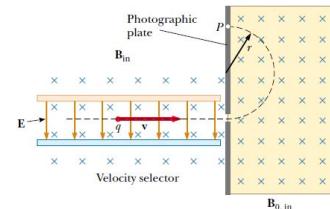
En una versión de este dispositivo, conocido como *espectrómetro de masas de Bainbridge*, un haz de iones pasa en primer lugar a través de un selector de velocidades y entra en un segundo campo magnético uniforme  $\vec{B}_0$  que tiene la misma dirección y sentido que el campo magnético en el selector (ver figura). Una vez que entran en el segundo campo magnético, los iones se mueven siguiendo una semicircunferencia de radio  $r$  antes de golpear una placa fotográfica en P. Si los iones están cargados positivamente, el haz se deflecta hacia arriba. Si los iones están cargados negativamente, el haz se deflecta hacia abajo. Haciendo uso de la ecuación (4.4), se puede expresar el cociente  $m/q$  de la forma:

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v}$$

Usando la ecuación (4.7), llegamos a la expresión

$$\frac{m}{q} = \frac{rB_0B}{E} \quad (4.8)$$

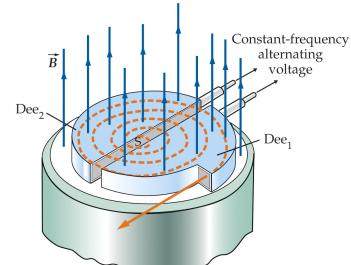
Por tanto, podemos determinar  $m/q$  midiendo el radio de curvatura y conociendo los valores de los campos  $B$ ,  $B_0$  y  $E$ . En la práctica, se suele medir las masas de varios isótopos de un determinado ion, de forma que todos los iones portan la misma carga  $q$ . De este modo, la relación entre las masas de los isótopos puede determinarse incluso si se desconoce  $q$ .



### El ciclotrón

El ciclotrón fue inventado por E.H. Lawrence y M.S. Livingston en 1934 para acelerar partículas tales como protones o deuterones hasta conseguir una energía cinética elevada. Para bombardear núcleos atómicos se utilizan partículas de alta energía; así se producen reacciones nucleares que se estudian con objeto de obtener información acerca del núcleo. Se utilizan también protones o deuterones de alta energía para producir materiales radiactivos y con fines médicos.

La figura es un dibujo esquemático de un ciclotrón. Las partículas se mueven en el interior de dos recipientes metálicos semicirculares denominados *dees* (debido a su forma de D). Los recipientes están contenidos en una cámara de vacío situada en el seno de un campo magnético proporcionado por un electroimán. En la región en la cual se mueven las partículas debe haberse realizado el vacío para que las partículas no pierdan energía y no sean



dispersadas en choques con las moléculas de aire. Entre las des se mantiene una diferencia de potencial  $\Delta V$  que se alterna en el tiempo con un periodo  $T$ , elegido de modo que sea igual al periodo de ciclotrón  $T = 2\pi m/(qB)$ . Esta diferencia de potencial crea un campo eléctrico en el espacio hueco comprendido entre las des. No existe campo eléctrico dentro de las des debido al blindaje metálico.

Las partículas cargadas positivamente se inyectan inicialmente en la de<sub>1</sub> con una velocidad pequeña, procedentes de una fuente de iones S próxima al centro de las des. Se mueven siguiendo una semicircunferencia en de<sub>1</sub> y llegan al hueco que hay entre de<sub>1</sub> y de<sub>2</sub> al cabo de un tiempo  $T/2$ . El potencial se ajusta de modo que la de<sub>1</sub> esté a mayor potencial que la de<sub>2</sub> cuando las partículas llegan al espacio hueco entre ambas. Cada partícula se acelera, por lo tanto, a través de este hueco a causa del campo eléctrico y gana una energía cinética igual a  $q\Delta V$ .

Al poseer más energía cinética, la partícula se mueve siguiendo una semicircunferencia de mayor radio en la de<sub>2</sub> y de nuevo llega al hueco después de un tiempo  $T/2$  porque el periodo es independiente de la velocidad de la partícula. En este tiempo el potencial entre las des se ha invertido, de modo que la de<sub>2</sub> está ahora a mayor potencial. De nuevo, la partícula se acelera a través del hueco y gana una energía cinética adicional igual a  $q\Delta V$ . Cada vez que la partícula llega al hueco, es acelerada y gana una energía cinética igual a  $q\Delta V$ . De este modo se mueve en órbitas semicirculares cada vez mayores, hasta que finalmente abandona el campo magnético. En un ciclotrón típico, cada partícula realiza de 50 a 100 revoluciones y emerge con energías de hasta varios centenares de MeV.

La energía cinética de una partícula que emerge de un ciclotrón puede calcularse mediante la ecuación (4.4) sustituyendo  $r$  por el valor máximo del radio de las des y despejando el valor de  $v$ :

$$r = \frac{mv}{qB} \quad v = \frac{qBr}{m}$$

Por lo tanto,

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{q^2B^2r^2}{2m} \quad (4.9)$$

#### 4.4. Momento sobre una espira

En la Sección 4.2 calculamos la fuerza que se ejerce sobre un conductor portador de corriente en el seno de un campo magnético. Tomando este valor como puntos de partida, mostraremos que la fuerza total sobre una espira de corriente en el seno de un campo magnético es nula, pero no así el momento aplicado. En esta sección calcularemos el valor de dicho momento.

Consideremos una espira rectangular que porta una corriente  $I$  en presencia de un campo magnético uniforme que forma un ángulo  $\theta < 90^\circ$  con una línea perpendicular al plano de la espira, tal como muestra la figura 4.3a. Por conveniencia, supondremos que  $\vec{B}$  es perpendicular a los lados ① y ③. En este caso, las fuerzas magnéticas ejercidas sobre los lados ② y ④ se cancelan una con otra y no producen momento ya que pasan a través de un origen común. Sin embargo, las fuerzas que actúan sobre los lados ① y ③,  $\vec{F}_1$  y  $\vec{F}_3$  respectivamente, forman un par de fuerzas y producen un momento *alrededor de cualquier punto*. Si nos fijamos en la vista lateral mostrada en la Figura

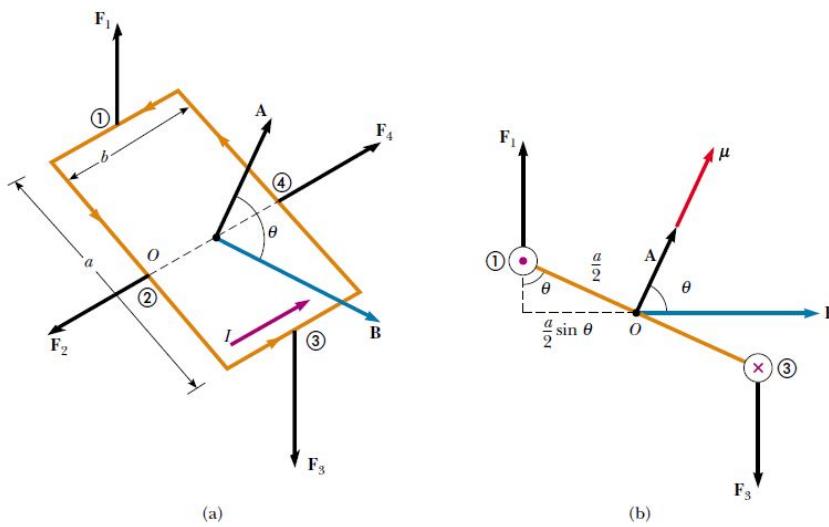


FIGURA 4.3: (a) Espira de corriente rectangular en el seno de un campo magnético uniforme. El vector  $\vec{A}$  perpendicular al plano de la espira forma un ángulo  $\theta$  con el campo. Las fuerzas magnéticas ejercidas sobre los lados ② y ④ se cancelan, pero las fuerzas ejercidas sobre los lados ① y ③ crean un momento sobre la espira. (b) Vista lateral de la espira, mostrando los lados ① y ③.

4.3b, podemos observar que el brazo de palanca de  $\vec{F}_1$  respecto al punto  $O$  es igual a  $(a/2) \sin \theta$ . Análogamente, el brazo de palanca de  $\vec{F}_3$  respecto a  $O$  tiene también ese mismo valor. Ya que  $F_1 = F_3 = IbB$ , el momento neto respecto a  $O$  tiene por módulo

$$\tau = F_1 \frac{a}{2} \sin \theta + F_3 \frac{a}{2} \sin \theta = IabB \sin \theta = IAB \sin \theta$$

donde  $A = ab$  es el área de la espira. Este resultado muestra que el momento tiene su valor máximo  $IAB$  cuando el campo es perpendicular a la normal al plano de la espira ( $\theta = 90^\circ$ ), y que es cero cuando el campo es paralelo a la normal del plano de la espira ( $\theta = 0^\circ$ ). Como podemos ver en la Figura 4.3, la espira tiende a rotar en la dirección que disminuye el valor de  $\theta$  (es decir, de forma que el vector  $\vec{A}$ , paralelo al vector normal  $\hat{n}$  a la superficie de la espira, tiende a alinearse con el vector campo magnético  $\vec{B}$ ).

El momento puede escribirse convenientemente en función del **momento dipolar magnético**  $\vec{\mu}$  (o simplemente, momento magnético) de la espira de corriente, definido por

Momento magnético de una espira

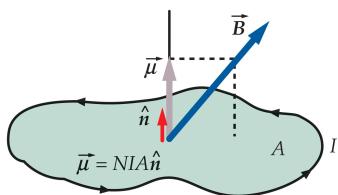
$$\vec{\mu} = IA\hat{n} \quad (4.10)$$

En función del momento dipolar magnético, el momento sobre la espira de corriente viene dado por

Momento sobre una espira

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \wedge \vec{B} \quad (4.11)$$

Esta ecuación, deducida para una espira rectangular, es válida en general para una espira plana de cualquier forma geométrica. El momento sobre



cualquier espira es igual al producto vectorial del momento magnético  $\vec{\mu}$  de la espira y el campo magnético  $\vec{B}$ , en donde el momento magnético se define como un vector perpendicular al área de la espira (ver figura), cuyo módulo es igual a  $IA$  y que tiene el mismo sentido que  $\hat{n}$ . Comparando la ecuación anterior con  $\vec{\tau} = \vec{p} \wedge \vec{E}$  correspondiente al momento que actúa sobre un dipolo eléctrico, resulta que una espira de corriente situada en un campo magnético actúa del mismo modo que un dipolo eléctrico situado en un campo eléctrico.

Cuando un pequeño imán permanente, tal como la aguja de una brújula, se sitúa en un campo magnético  $\vec{B}$ , el campo ejerce un momento sobre el imán que tiende a girarlo de modo que este se alinea con el campo. Este efecto ocurre también con limaduras de hierro no imantadas, las cuales, en presencia de un campo  $\vec{B}$  se imantan. El imán en forma de barra se caracteriza por un momento magnético  $\vec{\mu}$  que apunta desde el polo sur al polo norte. Un pequeño imán en forma de barra se comporta, por lo tanto, como una espira de corriente. Esto no es una coincidencia casual. El origen del momento magnético de una barra imantada reside en las corrientes circulares que resultan del movimiento de los electrones en los átomos del imán.

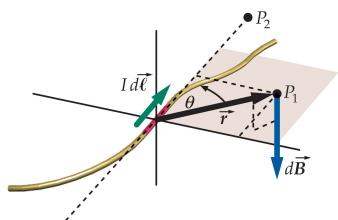
## 4.5. Campo magnético creado por corrientes

### 4.5.1. Ley de Biot y Savart

El campo magnético  $d\vec{B}$  producido por un elemento de corriente  $Id\vec{l}$  viene dado por la ecuación:

Ley de Biot y Savart

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{l} \wedge \hat{r}}{r^2} \quad (4.12)$$



en donde  $\hat{r}$  es un vector unitario que apunta desde el elemento de corriente  $d\vec{l}$  al punto de observación del campo  $P$  (ver figura) y  $\mu_0$  es una constante de proporcionalidad llamada **permeabilidad del vacío**, de valor

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{T} \cdot \text{m}}{\text{A}} = 4\pi \times 10^{-7} \frac{\text{N}}{\text{A}^2} \quad (4.13)$$

La ecuación (4.12), que se conoce como **Ley de Biot y Savart**, es análoga a la Ley de Coulomb correspondiente al campo eléctrico creado por una carga puntual. La fuente del campo magnético es un elemento de corriente  $Id\vec{l}$  (lo que es análogo a una carga que se mueve con velocidad constante), del mismo modo que la carga  $q$  es la fuente del campo electrostático. El campo magnético decrece con el cuadrado de la distancia al elemento de corriente, de igual modo que el campo eléctrico decrece con el cuadrado de la distancia a una carga puntual. Sin embargo, los aspectos direccionales de los campos eléctricos y magnéticos son completamente distintos. Mientras que el campo eléctrico apunta en la dirección radial  $\hat{r}$  desde la carga puntual al punto de observación del campo, el campo magnético es perpendicular a  $\hat{r}$  y  $d\vec{l}$ . En un punto situado a lo largo de la línea de un elemento de corriente, tal como el punto  $P_2$  de la figura anterior, el campo magnético debido a dicho elemento es cero (la ecuación (4.12) da  $d\vec{B} = \vec{0}$  si  $d\vec{l}$  y  $\hat{r}$  son paralelos o antiparalelos).

Veamos a continuación el campo magnético creado por una serie de configuraciones sencillas.

### Campo debido a una espira circular

El campo magnético debido a la corriente total que circula por una espira puede determinarse utilizando la Ley de Biot y Savart. Para ello, se calcula el campo debido a cada elemento de corriente y después se integra para todos los elementos de corriente de la espira. Este cálculo es difícil excepto en los casos de espiras de geometría simple.

La figura muestra la geometría para calcular el campo magnético en un punto del eje de una espira circular de radio  $R$  situado a una distancia  $x$  de su centro. Consideremos en primer lugar el elemento de corriente situado en la parte superior de la espira. Aquí, como en todos los puntos de la espira,  $Id\vec{\ell}$  es tangente a la misma y perpendicular al vector  $\hat{r}$  dirigido desde el elemento de corriente al punto de observación del campo  $P$ . El campo magnético  $d\vec{B}$  debido a este elemento se encuentra en la dirección mostrada en la figura, perpendicular a  $\hat{r}$  y también perpendicular a  $d\vec{\ell}$ . El módulo de  $d\vec{B}$  es

$$|d\vec{B}| = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I|d\vec{\ell} \wedge \hat{r}|}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell}{x^2 + R^2}$$

en donde se ha tenido en cuenta que  $r^2 = x^2 + R^2$  y que  $d\vec{\ell}$  y  $\hat{r}$  son perpendiculares, de modo que  $|d\vec{\ell} \wedge \hat{r}| = d\ell$ .

A continuación, veremos algunas consideraciones que simplifican la determinación del campo. En primer lugar, la figura muestra que  $d\vec{\ell} = d\ell\hat{\ell}$ , por lo que  $dB_z = 0$ , al ser el campo perpendicular a  $d\vec{\ell}$  según (4.12). Por otro lado, al integrar para todos elementos de corriente de la espira, las componentes de  $d\vec{B}$  perpendiculares al eje del espira (en nuestro caso  $dB_y$  ya que, tal como mostramos anteriormente,  $dB_z = 0$ ) suman cero, quedando solo las componentes  $dB_x$ , que son las paralelas al eje. Por lo tanto, debemos calcular solo la componente  $x$  del campo. Según la figura anterior, tenemos entonces

$$dB_x = dB \sin \theta = \left( \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\ell}{x^2 + R^2} \right) \left( \frac{R}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\ell}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

Para determinar el campo debido a la espira completa, integraremos  $dB_x$  alrededor de la espira:

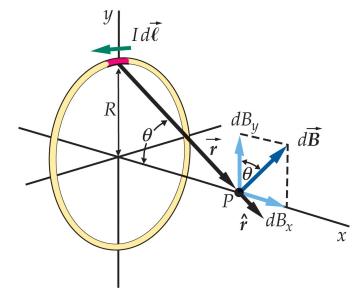
$$B_x = \oint dB_x = \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IRd\ell}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$$

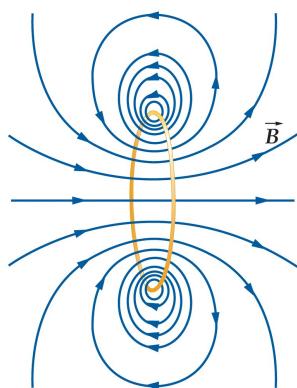
Como  $x$  y  $R$  no varían al sumar para todos los elementos de la espira, podemos sacar estas magnitudes de la integral, obteniendo

$$B_x = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \oint d\ell$$

La integral de  $d\ell$  alrededor de la espira es igual a la longitud de esta, es decir,  $2\pi R$ . Por lo tanto,

$$B_x = \frac{\mu_0 IR^2}{2(x^2 + R^2)^{3/2}} \quad (4.14)$$

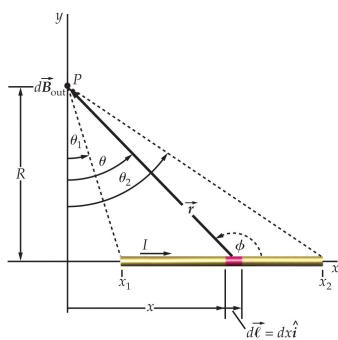




La figura adyacente muestra las líneas del campo magnético creado por una espira de corriente en todos los puntos del espacio. Este patrón posee simetría axial y es similar al creado por una barra imantada.

### Campo magnético debido a un conductor rectilíneo

La figura muestra la geometría para el cálculo del campo magnético  $\vec{B}$  en un punto  $P$  debido a la corriente que circula por un segmento de hilo conductor recto. El segmento está sobre el eje  $x$ , la distancia del punto  $P$  al eje  $x$  trazada sobre la perpendicular es  $R$ , y el origen,  $x = 0$  es la proyección de  $P$  sobre el eje  $x$ .



En la figura se indica un elemento de corriente  $Id\vec{l}$  situado a una distancia  $x$  del origen. El vector  $\vec{r}$  se traza desde el elemento hasta el punto de observación del campo  $P$ . El campo magnético en  $P$  debido a este elemento está dirigida hacia el fuera del papel, según queda determinado por el sentido del producto  $d\vec{l} \wedge \vec{r}$ . Obsérvese que todos los elementos de corriente del conductor dan contribuciones en esta misma dirección y sentido y así sólo necesitamos calcular el módulo del campo. El campo debido al elemento de corriente indicado tiene el valor (4.12):

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idx}{r^2} \sin \phi$$

Es más conveniente escribir esta expresión en función de  $\theta$  en lugar de  $\phi$ :

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idx}{r^2} \cos \theta$$

Para sumar los campos elementales de todos los elementos de corriente, necesitamos relacionar las variables  $\theta$ ,  $r$  y  $x$ . Lo más sencillo es expresar  $x$  y  $r$  en función de  $\theta$ . Así tenemos:

$$x = R \tan \theta$$

Diferenciando ambos miembros de la ecuación teniendo en cuenta que  $R$  es constante, se obtiene:

$$dx = R \sec^2 \theta d\theta = R \frac{r^2}{R^2} d\theta = \frac{r^2}{R} d\theta$$

en donde hemos utilizado  $\sec \theta = r/R$ . Sustituyendo  $dx$  por esta expresión en la ecuación de  $dB$  resulta:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \cos \theta d\theta$$

Sumamos las contribuciones del campo magnético debido a todos los elementos infinitesimales del segmento, integrando desde  $\theta = \theta_1$  hasta  $\theta = \theta_2$ , donde  $\theta_1$  y  $\theta_2$  son los mostrados en la figura anterior. De esta forma obtenemos:

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} \cos \theta d\theta$$

Haciendo la integral, resulta finalmente

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \quad (4.15)$$

Este resultado expresa el campo magnético producido por un segmento de conductor en función de la distancia  $R$  perpendicular y los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  substendidos en los puntos de observación del campo por los extremos del conductor. Si la longitud del conductor tiende a infinito por ambos sentidos,  $\theta_2$  tiende a  $90^\circ$  y  $\theta_1$  a  $-90^\circ$ . El resultado correspondiente a un conductor infinito se obtiene de la ecuación anterior haciendo  $\theta_2 = \pi/2$  y  $\theta_1 = -\pi/2$ :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \quad (4.16)$$

Campo debido a un conductor rectilíneo infinitamente largo

En cualquier punto del espacio, las líneas de campo magnético creado por un conductor rectilíneo que transporta una corriente, son tangentes a una circunferencia de radio  $R$  que rodee al conductor, en donde  $R$  es la distancia perpendicular desde el conductor al punto de observación del campo  $P$ . El sentido de  $\vec{B}$  puede determinarse aplicando la regla de la mano derecha, como se indica en la Figura 4.4a. Las líneas de campo magnético rodean el conductor como se indica en la figura 4.4b.

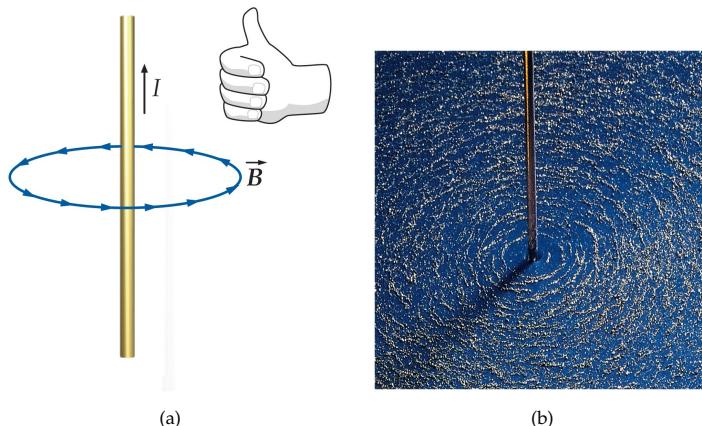
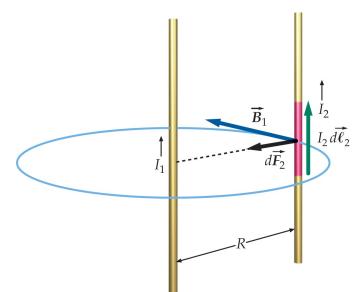


FIGURA 4.4: (a) Regla de la mano derecha para determinar el sentido del campo magnético debido a un conductor largo y recto, portador de corriente. Las líneas de campo magnético rodean al conductor en el sentido de los dedos de la mano derecha cuando el dedo pulgar apunta en el sentido de la corriente. (b) Líneas de campo magnético debidas a un conductor largo visualizadas por limaduras de hierro.

#### 4.5.2. Fuerza magnética entre dos conductores paralelos

Podemos utilizar la ecuación (4.16) correspondiente al campo magnético producido por un conductor largo y rectilíneo que transporta una corriente, y la ecuación (4.2) correspondiente a la fuerza ejercida por un campo magnético sobre un segmento de conductor portador de corriente, para determinar la fuerza ejercida por una corriente larga y rectilínea sobre otra. La figura muestra dos conductores paralelos, largos y rectilíneos, que transportan corriente en el mismo sentido. Consideraremos la fuerza que actúa sobre un segmento  $d\vec{l}_2$  por el que circula la corriente  $I_2$ , tal como se indica en la figura. El campo magnético  $\vec{B}_1$  en este segmento debido a la corriente  $I_1$  es perpendicular al segmento  $I_2 d\vec{l}_2$ . Esto es cierto para todos los elementos de corriente a lo largo del conductor. La fuerza magnética sobre el segmento de corriente  $I_2 d\vec{l}_2$  está dirigida hacia la corriente  $I_1$ , ya que  $d\vec{F}_2 = I_2 d\vec{l}_2 \wedge \vec{B}_1$ . De igual



modo, un segmento de corriente  $I_1 d\vec{\ell}_1$  experimentará una fuerza magnética dirigida hacia la corriente  $I_2$  debida al campo magnético procedente de esta. Así pues, dos corrientes paralelas se atraen una a la otra. Si una de las corrientes se invierte, la fuerza también se invertirá, es decir, dos corrientes antiparalelas se repelerán. La atracción o repulsión de corrientes paralelas o antiparalelas fue descubierta experimentalmente por Ampère una semana después de conocer el descubrimiento de Ørsted sobre el efecto de una corriente sobre la aguja imantada de una brújula.

El módulo de la fuerza magnética sobre el segmento  $I_2 d\vec{\ell}_2$  es:

$$dF_2 = |I_2 d\vec{\ell}_2 \wedge \vec{B}_1|$$

Como el campo magnético en el elemento de corriente  $I_2 d\vec{\ell}_2$  es perpendicular a este, tenemos

$$dF_2 = I_2 d\ell_2 B_1$$

Si la distancia  $R$  entre los conductores es mucho menor que su longitud, el campo en  $I_2 d\ell_2$  debido a la corriente  $I_1$  es aproximadamente igual al campo debido a un conductor infinitamente largo, portador de corriente, dado por la ecuación (4.16). El módulo de la fuerza sobre el segmento  $I_2 d\vec{\ell}_2$  es, por lo tanto,

$$dF_2 = I_2 d\ell_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R}$$

La fuerza por unidad de longitud es:

$$\frac{dF_2}{d\ell_2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R} \quad (4.17)$$

En el Tema 1, el Coulombio fue definido en función del Amperio, pero la definición de este fue aplazada. Ahora podemos definir el amperio del modo siguiente:

#### Definición de Amperio

*El amperio es aquella corriente constante que si se mantiene en dos conductores rectos y paralelos de longitud infinita y sección transversal circular despreciable, situados en el vacío con una separación de un metro, produce entre estos conductores una fuerza igual a  $2 \times 10^{-7}$  Newtons por metro de longitud.*

Esta definición del Amperio hace que la permeabilidad del vacío sea exactamente  $4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ . También permite determinar la unidad de corriente (y por lo tanto, la unidad de carga eléctrica) mediante un experimento mecánico. En la práctica, como es natural, se escogen las corrientes de modo que estén mucho más próximas que un metro; así no es necesario que los conductores sean tan largos y, sin embargo, la fuerza resulta suficientemente grande para poderse medir con exactitud.

## 4.6. Flujo magnético. Teorema de Gauss para el magnetismo

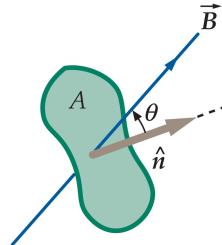
El flujo de un campo magnético a través de una superficie se calcula de un modo análogo al flujo del campo eléctrico. Sea  $dA$  un elemento de área sobre

la superficie y  $\hat{n}$  el vector unitario perpendicular al elemento (ver figura). El flujo magnético  $\phi_m$  se define por la expresión

$$\phi_m = \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA = \int_S B_n dA \quad (4.18)$$

Flujo magnético

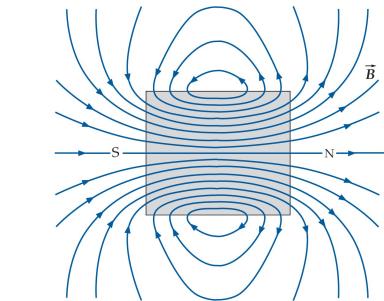
La unidad de flujo en el Sistema Internacional es el Tesla-metro cuadrado, también denominada **Weber** (Wb). Como el campo magnético es proporcional al número de líneas de campo magnético por unidad de área, el flujo magnético es proporcional al número de líneas que atraviesan la superficie.



### Teorema de Gauss

Las líneas de campo magnético difieren de las líneas de campo eléctrico en que las líneas de  $\vec{B}$  son curvas cerradas, mientras que las líneas de  $\vec{E}$  comienzan y terminan sobre las cargas eléctricas. El equivalente magnético de una carga eléctrica es un polo magnético como que los que parecen existir en los extremos de un imán en forma de barra. Parece que las líneas del campo magnético divergen del extremo de la barra correspondiente al polo norte y convergen en el extremo correspondiente al polo sur. Sin embargo, dentro del imán las líneas del campo magnético ni divergen de un punto situado cerca del polo norte ni convergen en un punto situado cerca del polo sur. En lugar de esto, las líneas del campo magnético atraviesan el imán de sur a norte, como indica la figura. Si un extremo de una barra magnética está incluido en una superficie gaussiana, el número de líneas del campo magnético que dejan la superficie es exactamente igual al número de las que entran en ella. Es decir, el flujo neto  $\phi_{m,\text{neto}}$  del campo a través de cualquier superficie cerrada  $S$  es siempre cero:

$$\phi_{m,\text{neto}} = \oint_S B_n dA = 0 \quad (4.19)$$



Teorema de Gauss para el magnetismo

en donde  $B_n$  es la componente de  $\vec{B}$  normal a la superficie  $S$  en el elemento de área  $dA$ . Este resultado es el teorema de Gauss del magnetismo. Es la afirmación matemática de que no existen puntos en el espacio a partir de los cuales las líneas de campo divergen o puntos en los cuales las líneas convergen. Es decir, los polos magnéticos aislados no existen. La unidad fundamental del magnetismo es el dipolo magnético. La Figura 4.5 compara las líneas de  $\vec{B}$  de un dipolo magnético con las líneas de  $\vec{E}$  de un dipolo eléctrico. Obsérvese que lejos de los dipolos, las líneas son idénticas. Sin embargo, dentro del dipolo, las líneas de  $\vec{E}$  son de sentido opuesto a las de  $\vec{B}$ . Las líneas de  $\vec{E}$  salen de la carga positiva y convergen sobre la negativa, mientras que las líneas de  $\vec{B}$  son bucles cerrados continuos.

## 4.7. Ley de Ampère

En el Tema 1 vimos que en distribuciones de carga altamente simétricas podíamos calcular el campo eléctrico más fácilmente si se usaba el Teorema de Gauss en lugar de la Ley de Coulomb. Una situación semejante se presen-

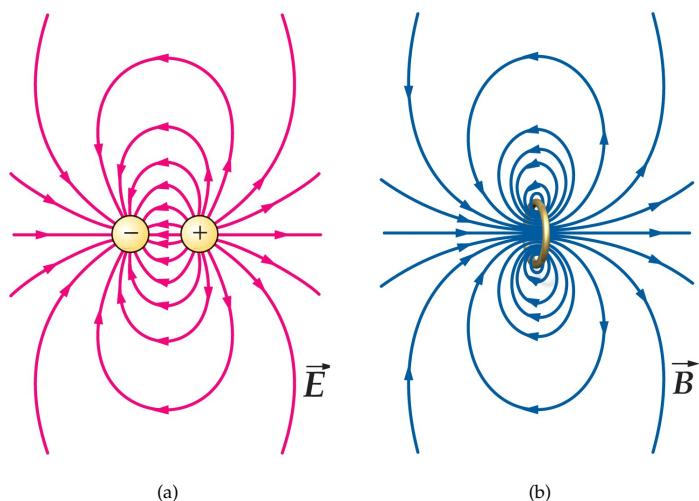
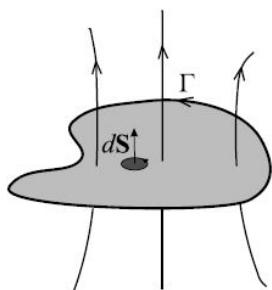


FIGURA 4.5: (a) Líneas del campo de un dipolo eléctrico. (b) Líneas del campo de un dipolo magnético. Lejos de los dipolos, las líneas del campo son idénticas. En la región entre las cargas en (a) el campo eléctrico es de signo opuesto al momento dipolar, mientras que dentro de la espira en (b), el campo magnético es paralelo al momento dipolar.

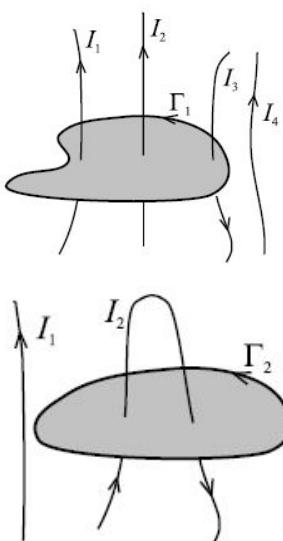


Ley de Ampère

ta en magnetismo. En esta ocasión se usará la Ley de Ampère en lugar de la Ley de Biot y Savart.

La Ley de Ampère relaciona la integral de línea (o circulación) de la componente tangencial del campo magnético alrededor de una curva cerrada  $\Gamma$  con la corriente  $I_\Gamma$  que atraviesa la superficie limitada por dicha curva. Esta relación puede utilizarse para obtener una expresión del campo magnético en situaciones con un alto grado de simetría. En forma matemática, la **Ley de Ampère** para el campo magnetostático (es decir, el campo magnético no dependiente del tiempo) establece que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \int_{S(\Gamma)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \mu_0 I_\Gamma \quad (4.20)$$



esto es, la circulación del campo magnético a lo largo de una curva es proporcional al flujo de la densidad de corriente que atraviesa una superficie  $S(\Gamma)$  cuyo contorno es la curva  $\Gamma$ . El sentido de recorrido de la curva  $\Gamma$  determina igualmente el sentido de  $d\vec{S}$  (siguiendo la regla de la mano derecha) y por tanto el signo del flujo a través de la superficie. El flujo de la densidad de corriente que atraviesa la superficie  $S(\Gamma)$  es obviamente el valor de la intensidad de corriente *interceptada*,  $I_\Gamma$ , por una la superficie  $S(\Gamma)$ . En la figura adjunta, la aplicación de la ley de Ampère para la curva  $\Gamma_1$  establece que

$$\oint_{\Gamma_1} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I_1 + I_2 - I_3)$$

y para la curva  $\Gamma_2$ , que<sup>1</sup>:

$$\oint_{\Gamma_2} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

<sup>1</sup>Obviamente, el hecho de que la circulación de  $\vec{B}$  a lo largo de  $\Gamma_2$  sea cero no implica que  $\vec{B}$  sea nulo. De hecho, para el campo electrostático se encontró que  $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$  para cualquier curva  $\Gamma$ . Esto simplemente quiere decir que el campo electrostático es conservativo y, en consecuencia, deriva de un potencial.

Es importante destacar que la Ley de Ampère es siempre válida cuando se aplica al campo magnetostático pero que, sin embargo, no siempre es útil. Esta ley es particularmente útil para calcular el campo magnético en aquellos casos en los que es posible encontrar una curva  $\Gamma$  tal que la circulación de  $\vec{B}$  a lo largo de esa curva pueda expresarse como

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \oint_{\Gamma} d\ell$$

Esta situación se encuentra generalmente en configuraciones de alta simetría donde es posible predecir la forma de las líneas de campo  $\vec{B}$  y, por tanto, encontrar una curva que sea tangente a las líneas de campo y donde este sea constante en módulo.

Veamos a continuación algunas configuraciones en las que son posibles aplicar la Ley de Ampère.

### Campo magnético producido por un hilo infinito

Consideremos un hilo infinito rectilíneo de radio  $R$  recorrido por una intensidad uniforme  $I$ . En este caso, la simetría del problema indica que el módulo del campo magnético sólo puede depender de la distancia al hilo (puntos con la misma distancia  $\rho$  ven exactamente la misma disposición de fuentes del campo magnético, por lo que el módulo del campo será el mismo). La dirección del campo puede deducirse de la ley de Biot y Savart (4.12). En la figura puede observarse que la dirección del campo es siempre tangente a una circunferencia centrada en el hilo, puesto que  $d\vec{\ell} \wedge \vec{r}$  tiene esa dirección. Por tanto, podemos escribir que

$$\vec{B} = B(\rho) \hat{\tau}$$

siendo las líneas de campo circunferencias centradas en el hilo, donde además el módulo del campo es constante y  $\hat{\tau}$  es un vector unitario tangente a la circunferencia centrada en el hilo. Este hecho sugiere aplicar la Ley de Ampère en estas curvas para obtener el valor del campo, obteniendo que

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = B \oint_{\Gamma} d\ell = \mu_0 I_{\Gamma}$$

donde  $I_{\Gamma}$  es la corriente que atraviesa la superficie interior a  $\Gamma$ . Dado que la intensidad total de corriente  $I$  que recorre el hilo es uniforme, la densidad de corriente vendrá dada por

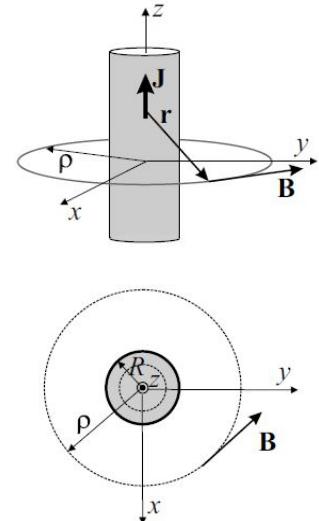
$$\vec{J} = \frac{I}{\pi R^2} \hat{k}$$

y, por tanto,  $I_{\Gamma}$  será

$$I_{\Gamma} = \int_{S(\Gamma)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = \begin{cases} J\pi\rho^2 & \text{si } \rho \leq R \\ I & \text{si } \rho > R \end{cases}$$

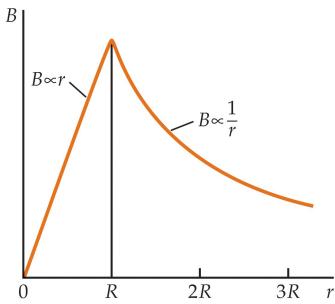
Al introducir la expresión anterior en (4.7) se tiene que

$$B \cdot 2\pi R = \begin{cases} J\pi\rho^2 & \text{si } \rho \leq R \\ I & \text{si } \rho > R \end{cases}$$



de donde se puede obtener finalmente que

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2} & \text{si } \rho \leq R \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho} & \text{si } \rho > R \end{cases} \quad (4.21)$$



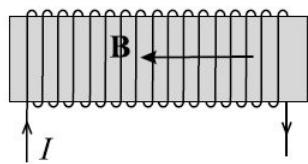
La figura muestra el campo magnético  $B$  en función de  $\rho$ .

Para el caso particular de un hilo cuyo radio puede considerarse despreciable,  $R \rightarrow 0$ , el campo magnético producido por este hilo recto infinito en cualquier punto viene dado por

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi\rho}$$

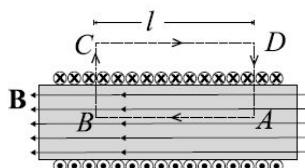
resultado que coincide con (4.16), obtenido mediante la Ley de Biot y Savart.

### Campo magnético en un solenoide



Un solenoide o bobina es básicamente un cable arrollado de manera compacta en forma de hélice o, equivalentemente, una superposición de espiras muy juntas. Un **solenoide esbelto** (más largo que ancho) se usa generalmente para crear campos magnéticos intensos y uniformes dado que el campo magnético en el interior de los solenoides tiene estas características. En este sentido, el solenoide juega el mismo papel respecto al campo magnético que el condensador plano para el campo eléctrico.

Dado que una deducción teórica de la forma de las líneas del campo  $\vec{B}$  producido por un solenoide es relativamente complicada, usaremos argumentos experimentales para determinar la forma de estas líneas. Los experimentos demuestran que las líneas de campo son aproximadamente líneas rectas paralelas al eje del solenoide en el interior de este, cerrándose por el exterior, de modo que la magnitud del campo exterior se reduce a medida que el solenoide se hace más esbelto. Para el caso de un solenoide infinitamente largo, que puede servir como un modelo aproximado de un solenoide esbelto, el campo magnético será nulo en el exterior. Dado que las líneas de campo son paralelas al eje del solenoide y por simetría no pueden variar a lo largo de la dirección paralela al eje (ya que desde cualquier punto de una misma línea el solenoide se ve invariante), la aplicación de la Ley de Ampère a la curva ABCD mostrada en la figura nos dice que:



ya que  $\vec{B} \perp d\vec{l}$  en los tramos  $AB$  y  $DA$  y  $\vec{B} = \vec{0}$  a lo largo de  $CD$ . Por la forma de las líneas de  $\vec{B}$  en el interior del solenoide y teniendo en cuenta que el sentido de  $\vec{B}$  está marcado por el sentido que marca la intensidad, obtenemos que

$$\int_{AB} \vec{B} \cdot d\vec{l} = BL$$

siendo  $L$  la longitud del segmento  $AB$ . Por otra parte, la intensidad intercepcionada por el rectángulo interior a la curva ABCD será

$$\int_{S(ABCD)} \vec{J} \cdot d\vec{A} = NI$$

esto es, intercepta  $N$  espiras cada una de las cuales transporta una intensidad de corriente  $I$ . Teniendo en cuenta los resultados de las dos últimas expresiones, podemos concluir que

$$B = \mu_0 n I \quad (4.22)$$

Campo magnético en el interior de un solenoide esbelto

donde  $n = N/L$  es el número de espiras por unidad de longitud en el solenoide.

### Campo magnético en un toroide

En nuestra siguiente aplicación de la Ley de Ampère calcularemos el campo magnético de un **toroide**, formado por espiras de conductor enrolladas alrededor de una figura en forma de donut como indica la Figura 4.6. Tenemos

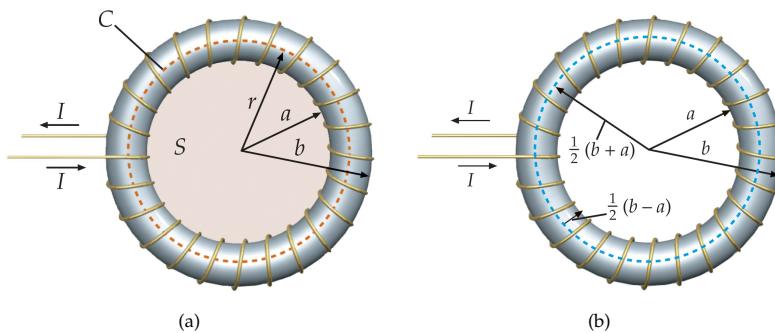


FIGURA 4.6: (a) Un toroide está formado por espiras de alambre arrolladas alrededor de una figura en forma de donut. El campo magnético a cualquier distancia  $r$  puede determinarse aplicando la Ley de Ampère al círculo de radio  $r$ .  $S$  es la superficie limitada por la curva  $C$ . Los hilos que forman el arrollamiento penetran en la superficie  $S$  una vez cada vuelta. (b) El toroide tiene como radio medio  $\bar{r} = (b+a)/2$ , donde  $a$  y  $b$  son el radio interno y externo del toroide, respectivamente. Cada vuelta de conductor es una circunferencia de radio  $\bar{r}$ .

$N$  vueltas de conductor, cada una transportando una intensidad  $I$ . Para calcular  $B$ , determinaremos la circulación del campo  $\vec{B}$  alrededor de la curva  $C$ , que será una una circunferencia de radio  $r$  centrada en el centro del toroide. Por simetría,  $\vec{B}$  es tangente a esta circunferencia y constante en todos los puntos de la circunferencia. Por lo tanto,

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = B \cdot 2\pi r = \mu_0 I_C$$

Sean  $a$  y  $b$  los radios interior y exterior del toroide, respectivamente. La corriente total a través de la superficie  $S$  limitada por la circunferencia de radio  $r$  centrada en el toroide para  $a < r < b$  es  $NI$ ; es decir  $I_C = NI$  en esa región. En consecuencia, la Ley de Ampère nos da

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}, \quad \text{para } a < r < b \quad (4.23)$$

Campo magnético en el interior de un toroide estrechamente enrollado

Si  $r < a$ , no existe corriente a través de la superficie  $S$ . Si  $r > b$ , la corriente total a través de  $S$  es cero, pues para cada corriente  $I$  hacia dentro del papel

en la superficie interna del toroide, existe una corriente igual a  $I$  hacia fuera del papel en la superficie externa. Así el campo magnético es cero, tanto para  $r < a$  como para  $r > b$ .

El campo magnético interior al toroide no es uniforme, sino que decrece con  $r$ . Sin embargo, si el radio de las espiras del toroide,  $(b - a)/2$  es mucho menor que el radio medio del toroide,  $\bar{r} = (b + a)/2$ , la variación de  $r$  desde  $r = b$  a  $r = a$  es pequeña y  $B$  es aproximadamente uniforme, como en un solenoide. Además, como el número de espiras por unidad longitud podría aproximarse en este caso por  $n = N/(2\pi\bar{r})$ , la ecuación (4.23) se escribiría de la misma forma que (4.22); es decir, las expresiones matemáticas del campo en un interior de un toroide y un solenoide son equivalentes.

## Tema 5

# Magnetostática en la materia

---

### 5.1. Introducción

Al analizar la generación de campos magnéticos mediante corrientes eléctricas, hemos supuesto que los conductores están rodeados de vacío. Pero las bobinas de los transformadores, motores, generadores y electroimanes tienen casi siempre núcleos de hierro para aumentar el campo magnético y confinarlo en las regiones deseadas. Los imanes permanentes, las cintas de grabación magnética y los discos duros dependen directamente de las propiedades magnéticas de los materiales; cuando se almacena información en un disco duro, lo que en realidad se hace es establecer una configuración de imanes permanentes microscópicos en el disco. Por todo esto vale la pena examinar algunos aspectos de las propiedades magnéticas de los materiales.

Las propiedades magnéticas de los materiales tienen su origen en los momentos dipolares magnéticos atómicos; estos, a su vez, están causados por el movimiento de sus electrones alrededor del núcleo (momento magnético orbital) y por el spin de los electrones (momento magnético intrínseco). A diferencia de los dipolos eléctricos, la alineación de los dipolos magnéticos paralelamente a un campo magnético externo tiende a *incrementar* el campo. Podemos analizar esta diferencia comparando las líneas del campo eléctrico de un dipolo eléctrico con las líneas del campo magnético de un dipolo magnético, tal como una pequeña espira de corriente, como se mostró en la Figura 4.5. Lejos de los dipolos las líneas de campo son idénticas. Sin embargo, entre las cargas del dipolo eléctrico, las líneas de campo se oponen al sentido del momento dipolar, mientras que dentro de la espira de corriente, las líneas de campo magnético son paralelas al momento dipolar magnético. Así, pues, en un material magnéticamente polarizado, los dipolos magnéticos crean un campo magnético paralelo a los vectores del momento dipolar magnético.

De acuerdo con la respuesta frente a un campo magnético externo, los materiales magnéticos pueden clasificarse en tres categorías: **paramagnéticos, diamagnéticos y ferromagnéticos**.

El paramagnetismo surge por el alineamiento parcial de los spines electrónicos (en los metales) o de los momentos magnéticos atómicos o moleculares en presencia de un campo magnético externo en la dirección y sentido del campo. En los materiales paramagnéticos, los dipolos magnéticos no interactúan fuertemente entre sí y normalmente están orientados al azar. En

presencia de un campo magnético externo, los dipolos se alinean parcialmente en la dirección y sentido del campo, produciendo así un incremento del mismo. Sin embargo, a temperaturas ordinarias y con campos externos normales, sólo una fracción muy pequeña de las moléculas se ven alineadas debido a que el movimiento térmico tiende a desordenar su orientación. El aumento del campo magnético total es, por consiguiente, muy pequeño.

El ferromagnetismo es mucho más complicado. Debido a una fuerte interacción entre los dipolos magnéticos vecinos, puede conseguirse un alto grado de alineación incluso con campos magnéticos externos débiles, originando así un incremento muy grande del campo total. Incluso en el caso de que no exista ningún campo magnético externo, los materiales ferromagnéticos pueden tener sus dipolos magnéticos alineados, como sucede en el caso de los imanes permanentes.

El diamagnetismo surge de los momentos dipolares magnéticos orbitales inducidos por un campo magnético externo. Estos momentos magnéticos son opuestos al sentido del campo magnético aplicado y, por lo tanto, debilitan el campo magnético total  $\vec{B}$ . Este efecto realmente ocurre en todos los materiales, pero como los momentos magnéticos inducidos son muy pequeños comparados con los momentos magnéticos permanentes, el diamagnetismo viene enmascarado por los efectos paramagnéticos o ferromagnéticos. El diamagnetismo, por lo tanto, sólo se observa en materiales que no poseen momentos magnéticos permanentes.

## 5.2. Imanación y susceptibilidad magnética

Cuando un material se sitúa en el seno de un campo magnético intenso, como el de un solenoide, el campo magnético de este tiende a alinear los momentos dipolares magnéticos (permanentes o inducidos) dentro del material, el cual se imana. Un material que experimenta este proceso se describe por su **imanación**  $\vec{M}$ , que se define como el momento dipolar magnético neto por unidad de volumen del material:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\mu}}{dV} \quad (5.1)$$

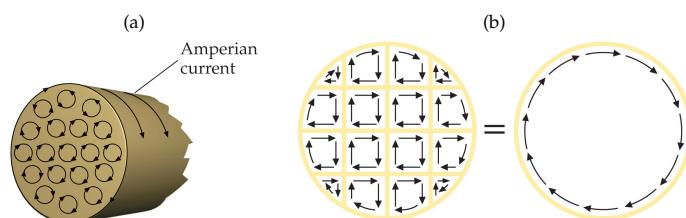


FIGURA 5.1: (a) Modelo de espiras de corrientes atómicas en el cual todos los dipolos atómicos son paralelos al eje del cilindro. La corriente neta en cualquier punto en el interior del material es nula debido la cancelación de los átomos vecinos. El resultado es una corriente superficial semejante a la de un solenoide. (b) Las corrientes en las espiras adyacentes en el interior de un material uniformemente imanado se cancelan permaneciendo sólo una corriente superficial. Esta cancelación tiene lugar en todo punto interior, cualquiera que sea la forma de las espiras.

Mucho antes de conocerse la estructura molecular de la materia, Ampère propuso un modelo de magnetismo en el cual la imanación de los materiales

era debida a corrientes circulares microscópicas dentro del material imanado. Actualmente se sabe que estas corrientes circulares constituyen un modelo clásico para el movimiento orbital y el spin de los electrones. Consideremos un cilindro de material imanado. La Figura 5.1a muestra las corrientes atómicas circulares en el cilindro con sus momentos magnéticos alineados a lo largo del eje del cilindro. Debido a la cancelación de las corrientes circulares vecinas, la corriente neta en cualquier punto interior del material es cero y el único resultado es una corriente neta sobre la superficie del mismo. Esta corriente superficial (Figura 5.1b), llamada **corriente de imanación** (o corriente Amperiana) es semejante a la corriente real de los arrollamientos del solenoide.

La figura adyacente muestra una pequeña sección en forma de disco de área transversal  $A$ , longitud  $d\ell$  y volumen  $dV = Ad\ell$ . Sea  $di$  la corriente de imanación sobre la superficie del disco. El módulo del momento dipolar magnético del disco es el mismo que el de una corriente circular de área  $A$  que transporta una corriente  $di$ :

$$d\mu = Adi$$

El módulo de la imanación  $\vec{M}$  del disco es el momento magnético por unidad de volumen:

$$M = \frac{d\mu}{dV} = \frac{Adi}{Ad\ell} = \frac{di}{d\ell} \quad (5.2)$$

Así, el módulo del vector imanación es la corriente de imanación por unidad de longitud a lo largo de la superficie del material imanado. De este resultado se deduce que las unidades de  $M$  son amperios por metro.

Sea un cilindro de imanación uniforme  $M$  paralela a su eje. Como hemos visto, el efecto de la imanación es el mismo que si el cilindro transportara una corriente superficial por unidad de longitud de módulo  $M$ . Esta corriente es semejante a la transportada por un solenoide enrollado de manera compacta. Para un solenoide, la corriente por unidad de longitud es  $nI$ , en donde  $n$  es el número de vueltas por unidad de longitud e  $I$  la corriente de cada vuelta. El módulo del campo magnético  $B_m$  dentro del cilindro y lejos de sus extremos viene dado por la ecuación (4.22),  $B_m = \mu_0 nI$ ; reemplazando  $nI$  por  $M$ , nos queda que el campo del cilindro debido a la imanación es:

$$B_m = \mu_0 M \quad (5.3)$$

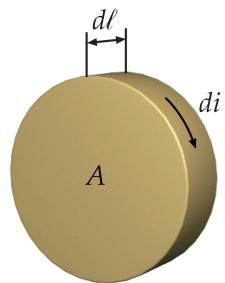
Situemos un cilindro de material magnético dentro de un solenoide largo de  $n$  vueltas por unidad de longitud que transporta una corriente  $I$ . Este solenoide crea un campo  $\vec{B}_{ap}$  (cuyo módulo es  $B_{ap} = \mu_0 nI$ ) que imana el material, de modo que este adquiere una imanación  $M$ . Definamos un campo auxiliar, denominado **intensidad magnética**  $\vec{H}$ , de modo que  $\vec{B}_{ap} = \mu_0 \vec{H}$  (con  $H = nI$ ). Así, el campo magnético en el interior del solenoide debido a la corriente en el solenoide más el material imantado es

$$\vec{B} = \vec{B}_{ap} + \vec{B}_m$$

Es decir,

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \quad (5.4)$$

Obsérvese que tanto  $H$  como  $M$  corresponden a corrientes por unidad de longitud; en el caso de  $H$ , corrientes de conducción y en el de  $M$ , corrientes de imanación.



En los materiales paramagnéticos y ferromagnéticos,  $\vec{M}$  posee la misma dirección y sentido que  $\vec{H}$ ; en los materiales diamagnéticos,  $\vec{M}$  se opone a  $\vec{H}$ . En los materiales paramagnéticos y diamagnéticos la imanación resulta proporcional al campo magnético aplicado que produce el alineamiento de los dipolos magnéticos del material. Podemos escribir

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (5.5)$$

en donde  $\chi_m$  es un número adimensional denominado **susceptibilidad magnética**. La ecuación (5.4) se convierte para materiales paramagnéticos y diamagnéticos en

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_m\vec{H} = \mu\vec{H} \quad (5.6)$$

en donde  $\mu_m = 1 + \chi_m$  se denomina **permeabilidad relativa** del material y  $\mu = \mu_m\mu_0$  se denomina simplemente **permeabilidad**<sup>1</sup>. Para los materiales paramagnéticos,  $\chi_m$  es un número pequeño positivo que depende de la temperatura. Para los materiales diamagnéticos (a excepción de los superconductores) es un número negativo pequeño independiente de la temperatura. La tabla adjunta expone la susceptibilidad de diversos materiales paramagnéticos y diamagnéticos. Como puede verse, en los sólidos reseñados, esta magnitud es del orden de  $10^{-5}$  y, en consecuencia,  $\mu_m \approx 1$  y  $\mu \approx \mu_0$

La imanación de los materiales ferromagnéticos que estudiaremos posteriormente es mucho más complicada. La permeabilidad  $\mu$ , definida como el cociente  $B/H$ , no es constante y sus valores máximos varían entre  $5000\mu_0$  y  $100000\mu_0$ . En el caso de los imanes permanentes,  $\mu$  no puede definirse, ya que estos materiales exhiben imanación incluso en ausencia de un campo aplicado.

Material	$\chi_m$ (a 20°C)
Aluminio	$2.3 \times 10^{-5}$
Bismuto	$-1.66 \times 10^{-5}$
Cobre	$-0.98 \times 10^{-5}$
Diamante	$-2.2 \times 10^{-5}$
Oro	$-3.6 \times 10^{-5}$
Magnesio	$1.2 \times 10^{-5}$
Mercurio	$-3.2 \times 10^{-5}$
Plata	$-2.6 \times 10^{-5}$
Sodio	$-0.24 \times 10^{-5}$
Titánio	$7.06 \times 10^{-5}$
Wolframio	$6.8 \times 10^{-5}$
Hidrógeno (1 atm)	$-9.9 \times 10^{-9}$
Dióxido de carbono (1 atm)	$-2.3 \times 10^{-9}$
Nitrógeno (1 atm)	$-5.0 \times 10^{-9}$
Oxígeno (1 atm)	$2090 \times 10^{-9}$

### 5.3. Teoría microscópica del magnetismo

La imanación de un material paramagnético o ferromagnético puede relacionarse con los momentos magnéticos permanentes de los átomos individuales o electrones del material. El momento magnético orbital de un electrón atómico puede deducirse semicásicamente, aunque es de origen cuántico. En efecto, consideremos una partícula de masa  $m$  y carga  $q$  que se mueve con velocidad  $v$  en una circunferencia de radio  $r$ , como muestra la figura. El módulo del momento angular de la partícula es

$$L = mv r$$

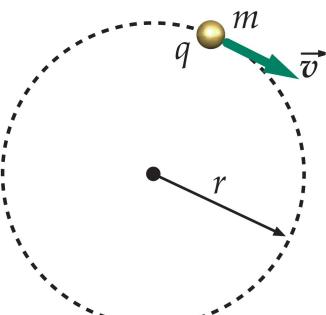
El módulo del momento magnético es el producto de la corriente por el área de círculo:

$$\mu = IA = I\pi r^2$$

Si  $T$  es el tiempo durante el cual la carga completa una revolución, la intensidad de la corriente (carga que pasa por un punto por unidad de tiempo) es  $q/T$ . Como el periodo  $T$  es igual a la distancia  $2\pi r$  dividida por la velocidad  $v$ , la intensidad es

$$I = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi r}$$

<sup>1</sup>Debe tenerse cuidado con la notación pues tanto el momento magnético como la permeabilidad vienen representadas por el mismo símbolo  $\mu$ . El contexto permitirá distinguir fácilmente entre ambas magnitudes



El momento magnético es, por lo tanto,

$$\mu = \frac{qv}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} qvr$$

Teniendo en cuenta que  $vr = L/m$  resulta para el momento magnético:

$$\mu = \frac{q}{2m} L$$

Si la carga  $q$  es positiva, el momento angular y el momento magnético tienen igual sentido. Podemos, por lo tanto, escribir:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{2m} \vec{L} \quad (5.7)$$

[Relación clásica entre el momento magnético y el momento angular](#)

La ecuación anterior es la relación general clásica entre el momento magnético y el momento angular. Se cumple también en la teoría cuántica del átomo para el momento angular orbital, pero no para el momento angular de spin intrínseco del electrón. Para el spin electrónico, el momento magnético es el doble que el previsto por esta ecuación. El factor 2 es un resultado de la teoría cuántica que no tiene analogía en la mecánica clásica.

Como el momento angular está cuantizado, el momento magnético de un átomo también lo está. El cuarto de momento angular es  $\hbar = h/(2\pi)$ , en donde  $h$  es la constante de Planck. Por lo tanto, podemos expresar el momento magnético en función de  $\vec{L}/\hbar$ :

$$\vec{\mu} = \frac{q\hbar}{2m} \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad (5.8)$$

Para un electrón,  $m = m_e$  y  $q = -e$ , de modo que el momento magnético del electrón debido a su movimiento orbital es

$$\vec{\mu}_\ell = -\frac{e\hbar}{2m_e} \frac{\vec{L}}{\hbar} = -\mu_B \frac{\vec{L}}{\hbar} \quad (5.9)$$

en donde

$$\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.27 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \quad (5.10)$$

[Magnetón de Bohr](#)

es la unidad cuántica del momento magnético llamada **magnetón de Bohr**. El momento magnético de un electrón debido a su momento angular intrínseco de spin  $S$  es

$$\vec{\mu}_S = -2\mu_B \frac{\vec{S}}{\hbar} \quad (5.11)$$

Aunque el cálculo del momento magnético de un átomo es un problema complicado en teoría cuántica, el resultado para todos los electrones, de acuerdo con la teoría y la experiencia, es que el momento magnético es del orden de unos pocos magnetones de Bohr. Para los átomos de momento angular neto nulo, el momento magnético neto es cero.

Si todos los átomos o moléculas de un material tienen sus momentos magnéticos alineados, el momento magnético por unidad de volumen del

material es el producto del número de moléculas por unidad de volumen  $n$  y el momento magnético  $\mu$  de cada molécula. En este caso límite, la **imanación de saturación**  $M_s$  es:

$$M_s = n\mu$$

El número de moléculas por unidad de volumen puede determinarse a partir de la masa molecular  $M_m$ , la densidad del material  $\rho$  y el número de Avogadro  $N_A$ :

$$n = \frac{N_A \rho}{M_m}$$

## 5.4. Paramagnetismo

El paramagnetismo se presenta en materiales cuyos átomos tienen momentos magnéticos permanentes que interactúan entre sí muy débilmente, dando lugar a una susceptibilidad magnética  $\chi_m$  positiva y muy pequeña. Cuando no existe ningún campo magnético externo, estos momentos magnéticos están orientados al azar. En presencia de un campo magnético externo tienden a alinearse paralelamente al campo, tal como se vio en la Sección 4.4.

A la tendencia de los momentos magnéticos atómicos de alinearse de manera paralela al campo se opone el movimiento térmico aleatorio, que tiende a distribuir al azar sus orientaciones. Por esta razón, la susceptibilidad de los materiales paramagnéticos disminuye al aumentar la temperatura. En muchos casos es inversamente proporcional a la temperatura, de modo que la imanación  $M$  se puede expresar como:

Ley de Curie

$$M = \frac{C}{T} B \quad (5.12)$$

Esta relación se denomina **Ley de Curie**. La cantidad  $C$  es una constante dependiente del material, que recibe el nombre de **constante de Curie**.

Un cuerpo con dipolos magnéticos atómicos es atraído hacia los polos de un imán, ya que el campo magnético (no uniforme) creado por este ejerce una fuerza sobre las corrientes atómicas que atrae al cuerpo. En casi todas las sustancias paramagnéticas esta atracción es muy débil debido a la redistribución térmica aleatoria de los momentos magnéticos atómicos. Es por ello que no se puedan levantar objetos de aluminio (una sustancia paramagnética) con un imán. Sin embargo, a temperaturas muy bajas los efectos térmicos se reducen, la imanación aumenta de acuerdo con la ley de Curie y las fuerzas de atracción son mayores.

## 5.5. Ferromagnetismo

El ferromagnetismo se presenta en el hierro puro, cobalto y níquel, y en aleaciones de estos metales entre sí. También tiene lugar en el gadolinio, dispropasio y en unos pocos compuestos. El ferromagnetismo es debido a una interacción intensa entre los electrones de una banda parcialmente llena del metal o entre los electrones localizados que forman momentos magnéticos en moléculas o átomos vecinos. Esta interacción, llamada **interacción de canje**, disminuye la energía de un par de electrones con spins paralelos.

Los materiales ferromagnéticos tienen valores positivos muy grandes de susceptibilidad magnética  $\chi_m$  (medidos en las condiciones descritas posteriormente). En estas sustancias, un campo magnético externo pequeño puede producir un grado muy alto de alineación de los momentos dipolares magnéticos atómicos, que en algunos casos, puede persistir incluso aunque no exista imanante externo. Esto es así debido a que los momentos dipolares magnéticos de los átomos de estas sustancias ejercen fuerzas intensas sobre sus vecinos, de modo que en una pequeña región del espacio, los momentos están alineados unos con otros, aun cuando no existe un campo externo. Esta pequeña región se llama **dominio magnético**. El tamaño de un dominio es normalmente microscópico. Dentro del dominio, todos los momentos magnéticos están alineados, pero la dirección de alineación varía de un dominio a otro de modo que el momento magnético neto de un fragmento macroscópico de material es cero en su estado normal. La Figura 5.2 ilustra esta situación. La mecánica cuántica predice la existencia de fuerzas dipolares en estas sustancias que no pueden ser explicadas mediante la física clásica. A temperaturas por encima de una temperatura crítica, denominada **temperatura de Curie**, la agitación térmica es suficiente para destruir esta alineación y los materiales ferromagnéticos se transforman en paramagnéticos.

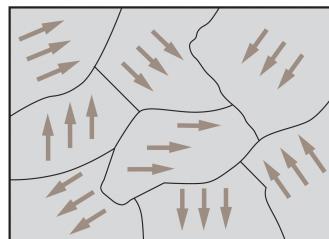


FIGURA 5.2: Ilustración esquemática de los dominios ferromagnéticos. Dentro de un dominio, los dipolos magnéticos están alineados, pro la dirección de alineamiento varía de un dominio a otro, de modo que el momento magnético neto es nulo. Un campo magnético externo pequeño puede causar el ensanchamiento de aquellos dominios que se alinean paralelamente al campo, o producir la rotación de la dirección de alineamiento dentro de un dominio. En cualquier caso, el resultado es un momento magnético neto paralelo al campo.

Cuando se aplica un campo magnético externo, los límites de los dominios se desplazan y al mismo tiempo la dirección de alineación dentro de un dominio puede variar de modo que exista un momento magnético neto en el sentido del campo aplicado. Puesto que el grado de alineación es grande incluso en el caso de un campo externo pequeño, el campo magnético producido en el material por los dipolos suele ser frecuentemente mucho mayor que el campo externo.

Consideremos la imanación de una barra larga de hierro en el interior de un solenoide en el que se aumenta gradualmente la corriente que circula por sus arrollamientos. Admitiremos que la barra y el solenoide son suficientemente grandes para permitirnos despreciar los efectos de los extremos. Como los momentos magnéticos inducidos están en el mismo sentido que el campo aplicado,  $\vec{H}$  y  $\vec{M}$  tienen la misma dirección y sentido. Por lo tanto, el campo magnético en el interior de la barra es

$$B = \mu_0(H + M) = \mu_0(nI + M) \quad (5.13)$$

En los materiales ferromagnéticos, el campo magnético  $\mu_0M$  debido a los momentos magnéticos es con frecuencia superior al campo aplicado  $\mu_0H$  en

un factor de varios miles.

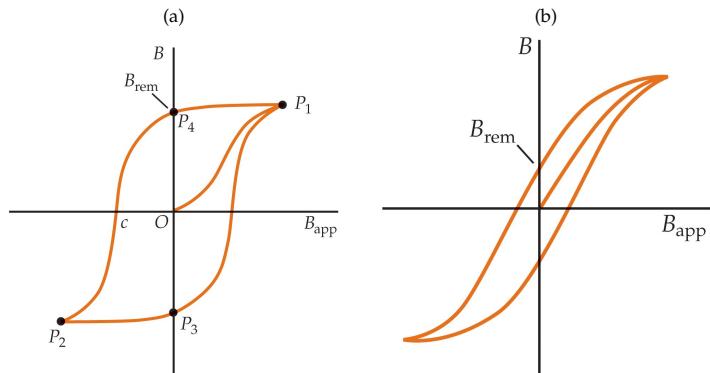


FIGURA 5.3: (a) Representación gráfica de  $B$  en función de  $H$ . La curva exterior se denomina *ciclo de histéresis*. El campo  $B_r$  es el campo remanente, el cual permanece cuando el campo aplicado retorna a cero. (b) Ciclo de histéresis de un material magnéticamente blando. El campo remanente es muy pequeño comparado con el de un material magnéticamente duro, tal como el de la figura (a).

La Figura 5.3a muestra una representación de  $B$  en función de la intensidad magnética  $H$ . Cuando la corriente se hace crecer gradualmente desde cero,  $B$  aumenta desde cero a lo largo de la parte de la curva que empieza en el origen  $O$  y llega al punto  $P_1$ . La tendencia hacia la horizontal de esta curva cerca del punto  $P_1$  indica que la imanación  $M$  se está aproximando a su valor de saturación  $M_s$ , que se presenta cuando todos los dipolos atómicos están alineados. Por encima de la saturación,  $B$  crece sólo porque el campo imanante  $H = nI$  crece también. Cuando  $H$  se hace disminuir gradualmente desde el punto  $P_1$ , no existe una disminución correspondiente de la imanación. El desplazamiento de los dominios no es completamente reversible y parte de la imanación permanece, aun cuando  $H$  se reduzca a cero, según se indica en la figura. Este efecto se denomina **histéresis**, del griego *hysteron* (que significa posterior, retraso) y la curva en la Figura 5.3a se llama **ciclo de histéresis**. El valor del campo magnético en el punto  $P_4$  cuando  $H = 0$  se denomina **campo remanente**  $B_r$ . En este punto la barra de hierro es un imán permanente. Si la corriente del solenoide se invierte ahora de modo que  $H$  tiene sentido opuesto, el campo magnético  $B$  es gradualmente llevado a 0 en el punto  $c$ . El valor de la intensidad magnética en el punto  $c$  se denomina **campo coercitivo**  $H_c$ . La parte restante de la curva de histéresis se obtiene mediante un aumento adicional de la corriente en sentido opuesto hasta que se alcanza el punto  $P_2$ , que corresponde a la saturación en sentido opuesto, y luego haciendo disminuir la corriente hasta cero en el punto  $P_3$  y aumentando la corriente de nuevo en el sentido inicial.

Como la imanación  $M$  depende de la historia previa del material y puede tener un valor grande, incluso cuando la intensidad magnética es nula, no está relacionada solo con  $H$ . Sin embargo, si nos limitamos a aquella parte de la curva de imanación desde el origen al punto  $P_1$  de la Figura 5.3a,  $M$  y  $H$  son paralelos y  $M = 0$  cuando  $H = 0$ . Podemos, por lo tanto, definir la susceptibilidad magnética y la permeabilidad como en las ecuaciones (5.5) y (5.6).

Como  $B$  no varía linealmente con  $H$  (basta ver la Figura 5.3), la permeabilidad relativa no es constante. El valor máximo de  $\mu_m$  tiene lugar para un valor de la imanación considerablemente menor que la imanación de satura-

ción.

El área incluida en el ciclo de histéresis es proporcional a la energía disipada en forma de calor en el proceso irreversible de imanación y desimanación. Si el efecto de histéresis es pequeño, el área encerrada por el ciclo es pequeña, lo que indica que las pérdidas de energía son pequeñas y el material se denomina **magnéticamente blando**. El hierro dulce (o blando) es un ejemplo. El ciclo de histéresis en el caso de un material magnéticamente blando se indica en la Figura 5.3b. En este caso el campo remanente  $B_r$  es casi cero, siendo la pérdida de energía por ciclo muy pequeña. Los materiales magnéticamente blandos se utilizan como núcleos de transformador para permitir que el campo magnético  $B$  pueda variar sin sufrir una gran pérdida de energía cuando el campo varía muchas veces por segundo. Por otra parte, en un imán permanente es deseable un campo remanente grande. Los materiales **magnéticamente duros**, como el acero al carbono y la aleación Alnico 5, se utilizan en los imanes permanentes.

## 5.6. Diamagnetismo

Los materiales diamagnéticos son aquellos cuya susceptibilidad magnética  $\chi_m$  es negativa y muy pequeña en valor absoluto. El diamagnetismo fue descubierto por Michael Faraday en 1845 cuando observó que un trozo de bismuto era repelido por ambos polos de un imán, lo que indica que el campo externo del imán induce un dipolo magnético en el bismuto de sentido opuesto al campo.

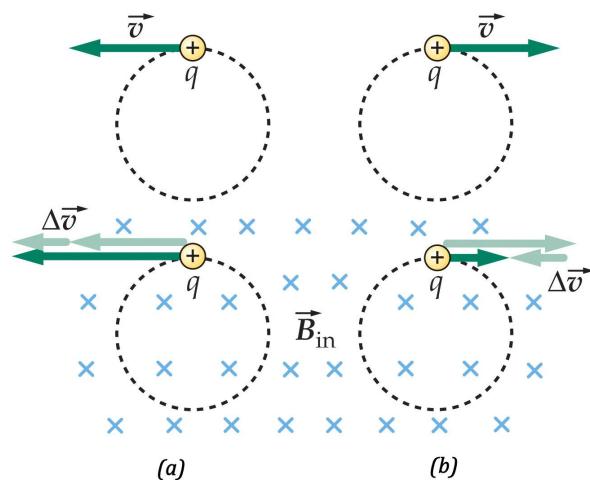


FIGURA 5.4: (a) Carga positiva que se mueve circularmente en sentido contrario a las agujas del reloj con un momento magnético dirigido hacia fuera del papel. Al aplicar un campo magnético dirigido hacia dentro del papel, la fuerza magnética aumenta la fuerza centrípeta y, por lo tanto, la velocidad de la partícula debe aumentar. La variación positiva del momento magnético es hacia fuera. (b) Carga positiva moviéndose en sentido horario en una circunferencia con su momento magnético hacia dentro del papel. Al aplicar un campo magnético externo hacia dentro del papel la fuerza magnética disminuye la fuerza centrípeta y la velocidad de la partícula disminuye. Como en el caso (a), el cambio en el campo magnético es hacia fuera del papel.

Podemos comprender cualitativamente este efecto mediante la Figura 5.4,

que muestra dos cargas positivas que se mueven en órbitas circulares con la misma velocidad pero en sentidos opuestos. Sus momentos magnéticos tienen sentidos opuestos y se contrarrestan entre sí. En presencia de un campo magnético externo  $\vec{B}$  dirigido hacia dentro del papel, las cargas experimentan una fuerza extra  $q\vec{v} \wedge \vec{B}$  de dirección radial. Para la carga de la izquierda, esta fuerza extra está dirigida hacia el centro, incrementando la fuerza centrípeta. Si la carga ha de permanecer en la misma órbita circular, debe acelerar de modo que  $mv^2/r$  iguale a la fuerza centrípeta total. Su momento magnético, dirigido hacia fuera del papel, se incrementa. Para la carga de la derecha, la fuerza extra es radial pero alejándose del centro, de modo que la partícula debe disminuir la velocidad para mantener su órbita circular. Su momento magnético, dirigido hacia dentro del papel, disminuye. En ambos casos, la *variación* del momento magnético de las cargas, dirigida hacia fuera del papel, es opuesta al campo magnético externo. Como los momentos magnéticos permanentes de las dos cargas son iguales y de sentidos opuestos, su suma es nula, quedando solo los momentos magnéticos inducidos, que son ambos opuestos al sentido del campo magnético aplicado.

Un material será diamagnético si sus átomos tienen momento angular neto cero y, por tanto, no posee momento magnético permanente. Los momentos magnéticos inducidos que causan el diamagnetismo poseen módulos del orden de  $10^{-5}\mu_B$ . Como este valor es mucho menor que el de los momentos magnéticos permanentes de los átomos de los materiales paramagnéticos o ferromagnéticos, el efecto diamagnético en estos átomos viene enmascarado por el alineamiento de sus momentos magnéticos permanentes. Sin embargo, como este alineamiento decrece con la temperatura, todos los materiales son teóricamente diamagnéticos a temperatura suficientemente altas.

## Tema 6

# Inducción magnética

---

### 6.1. Introducción

A principios de la década de 1830, Michael Faraday en Inglaterra y Joseph Henry en Norteamérica descubrieron independientemente que la variación temporal del flujo magnético que atraviesa la superficie limitada por una espira conductora en reposo, induce en esta una corriente. Las fems y las corrientes causadas por los flujos magnéticos variables se denominan **fems inducidas y corrientes inducidas**, respectivamente. En sí mismo, el proceso se denomina **inducción magnética**. Faraday y Henry descubrieron también que la variación del flujo que atraviesa una superficie encerrada por una espira en movimiento, induce una fem en esta. Una fem producida cuando un conductor se mueve en una región en la que existe un campo magnético se denomina **fem de movimiento**.

A veces, al extraer una clavija del enchufe de un circuito eléctrico observamos la producción de una pequeña chispa. Antes de la desconexión, el cordón eléctrico transporta una corriente, que como sabemos, genera un campo magnético alrededor de la corriente. Al desconectar, la corriente cesa bruscamente y el campo magnético que la rodea se colapsa. El campo magnético variable produce una fem que tiende a mantener la corriente original engendrando así una chispa a través del enchufe. Una vez que el campo magnético se ha anulado y, por lo tanto, deja de ser variable, la fem inducida es cero.

Los campos magnéticos variables pueden también obtenerse con corrientes variables o imanes móviles. Por ejemplo, se puede generar una fem inducida mientras se introduce o se extrae un imán del interior de una bobina. También se produce una fem inducida si la bobina se acerca o se aleja de un conductor por el que circula una corriente o bien la bobina gira en un campo magnético fijo. Este último mecanismo es el elemento básico de un generador que convierte la energía mecánica en energía eléctrica.

En este tema exploraremos los diferentes métodos de inducción magnética, los cuales pueden resumirse por una relación simple conocida con el nombre de **Ley de Faraday**. La ley de Faraday relaciona la fem inducida en un circuito con la variación temporal del flujo magnético a través de la superficie encerrada por el circuito.

## 6.2. Fuerza electromotriz inducida. Ley de Faraday

### 6.2.1. Ley de Faraday

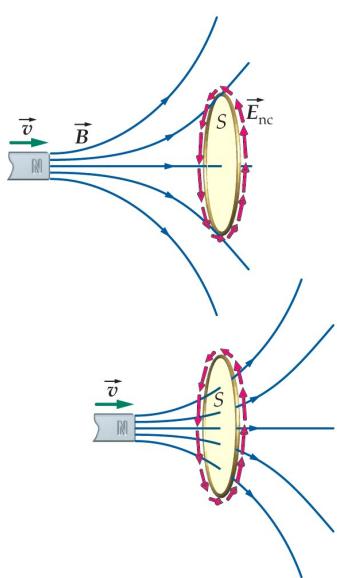
Los experimentos de Faraday y Henry, demostraron que si el flujo magnético a través del área rodeada por un circuito varía por cualquier medio, se induce una fem que es igual en módulo a la variación por unidad de tiempo del flujo que atraviesa el circuito. La fem se suele detectar observando una corriente en el circuito, pero aparece incluso aunque el circuito esté abierto (es decir, incompleto), de modo que no exista corriente. En nuestras exposiciones previas, la fem en un circuito se localizó en una región específica del mismo; por ejemplo, en los terminales de una batería. Sin embargo, la fem inducida por un flujo magnético variable puede considerarse distribuida por todo el circuito.

El flujo magnético a través de la superficie encerrada por un circuito puede variarse de muchas maneras distintas. La corriente que produce el campo magnético puede aumentarse o disminuirse; pueden moverse unos imanes permanentes alejándolos o acercándolos a la superficie; se puede hacer girar el propio circuito en un campo magnético fijo o lo podemos mover en el interior de una región en la que exista un campo magnético fijo pero no uniforme; puede variarse la orientación del circuito; o puede aumentarse o disminuirse el área del circuito en el interior de un campo magnético fijo. En cada uno de los casos, se induce una fem  $\mathcal{E}$  en el circuito cuyo valor es igual en módulo a la variación del flujo magnético por unidad de tiempo a través de una superficie encerrada por un circuito. Es decir:

Ley de Lenz–Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} \quad (6.1)$$

Este resultado es conocido como la **Ley de Faraday**. El signo negativo, expresión matemática de la **ley de Lenz**, concierne al sentido de la fem inducida, como analizaremos próximamente.



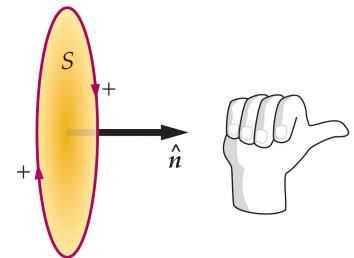
Consideremos una espira conductora fija en el seno de un campo magnético, como se muestra en la figura. El flujo a través de la espira varía porque, al mover el imán, cambia la intensidad del campo magnético, de modo que se induce en la misma una fem. Como esta fem es el trabajo realizado por unidad de carga, deben existir fuerzas ejercidas sobre las cargas móviles que realicen trabajo sobre ellas. Las fuerzas magnéticas no pueden realizar trabajo y por lo tanto no podemos atribuir la fem al trabajo realizado por dichas fuerzas. Son las fuerzas eléctricas asociadas con un campo eléctrico no conservativo  $\vec{E}_{nc}$  las que realizan trabajo sobre las cargas móviles. La circulación del campo eléctrico alrededor de un circuito completo es igual al trabajo realizado por unidad de carga, el cual es la fem del circuito.

Los campos eléctricos que hemos estudiado en temas anteriores eran el resultado de cargas eléctricas estáticas. Estos campos son conservativos, lo cual significa que su circulación alrededor de una curva cerrada  $C$  es cero. Sin embargo, el campo eléctrico resultante de un flujo magnético variable no es conservativo. La circulación alrededor de  $C$  es una fem inducida igual a la variación con el tiempo del flujo magnético a través de cualquier superficie  $S$  encerrada por  $C$  cambiada de signo:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \hat{n} dA \quad (6.2)$$

Fem inducida por un flujo magnético variable

Existe un convenio de signos que nos permite utilizar la ecuación anterior para determinar el sentido del campo eléctrico y la fem inducida. Según este convenio, la dirección tangencial positiva a lo largo de la curva  $C$  se relaciona con la dirección y el sentido del vector unitario normal  $\hat{n}$  y la superficie  $S$  limitada por dicha curva  $C$  mediante la regla de la mano derecha, tal como muestra la figura. Según esta regla, el dedo pulgar da la dirección y el sentido del vector unitario  $\hat{n}$ , los otros cuatro dedos plegados sobre la palma de la mano indican de forma natural el sentido positivo de la dirección tangencial en  $C$ . Si  $d\phi_m/dt$  es positivo, de acuerdo con (6.2), tanto  $\vec{E}_{nc}$  como  $\mathcal{E}$  siguen el sentido negativo de la dirección tangencial. Como veremos a continuación, el sentido de  $\mathcal{E}$  se puede determinar de una forma más general haciendo uso de la Ley de Lenz.



### 6.2.2. Ley de Lenz

El signo negativo de la Ley de Faraday está relacionado con el sentido de la fem inducida. La dirección y sentido de la fem y de la corriente inducidas pueden determinarse mediante un principio físico general llamado **Ley de Lenz**:

*La fem y la corriente inducidas poseen una dirección y sentido tal que tienden a oponerse a la variación que las produce. De manera alternativa, cuando se produce una variación del flujo magnético que atraviesa una superficie, el campo magnético debido a la corriente inducida genera un flujo magnético sobre la misma superficie que se opone a dicha variación.*

Ley de Lenz

Este enunciado de la Ley de Lenz no especifica el tipo de variación que causa la fem y la corriente inducidas, lo cual intencionadamente queda sin concretar para cubrir una diversidad de condiciones. Algunos ejemplos aclararán este punto.

#### Fem inducida por el movimiento relativo de un imán y una espira

La Figura 6.1a muestra una barra magnética que se mueve acercándose a una espira de resistencia  $R$ . El movimiento del imán hacia la derecha induce una fem y una corriente en la espira. La ley de Lenz establece que esta fem y la correspondiente corriente inducida deberá tener una dirección tal que se oponga al movimiento del imán. Es decir, la corriente inducida en la espira produce un campo magnético el cual ejerce una fuerza dirigida hacia la izquierda cuando el imán se aproxima por la derecha. Alternativamente, el movimiento del imán hacia la derecha incrementa el flujo del campo  $\vec{B}_1$  que atraviesa la superficie encerrada por la espira de izquierda a derecha. La corriente inducida debe ser tal que cree un campo  $\vec{B}_2$  cuyo flujo de izquierda a derecha disminuya (o sea, aumento de derecha a izquierda). Por ello,  $\vec{B}_2$  debe apuntar hacia la izquierda, y, según la regla de la mano derecha, la intensidad debe tener el sentido mostrado en la figura.

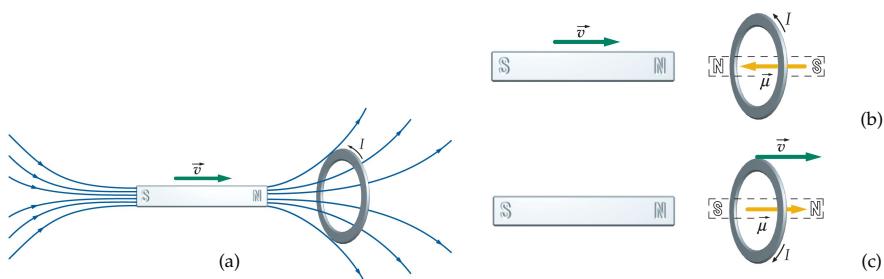


FIGURA 6.1: (a) Cuando el imán en forma de barra se mueve hacia la espira, la fem inducida en esta produce una corriente en el sentido indicado. El campo magnético debido a la corriente inducida en la espira produce un campo magnético que ejerce una fuerza sobre el imán, oponiéndose a su movimiento hacia la derecha. (b) El momento magnético de la espira  $\vec{\mu}$  debido a la corriente inducida es tal que se opone al movimiento de la barra de imán. Este imán se mueve hacia la espira y por lo tanto el momento magnético inducido repele a la barra imantada. (c) Cuando la espira se aleja de la barra magnética estacionaria, el imán atrae a la espira por el momento magnético inducido en ella, oponiéndose de nuevo al movimiento relativo.

La figura 6.1b muestra el momento magnético inducido por la espira de corriente cuando el imán se acerca a esta. La espira actúa como un imán con su polo norte a la izquierda y el sur hacia la derecha y dado que los polos iguales se repelen, el momento magnético inducido de la espira repele al imán, por lo que la espira reacciona oponiéndose al movimiento de acercamiento del imán a la espira. Esto significa que el sentido de la corriente inducida en la espira tiene que ser tal como se muestra en la Figura 6.1b. En la figura 6.1c el imán está en reposo y la espira se mueve alejándose de él. En la figura se indican también la corriente inducida y el momento magnético. En este caso el imán atrae a la espira, según exige la ley de Lenz, oponiéndose al movimiento de la espira.

Supongamos que la corriente en la espira de la Figura 6.1b tuviera sentido opuesto al mostrado. Entonces habría una fuerza magnética cuando el imán se aproximase hacia la derecha que causaría una aceleración. Esta aceleración produciría un crecimiento en la corriente inducida, lo cual volvería a causar una fuerza magnética sobre el imán y así sucesivamente. Si esto fuera así, aplicando una fuerza pequeña a un imán en dirección a una espira conductora, aquél se movería hacia esta siempre con velocidad creciente sin ninguna aportación energética por nuestra parte, lo cual violaría el principio de conservación de la energía. Sin embargo, la realidad es que la energía se conserva y la ley de Lenz es consistente con esta realidad.

### Fem inducida en un circuito debido a una corriente variable

En la Figura 6.2, cuando se hace variar la corriente en el circuito 1, existe un cambio en el flujo que atraviesa el circuito 2. Supongamos que el interruptor  $S$  situado en el circuito 1 está inicialmente abierto y por lo tanto no hay corriente en este circuito (Figura 6.2a). Cuando se cierra el interruptor (Figura 6.2b), la corriente del circuito 1 no alcanza su valor estacionario  $\mathcal{E}_1/R_1$  instantáneamente, sino que tarda un tiempo breve para variar desde cero a este valor final. Durante este tiempo, mientras la corriente está aumentando, el flujo del circuito 2 está variando y existe una corriente inducida en dicho circuito en el sentido indicado. Cuando la corriente del primer circuito alcance su valor estacionario, este flujo dejará de ser variable y no existirá ninguna corriente inducida en el circuito 2. Cuando se abra el interruptor del circuito

1 (Figura 6.2c) y la corriente disminuya hasta cero, aparecerá momentáneamente en el circuito 2 una corriente inducida en el sentido opuesto. Es importante tener en cuenta que existe una fem inducida *solo mientras el flujo está variando*.

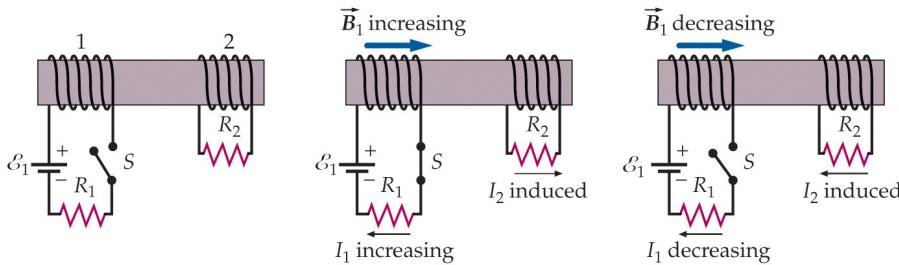
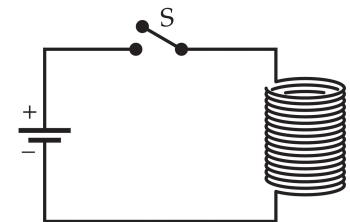


FIGURA 6.2: (a) Dos circuitos adyacentes. (b) En el momento de cerrar el interruptor,  $I_1$  empieza a crecer en el sentido indicado. El flujo variable que atraviesa el circuito 2 induce una corriente  $I_2$ . El flujo que atraviesa el circuito 2 debido a  $I_2$  se opone al aumento de flujo debido a  $I_1$ . (c) Cuando se abre el interruptor,  $I_1$  disminuye y el flujo que atraviesa el circuito 2 varía. La corriente inducida  $I_2$  tiende a mantener el flujo a través del circuito 2.

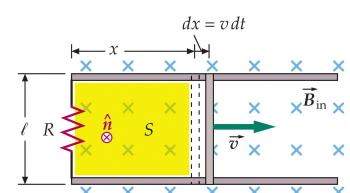
Como ejemplo siguiente consideramos el circuito aislado que se muestra en la figura adyacente. Cuando existe una corriente en el circuito, existe un flujo magnético a través de la bobina debido a su propia corriente. Si este flujo magnético varía en el tiempo se produce una **fem autoinducida**, que se opone a la variación de la corriente. Esta fem autoinducida se denomina **fuerza contraelectromotriz**. Debido a esta fem autoinducida, la corriente de un circuito no puede saltar instantáneamente desde cero hasta un valor finito, o desde cierto valor determinado hasta cero. El primero en observar este efecto fue Joseph Henry, cuando experimentaba con un circuito compuesto por muchas vueltas de alambre como el de la figura. Este dispositivo proporciona un flujo grande a través del circuito incluso cuando la corriente es pequeña. Henry observó la presencia de una chispa que saltaba en el interruptor cuando intentaba abrir el circuito. Esta chispa se debe a la gran fem inducida que se presenta cuando la corriente varía rápidamente, como sucede al abrir el interruptor. En este caso, la fem inducida intenta mantener la corriente original. La gran fem inducida produce una gran diferencia de potencial a través del interruptor cuando este se abre. El campo eléctrico entre los bornes del interruptor es suficientemente grande para provocar la ruptura dieléctrica del aire. Cuando se produce la ruptura dieléctrica, el aire conduce la corriente eléctrica en forma de chispa, tal como se vio en la Sección 2.4.



### 6.2.3. Fuerza electromotriz de movimiento

La fem inducida en un conductor que se mueve en el seno de un campo magnético, se denomina **fem de movimiento**. La figura muestra una varilla conductora que se desliza a lo largo de dos conductores que están unidos a una resistencia en el. Existe un campo magnético  $\vec{B}$  uniforme dirigido hacia el papel. Como el área  $S$  se incrementa cuando la varilla se mueve hacia la derecha, el flujo magnético a través de dicha superficie crece también

Consideremos el flujo magnético a través de la superficie plana  $S$  encerrada por el circuito y sea  $\hat{n}$ , la normal a la superficie, un vector dirigido hacia dentro del papel. Como el área  $S$  se incrementa cuando la varilla se mueve hacia la derecha, el flujo magnético a través de dicha superficie crece también



y, por lo tanto, se induce una fem en el circuito. Si llamamos  $\ell$  a la distancia que separa a los conductores que sirven de raíles y  $x$  a la distancia desde el extremo izquierdo de los raíles a la varilla, el área  $S$  encerrada por el circuito es  $\ell x$ , y el flujo magnético es

$$\phi_m = \oint \vec{B} \cdot \hat{n} dS = B_n \oint dS = B\ell x$$

Cuando  $x$  aumenta una distancia  $dx$ , el área  $S$  incluida en el circuito cambia en  $dS = \ell dx$  y el flujo se modifica en  $d\phi_m = B\ell dx$ . La variación de flujo por unidad de tiempo es

$$\frac{d\phi_m}{dt} = B\ell \frac{dx}{dt} = B\ell v$$

en donde  $v = dx/dt$  es la velocidad de la barra. Por lo tanto, la fem inducida en este circuito es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = -B\ell v \quad (6.3)$$

donde el signo negativo significa que la fem se genera en el sentido negativo de la dirección tangencial al circuito. Poniendo el dedo pulgar de la mano derecha en la dirección y el sentido del vector unitario  $\hat{n}$  (hacia dentro del papel), y los otros dedos curvándose en el sentido positivo, es decir, el horario, vemos que la fem inducida lleva el sentido antihorario.

Podemos comprobar el sentido de la fem inducida mediante la ley de Lenz: el movimiento de la varilla hacia la derecha produce la corriente inducida de tal forma que la fuerza magnética sobre la varilla es hacia la izquierda. La fuerza magnética sobre un conductor con corriente es  $I\vec{l} \wedge \vec{B}$ , donde  $\vec{l}$  es un vector de módulo  $\ell$  que tiene el sentido de la corriente. Si  $\vec{l}$  está dirigido hacia arriba, la fuerza magnética está dirigida hacia la izquierda, lo cual confirma el resultado anterior (la corriente es antihoraria). Si la varilla se mueve inicialmente con una velocidad  $\vec{v}$  hacia la derecha, la fuerza debida a la corriente inducida frena a la varilla hasta pararla. Para mantener el movimiento de la varilla, se necesita una fuerza externa empujando hacia la derecha. Alternativamente, la ley de Lenz puede aplicarse de la siguiente forma: la varilla en su movimiento a la derecha aumenta el flujo del campo que entra en el papel. La corriente inducida debe ser tal que cree un campo magnético cuyo flujo aumente hacia fuera; aplicando la regla de la mano derecha, esta corriente inducida debe ir en sentido antihorario.

### 6.3. Corrientes de Foucault

En los ejemplos que acabamos de estudiar, las corrientes producidas por un flujo variable se establecieron en alambres delgados o barras. Sin embargo, muchos aparatos eléctricos contienen bloques de metal que se mueven en campos magnéticos o están situados en campos magnéticos variables en el tiempo. En estas situaciones, un flujo variable establece unas corrientes circulantes, parecidas a los remolinos de un río, denominadas **corrientes de Foucault, turbillonarias o parásitas**. El calor producido por estas corrientes constituye una pérdida de potencia en el transformador. Consideremos un bloque conductor entre las piezas polares de un electroimán como indica la Figura 6.3a. Si el campo magnético  $B$  entre los polos del imán varía con el tiempo (como sucede si la corriente de los arrollamientos del imán es alterna), el flujo que atraviesa cualquier circuito cerrado en el bloque, como el

indicado por la curva  $C$  en la figura, será un flujo variable. Como la curva  $C$  pertenece a un conductor, se inducirá una fem alrededor de  $C$ .

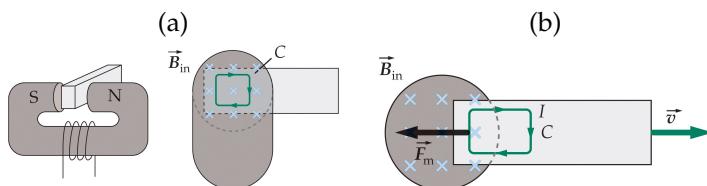


FIGURA 6.3: (a) Corrientes de Foucault. Si el campo magnético a través de un metal varía, se induce una fem en cualquier trayectoria cerrada en el interior del metal como la curva  $C$  indicada. Las fems inducidas producen corrientes turbilares o parásitas (b) Demostración de las corrientes de Foucault. Cuando el bloque metálico se empuja hacia la derecha, existe una fuerza magnética hacia la izquierda sobre la corriente inducida que se opone al movimiento.

Puede hacerse una demostración que compruebe la existencia de corrientes de Foucault sacando una lámina de cobre o de aluminio que esté situada entre los polos de un imán permanente intenso (Figura 6.3b). Parte del área encerrada por la curva  $C$  en esta figura está en el interior del campo magnético y otra parte es exterior al mismo. Cuando se tira de la lámina hacia la derecha, el flujo a través de esta curva disminuye (admitiendo que el flujo dirigido hacia dentro del papel es positivo) y se induce una fem en el sentido de las agujas del reloj a lo largo de esta curva. Esta fem produce una corriente que está dirigida hacia arriba en la región situada entre las piezas polares y el campo magnético ejerce una fuerza dirigida hacia la izquierda sobre esta corriente, que se opone al movimiento de la lámina. Se puede apreciar esta fuerza sobre la lámina si se intenta tirar rápidamente de la misma a través de un campo magnético fuerte.

También puede observarse corrientes de Foucault en un disco metálico que rota en el seno de un campo magnético magnético perpendicular al plano del disco, confinado a una porción limitada del área del mismo. Como se muestra en la Figura 6.4a, el sector  $Ob$  se desplaza a través del campo lo que induce una fem. Los sectores  $Oa$  y  $Oc$  no están en el campo, pero ofrecen caminos conductores de regreso para que las cargas desplazadas a lo largo de  $Ob$  retornen de  $b$  a  $O$ . El resultado es una circulación de corrientes parásitas en el disco, similares a las representadas en la Figura 6.4b. La ley de Lenz permite decidir cuál es el sentido de la corriente inducida en las inmediaciones del sector  $Ob$ . Esta corriente debe experimentar una fuerza magnética  $\vec{F} = I\vec{l} \wedge \vec{B}$  que se opone a la rotación del disco; por tanto, esta fuerza debe ser hacia la derecha (ver Figura 6.4b). Puesto que  $\vec{B}$  está dirigido hacia el plano del disco,  $\vec{l}$  y por tanto la corriente tienen componentes hacia abajo. Las corrientes de retorno se encuentran fuera del campo, por lo que no experimentan fuerzas magnéticas. La interacción entre las corrientes de Foucault y el campo genera una acción de frenado sobre el disco.

Los efectos de las corrientes de Foucault se utilizan para detener rápidamente la rotación de una sierra circular cuando se corta el suministro de energía. También se utilizan a menudo para amortiguar oscilaciones molestas. Así, las balanzas mecánicas muy sensibles, si no poseen un sistema de amortiguamiento, al pesar una masa pequeña oscilan muchas veces antes de alcanzar el equilibrio. Para evitar esto, estas balanzas se diseñan de modo que una pequeña pieza de aluminio (o de otro metal) se mueve entre los polos de un imán mientras la balanza oscila. Las corrientes de Foucault resultantes amortiguan las oscilaciones de modo que el equilibrio se alcanza

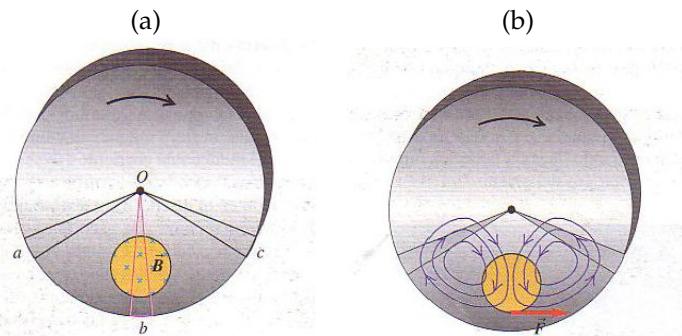


FIGURA 6.4: (a) Disco metálico en rotación a través de un campo magnético perpendicular  $\vec{B}$ . (b) Corrientes de Foucault formadas por la fem inducida.

rápidamente. Otro ejemplo es el frenado magnético de algunos vagones de transporte rápido. Estos vagones poseen un gran electroimán situado sobre los raíles. Cuando se envía corriente al electroimán, se inducen corrientes de Foucault en los raíles debido al movimiento del imán y las fuerzas magnéticas proporcionan una fuerza de arrastre al vagón, que lo frena.

Las corrientes de Foucault tienen muchos otros efectos prácticos. El disco del contador de las compañías eléctricas gira gracias a las corrientes turbillonarias. Estas corrientes son inducidas en el disco por los campos magnéticos originados por las corrientes que varían sinusoidalmente en una bobina. En los hornos de inducción se utilizan corrientes de Foucault para calentar materiales en recipientes cerrados herméticamente en procedimientos en los que es indispensable evitar la contaminación de los materiales. Los detectores de metales que se utilizan en los arcos de seguridad de los aeropuertos (Figura 6.5a) funcionan detectando corrientes parásitas inducidas en objetos metálicos. Se utilizan dispositivos análogos (Figura 6.5b) para hallar metales enterrados en la playa, tales como tapas de botellas o monedas perdidas.

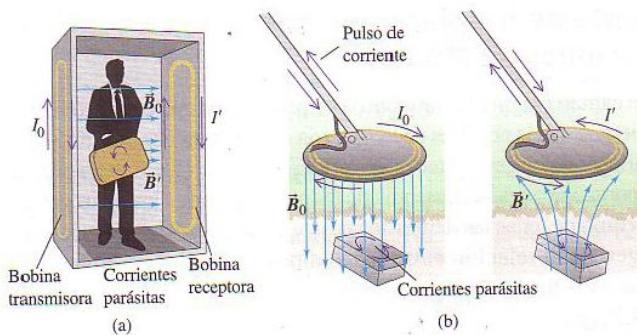
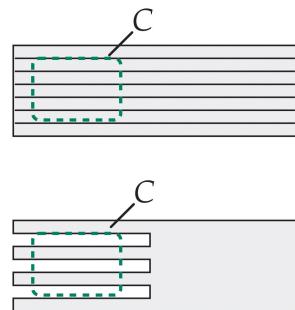


FIGURA 6.5: (a) Un detector de metales en un arco de seguridad de aeropuerto genera un campo magnético variable en el tiempo  $\vec{B}_0$ . El flujo variable induce corrientes de Foucault en un objeto conductor que pasa por el detector. A su vez, las corrientes parásitas crean un campo magnético variable  $\vec{B}'$ , y este campo induce una corriente en la bobina receptora del detector. (b) Los detectores portátiles de metales se basan en el mismo principio de funcionamiento.

Las corrientes de Foucault tienen también efectos molestos debido a que el calor producido no solo constituye una pérdida de potencia, sino que ade-

más hay que disiparlo transfiriéndolo al medio ambiente. La pérdida de potencia puede reducirse aumentando la resistencia de los caminos posibles que han de seguir las corrientes de Foucault, como se ve en la figura. En este caso, el bloque conductor está en forma de láminas, es decir, formado por unas tiras pequeñas unidas mediante pegamento aislante. Debido a ello, las corrientes de Foucault están confinadas esencialmente a las tiras. Se han roto, por tanto, los grandes circuitos por los que pueden circular las corrientes de Foucault y se reduce en gran medida la pérdida de potencia. Si la lámina está recortada se produce un efecto similar.



## 6.4. Autoinducción e inducción mutua

### 6.4.1. Autoinducción

El flujo magnético que atraviesa un circuito puede relacionarse con la corriente en el mismo y con las corrientes que circulan por circuitos próximos. Consideremos una bobina por la que circula una corriente  $I$ . La corriente produce un campo magnético  $\vec{B}$  que varía de un punto a otro pero, en todos los puntos  $\vec{B}$  es proporcional a  $I$ . El flujo magnético a través de la bobina, por lo tanto, es también proporcional a  $I$ :

$$\phi_m = LI \quad (6.4)$$

[Autoinducción](#)

en donde  $L$  es una constante llamada **autoinducción** de la bobina. La autoinducción depende de la forma geométrica de la bobina. La unidad del Sistema Internacional para la autoinducción es el **Henrio** (H) y según la ecuación (6.4) es igual a Weber por Amperio.

En principio, la autoinducción de cualquier bobina o circuito puede calcularse suponiendo la existencia de una corriente  $I$ , determinando  $\vec{B}$  en cada punto de una superficie encerrada por la bobina, calculando el flujo  $\phi_m$  y usando la ecuación  $L = \phi_m / I$ . En la práctica, el cálculo es muy difícil. Sin embargo, la autoinducción de un solenoide esbelto puede calcularse directamente. El campo magnético en un solenoide de estas características, de longitud  $\ell$  y  $N$  vueltas que transporta una corriente  $I$  fue calculado en el tema anterior (4.22) y es

$$B = \mu_0 \frac{N}{\ell} I$$

El flujo magnético que atraviesa el solenoide será  $N$  veces el flujo que atraviesa una espira, es decir,

$$\phi_m = NBA = \frac{\mu_0 N^2 IA}{\ell} = \mu_0 n^2 IA \ell$$

en donde  $n = N/\ell$  es el número de vueltas por unidad de longitud. Como es lógico, el flujo es proporcional a la intensidad de corriente  $I$ . La constante de proporcionalidad es la autoinducción:

$$L = \mu_0 n^2 A \ell \quad (6.5)$$

[Autoinducción de un solenoide](#)

La autoinducción es proporcional al cuadrado del número de vueltas por unidad de longitud  $n$  y al volumen  $A\ell$ . Así pues, al igual que la capacidad, la autoinducción depende solo de factores geométricos. De acuerdo con las dimensiones de la ecuación (6.5),  $\mu_0$  puede expresarse en H/m.

Cuando la intensidad de corriente de un circuito varía, el flujo magnético debido a la corriente también se modifica y, por lo tanto, en el circuito se induce una fem. Como la autoinducción del circuito es constante, la variación del flujo está relacionada con la variación de intensidad por

$$\frac{d\phi_m}{dt} = \frac{d(LI)}{dt} = L \frac{dI}{dt}$$

De acuerdo con la Ley de Faraday, resulta

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \quad (6.6)$$

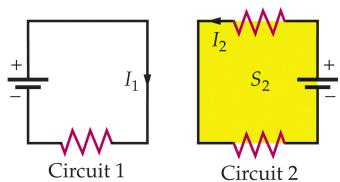
Así pues, la fem autoinducida es proporcional a la variación con el tiempo de la intensidad de corriente. Una bobina o solenoide con muchas vueltas posee una gran autoinducción. Frecuentemente podemos despreciar la autoinducción del resto del circuito si es mucho menor que la de una autoinducción. La diferencia de potencial entre los extremos de una autoinducción viene dada por:

Diferencia de potencial entre los extremos de una autoinducción

$$\Delta V = \mathcal{E} - Ir = -L \frac{dI}{dt} - Ir \quad (6.7)$$

donde  $r$  es la resistencia interna de la autoinducción. Para una autoinducción ideal,  $r = 0$ .

#### 6.4.2. Inducción mutua



Inducción mutua

Cuando dos o más circuitos están próximos entre sí, como los que se muestran en la figura, el flujo magnético que atraviesa uno de ellos depende no solo de la corriente en este circuito, sino también de la corriente que circula por los circuitos próximos. Sea  $I_1$  la corriente en el circuito de la izquierda de la figura e  $I_2$  la del circuito de la derecha. El campo magnético  $\vec{B}$  en la superficie  $S_2$  es la superposición de  $\vec{B}_1$  debido a  $I_1$  y  $\vec{B}_2$  debido a  $I_2$ , siendo  $\vec{B}_1$  proporcional a  $I_1$  y  $\vec{B}_2$  proporcional a  $I_2$ . Por lo tanto, podemos expresar el flujo de  $\vec{B}_1$  que atraviesa el circuito 2,  $\phi_{m2,1}$  como:

$$\phi_{m2,1} = M_{2,1} I_1 \quad (6.8)$$

en donde  $M_{2,1}$  es la **inducción mutua** de los dos circuitos. La inducción mutua depende de la disposición geométrica entre ambos. En particular, podemos ver que si los circuitos están bastante separados, el flujo de  $\vec{B}_1$  a través del circuito 2 será pequeño y la inducción mutua también lo será<sup>1</sup>. Puede escribirse una ecuación semejante a (6.8) para el flujo de  $\vec{B}_2$  que atraviesa el circuito 1:

$$\phi_{m1,2} = M_{1,2} I_2 \quad (6.9)$$

<sup>1</sup>el flujo neto  $\phi_{m2}$  de  $\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$  que atraviesa el circuito 2 es  $\phi_{m2} = \phi_{m2,2} + \phi_{m2,1}$

Podemos calcular la inducción mutua de dos solenoides esbeltos concéntricos como los que se muestran en la figura. Sea  $\ell$  la longitud común de ambos solenoides y supongamos que el solenoide interior tiene  $N_1$  vueltas y radio  $r_1$  y que el solenoide exterior tiene  $N_2$  vueltas y radio  $r_2$ . Calcularemos primero la inducción mutua  $M_{2,1}$  suponiendo que el solenoide interior transporta una corriente  $I_1$  y determinando el flujo magnético  $\phi_{m2}$  debido a esta corriente a través del solenoide exterior.

El campo magnético  $\vec{B}_1$  debido a la corriente del solenoide interno es constante en el espacio interior a este y su valor es

$$B_1 = \mu_0(N_1/\ell)I_1 = \mu_0n_1I_1, \quad r < r_1$$

Fuera del solenoide interno, el campo magnético  $\vec{B}_1$  es despreciable. El flujo de  $\vec{B}_1$  que atraviesa el solenoide externo debido a este campo magnético es, por lo tanto,

$$\phi_{m2} = N_2B_1(\pi r_1^2) = \mu_0n_2n_1\ell(\pi r_1^2)I_1$$

Obsérvese que el área utilizada para calcular el flujo que atraviesa el solenoide exterior no es el área de dicho solenoide,  $\pi r_2^2$ , sino el área del solenoide interior  $\pi r_1^2$ , ya que el campo magnético debido al solenoide interior es cero fuera del mismo. La inducción mutua es, por lo tanto,

$$M_{2,1} = \frac{\phi_{m2}}{I_1} = \mu_0n_2n_1\ell\pi r_1^2 \quad (6.10)$$

Calculemos a continuación el valor de  $M_{1,2}$ . Para ello tenemos en cuenta que el campo magnético  $\vec{B}_2$  debido a la corriente del solenoide externo es

$$B_2 = \mu_0(N_2/\ell)I_2 = \mu_0n_2I_2, \quad r < r_2$$

El flujo de  $\vec{B}_2$  que atraviesa el solenoide interno debido a este campo es

$$\phi_{m1} = N_1B_2(\pi r_1^2) = \mu_0n_1n_2\ell(\pi r_1^2)I_2$$

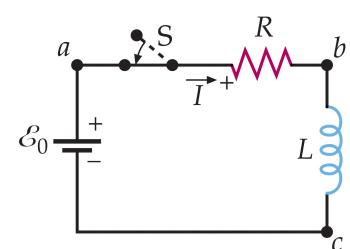
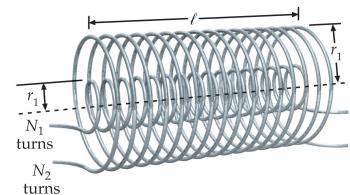
Finalmente, la inducción mutua debido a la corriente  $I_2$  en el solenoide interno es

$$M_{1,2} = \frac{\phi_{m1}}{I_2} = \mu_0n_1n_2\ell\pi r_1^2 \quad (6.11)$$

Obsérvese que  $M_{1,2} = M_{2,1}$ . Puede demostrarse que este es un resultado general. Por ello, prescindiremos de los subíndices de la inducción mutua y escribiremos simplemente  $M$ .

### 6.4.3. Energía magnética

Una autoinducción almacena energía magnética, del mismo modo que un condensador almacena energía eléctrica. Consideremos el circuito formado por una autoinducción  $L$  y una resistencia  $R$  en serie con una batería de fem  $\mathcal{E}_0$  y un interruptor  $S$ , como se muestra en la figura. Se supone que  $R$  y  $L$  son, respectivamente, la resistencia e autoinducción del circuito completo. El interruptor está inicialmente abierto, de modo que no pasa corriente por el circuito. Al cerrar el interruptor aparece una corriente  $I$  en el circuito, una caída de potencial  $-IR$  a través de la resistencia y una diferencia de potencial



$-LdI/dt$  en la autoinducción (en una autoinducción de resistencia despreciable, la diferencia de potencial entre los extremos del mismo es igual a la fuerza contraelectromotriz). Aplicando la ley de las mallas de Kirchhoff en este circuito, resulta

$$\mathcal{E}_0 = IR + L \frac{dI}{dt} \quad (6.12)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por la intensidad de corriente  $I$  resulta:

$$\mathcal{E}_0 I = I^2 R + LI \frac{dI}{dt} \quad (6.13)$$

El término  $\mathcal{E}_0 I$  es la potencia suministrada por la batería. El término  $I^2 R$  es la energía potencial por unidad de tiempo que incide en la resistencia (también es la potencia disipada en forma de calor en la resistencia del circuito). El término  $LIdI/dt$  representa la energía que por unidad de tiempo incide en la autoinducción. Si  $U_m$  es la energía en la autoinducción, se verifica

$$\frac{dU_m}{dt} = LI \frac{dI}{dt}$$

o también,

$$dU_m = LIdI$$

Integrando esta ecuación desde el tiempo  $t = 0$ , cuando la corriente y la energía son nulas hasta  $t = \infty$ , cuando la corriente y la energía han alcanzado sus valores finales  $I$  y  $U_m$ , resulta:

$$U_m = \int_0^I LIdI = \frac{1}{2}LI^2$$

La energía almacenada en una autoinducción que transporta una corriente  $I$  viene dada entonces por

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 \quad (6.14)$$

En el proceso de producir una corriente en una autoinducción, se crea un campo magnético en el espacio interior a la bobina. Es decir, podemos imaginar que la energía almacenada en una autoinducción es energía almacenada en el campo magnético creado. En el caso especial de un solenoide largo, el campo magnético está relacionado con la corriente  $I$  y el número de vueltas por unidad de longitud  $n$  por  $B = \mu_0 n I$  y la autoinducción viene expresada por la ecuación (6.5):  $L = \mu_0 n^2 A \ell$  en donde  $A$  es el área transversal y  $\ell$  la longitud. Sustituyendo  $I$  por  $B/(\mu_0 n)$  y  $L$  por  $\mu_0 n^2 A \ell$  en la ecuación (6.14) resulta

$$U_m = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}(\mu_0 n^2 A \ell) \left( \frac{B}{\mu_0 n} \right)^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} A \ell$$

La magnitud  $A \ell$  es el volumen del espacio contenido dentro del solenoide, donde se crea el campo magnético. La energía por unidad de volumen es la **densidad de energía magnética**  $u_m$ :

Densidad de energía magnética

$$u_m = \frac{B^2}{2\mu_0} \quad (6.15)$$

Aunque esta ecuación se ha obtenido para el caso especial del campo magnético en un solenoide largo, el resultado es general. Es decir, siempre que existe un campo magnético en el espacio, la energía magnética por unidad de volumen viene dada por la ecuación (6.15). Obsérvese la semejanza con la densidad de energía eléctrica en un campo eléctrico:  $u_e = \epsilon_0 E^2 / 2$ .

## 6.5. Corriente de desplazamiento y Ley de Ampère generalizada

Hemos visto que las cargas en movimiento, o corrientes, producen campos magnéticos. Cuando un conductor que transporta una corriente tiene una simetría elevada, podemos calcular el campo magnético utilizando la Ley de Ampère, dada por la ecuación (4.20):

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$$

donde la integral curvilinea se realiza sobre *cualquier* trayectoria cerrada que sea atravesada por la corriente de conducción, estando esta definida por  $I = dQ/dt$ .

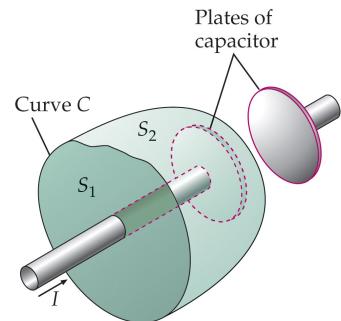
En esta sección utilizaremos el término **corriente de conducción** para referirnos a la corriente debida al movimiento de las partículas cargadas en un cable, para distinguirla de un tipo diferente de corriente que introduciremos en breve. La Ley de Ampère en esta forma es válida únicamente si la corriente de conducción es continua en el espacio. Maxwell reconoció esta limitación y modificó la Ley de Ampère para incluir todas las situaciones posibles.

Este problema puede comprenderse considerando un condensador que se está cargando, como el que muestra la figura. Cuando existe una corriente de conducción en los cables, la carga sobre las placas cambia, pero *no hay corriente de conducción entre las placas*. Consideremos las dos superficies de la figura,  $S_1$  (un círculo) y  $S_2$  (un paraboloide que pasa entre las placas), limitadas por la misma trayectoria  $C$ . La Ley de Ampère dice que la integral curvilinea de  $\vec{B} \cdot d\vec{l}$  alrededor de esta trayectoria debe ser igual a  $\mu_0 I$ , donde  $I$  es la corriente total a través de *cualquier* superficie limitada por la trayectoria  $C$ . Cuando consideramos que la trayectoria  $C$  limita a  $S_1$ , el resultado de la integral es  $\mu_0 I$ , ya que la corriente de conducción pasa a través de  $S_1$  mientras el condensador se está cargando. Sin embargo, cuando la trayectoria limita a  $S_2$ , el resultado es cero, puesto que no pasa corriente de conducción a través de  $S_2$ . De esta manera, aparece una situación contradictoria debido a la discontinuidad de la corriente. Maxwell resolvió este problema postulando un término adicional en el segundo término de la ecuación (4.20) denominado **corriente de desplazamiento**,  $I_d$ , definida como:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \quad (6.16)$$

donde  $\phi_e$  es el flujo del campo eléctrico,  $\phi_e = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} dA$ .

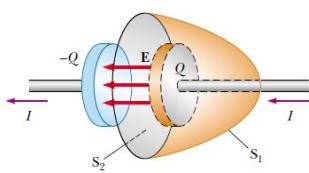
A medida que el condensador se va cargando (o descargando), el campo eléctrico variable entre las placas puede considerarse equivalente a una corriente que actúa como continuación de la corriente de conducción del cable. Cuando se añade la expresión para la corriente de desplazamiento dada en la ecuación (6.16) a la corriente de conducción del segundo miembro de la



Ley de Ampère, la dificultad representada en la figura anterior queda resuelta. No importa qué superficie limitada por la trayectoria  $C$  tomemos: habrá una corriente de conducción o una corriente de desplazamiento que la atravesen. Con este nuevo concepto de corriente de desplazamiento, podemos expresar la forma general de la Ley de Ampère, a menudo conocida como **Ley de Ampère-Maxwell**, de la forma:

#### Ley de Ampère-Maxwell

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0(I + I_d) = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \quad (6.17)$$



El significado de esta expresión puede ser comprendido fijándonos en la figura. El flujo eléctrico a través de  $S_2$  (un círculo situado entre las placas) es  $\phi_e = \int_{S_2} \vec{E} \cdot d\vec{A} = EA$ , donde  $A$  es el área de las placas del condensador y  $E$  el módulo del campo eléctrico uniforme entre las placas. Si  $Q$  es la carga sobre las placas en cualquier instante, entonces  $E = Q/(\epsilon_0 A)$ . Por tanto, el flujo eléctrico a través de  $S_2$  es simplemente

$$\phi_e = EA = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

De aquí, la corriente de desplazamiento  $I_d$  a través de  $S_2$  es:

$$I_d = \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} = \frac{dQ}{dt}$$

Esto es, la corriente de desplazamiento a través de  $S_2$  es precisamente igual a la corriente de conducción  $I$  a través de  $S_1$ . El concepto central de este formalismo es el hecho de que tanto la corriente de conducción como los campos eléctricos variables generan campos magnéticos. Este resultado es un ejemplo notable del trabajo teórico de Maxwell y unas de sus principales contribuciones al avance de la comprensión del electromagnetismo.

## 6.6. Ecuaciones de Maxwell

En esta sección reuniremos cuatro ecuaciones esenciales de nuestros estudios en los capítulos anteriores, que pueden ser vistas conjuntamente como la base de todos los fenómenos eléctricos y magnéticos. Estas relaciones, conocidas como ecuaciones de Maxwell, en honor de James Clerk Maxwell, son tan fundamentales para los fenómenos electromagnéticos como las leyes de Newton lo son para los fenómenos mecánicos. De hecho, la teoría desarrollada por Maxwell tuvo un alcance mucho mayor de lo que él hubiese imaginado nunca, ya que Einstein demostró en 1905 que estaban de acuerdo con la teoría especial de la relatividad. Como veremos, las ecuaciones de Maxwell representan una extensión para campos dependientes del tiempo de las leyes de la electricidad y el magnetismo que ya hemos analizado anteriormente. Además, las ecuaciones tienen consecuencias adicionales importantes, en el sentido de que predicen la existencia de ondas electromagnéticas que se propagan en el vacío con una velocidad  $c = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \approx 3.00 \times 10^8$  m/s. Más aún, las ecuaciones de Maxwell muestran que las ondas electromagnéticas son radiadas por cargas aceleradas.

Por simplicidad, presentaremos las **ecuaciones de Maxwell** aplicadas al espacio vacío, es decir, en ausencia de cualquier material dieléctrico o magnético.

Las cuatro ecuaciones son:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (6.18)$$

$$\oint B \cdot d\vec{A} = 0 \quad (6.19)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad (6.20)$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d\phi_e}{dt} \quad (6.21)$$

La primera ecuación es el Teorema de Gauss, el cual enuncia que el flujo eléctrico total a través de cualquier superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada por esa superficie, dividida por  $\epsilon_0$ . Este teorema describe cómo las cargas crean campos eléctricos en los que las líneas de campo se originan en las cargas positivas y terminan en las cargas negativas.

La segunda ecuación, la cual puede ser considerada como el Teorema de Gauss para el magnetismo, dice que el flujo magnético neto a través de cualquier superficie cerrada es cero. Esto es, el número de líneas de campo magnético que entran en un volumen cerrado debe ser igual al número de líneas que salen de ese volumen. Esto implica que las líneas de campo magnético no pueden originarse ni finalizar en ningún punto. Si lo hicieran, significaría que existen monopolos magnéticos aislados en esos puntos. El hecho que no haya sido observado ninguno monopolo magnético aislado en la naturaleza puede ser considerado como la base de esta ecuación.

La tercera ecuación es la Ley de Faraday de la inducción magnética, la cual describe cómo un campo magnético variable genera un campo eléctrico. Esta ley enuncia que la circulación del campo eléctrico alrededor de cualquier trayectoria cerrada es igual a la variación del flujo magnético a través de cualquier superficie limitada por dicha trayectoria.

La cuarta ecuación es la forma generalizada de la Ley de Ampère y describe la forma en que tanto una corriente eléctrica como un campo eléctrico variable generan un campo magnético. Esto es, la circulación del campo magnético alrededor de cualquier trayectoria cerrada está determinada por la corriente neta y por la variación del flujo eléctrico a través de cualquier superficie limitada por dicha trayectoria.

Una vez que conocemos los campos eléctricos y magnéticos en un punto del espacio, la fuerza que estos campos ejercen sobre una partícula de carga  $q$  puede calcularse a partir de la expresión:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad (6.22)$$

Esta fuerza se denomina **Fuerza de Lorentz**. Las ecuaciones de Maxwell y la fuerza de Lorentz proporcionan una descripción completa de todas las interacciones electromagnéticas clásicas.

Obsérvese la interesante simetría de las ecuaciones de Maxwell. En ausencia de fuentes (cargas y corrientes), las dos primeras ecuaciones son simétricas, así como las dos últimas.



## Tema 7

# Ondas

---

### 7.1. Introducción

La mayoría de nosotros ha observado el fenómeno de las ondas al arrojar piedras a un estanque. La perturbación creada por la piedra se manifiesta como una serie de olas que se mueven alejándose del punto en el que la piedra entró en contacto con el agua. Si se analiza cuidadosamente el movimiento de una hoja que flote cerca del punto donde la piedra entró en el agua, se podrá observar cómo la hoja se mueve hacia arriba, abajo, delante o detrás, alrededor de su posición original, pero que no se produce no se produce ningún desplazamiento neto que la aleje o la aproxime al origen de la perturbación. La perturbación en el agua se mueve de un lugar a otro, pero la propia agua no se mueve con la perturbación, siendo ésta la esencia del movimiento ondulatorio.

El mundo está lleno de distintas clases de ondas, incluyendo ondas sonoras, ondas en cuerdas, ondas sísmicas, ondas de radio, luz y rayos X, entre otras. La mayoría de las ondas se pueden clasificar dentro de una de las siguientes dos categorías. La primera la forman las **ondas mecánicas**, que son ondas que perturban y se propagan a través de algún medio; el oleaje en el agua a causa de la piedra o una onda sonora, cuyo medio de propagación es el aire, son ejemplos de ondas mecánicas. La otra categoría, la de las **ondas electromagnéticas** (OEMs), engloba a las ondas que están compuestas por campos electromagnéticos variables en el tiempo y que no necesitan de un medio para propagarse; las ondas de luz y las ondas de radio son dos ejemplos familiares de este tipo de ondas.

El concepto de onda es abstracto. Cuando observamos una onda en el agua, lo que vemos es una reorganización de la superficie del agua. Sin el agua, no habría onda. En el caso de ésta, o de cualquier otra onda mecánica, lo que interpretamos como una onda se corresponde con una perturbación de un medio. Por lo tanto, podemos considerar que una onda mecánica es la propagación de una perturbación en un medio. O visto de otro modo, una onda (tanto mecánica como electromagnética) transporta energía y momento, pero no masa.

## 7.2. Movimiento ondulatorio simple

### 7.2.1. Ondas transversales y longitudinales

Las ondas mecánicas se originan mediante la perturbación de un medio. Cuando se pulsa una cuerda tensa, la perturbación provocada se propaga a lo largo de la misma en forma de un pulso ondulatorio. La perturbación en este caso consiste en la variación de la forma de la cuerda a partir de su estado de equilibrio. Su propagación surge de la interacción de cada segmento de cuerda con los segmentos adyacentes. Los segmentos de la cuerda (el medio) se mueven en dirección perpendicular a la cuerda, y, por lo tanto, perpendiculares a la dirección de movimiento del pulso. Una onda como esta, en la que la perturbación es perpendicular a la longitud de propagación, se denomina **onda transversal** (figura 7.1a). Las ondas electromagnéticas son otro ejemplo de ondas transversales. Una onda en que la perturbación es paralela a la dirección de propagación, se denomina **onda longitudinal** (figura 7.1b). Las ondas sonoras son ejemplos de ondas longitudinales. Las moléculas de un gas, líquido o sólido a través del cual viaja el sonido, oscilan según la línea de propagación (moviéndose adelante y atrás), comprimiendo y enrareciendo alternativamente el medio.

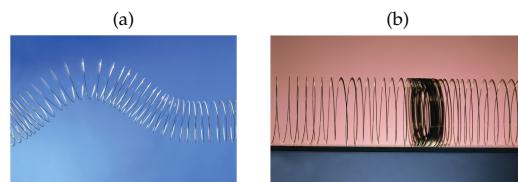


FIGURA 7.1: Pulso de una onda transversal (a) y una onda longitudinal (b).

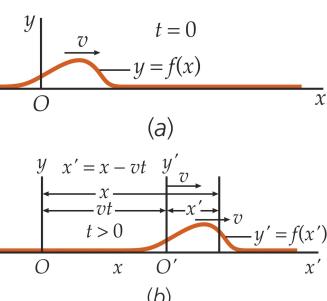
### 7.2.2. Pulsos de onda

En la figura se muestra un pulso en una cuerda en el instante  $t = 0$  (a). Este pulso puede conseguirse agitando el extremo libre de una cuerda tensa que tenga su otro extremo fijo. La forma de la cuerda en ese instante puede representarse por una función  $y = f(x)$ . Un cierto tiempo después (b), el pulso se ha desplazado por la cuerda, de modo que en un nuevo sistema de coordenadas con origen  $O'$  que se mueve con la velocidad del pulso, éste es estacionario. La cuerda se describe en este nuevo sistema por  $f(x')$  en todo instante. Las coordenadas de los dos sistemas de referencia están relacionadas por  $x' = x - vt$  y por lo tanto,  $f(x') = f(x - vt)$ .

Así pues, el desplazamiento de la cuerda en el sistema original  $O$  puede escribirse

$$y = f(x - vt) \quad (7.1)$$

Esta misma línea de razonamiento, aplicada al caso de un pulso que se mueve hacia la izquierda conduce a



Onda moviéndose en el sentido positivo de  $x$

Onda moviéndose en el sentido negativo de  $x$

$$y = f(x + vt) \quad (7.2)$$

En cada una de estas expresiones,  $v$  es el módulo de la velocidad de propagación de la onda. La función  $y = f(x \pm vt)$  se denomina **función de onda**. En el caso de ondas en una cuerda, la función de onda representa el desplazamiento transversal de la cuerda. Para las ondas sonoras en el aire, la función de onda puede ser el desplazamiento longitudinal de las moléculas gaseosas o la presión del aire. Las funciones de onda correspondientes a OEMs son campos eléctricos y magnéticos dependientes del tiempo. Estas funciones de onda son soluciones de una ecuación diferencial llamada **ecuación de onda**, que puede deducirse a partir de la segunda ley de Newton. En concreto, para desplazamientos pequeños, la ecuación de ondas o **ecuación de D'Alembert** puede escribirse de la forma:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (7.3) \quad \text{Ecuación de D'Alembert}$$

### 7.2.3. Velocidad de las ondas

Una propiedad general de las ondas es que su velocidad depende de las propiedades del medio y es independiente del movimiento de la fuente de las ondas. Por ejemplo, la velocidad del sonido de la bocina de un coche depende solo de las propiedades del aire y no del movimiento del coche.

En el caso de los pulsos en una cuerda, es fácil demostrar que cuanto mayor es la tensión, más rápidamente se propagan las ondas. Además, las ondas se propagan más rápidamente en una cuerda ligera que en una cuerda pesada bajo la misma tensión. Si  $\tau$  es la tensión y  $\mu$  la densidad de masa lineal, la velocidad de la onda es

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} \quad (7.4) \quad \text{Velocidad de las ondas en una cuerda}$$

En el caso de las ondas sonoras en un gas, tal como el aire, la velocidad  $v$  viene expresada por

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{P_m}} \quad (7.5) \quad \text{Velocidad del sonido en un gas}$$

En esta ecuación  $T$  es la temperatura absoluta medida en grados Kelvin;  $\gamma$  es el coeficiente de adiabaticidad (para el aire,  $\gamma = 1.4$ );  $R$  es la constante universal de los gases y  $P_m$  es la masa molecular del gas, que para el aire es  $P_m = 29 \text{ g/mol}$ .

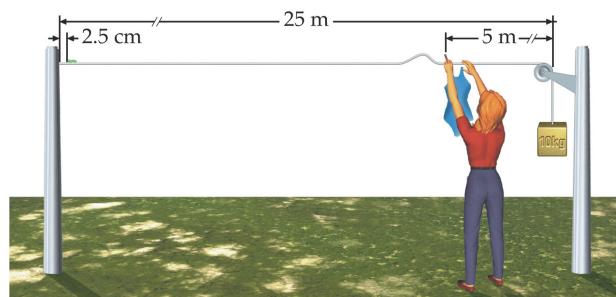
Finalmente, la velocidad de propagación de las ondas electromagnéticas en el vacío es una constante universal de valor

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.99792 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (7.6) \quad \text{Velocidad de las ondas electromagnéticas en el vacío}$$

---

**EJEMPLO 7.1 El gusano que corre para salvar su vida**

Un gusano está a 2.5 cm del extremo de la cuerda de un tendedero cuando la chica que está tendiendo su bañador en el otro extremo de la cuerda lo ve. La chica da un golpe a la cuerda de modo que por ésta se propaga un pulso de 3 cm de altura que se dirige hacia el animal. Si el gusano se mueve a 2.54 cm/s, ¿llegará al extremo de la cuerda antes de que le alcance el movimiento generado por la chica? La cuerda tiene 25 m de longitud y una masa de 0.25 kg y se mantiene tensa gracias a un peso de 10 kg que cuelga de ella. La chica está tendiendo su bañador a una distancia de 5 cm del extremo de la cuerda opuesto a la posición del gusano.



Debemos conocer a qué velocidad se mueve la onda. Para ello usamos la fórmula (7.4):  $v = \sqrt{\tau/\mu}$ . Por otro lado,  $\mu = m_c/L$ ,  $\tau = mg$ , donde  $m_c = 0.25$  kg es la masa de la cuerda,  $L = 25$  m es la longitud de la misma, y  $m = 10$  kg es la masa del peso que cuelga. Así,

$$v = \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{mgL}{m_c}} = 100 \text{ m/s}$$

El tiempo  $\Delta t_{\text{pulso}}$  que tarda el pulso en recorrer la distancia  $\Delta x_{\text{pulso}} = 20$  m, desde el bañador hasta el extremo de la cuerda donde se encuentra el gusano es:

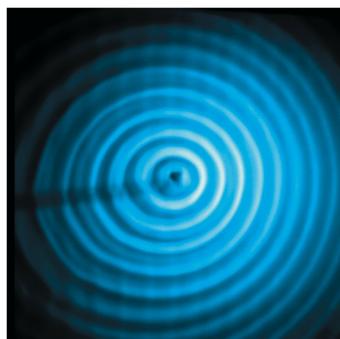
$$\Delta t_{\text{pulso}} = \frac{\Delta x_{\text{pulso}}}{v} = 0.2 \text{ s} \quad (7.7)$$

El tiempo  $\Delta t_{\text{gusano}}$  que tarda el gusano en recorrer la distancia  $\Delta x_{\text{gusano}} = 2.5$  cm hasta el extremo de la cuerda, viajando a la velocidad  $v' = 2.54$  cm/s es:

$$\Delta t_{\text{gusano}} = \frac{\Delta x_{\text{gusano}}}{v'} = 0.984 \text{ s} \quad (7.8)$$

Como  $\Delta t_{\text{gusano}} > \Delta t_{\text{pulso}}$ , el gusano no puede escapar del pulso.

---



#### 7.2.4. Ondas en tres dimensiones

En la figura se muestran ondas circulares bidimensionales sobre la superficie del agua de una cubeta de ondas. Estas ondas se generan mediante una fuente puntual que se mueve hacia arriba y hacia abajo con un movimiento armónico simple. El lugar geométrico de los puntos que han sido alcanzados simultáneamente por la perturbación recibe el nombre de **frente de onda**. En el caso de un foco o fuente puntual de sonido, las ondas se emiten en tres dimensiones. Se mueven alejándose del foco en todas direcciones y los frentes de onda son ahora superficies esféricas concéntricas.

El movimiento de un conjunto cualquiera de frentes de onda puede indicarse mediante rayos, que son líneas dirigidas perpendicularmente a los frentes de onda (figura 7.2a). Para ondas circulares o esféricas, los rayos son líneas radiales.

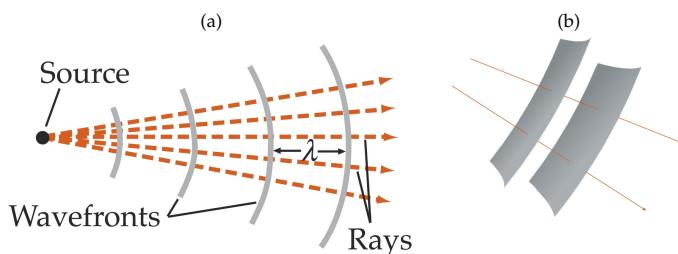


FIGURA 7.2: (a) El movimiento de los frentes de onda puede representarse mediante rayos que dibujan perpendiculares a los frentes de onda. En el caso de una fuente puntual, los rayos son rectas radiales que divergen de la misma. (b) Ondas planas. A distancia grande de un foco puntual, los frentes de onda son aproximadamente planos paralelos y los rayos son aproximadamente rectas paralelas perpendiculares a los frentes de onda.

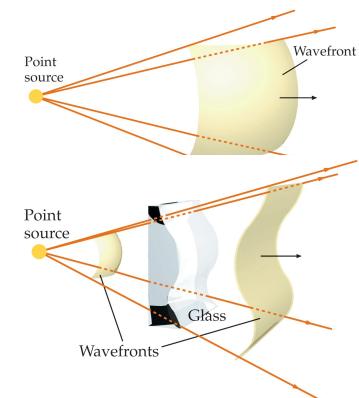
En un medio homogéneo, como el aire a densidad constante, una onda se mueve en línea recta en la dirección de los rayos, como si se tratara de un haz de partículas. A una distancia grande de un foco puntual, una parte pequeña del frente de onda puede aproximarse por un plano y los rayos son aproximadamente rectas paralelas; este tipo de onda se llama **onda plana** (figura 7.2b). El análogo bidimensional de una onda plana es una onda lineal, que puede considerarse como una pequeña parte de un frente de ondas circular a una gran distancia de su foco. Estas ondas pueden producirse también en una cubeta de ondas mediante una fuente lineal.



### 7.2.5. Propagación de las ondas. Principio de Huygens

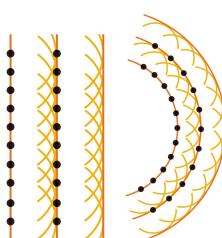
En la figura puede verse una porción de un frente de ondas esférico que procede de un foco puntual. Si en el instante  $t$  el radio del frente de ondas es  $r$ , su radio en el instante  $t + \Delta t$  es  $r + v\Delta t$ , siendo  $v$  la velocidad de la onda. Sin embargo, si una parte de la onda se ve bloqueada por un cierto obstáculo, o si la onda pasa a través de distintos medios, como en la figura, es mucho más difícil determinar la posición del nuevo frente de onda en el instante  $t + \Delta t$ . La propagación de una onda cualquiera a través del espacio puede describirse utilizando un método geométrico descubierto por Christian Huygens en 1678 y que ahora se conoce com **principio de Huygens**:

*Cada punto de un frente de onda primario sirve como foco de ondas esféricas secundarias que avanzan con una velocidad y frecuencia igual a las de la onda primaria. El frente de onda primario al cabo de un cierto tiempo es la envolvente de estas ondas elementales*



Principio de Huygens

La figura muestra la aplicación del principio de Huygens a la propagación de una onda plana y de una onda esférica. Como es natural, si todos los puntos de una frente de onda fuesen realmente un foco puntual, habrían también ondas moviéndose hacia atrás. Huygens no tuvo en cuenta estas ondas en retroceso.



El principio de Huygens fue posteriormente modificado por Fresnel, de modo que se calculaba el nuevo frente de onda a partir del frente de onda primitivo mediante la superposición de las ondas elementales considerando sus amplitudes y fases relativas. Posteriormente Kirchhoff demostró que el principio de Huygens-Fresnel era una consecuencia de la ecuación de ondas, situándolo así sobre una base matemática firme. Kirchhoff demostró que la intensidad de las ondas elementales depende del ángulo y que es nula para  $180^\circ$  (en sentido hacia atrás).

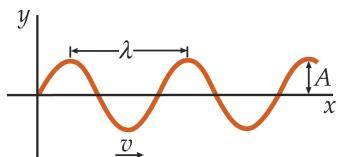
Como consecuencia del principio de Huygens, al llegar una onda plana a un obstáculo, su frente de ondas se curvará. Este hecho está relacionado con el fenómeno llamado *difracción*, que será estudiado con más detalle en la Sección 7.8.

### 7.3. Ondas armónicas en una cuerda

Si el extremo de una cuerda tensa se mueve de forma periódica hacia arriba y hacia abajo, se genera una **onda periódica**. Si una onda periódica se mueve a lo largo de una cuerda tensa o en cualquier otro medio, cada punto del medio oscila con el mismo periodo. Las ondas armónicas constituyen la clase más básica de las ondas periódicas. Todas las ondas, tanto si son periódicas como si no lo son, pueden describirse como la suma de ondas armónicas<sup>1</sup>. Por tanto, el conocimiento del movimiento de las ondas armónicas es fundamental para poder obtener la descripción de cualquier clase de movimiento ondulatorio. Si una **onda armónica** se mueve por un medio, cada punto del medio oscila siguiendo un *movimiento armónico simple*.

Si uno de los extremos de una cuerda se sujet a un diapasón que está vibrando con movimiento armónico simple, se produce un tren de ondas sinusoidales que se propaga a lo largo de una cuerda. Este tren de ondas es una onda armónica. La forma de la cuerda es la de una función sinusoidal, como se muestra en la figura. La distancia mínima recorrida en el espacio hasta que la función de onda se repite se llama **longitud de onda**  $\lambda$ .

Cuando la onda se propaga por la cuerda, cada punto de la misma se mueve hacia arriba y hacia abajo (perpendicularmente a la dirección de propagación) realizando un movimiento armónico simple cuya frecuencia  $\nu$  es la del diapasón. Durante un periodo  $T = 1/\nu$ , la onda se mueve una distancia de una longitud de onda, de modo que la velocidad viene dada por



Velocidad de una onda armónica

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda\nu \quad (7.9)$$

Como esta relación surge de las definiciones de longitud de onda y frecuencia, es válida para todas las ondas armónicas.

La función sinusoidal que describe los desplazamientos de la onda es

$$y(x) = A \sin\left(2\pi\frac{x}{\lambda} + \delta\right)$$

en donde  $A$  es la **amplitud**,  $\lambda$  la longitud de onda y  $\delta$  es una constante de fase que depende de la elección del origen  $x = 0$ . Esta ecuación se expresa

<sup>1</sup>Es lo que se conoce como Teorema de Fourier

de forma más sencilla como

$$y(x) = A \operatorname{sen}(kx + \delta) \quad (7.10)$$

en donde  $k$ , el **número de ondas**, viene dado por  $k = 2\pi/\lambda$ . Obsérvese que las dimensiones de  $k$  son  $\text{m}^{-1}$ .

Para describir una onda que se mueve en el sentido creciente de  $x$  con una velocidad  $v$ , sustituimos  $x$  en la ecuación (7.10) por  $x - vt$ , tal como hicimos con los pulsos en la sección 7.2. Así,

$$y(x, t) = A \operatorname{sen} k(x - vt + \delta)$$

o bien

$$y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \phi) \quad (7.11) \quad \text{Función de onda armónica}$$

en donde

$$\omega = kv \quad (7.12)$$

[Relación de dispersión de una onda armónica](#)

es la **frecuencia angular**; el argumento de la función seno se denomina **fase**, y  $\phi = k\delta$ , **fase inicial**. La frecuencia angular está relacionada con la frecuencia  $\nu$  y el periodo:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (7.13)$$

[Relación entre  \$\omega\$ ,  \$\nu\$  y  \$T\$  para una onda armónica](#)

Sustituyendo la relación de dispersión (7.12) en (7.13), se obtiene de nuevo la ecuación (7.9).

A partir de (7.11), se puede obtener la velocidad (transversal) de un punto fijo  $x$  como

$$v_y(x, t) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} = \omega A \cos(kx - vt + \phi) \quad (7.14)$$

Y, análogamente, se puede obtener la aceleración (transversal) de dicho punto:

$$a_y(x, t) = \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = -\omega^2 A \operatorname{sen}(kx - vt + \phi) \quad (7.15)$$

o bien,

$$a_y(x, t) = -\omega^2 y(x, t) \quad (7.16)$$

#### EJEMPLO 7.2 Una onda armónica en una cuerda

La función de onda de una onda armónica que se mueve en una cuerda es  $y(x, t) = 0.03 \operatorname{sen}(2.2x - 3.5t)$ , con  $y$  y  $x$  en metros y  $t$  en segundos. (a) ¿En qué sentido se propaga esta onda y cuál es su velocidad? (b) Determinar la longitud de onda, la frecuencia y el periodo de esta onda. (c) ¿Cuál es el desplazamiento máximo de cualquier segmento de cuerda? (d) ¿Cuál es la velocidad máxima de cualquier segmento de cuerda?

- (a) Para determinar el sentido de la onda, expresamos  $y(x, t)$  en función de  $(x \pm vt)$ . Si el signo es positivo (negativo), la onda viaja en el sentido negativo (positivo) del eje  $x$ . Como  $y(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$ , podemos escribir  $y(x, t) = A \operatorname{sen}[k(x - vt)]$ , donde hemos usado que  $\omega = kv$ . Por tanto, la onda viaja en el sentido positivo del eje  $x$ .

Por otro lado, identificando términos, sabemos que  $A = 0.03 \text{ m}$ ,  $k = 2.2 \text{ m}^{-1}$  y  $\omega = 3.5 \text{ s}^{-1}$ . Así, mediante la relación de dispersión,  $\omega = kv$ , se puede obtener el valor de  $v$ :

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{3.5}{2.2} \text{ m/s} = 1.59 \text{ m/s}$$

- (b) La longitud de onda  $\lambda$  está relacionada con el número de ondas  $k$ , y la frecuencia  $\nu$  y el periodo  $T$ , están relacionados con  $\omega$  de la forma:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = 2.86 \text{ m}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 1.80 \text{ s}$$

$$\nu = \frac{1}{T} = 0.557 \text{ Hz}$$

- (c) El desplazamiento máximo del segmento de cuerda es la amplitud  $A$ .

$$A = 0.03 \text{ m}$$

- (d) La velocidad de un punto de la cuerda  $v_y$  viene dada por la ecuación (7.14). Por tanto, la velocidad máxima tiene lugar cuando  $\operatorname{sen}(kx - \omega t) = 1$ , es decir,

$$v_{y,\max} = A\omega = 0.105 \text{ m/s}$$

## 7.4. Ondas electromagnéticas

Las ondas electromagnéticas (OEMs) incluyen la luz, ondas de radio, rayos X, rayos gamma, microondas, etc. Los diferentes tipos de OEMs difieren solo en la longitud de onda y la frecuencia. A diferencia de las ondas mecánicas, no requieren un medio para su propagación. Viajan en el vacío a la velocidad  $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$  que es una constante universal. Por simplicidad, supondremos OEMs planas, por lo que la función de onda de las OEMs constará de un campo eléctrico  $\vec{E}(x, t)$  y un campo magnético  $\vec{B}(x, t)$  asociados con la onda, es decir, son campos variables en el tiempo cuya dependencia espacial es únicamente a lo largo del eje  $x$ . A partir de las ecuaciones de Maxwell se encuentra la siguiente relación entre los componentes de los campos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_y}{\partial x} &= -\frac{\partial B_z}{\partial t} \\ \frac{\partial B_z}{\partial x} &= -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.17)$$

y, análogamente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_z}{\partial x} &= -\frac{\partial B_y}{\partial t} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} &= -\mu_0\epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \end{aligned} \quad (7.18)$$

siendo, además,

$$E_x = B_x = 0 \quad (7.19)$$

Derivando la primera ecuación de (7.17) y (7.18) respecto a  $x$  y haciendo uso de la segunda ecuación se llega a que  $E_y$  y  $E_z$  cumplen la ecuación de D'Alembert (7.3). Análogamente, derivando la segunda ecuación respecto a  $x$  y haciendo uso de la segunda ecuación, se llega a la ecuación de D'Alembert para  $B_y$  y  $B_z$ :

$$\frac{\partial^2 E_{y,z}}{\partial x^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 E_{y,z}}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 B_{y,z}}{\partial x^2} = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 B_{y,z}}{\partial t^2} \quad (7.20)$$

A partir de las relaciones (7.17)-(7.19) se deduce que, tal como muestra la figura 7.3, los campos eléctricos y magnéticos son perpendiculares entre sí y perpendiculares a la dirección de propagación de la onda, que hemos supuesto que es el eje  $x$ . Las ondas electromagnéticas son, por lo tanto, ondas transversales. Las ecuaciones de onda (7.20) muestran que la velocidad de propagación de las OEMs en el vacío es

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} = 2.99792 \times 10^8 \text{ m/s} \quad (7.21)$$

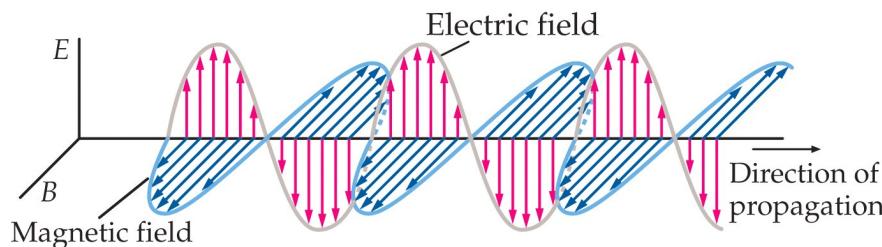


FIGURA 7.3: Onda electromagnética

### Ondas electromagnéticas armónicas

Para el caso de OEMs planas armónicas, el campo eléctrico puede describirse por la siguiente expresión:

$$\vec{E}(x, t) = E_0 \cos(\omega t - kx) \hat{j} \quad (7.22)$$

El campo magnético asociado a este campo eléctrico armónico en la OEM puede calcularse a partir de (7.17):

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = -\frac{\partial E_y}{\partial x} = -kE_0 \sin(\omega t - kx)$$

Integrando la ecuación diferencial anterior se tiene

$$B_z(x, t) = - \int kE_0 \sin(\omega t - kx) dt = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(\omega t - kx)$$

esto es, el campo magnético vendrá dado por

$$\vec{B}(x, t) = B_0 \cos(\omega t - kx) \hat{k} \quad (7.23)$$

donde, como  $\omega = kc$ , la relación entre las amplitudes del campo eléctrico y magnético es

$$E_0 = cB_0 \quad (7.24)$$

relación que también es extensible a los módulos de los campos. A la luz de las formas de los campos dados en (7.22) y (7.23) podemos establecer que, para una OEM plana armónica, los campos están en fase y que la dirección de propagación es la producto vectorial  $\vec{E} \wedge \vec{B}$ . Si expresamos  $\vec{c} = c\hat{i}$ , estas conclusiones se pueden resumir en la siguiente igualdad:

Relación vectorial entre  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{c}$   
para una OEM plana armónica

$$\vec{E} = \vec{B} \wedge \vec{c} \quad (7.25)$$

#### 7.4.1. El espectro electromagnético

Los diversos tipos de OEMs difieren solo en su longitud de onda y frecuencia, que están relacionadas con la velocidad  $c$  de la forma usual,  $v\lambda = c$ . En la figura 7.4 se expone el **espectro electromagnético** y los nombres normalmente asociados con los diversos intervalos de frecuencia y longitud de onda. Estos intervalos no están a veces bien definidos y frecuentemente se solapan. Por ejemplo, las OEMs con longitudes de onda del orden de 0.1 nm suelen denominarse rayos X, pero si se originan mediante radiactividad nuclear se llaman rayos gamma.

El ojo humano es sensible a la radiación electromagnética con longitudes de onda comprendidas entre 400 y 700 nm aproximadamente, margen que se denomina **luz visible**. Las longitudes de onda más cortas del espectro visible corresponden a la luz violeta y las más larga a la luz roja, y entre estos extremos se encuentran todos los colores del arco iris. Las ondas electromagnéticas con longitudes de onda ligeramente inferiores a las de la luz visible se denominan **rayos ultravioletas** y las que poseen longitudes de onda ligeramente superiores se conocen como **ondas infrarrojas**. La radiación térmica emitida por los cuerpos a temperaturas ordinarias se encuentra en la región infrarroja del espectro electromagnético. No existen límites en las longitudes de onda de la radiación electromagnética; es decir, todas las longitudes de onda (o frecuencias) son teóricamente posibles.

Las diferencias que poseen las longitudes de onda de las diversas clases de OEMs tienen una gran importancia. Como veremos, el comportamiento de las ondas depende fuertemente de los valores relativos de las longitudes de onda en comparación con los tamaños de los objetos físicos o aberturas que las ondas encuentren. Como las longitudes de onda de la luz caen en el intervalo más bien estrecho de 400 a 700 nm, son muchos más pequeñas que la mayoría de los objetos, de modo que la luz visible puede aproximarse por rayos. También son importantes la longitud de onda y la frecuencia a la hora de determinar las clases de interacción que se producen entre las ondas y la materia. Los rayos X, por ejemplo, que tienen longitudes de onda muy cortas y frecuencias elevadas, penetran fácilmente en muchos materiales que son opacos a ondas luminosas de menor frecuencia, pues estas son absorbidas por dichos materiales. Las microondas tienen longitudes de onda del orden de algunos centímetros y frecuencias que son cercanas a la frecuencia de resonancia natural de las moléculas de agua que hay en los sólidos y líquidos. Por lo tanto, las microondas son fácilmente absorbidas por las moléculas

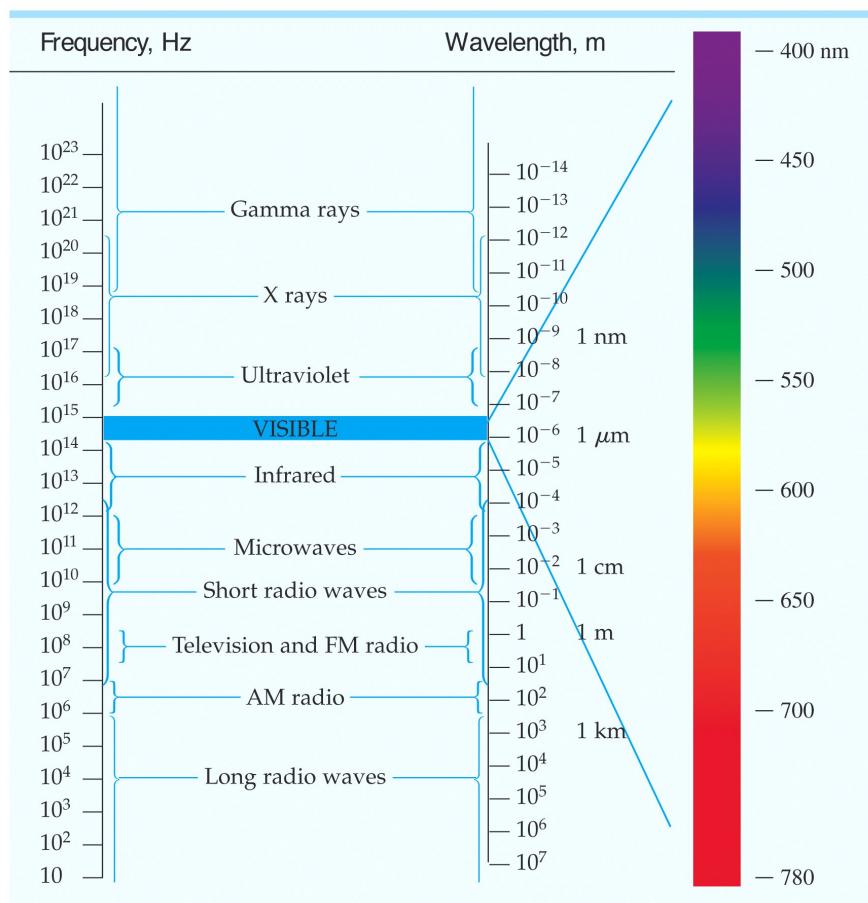
**TABLE 30-1****The Electromagnetic Spectrum**

FIGURA 7.4: Espectro electromagnético

de agua que contienen los alimentos, siendo este el mecanismo mediante el cual calientan los hornos de microondas.

### Producción de ondas electromagnéticas

Las OEMs se producen cuando se aceleran las cargas eléctricas o cuando los electrones ligados a los átomos y moléculas realizan transiciones a estados de menor energía. Las ondas de radio, que tienen frecuencias desde 500 a 1600 kHz aproximadamente para las ondas de AM y desde 80 a 110 MHz para las ondas de FM, están producidas por corrientes eléctricas macroscópicas que oscilan en las antenas de radio. La frecuencia de las ondas emitidas es igual a la frecuencia de oscilación de las cargas.

Cuando los electrones deceleran como consecuencia de un choque contra un blanco metálico se produce un espectro continuo de rayos X llamado radiación de frenado o *bremssstrahlung*. Otro tipo de radiación es la radiación sincrotrón, que aparece en el movimiento orbital circular de las partículas cargadas (normalmente electrones o positrones) en los aceleradores llama-

dos sincrotrones. Estos rayos X de la radiación sincrotrón se producen y utilizan como una herramienta de diagnóstico médica por la facilidad con que se manipulan los haces correspondientes. La radiación sincrotrón es emitida también por partículas cargadas atrapadas en campos magnéticos asociados con estrellas y galaxias.

Las ondas luminosas, con frecuencias del orden de  $10^{14}$  Hz, se producen generalmente por transiciones de carga ligadas a los átomos.

## 7.5. Energía de las ondas armónicas

### 7.5.1. Transferencia de energía a una cuerda mediante ondas

Consideremos una cuerda sujetada a un diapasón. Cuando éste vibra, transfiere energía al segmento de cuerda unido a él. Así, cuando el diapasón se desplaza de su posición de equilibrio, estira el segmento aumentando su energía potencial y transfiere una velocidad transversal al segmento, incrementando su energía cinética. Cuando una onda se mueve a lo largo de una cuerda, la energía se transmite a través de ésta a los restantes segmentos.

La potencia es la transferencia de energía por unidad de tiempo y se calcula determinando el trabajo que realiza la fuerza que un segmento de cuerda ejerce sobre un segmento vecino por unidad de tiempo. La figura muestra una onda armónica moviéndose hacia la derecha a través de un segmento de cuerda. La tensión  $\vec{\tau}$  que actúa sobre el extremo izquierdo del segmento es tangente a la cuerda. Para calcular la potencia transferida por esta fuerza usamos la fórmula  $P = \vec{\tau} \cdot \vec{v}_t$ , donde  $\vec{v}_t$  es la velocidad transversal en el extremo del segmento. Para obtener una expresión para la potencia primero expresamos los vectores en función de sus componentes, es decir,  $\vec{\tau} = \tau_x \hat{i} + \tau_y \hat{j}$  y  $\vec{v}_t = v_y \hat{j}$ , con lo cual  $P = \tau_y v_y$ . A partir de (7.14) obtenemos  $v_y$  y a partir de la figura vemos que  $\tau_y = -\tau \operatorname{sen} \theta \approx -\tau \tan \theta$ , en donde se ha usado la aproximación según la cual  $\operatorname{sen} \theta \approx \tan \theta$ . Como  $\tan \theta$  es la pendiente de la cuerda, tenemos  $\tan \theta = \partial y / \partial x$ , y por lo tanto

$$P = -\tau \frac{\partial y}{\partial x} v_y = -\tau [kA \cos(kx - \omega t)] [-A\omega \cos(kx - \omega t)]$$

Usando las ecuaciones (7.4) y (7.9), sustituimos  $\tau$  y  $k$ , obteniendo

$$P(t) = \mu v \omega^2 A^2 \cos^2(kx - \omega t) \quad (7.26)$$

en donde  $v$  es la velocidad de propagación de la onda. La potencia media, que calculamos a partir de

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt \quad (7.27)$$

tiene el valor

Potencia media transferida a una onda armónica en una cuerda

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 \quad (7.28)$$

ya que  $\langle \cos^2(kx - \omega t) \rangle = 1/2$ .

La energía recorre la onda a la velocidad  $v$ , por lo que la energía media  $\langle \Delta U \rangle$  que fluye por un punto  $P_1$  durante el tiempo  $\Delta t$  es

$$\langle \Delta U \rangle = \langle P \rangle \Delta t = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 A^2 \Delta t$$

Esta energía se distribuye a lo largo de una distancia  $\Delta x = v\Delta t$ , de modo que la energía media en  $\Delta x$  es

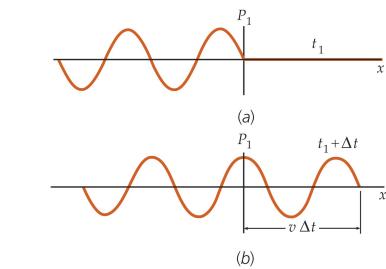
$$\langle \Delta U \rangle = \frac{1}{2} \mu \omega^2 A^2 \Delta x \quad (7.29)$$

Obsérvese que tanto la potencia media como la energía media transmitidas son proporcionales al cuadrado de la amplitud de la onda.

### 7.5.2. Intensidad de una onda

Si un foco puntual emite ondas uniformemente en todas direcciones, la energía a una distancia  $r$  del mismo estará distribuida uniformemente sobre una corteza esférica de radio  $r$  y superficie  $4\pi r^2$ . Si la potencia emitida por el foco es  $P$ , la potencia por unidad de área a una distancia  $r$  del foco será  $P/(4\pi r^2)$ . La potencia media por unidad de área que está incidiendo perpendicularmente a la dirección de propagación se denomina intensidad:

$$I = \frac{\langle P \rangle}{S}$$



Energía media transferida a una onda armónica en una cuerda

Las unidades de la intensidad son  $\text{W/m}^2$ . A una distancia  $r$  del foco puntual, la intensidad vale

$$I(r) = \frac{\langle P \rangle}{4\pi r^2} \quad (7.30)$$

Definición de intensidad

Intensidad debida a un foco puntual

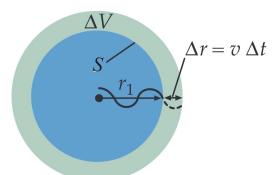
La intensidad de una onda tridimensional varía inversamente con el cuadrado de la distancia al foco puntual.

Existe una relación sencilla entre la intensidad de una onda y la energía por unidad de volumen del medio por el que se propaga. Consideremos la onda esférica que acaba de alcanzar el radio  $r_1$  de la figura. El volumen interior al radio  $r_1$  contiene energía debido a que las partículas en esta región están oscilando con movimiento armónico simple. La región exterior a  $r_1$  no contiene energía porque las ondas todavía no han alcanzado dicha región. Despues de un intervalo corto de tiempo  $\Delta t$ , la onda, en su movimiento, sobrepasa  $r_1$  en una distancia corta  $\Delta r = v\Delta t$ . La energía total en el medio se ve incrementada en la energía contenida en la corteza esférica de superficie  $S$ , espesor  $v\Delta t$  y volumen  $\Delta V = S\Delta r = Sv\Delta t$ . La energía media de la corteza esférica es:

$$\langle U \rangle = \langle u \rangle \Delta V = \langle u \rangle Sv\Delta t$$

El incremento de energía por unidad de tiempo, es la potencia que entra en la corteza. Así pues, la potencia media incidente es

$$\langle P \rangle = \frac{\langle \Delta U \rangle}{\Delta t} = \langle u \rangle Sv$$



$$\text{Volume of shell} = \Delta V = S\Delta r = Sv\Delta t$$

y la intensidad de la onda es

$$I = \frac{\langle P \rangle}{S} = \langle u \rangle v \quad (7.31)$$

Por lo tanto, la intensidad es igual al producto de la velocidad de la onda  $v$  por la densidad de energía media  $\langle u \rangle$ .

### 7.5.3. Energía de una onda electromagnética

Como todo tipo de onda, las ondas electromagnéticas transportan energía y momento. La energía transportada viene descrita por su intensidad. Es decir, mediante la ecuación (7.31):

$$I = \langle u \rangle c$$

La densidad de energía total de la onda  $u$  es la suma de las densidades de energía eléctrica y magnética. Las densidades de energía eléctrica  $u_E$  y magnética  $u_M$  vienen dadas por

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2; \quad u_M = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

En una onda electromagnética en el vacío,  $E = cB$ , de modo que podemos expresar la densidad de energía magnética en función del campo eléctrico

$$u_M = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{(E/c)^2}{2\mu_0} = \frac{E^2}{2\mu_0 c^2} = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 = u_E$$

en donde hemos utilizado que  $c^2 = 1/(\epsilon_0 \mu_0)$ . Por lo tanto, las densidades de energía eléctrica y magnética son iguales. Considerando que  $E = cB$ , podemos expresar la densidad de energía total de diversas formas útiles:

Densidad de energía de una onda electromagnética

$$u = u_E + u_B = \epsilon_0 E^2 = \frac{B^2}{\mu_0} = \frac{EB}{\mu_0 c} \quad (7.32)$$

Para calcular la intensidad, hacemos uso de la relación (7.27) para obtener que

Intensidad de una onda electromagnética

$$I = \langle u \rangle c = \frac{\langle EB \rangle}{\mu_0} = \frac{1}{2} \frac{E_0 B_0}{\mu_0} \quad (7.33)$$

La energía de una OEM plana armónica viaja en la dirección de propagación de la onda. Por otra parte, para este tipo de ondas, la intensidad se puede expresar, según (7.33), en función de las amplitudes de los campos. Todo ello nos sugiere la introducción de un vector  $\vec{S}$  llamado **vector de Poynting**, que caracterice energéticamente a la OEM y que, por tanto, tenga por dirección la de propagación de energía y su módulo sea tal que su promedio coincida con la intensidad de la onda. Este vector puede definirse de la forma

Vector de Poynting

$$\vec{S} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \quad (7.34)$$

Esta expresión es válida para *cualquier OEM* que se propague por el vacío. En concreto, para una OEM plana armónica dada por las expresiones (7.22) y (7.23), el vector de Poynting vendrá dado por

$$\vec{S}(x, t) = c\epsilon_0 E_0^2 \cos^2(\omega t - kx)\hat{i} = cu\hat{i} \quad (7.35)$$

por lo que, la ecuación (7.33) puede expresarse de la forma

$$I = <|\vec{S}|> \quad (7.36)$$

## 7.6. Interferencia de ondas armónicas

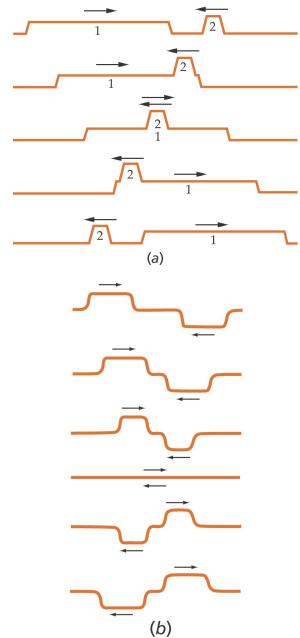
### 7.6.1. Principio de superposición

La figura muestra pequeños pulsos de onda que se mueven en sentidos opuestos en una cuerda. La forma resultante del encuentro de estos pulsos puede determinarse sumando los desplazamientos producidos por cada pulso separadamente. El **principio de superposición** es una propiedad del movimiento ondulatorio que expresa lo siguiente: *Cuando dos o más ondas se combinan, la onda resultante es la suma algebraica de las ondas individuales.*

Matemáticamente, cuando tenemos dos pulsos sobre la cuerda, la función de onda total es la suma algebraica de las funciones de onda de las ondas individuales.

En el caso especial de dos pulsos que son idénticos, excepto que uno está invertido respecto al otro, hay un instante en que los pulsos se solapan exactamente y su suma es igual a cero. En este momento la cuerda está horizontal, pero no en reposo. Justo a la derecha de la región de solapamiento, la cuerda está moviéndose hacia arriba, mientras que a la izquierda se mueve hacia abajo. En un instante posterior, los pulsos emergen, continuando cada uno en su dirección original.

La superposición es una propiedad característica y única del movimiento ondulatorio. No existe una situación análoga en el movimiento newtoniano de las partículas; es decir, dos partículas nunca se solapan o se suman de este modo.



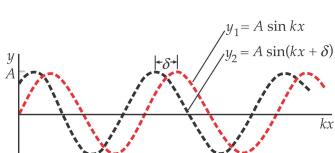
### 7.6.2. Interferencia de ondas armónicas con la misma frecuencia y amplitud

El resultado de la superposición de ondas armónicas de la misma frecuencia depende de la diferencia de fase  $\delta$  entre las ondas. Sea  $y_1(x, t)$  la función de onda de una onda armónica que se propaga hacia la derecha con amplitud  $A$ , frecuencia angular  $\omega$  y número de ondas  $k$ :

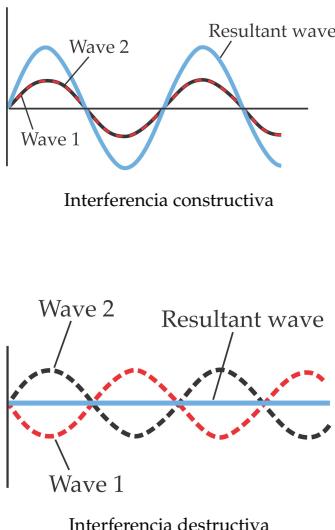
$$y_1(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t)$$

Para esta función de onda, hemos escogido que la fase inicial sea cero. Si tenemos también en movimiento una segunda onda armónica hacia la derecha con la misma amplitud, frecuencia y número de ondas, la función de esta onda puede escribirse

$$y_2(x, t) = A \operatorname{sen}(kx - \omega t + \delta)$$



Superposición de dos ondas de igual amplitud y frecuencia



en donde  $\delta$  es la fase inicial. Las dos ondas descritas anteriormente difieren en fase una cantidad  $\delta$ . La figura muestra una representación de las dos funciones de onda para un tiempo fijo en función de la posición. La onda resultante es la suma

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 2A \cos \frac{\delta}{2} \sin(kx - \omega t + \frac{\delta}{2}) \quad (7.37)$$

Para llegar a la expresión anterior, hemos hecho uso de la identidad trigonométrica:

$$\sin \theta_1 + \sin \theta_2 = 2 \cos \frac{\theta_1 - \theta_2}{2} \sin \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

Vemos que el resultado de la superposición de dos ondas armónicas de igual frecuencia y número de ondas es otra onda armónica que tiene la misma frecuencia y el mismo número de ondas. La onda resultante tiene una amplitud igual a  $2A \cos(\delta/2)$  y una fase inicial igual a la mitad de la diferencia entre las fases de las ondas originales. La superposición de dos o más ondas de frecuencia igual o muy parecida que da un patrón de intensidad observable se denomina **interferencia**. En este caso, la intensidad de la onda resultante, que es proporcional al cuadrado de la amplitud, es uniforme. Si las dos ondas están en fase,  $\delta = 0$ ,  $\cos(\delta/2) = 1$  y la amplitud de la onda resultante es  $2A$ . La interferencia de dos ondas en fase se llama **interferencia constructiva**. Si están en oposición de fase,  $\delta = \pi$ ,  $\cos(\delta/2) = 0$  y la amplitud de la onda resultante es nula. La interferencia de dos ondas en oposición de fase se llama **interferencia destructiva**.

### 7.6.3. Interferencia causada por la diferencia de caminos

Una causa corriente que origina una diferencia de fase entre dos ondas es la diferencia de longitudes de los caminos<sup>2</sup> que deben recorrer las ondas desde su foco hasta el punto donde se produce la interferencia. Supongamos dos focos emisores de ondas armónicas de la misma frecuencia y longitud de onda y que están oscilando en fase; es decir, cuando sale de un foco una cresta positiva, sale también al mismo tiempo una cresta positiva del otro foco. Si la diferencia entre los caminos hasta un punto determinado es un número entero de longitudes de onda, como es el caso de la figura 7.5a, la interferencia es constructiva. Si la diferencia de caminos es un número impar de semilongitudes de onda, como en la figura 7.5b, el máximo de una onda coincide con el mínimo de la otra y la interferencia es destructiva.

Las funciones de onda en un punto  $P$  para las ondas creadas por dos fuentes  $S_1$  y  $S_2$  que distan  $r_1$  y  $r_2$ , respectivamente, del punto  $P$ , pueden escribirse en la forma

$$y_1(P, t) = A_1 \sin(kr_1 - \omega t + \varphi_1); \quad y_2(P, t) = A_2 \sin(kr_2 - \omega t + \varphi_2)$$

La función de onda resultante de la superposición de estas ondas en el punto  $P$  será  $y(P, t) = y_1(P, t) + y_2(P, t)$ . Tras laboriosos cálculos, se llega a que la amplitud de la onda resultante es:

<sup>2</sup>En el caso de OEMs se conocen como caminos ópticos.

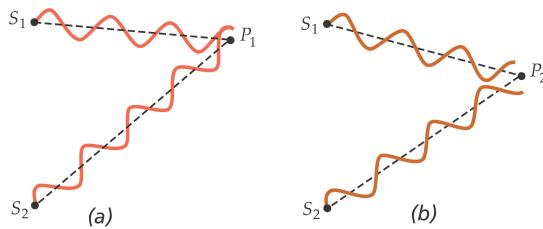


FIGURA 7.5: Los ondas en fase procedentes de dos focos  $S_1$  y  $S_2$ , se encuentran en un punto  $P_1$ . (a) Cuando la diferencia de caminos es de una longitud de onda  $\lambda$ , las ondas están en fase en  $P_1$  e interieren constructivamente. (b) Cuando la diferencia de caminos es  $\lambda/2$ , las ondas en  $P_2$  están desfasadas  $180^\circ$  y por lo tanto interieren destructivamente. Si las ondas son de la misma amplitud en  $P_2$ , ambas se anularán totalmente en este punto.

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos \delta} \quad (7.38)$$

Amplitud resultante debido a la diferencia de caminos

donde  $\delta$  es la **diferencia de fase** entre las ondas incidentes:

$$\delta = (kr_2 - \omega t + \varphi_1) - (kr_1 - \omega t + \varphi_2)$$

Usando  $\Delta r = r_2 - r_1$  y  $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ , se tiene:

$$\delta = k\Delta r + \Delta\varphi \quad (7.39)$$

Diferencia de fase debida a la diferencia de caminos

El último término de la ecuación (7.38),

$$2A_1A_2 \cos \delta$$

recibe el nombre de **término de interferencia** puesto que es el responsable de que la amplitud de la onda resultante varíe al hacerlo la diferencia de camino. En concreto, debido a que  $|\cos \delta| \leq 1$ , la amplitud podrá tomar valores comprendidos entre:

$$(A_1 - A_2) \leq A \leq (A_1 + A_2) \quad (7.40)$$

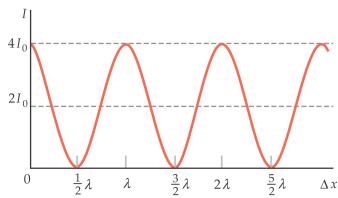
Teniendo en cuenta que la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, la intensidad resultante es:

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \delta \quad (7.41)$$

Intensidad resultante debido a la diferencia de caminos

Supongamos dos focos puntuales oscilando en fase. Según (7.39),  $\delta = k\Delta r$ , por lo que  $\cos \delta = \cos(2\pi\Delta r/\lambda)$ . Habrá, en consecuencia, interferencia constructiva, cuando  $\cos \delta = +1$ , es decir,  $\Delta r = n\lambda$ , o lo que es lo mismo, cuando la diferencia de caminos es un número entero de longitudes de onda. Por otro lado, la interferencia será destructiva, cuando  $\cos \delta = -1$ , o bien,  $\Delta r = (2n+1)\lambda/2$ , es decir, cuando la diferencia de caminos es un número impar de semi-longitudes de onda.

La figura muestra la intensidad de la onda resultante a partir de dos focos emisores de ondas de la misma intensidad  $I_0$ , en función de la diferencia de



caminos  $\Delta r$ . En los puntos en que la interferencia es constructiva, la intensidad es  $4I_0$  ya que la amplitud de la onda resultante es el doble de la amplitud de cualquiera de las ondas. En los puntos de interferencia destructiva, la intensidad es cero. La intensidad media, indicada por la línea de trazos de la figura, es el doble de la intensidad correspondiente a la de un solo foco, resultado exigido por la conservación de la energía. Podemos ver que, como consecuencia de la interferencia de las ondas procedentes de dos focos, la energía se redistribuye en el espacio. Puede mostrarse la interferencia entre dos ondas sonoras alimentando dos altavoces separados con el mismo amplificador (de modo que estén siempre en fase) que recibe una señal de audiofrecuencia. Moviéndose por la habitación es posible detectar por el oído las posiciones de interferencia constructiva y destructiva.

Se producirán patrones de interferencia semejantes, mediante dos focos cuya diferencia de fase sea constante a lo largo del tiempo. Dos focos que están en fase o tienen una diferencia de fase constante se dice que son **focos coherentes**. Es fácil conseguir fuentes coherentes de ondas en el agua de una cubeta de ondas si se accionan ambas fuentes con el mismo motor. Se obtienen focos sonoros coherentes accionando dos altavoces con la misma fuente de señal y el mismo amplificador. Para conseguir focos coherentes en OEMs, un método sencillo es el uso de una doble rendija, como veremos a continuación.

Las fuentes de ondas cuya diferencia de fase no es constante a lo largo del tiempo, sino que varía aleatoriamente, se denominan **focos incoherentes**. Existen muchos ejemplos de fuentes incoherentes, como dos altavoces alimentados por amplificadores diferentes o dos violines tocados por dos violinistas diferentes. En el caso de fuentes incoherentes, la interferencia en un punto concreto varía rápidamente pasando de constructiva a destructiva, y viceversa, y no se observa ningún patrón de interferencia. La intensidad resultante de las ondas originadas por dos o más fuentes incoherentes es simplemente la suma de las intensidades debidas a las fuentes aisladas. Esto se puede deducir del hecho de que el promedio temporal del término de interferencia se anula debido a que también lo hace  $\langle \cos \delta \rangle$ .

---

#### EJEMPLO 7.3 Una onda sonora resultante

**Dos focos sonoros oscilan en fase. En un punto a 5.00 m de un foco y 5.17 m del otro, la amplitud del sonido procedente de cada foco por separado es  $p_0$ . Hallar la amplitud de la onda resultante si la frecuencia de las ondas sonoras es (a) 1000 Hz, (b) 2000 Hz y (c) 500 Hz. Utilizar 340 m/s como velocidad del sonido.**

La amplitud de la onda resultante debida a la superposición de dos ondas cuya diferencia de fase es  $\delta$  viene dada por  $A = 2p_0 \cos(\delta/2)$ , en donde  $p_0$  es la amplitud de una cualquiera de las ondas y  $\delta = 2\pi\Delta x/\lambda$  es la diferencia de fase. Como ya conocemos la diferencia de camino  $\Delta x = 5.17 - 5 = 0.17$  m, solo necesitamos calcular la longitud de onda  $\lambda$ .

- (a) Para  $\nu = 1000$  Hz, la longitud de onda es

$$\lambda = \frac{v_s}{\nu} = \frac{340}{1000} = 0.34$$

Por tanto,  $\delta = \pi$  y  $\cos(\delta/2) = 0$ , y, en consecuencia,  $A = 0$ .

- (b) Para  $\nu = 2000$  Hz,  $\lambda = 0.17$ ,  $\delta = 2\pi$ ,  $\cos(\delta/2) = -1$ . Entonces,  $A = -2p_0$ .  
(c) Para  $\nu = 500$  Hz,  $\lambda = 0.685$ ,  $\delta = \pi/2$ ,  $\cos(\delta/2) = \sqrt{2}$ . Entonces,  $A = \sqrt{2}p_0$ .
-

### 7.6.4. El experimento de la doble rendija de Young

Si situamos dos fuentes luminosas convencionales (bombilla, tubo fluorescentes) una junto a otra, no se observan interferencias, porque las ondas luminosas de cada fuente son emitidas independientemente de la otra fuente; por tanto, las emisiones de las dos fuentes no mantienen una relación de fase constante entre sí durante el tiempo de observación. Una fuente lumínosa ordinaria sufre cambios aleatorios cada  $10^{-8}$  segundos, aproximadamente. Así, las condiciones para que se produzcan interferencias constructivas o destructivas solo se mantienen durante períodos del orden de  $10^{-8}$  segundos. El resultado es que no se observan fenómenos de interferencia, ya que el ojo no puede registrar cambios tan rápidos. Estas fuentes luminosas son, en consecuencia, incoherentes. Así, para poder observar el patrón de interferencia es necesario que los focos sean coherentes.

La coherencia se consigue normalmente usando fuentes de luz coherentes, como los láseres, o bien dividiendo el haz de luz procedente de un foco en dos o más haces, que posteriormente se combinan para producir un diagrama de interferencia. En este último mecanismo se basa el famoso experimento de la doble rendija, ideado por Thomas Young en 1801. En este experimento, en el que demostró la naturaleza ondulatoria de la luz, se producían dos fuentes luminosas coherentes iluminando dos rendijas paralelas con una sola fuente. Según el principio de Huygens, cuando una onda se encuentra con una barrera que posee una abertura muy pequeña, ésta actúa como fuente puntual de ondas. En el experimento de Young cada rendija actúa como una fuente lineal (que es equivalente a una fuente puntual en dos dimensiones). El diagrama de interferencia se observa sobre una pantalla lo bastante alejada de las rendijas (Figura 7.6a), que están separadas entre sí en una distancia  $d$ . A distancia muy grande de las rendijas, las líneas que van

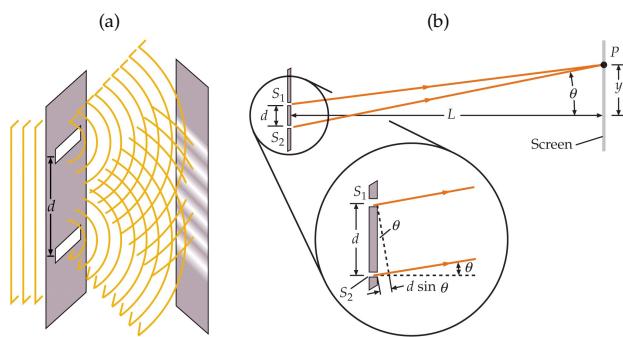
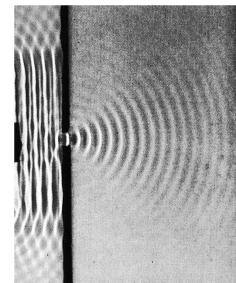


FIGURA 7.6: Dos rendijas actúan como fuentes coherentes de luz para la observación de la interferencia en el experimento de Young. Las ondas cilíndricas procedentes de las rendijas se solapan y producen un diagrama de interferencia sobre una pantalla lejana. (b) Construcción geométrica para calcular la relación de la distancia  $y$  medida sobre la pantalla con  $L$  y  $\theta$ . Si la pantalla está muy lejos en comparación con la separación entre las rendijas, los rayos procedentes de estas que van a un punto de la pantalla son casi paralelos y la diferencia de caminos ópticos entre ambos es  $d \sin \theta$ .

desde las mismas a un cierto punto  $P$  situado sobre la pantalla son aproximadamente paralelos. La diferencia de fase  $\delta$  en un punto  $P$  está relacionada con la diferencia de camino óptico  $d \sin \theta$  mediante

$$\delta = \frac{2\pi d \sin \theta}{\lambda} \quad (7.42)$$

La condición de interferencia constructiva es  $\cos \delta = 1$ . Así pues, tenemos máximos de interferencia en unos ángulos  $\theta_m$  dados por

Máximos de interferencia de dos rendijas

$$d \sin \theta_m = m\lambda, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.43)$$

en donde  $m$  se llama **número de orden**. Los mínimos de interferencia se presentan en

Mínimos de interferencia de dos rendijas

$$d \sin \theta_m = \left(m - \frac{1}{2}\right) \lambda, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (7.44)$$

La distancia  $y_m$ , medida sobre la pantalla desde el punto central a la  $m$ -ésima franja brillante (véase la figura 7.6b) está relacionada con la distancia  $L$  desde las rendijas a la pantalla por la expresión

$$\tan \theta_m = \frac{y_m}{L}$$

Para ángulos pequeños,  $\tan \theta \approx \sin \theta$ . Sustituyendo  $\sin \theta$  por  $y_m/L$  en la ecuación (7.43) y despejando  $y_m$  resulta

Distancia sobre la pantalla a la franja brillante  $m$ -ésima

$$y_m = m \frac{\lambda L}{d}, \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.45)$$

Obsérvese que según este resultado, las franjas están igualmente separadas entre sí sobre la pantalla.

### Cálculo de la intensidad en la doble rendija

Para calcular la intensidad en un punto cualquiera  $P$  de la pantalla, es necesario sumar dos funciones de onda armónicas que difieren en fase. Las funciones de onda para los OEMs son los vectores del campo eléctrico. Como los ángulos que nos interesan son muy pequeños, podemos suponer que los campos son paralelos. Ambos campos eléctricos oscilan con la misma frecuencia (ya que ambos proceden de una única fuente que ilumina a ambas rendijas) y poseen la misma amplitud  $A_0$  (la diferencia de caminos es solo del orden de unas pocas longitudes de onda de la luz). La diferencia de fase  $\delta$  viene dada por la ecuación (7.42). Usando la ecuación (7.38), se puede obtener la amplitud resultante en el punto  $P$ , que será igual a

$$A_P = A_0 \sqrt{2(1 + \cos \delta)} = 2A_0 \cos(\delta/2) \quad (7.46)$$

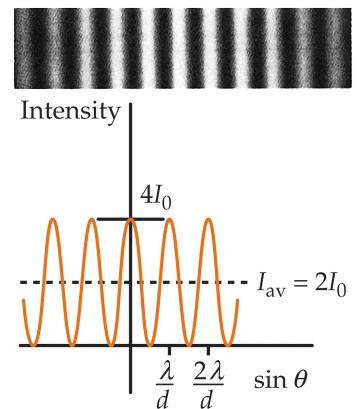
por lo que posee su valor máximo igual a  $2A_0$  cuando las ondas se encuentran en fase y es igual a cero cuando están desfasadas  $180^\circ$ . Como la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud, la intensidad en el punto  $P$  es

Doble rendija. Intensidad en función de la diferencia de fase

$$I = 4I_0 \cos^2 \frac{\delta}{2} \quad (7.47)$$

en donde  $I_0$  es la intensidad de la luz que se obtiene en la pantalla para cualquiera de las rendijas por separado. El ángulo de fase  $\delta$  está relacionado con la posición sobre la pantalla mediante la ecuación (7.42).

La figura muestra el diagrama de intensidad como se ve en la pantalla. Se indica un gráfico de la intensidad en función del sen  $\theta$ . Cuando  $\theta$  es pequeño, esto es equivalente a una representación de  $y$  puesto que  $y = L \tan \theta \approx L \sin \theta$ . La intensidad  $I_0$  es la que produce cada rendija por separado. La línea a trazos de esta figura muestra la intensidad media,  $2I_0$ , que es el resultado de promediar sobre una distancia que contenga muchos máximos y mínimos de interferencia. Sería la intensidad que se obtendría de las dos fuentes si actuasen independientemente sin interferencia. En otras palabras, es la intensidad que se observaría si las fuentes fueran incoherentes, porque entonces existiría una diferencia de fase adicional entre ellas que fluctuaría al azar de modo que solo podría observarse la intensidad media.



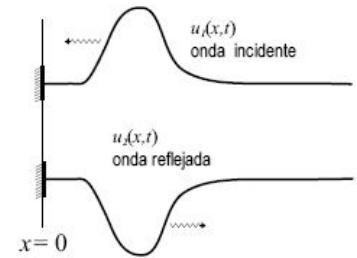
## 7.7. Ondas estacionarias en cuerdas

Observemos que cuando una perturbación viaja hacia la izquierda por una cuerda, al llegar al extremo, se refleja de la forma mostrada en la figura adjunta. Si la situación anterior ocurre para una perturbación armónica que viaja hacia la izquierda por una cuerda con uno de sus extremos fijos:

$$y_1(x, t) = A_1 \cos(kx + \omega t), \quad (7.48)$$

al llegar al extremo de la cuerda,  $x = 0$ , la onda se refleja dando lugar a una onda armónica que viaja hacia la derecha:

$$y_2(x, t) = A_2 \cos(kx - \omega t). \quad (7.49)$$



Dado que las dos ondas viajeras anteriores se encuentran en una misma región del espacio, darán lugar a un fenómeno típico de superposición o interferencia. Puesto que en el punto  $x = 0$ , la perturbación de una cuerda debe ser nula (ya que, por hipótesis, es un extremo fijo) para cualquier instante de tiempo tendremos que

$$y(0, t) = y_1(0, t) + y_2(0, t) = (A_1 + A_2) \cos(\omega t) = 0, \quad (7.50)$$

de donde se deduce que  $A_1 = -A_2$ . Como las dos perturbaciones ondulatorias anteriores coinciden simultáneamente en la misma región, la superposición de ambas dará lugar a la siguiente onda:

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = -A_2 \cos(kx + \omega t) + A_2 \cos(kx - \omega t)$$

Definiendo  $A = 2A_2$ , la onda resultante puede escribirse como

$$y(x, t) = A \sin kx \sin \omega t \quad (7.51)$$

Esta expresión no es del tipo  $f(kx \pm \omega t)$ , lo que indica que esta perturbación no puede identificarse simplemente con una onda viajera, sino que constituye un nuevo tipo de onda llamado **onda estacionaria**. En este tipo de perturbación ya no podemos decir que la energía viaje de un punto a otro sino que esta onda estacionaria corresponde a una situación en la que cada

elemento individual de la cuerda realiza un movimiento armónico simple cuya amplitud es función de  $x$ , pudiéndose escribir entonces que

$$y(x, t) = A(x) \operatorname{sen} \omega t \quad (7.52)$$

siendo

$$A(x) = A \operatorname{sen} kx$$

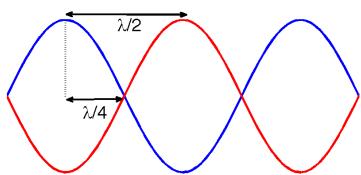
Observemos que en la situación anterior cada elemento de la cuerda es como si actuase de forma independiente, sin transmitir su movimiento al siguiente. De hecho, podemos encontrar puntos denominados **nodos** donde la perturbación es nula en todo instante de tiempo. Estos puntos son los que cumplen que la amplitud es nula ( $A(x) = 0$ ), es decir, aquellos que satisfacen la siguiente condición:

$$kx = m\pi \rightarrow x_{\text{nodo}} = m \frac{\lambda}{2} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.53)$$

En el punto intermedio entre dos nodos existe un punto de amplitud de vibración máxima denominado **vientre** o **antinodo**. En estos puntos se cumple que  $|A(x)| = A$ , es decir, satisfacen la siguiente condición:

$$kx = (2m + 1) \frac{\pi}{2} \rightarrow x_{\text{vientre}} = (2m + 1) \frac{\lambda}{4} \quad m = 0, 1, 2, \dots \quad (7.54)$$

La distancia entre dos nodos o antinodos consecutivos es igual a una semilongitud de onda. La distancia entre un nodo y el antinodo más cercano es igual a un cuarto de la longitud de onda, como muestra la figura adyacente.



Obsérvese también que el movimiento de dos puntos cualesquiera de la cuerda que no sean nodos va en fase o con un desfase de  $180^\circ$

### Cuerda fija por ambos extremos

Si fijamos los dos extremos de una cuerda de longitud  $L$  y movemos una parte de la misma hacia arriba y hacia abajo con un movimiento armónico simple de pequeña amplitud, se produce la onda estacionaria dada por (7.51). El hecho de que los dos extremos estén fijos (es decir, que ambos extremos sean nodos) hace que se imponga la condición

$$y(L, t) = 0 \quad (7.55)$$

Como esta condición es válida para todo instante de tiempo, ha de verificarse que

$$\operatorname{sen} kL = 0 \rightarrow kL = n\pi \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.56)$$

La condición anterior implica que tanto el número de ondas, como la longitud de onda sólo puedan tomar ciertos valores discretos (fenómeno conocido como **cuantización**) dados por

$$k_n = n \frac{\pi}{L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.57)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.58)$$

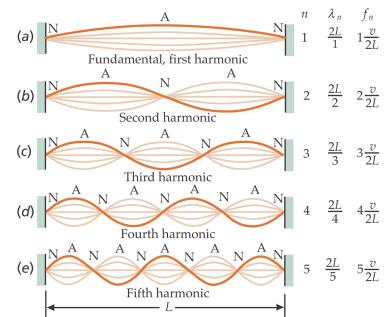
De forma análoga, las frecuencias permitidas en la cuerda serán aquéllas que cumplan  $\nu_n = v/\lambda_n$ , es decir,

$$\nu_n = n \frac{v}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.59)$$

Frecuencia de resonancia. Ambos extremos fijos

Para estas frecuencias se obtienen unos patrones de ondas estacionarias semejantes a los indicados en la figura adjunta. Las frecuencias que producen estos patrones se denominan **frecuencias de resonancia** del sistema. Cada una de estas frecuencias y la función de onda que la acompaña se llama **modo de vibración**. La frecuencia de resonancia más baja se denomina frecuencia fundamental  $\nu_1$  (cuyo valor es  $\nu_1 = v/(2L)$  para una cuerda fija por los dos extremos) y produce el patrón de ondas estacionarias indicado en (a) que recibe el nombre de **modo fundamental o primer armónico**. La segunda frecuencia más baja  $\nu_2$  produce el patrón indicado en (b). Este modo de vibración tiene una frecuencia que es el doble de la frecuencia fundamental y se denomina **segundo armónico**. La tercera frecuencia más baja  $\nu_3$  es tres veces la fundamental y produce el patrón del **tercer armónico** indicado en (c). El conjunto de todas las frecuencias resonantes de la cuerda se denomina **espectro de frecuencias de resonancia**. Obsérvese también que el  $n$ -ésimo armónico posee  $n$  antinodos y  $n + 1$  nodos.

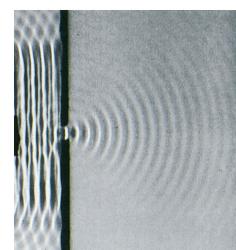
No todas las frecuencias de resonancia reciben el nombre de armónicos sino aquellas que son un múltiplo entero de la frecuencia fundamental. Muchos sistemas tienen un espectro en donde las frecuencias de resonancia no son múltiplos enteros de la frecuencia fundamental. Se denomina primer **sobretono** a la primera frecuencia después de la fundamental, el segundo sobretono a la segunda y así sucesivamente. Esta denominación tiene su origen en la terminología usada en la teoría musical, donde los armónicos son los múltiplos enteros de la frecuencia fundamental.



## 7.8. Difracción

Según el principio de Huygens, cuando una onda plana encuentra una abertura, ésta se comporta como una fuente de ondas esféricas. En general, esto implica que cuando una onda encuentra un obstáculo, tenderá a rodearlo. Este comportamiento del frente de onda se denomina **difracción**. Casi toda la difracción de una onda se produce en aquella parte del frente de onda que está a una distancia de pocas longitudes de onda de los límites del obstáculo. En aquellas zonas de la onda que están más alejadas, el efecto del obstáculo, es decir, la difracción, es imperceptible y la onda se propaga en línea recta en la dirección de los rayos incidentes.

Cuando una onda se encuentra con una barrera o con una pequeña abertura de unas pocas longitudes de onda de diámetro, la parte de la onda que la atraviesa pasa toda ella a una distancia de pocas longitudes de onda de los bordes. Así, los frentes de onda planos se curvan y se propagan adoptando la forma circular o esférica. Más allá de la barrera son las ondas circulares concéntricas a la abertura, como si hubiese un foco puntual en la misma. En contraste, si un haz de partículas incide sobre un obstáculo con una abertura, las "partículas" que lo atraviesan no cambian su dirección (figura 7.7). La difracción es una de las características fundamentales que distingue las ondas de las partículas.



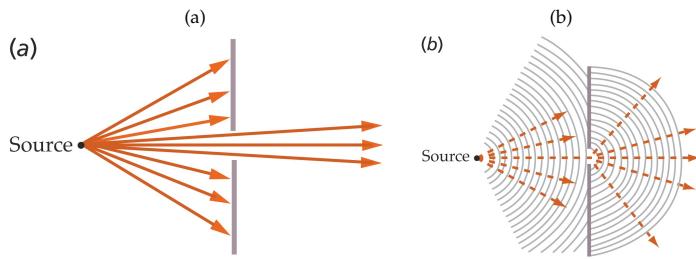


FIGURA 7.7: Comparación entre las transmisiones de que sufren en una abertura estrecha situada en una barrera (a) un haz de partículas y (b) una onda. En (a) las partículas transmitidas se encuentran confinadas en un ángulo estrecho. En (b) la abertura actúa como un foco puntual de ondas que se propagan en un ángulo mucho más amplio que el correspondiente a las partículas en (a).

### 7.8.1. Diagrama de difracción de una sola rendija

En nuestro estudio de los diagramas de interferencia producidos por dos rendijas, hemos supuesto que éstas eran muy estrechas, de modo que podíamos considerarlas como fuentes lineales que generan ondas cilíndricas, que en nuestro diagramas bidimensionales son focos puntuales de ondas circulares. Por consiguiente, podríamos admitir que la intensidad debida a una sola rendija que actuara aislada sería la misma ( $I_0$ ) en cualquier punto  $P$  sobre la pantalla con independencia del ángulo  $\theta$  formado entre el rayo dirigido al punto  $P$  y la recta normal entre la rendija y la pantalla. Cuando la rendija no es estrecha, la intensidad recibida en una pantalla alejada no es independiente del ángulo sino que disminuye cuando aumenta el ángulo.

Para estudiar esta dependencia, consideramos cada punto de un frente de onda como si fuese una fuente luminosa puntual, ya que, de acuerdo con el principio de Huygens, cuando el frente de ondas alcanza la rendija, que suponemos de anchura  $b$ , aquellos puntos coincidentes con ésta (y solo estos), se convierten en puntos emisores secundarios  $S_i$ . En la figura 7.8, hemos colocado una línea de puntos sobre el frente de ondas en la rendija para representar esquemáticamente estas fuentes puntuales.

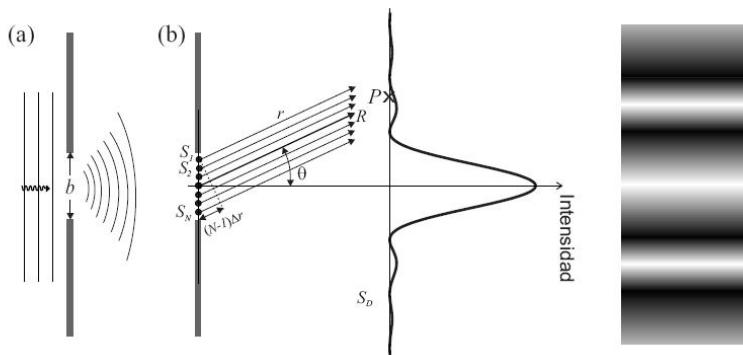


FIGURA 7.8: (a) Difracción de Fraunhofer de una rendija rectangular; (b) Cada punto de la rendija se comporta como un foco puntual emisor de ondas secundarias.

Calculamos la perturbación ondulatoria  $f(P, t)$  en un punto  $P$  situado en una pantalla  $S_D$  debida a la interferencia de  $N$  fuentes equiespaciadas de

igual amplitud y fase inicial. La pantalla se encuentra a una distancia  $D \gg b$ . La onda resultante será:

$$f(P, t) = \sum_{n=1}^N A_0 \cos(kr_n - \omega t) \quad (7.60)$$

donde  $r_n$  es la distancia desde el foco secundario  $n$ -ésimo hasta el punto  $P$  y  $A_0$  la amplitud constante de cada onda elemental. Notemos que, bajo la presente aproximación, todos los rayos que llegan a  $P$  se consideran paralelos. Si llamamos  $r$  a la distancia desde el foco 1 hasta  $P$  y  $\Delta r$  a la diferencia de caminos entre la perturbación que llega a  $P$  desde un foco y el siguiente, puede escribirse  $r_n = r + (n-1)\Delta r$ . Con esta suposición, y, tras laboriosos cálculos, se puede realizar la suma de la ecuación (7.60), obteniéndose:

$$f(P, t) = A_P \cos(kR - \omega t) \quad (7.61)$$

donde

$$R = r + \frac{N-1}{2}\Delta r \quad (7.62)$$

es la distancia desde el centro de la rendija al punto  $P$  y

$$A_P = A_0 \frac{\sin(kN\Delta r/2)}{\sin(k\Delta r/2)} \quad (7.63)$$

es la amplitud resultante en  $P$ . Dado que la amplitud de la onda en la pantalla varía punto a punto, también lo hará la intensidad, formando lo que se conoce como **patrón de difracción**:

$$I(\theta) = A_0^2 \left( \frac{\sin(kN\Delta r/2)}{\sin(k\Delta r/2)} \right)^2 = I_{\max} \left( \frac{\sin[kb(\sin \theta)/2]}{kb(\sin \theta)/2} \right)^2 \quad (7.64)$$

donde hemos hecho uso de la relación (ver figura adyacente, que es, a su vez, una ampliación de la Figura 7.8),

$$N\Delta r \approx (N-1)\Delta r = b \sin \theta \quad (7.65)$$

si  $N$  es muy grande. Claramente existe un mínimo en la intensidad de la perturbación cuando  $A_P \rightarrow 0$ , esto es, cuando el numerador de (7.63) sea cero:

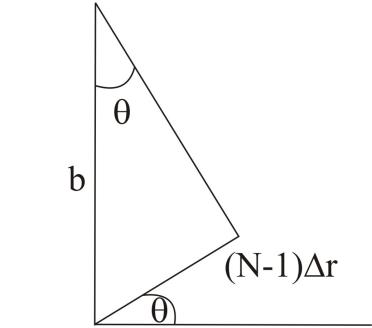
$$\sin[kb(\sin \theta)/2] = 0 \quad (7.66)$$

es decir, cuando se verifica que

$$kb(\sin \theta)/2 = m\pi, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (7.67)$$

por lo que la condición de mínimo para  $A_P$  puede reescribirse como

$$b \sin \theta_m = m\lambda \quad (7.68)$$



Condición de intensidad nula en la  
difracción de una rendija

El primer mínimo (o mínimo de primer orden) ocurre para  $m = 1$ , verificándose entonces que

$$\sin \theta_1 = \frac{\lambda}{b} \quad (7.69)$$

Podemos ver que la intensidad es máxima en la dirección normal ( $\sin \theta = 0$ ) y disminuye hasta cero para un ángulo que depende de la anchura de

la rendija  $b$  y de la longitud de onda  $\lambda$ . La mayor parte de la intensidad luminosa se concentra en un amplio **máximo central de difracción**, aunque existen bandas de máximos secundarios menores a cada lado del máximo central.

Obsérvese que para una longitud de onda determinada  $\lambda$  la ecuación (7.69) describe cómo variaciones en la anchura de la rendija generan variaciones en la amplitud angular del máximo central. Si aumentamos la anchura de la rendija  $b$ , el ángulo  $\theta_1$  en que la intensidad se anula por primera vez disminuye, originándose un máximo de difracción central más estrecho. Inversamente, si disminuye la anchura de la rendija, el ángulo correspondiente al primer cero aumenta, dando así un máximo central de difracción más ancho. Cuando  $b$  es menor que  $\lambda$ , el valor de  $\sin \theta_1$  debería ser mayor que 1 para que se cumpliese la ecuación (7.69). Por lo tanto, para  $b < \lambda$  no existen puntos de intensidad nula en el diagrama y la rendija actúa como una fuente lineal (un foco puntual en dos dimensiones), radiando energía luminosa esencialmente en todas direcciones (ya que  $\theta_1$  indica el punto donde se anula por primera vez la intensidad).

### Consecuencias

Aunque las ondas que encuentran un obstáculo o una abertura siempre se difractan, la magnitud de este fenómeno depende de la relación que existe entre su longitud de onda y el tamaño del obstáculo o abertura. Si la longitud de onda es del orden del tamaño de la abertura, se produce un patrón de interferencia. Si la longitud de onda es mayor que el tamaño de la abertura, no existirían puntos de intensidad nula, es decir, la onda difractada se comporta como si procediese de una fuente puntual localizada en la propia abertura.

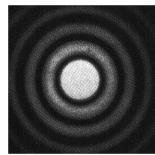
En cambio, si la longitud de onda es pequeña en relación con la abertura, el efecto de difracción es pequeño. Cerca de los bordes de la abertura los frentes de onda se distorsionan y las ondas se curvan ligeramente. Sin embargo, los frentes de ondas no se ven afectados en su mayor parte y las ondas se propagan en línea recta, como si se tratara de un haz de partículas. Esta aproximación de propagación de las ondas en línea recta en la dirección de los rayos y sin difracción se conoce con el nombre de **aproximación de rayos**. Los frentes de onda se distorsionan cerca del borde del obstáculo que bloquea parte del frente de onda. Es decir, los fenómenos de difracción son más apreciables cuando las dimensiones de la rendija son del orden de la longitud de onda de la perturbación ondulatoria.

Como las longitudes de onda del sonido audible están dentro de un margen que va desde algunos centímetros hasta varios metros y son con frecuencia grandes en comparación con las aberturas o los obstáculos (puertas o ventanas entreabiertas, por ejemplo), la difracción de las ondas sonoras resulta ser un fenómeno común. Por otra parte, las longitudes de onda de la luz visible están dentro del intervalo de  $4 \times 10^{-7}$  a  $7 \times 10^{-7}$  metros aproximadamente. Como estas ondas son pequeñas en comparación con el tamaño de los objetos y aberturas ordinarios, la difracción de la luz no es observable fácilmente, de forma que la luz parece viajar en línea recta. Por ello, se puede oír el sonido de una conversación que discurre detrás de una puerta entreabierta (ya que se difracta a través del hueco que deja la puerta) pero no podemos ver lo que ocurre por detrás de la puerta (ya que la luz no se difracta a través de ese hueco).

### 7.8.2. Resolución

La difracción debida a una abertura circular tiene implicaciones en la resolución de muchos instrumentos ópticos. La figura adyacente muestra el diagrama de difracción de una abertura circular. El ángulo  $\theta$  substendido por el primer mínimo de difracción está relacionado con la longitud de onda y con el diámetro  $D$  de la abertura por la relación

$$\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$



La ecuación anterior es semejante a (7.69) excepto en el factor 1.22. En muchas aplicaciones, el ángulo  $\theta$  es pequeño, de modo que  $\sin \theta \approx \theta$ . El primer mínimo de difracción se produce entonces para un ángulo  $\theta$  dado por:

$$\theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$$

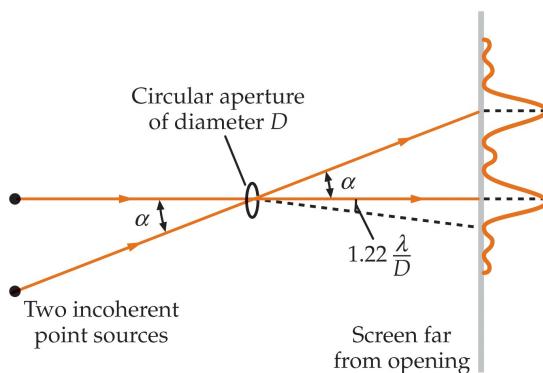


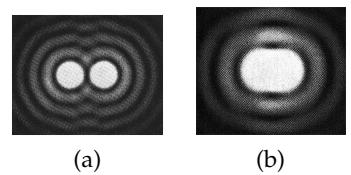
FIGURA 7.9: Dos fuentes distantes que substienden un ángulo  $\alpha$ . Si  $\alpha$  es mucho mayor que  $1.22\lambda/D$ , los diagramas de difracción apenas se solapan y las fuentes se ven fácilmente como dos fuentes separadas. Si  $\alpha$  no es mucho mayor que  $1.22\lambda/D$ , el solapamiento de los diagramas de difracción hace que sea difícil distinguir dos fuentes de una.

La figura 7.9 muestra dos fuentes puntuales que substienden un ángulo  $\alpha$  respecto a una abertura circular alejada de las fuentes. También se incluye en dicha figura la intensidad de los diagramas de difracción correspondientes. Si  $\alpha >> \lambda/D$ , se verán como dos fuentes. Sin embargo, al ir disminuyendo  $\alpha$ , aumenta el solapamiento de los diagramas de difracción y resulta cada vez más difícil distinguir las dos fuentes de una sola. Para la separación angular crítica  $\alpha_c$  dada por

$$\alpha_c = 1.22 \frac{\lambda}{D} \quad (7.70)$$

Criterio de resolución de Rayleigh

el primer mínimo del diagrama de difracción de una fuente cae en el máximo central de la otra. Se dice entonces que estos objetos están en el límite justo de su resolución según el denominado **criterio de resolución de Rayleigh**. La figura adyacente muestra los diagramas de difracción para dos fuentes cuando  $\alpha$  es mayor que el ángulo crítico que permite la resolución (a) y cuando  $\alpha$  es igual al ángulo crítico anteriormente mencionado (b).



La ecuación (7.70) tiene muchas aplicaciones. El **poder de resolución** de un instrumento óptico, como un microscopio, un telescopio o un ojo, se refiere a la capacidad del mismo para resolver y distinguir dos objetos que están muy próximos. Las imágenes de los objetos tienden a solaparse debido a los efectos de difracción de la abertura de entrada del instrumento. Podemos ver en la ecuación anterior que puede aumentarse el poder de resolución aumentando el diámetro  $D$  de la apertura, o disminuyendo la longitud de onda  $\lambda$ .

En resumen, los efectos de la difracción imponen una limitación a la capacidad para situar o localizar objetos pequeños o para identificar sus detalles más finos. Así pues, no puede observarse ningún detalle a una escala menor que la longitud de onda utilizada.

Las ondas sonoras de frecuencias mayores de 20000 Hz se llaman **ondas ultrasónicas**. Debido a sus longitudes de onda muy corta pueden emitirse y reflejarse en objetos pequeños. Los murciélagos emiten y detectan frecuencias de hasta 120000 Hz, correspondientes a una longitud de onda de 2.8 mm, que utilizan para localizar pequeñas presas.

## Tema 8

# Óptica

---

### 8.1. Introducción

La óptica (de *οπτική*, apariencia en griego) es una rama de la física que describe el comportamiento y las propiedades de la luz y su interacción con la materia.

El campo de acción de la óptica abarca normalmente la luz visible y las radiaciones infrarroja y ultravioleta; sin embargo, debido a que la luz es una onda electromagnética, la óptica puede explicar fenómenos que aparecen en rayos X, microondas, ondas de radio y otros formas de radiación. Algunos fenómenos ópticos dependen de la naturaleza cuántica de la luz (dualidad onda-partícula), relacionando algunas áreas de la óptica con la mecánica cuántica. En la práctica, la gran mayoría de los fenómenos ópticos pueden estudiarse usando la descripción electromagnética de la luz.

La óptica clásica (es decir, aquélla que no tiene en cuenta efectos cuánticos), se puede dividir en dos ramas básicas: **óptica electromagnética** o física (que considera la luz una onda electromagnética) y **óptica geométrica**, que es la que estudiaremos en este capítulo.

La óptica geométrica describe la propagación de luz en término de **rayos**. Un rayo es una línea recta dibujada a lo largo de la dirección de propagación de una única onda, mostrando el camino de la onda cuando se propaga a través del espacio. La aproximación de rayos implica modelos geométricos basados en estas líneas rectas. Los fenómenos explicados por el modelo de rayos no dependen explícitamente de la naturaleza ondulatoria de la luz, salvo por su propagación a lo largo de una línea recta. Los rayos deben ser, por tanto, perpendiculares al frente de onda en cada punto del espacio.

Al aproximar la luz por rayos, estamos suponiendo que la longitud de onda de la luz es mucho menor que el tamaño de los objetos, de forma que los efectos de la difracción son despreciables.

No obstante, la óptica geométrica resulta muy adecuada para el estudio de espejos, lentes, prismas y los instrumentos ópticos asociados, como telescopios, cámaras y gafas, aunque no puede explicar otros fenómenos de gran importancia como la difracción y la polarización.

## 8.2. Interacción de la luz con una interfase

### 8.2.1. Reflexión y refracción. Ley de Snell

La velocidad de la luz en un medio transparente como el aire, el agua o el vidrio es menor que su velocidad en el vacío. Un medio transparente se caracteriza por el **índice de refracción**,  $n$ , que se define por el cociente entre la velocidad en el vacío,  $c$ , y la velocidad en el medio,  $v$ :

Definición – Índice de refracción

$$n = \frac{c}{v} \quad (8.1)$$

Para el agua,  $n = 1.33$ , mientras que para el vidrio  $n$  varía de 1.50 a 1.66, según el tipo de vidrio. El diamante posee un índice de refracción muy elevado, aproximadamente 2.4. El índice de refracción del aire es aproximadamente 1.0003, de modo que para la mayor parte de los casos a estudiar, podemos suponer que la velocidad de la luz en el aire es la misma que en el vacío.

Cuando un haz de luz incide sobre una superficie límite de separación entre dos medios, como una interfase aire-vidrio, parte de la energía lumínosa se refleja y parte entra en el segundo medio. Si la luz incidente no es perpendicular a la superficie, entonces la luz transmitida no es paralela a la incidente. El cambio en dirección del rayo transmitido se llama **refracción**. La Figura 8.1 muestra un rayo de luz que incide sobre una superficie que incide sobre una superficie lisa aire-vidrio. El ángulo  $\theta_1$  entre el rayo incidente y la

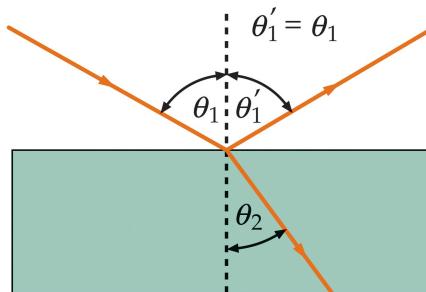


FIGURA 8.1: El ángulo de reflexión  $\theta'_1$  es igual al ángulo de incidencia  $\theta_1$ . El ángulo de refracción  $\theta_2$  es menor que el ángulo de incidencia si la velocidad de la luz en el segundo medio es menor que la que posee en el medio incidente.

normal a la superficie se denomina **ángulo de incidencia** y el plano definido por ambas líneas recibe el nombre de **plano de incidencia**. El rayo reflejado yace en el plano de incidencia y forma un ángulo  $\theta'_1$  que es igual al ángulo de incidencia, como se ve en la figura:

Ley de la reflexión

$$\theta'_1 = \theta_1 \quad (8.2)$$

Este resultado se conoce como **ley de la reflexión**, y es válido para cualquier tipo de onda.

El rayo que entra en el vidrio en la figura 8.1 se denomina rayo refractado y el ángulo  $\theta_2$  es el ángulo de refracción. Cuando una onda cruza un límite

en el cual se reduce su velocidad, como en el caso de la luz que penetra en el vidrio desde el aire, el ángulo de refracción es menor que el ángulo de incidencia  $\theta_1$ , es decir, el rayo refractado se approxima a la normal. En cambio, si el haz luminoso se origina en el vidrio y se refracta en el aire, entonces el rayo refractado se aleja de la normal.

El ángulo de refracción  $\theta_2$  depende del ángulo de incidencia y de la velocidad relativa de las ondas luminosas en los dos medios. Si  $v_1$  es la velocidad de la onda en el medio incidente y  $v_2$  la velocidad de la onda en el medio transmisor, los ángulos de incidencia y refracción vienen relacionados por

$$\frac{1}{v_1} \operatorname{sen} \theta_1 = \frac{1}{v_2} \operatorname{sen} \theta_2 \quad (8.3)$$

La ecuación anterior es válida para la refracción de cualquier tipo de onda incidente en una interfase límite que separe dos medios distintos. Si multiplicamos por  $c$ , la ecuación anterior se puede expresar en función de los índices de refracción de los medios,  $n_1$  y  $n_2$ , tomando la forma

$$n_1 \operatorname{sen} \theta_1 = n_2 \operatorname{sen} \theta_2 \quad (8.4) \quad \text{Ley de Snell}$$

Este resultado fue descubierto experimentalmente en 1621 por Willebrod Snell y se conoce como **ley de Snell** o **ley de la refracción**. En 1637, esta ley fue descubierta independientemente por René Descartes, usando argumentos basados en la conservación del momento. Sin embargo, investigaciones recientes muestran que esta ley básica de la óptica fue descubierta mucho antes, concretamente en el año 938, por el matemático árabe Ibn Sahl.

### 8.2.2. Reflexión interna total

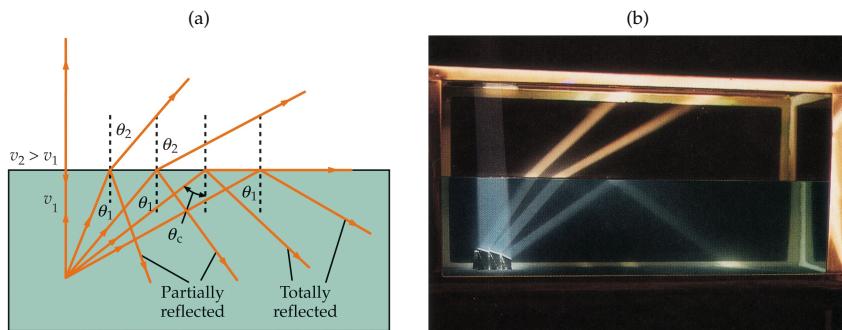


FIGURA 8.2: (a) Reflexión interna total. Cuando aumenta el ángulo de incidencia, crece el ángulo de refracción hasta que, para un cierto ángulo crítico de incidencia  $\theta_c$ , el ángulo de refracción es  $90^\circ$ . Con ángulos de incidencia mayores que el crítico, no existe rayo refractado. Toda la energía se refleja. (b) Fotografía de la refracción y de la reflexión interna total en una superficie agua-aire.

En la figura 8.2 se muestra una fuente puntual situada en un vidrio cuyo rayos inciden sobre la interfase vidrio-aire con diferentes ángulos. Todos los rayos no perpendiculares a la interfase se desvían alejándose de la normal. Al ir aumentando el ángulo de incidencia, el ángulo de refracción crece hasta que se alcanza un ángulo de incidencia crítico  $\theta_c$  para el cual el ángulo de refracción es  $90^\circ$ . En el caso de ángulo de incidencia mayores que este ángulo

crítico, no existe rayo refractado. Toda la energía se refleja. Este fenómeno se denomina **reflexión interna total**.

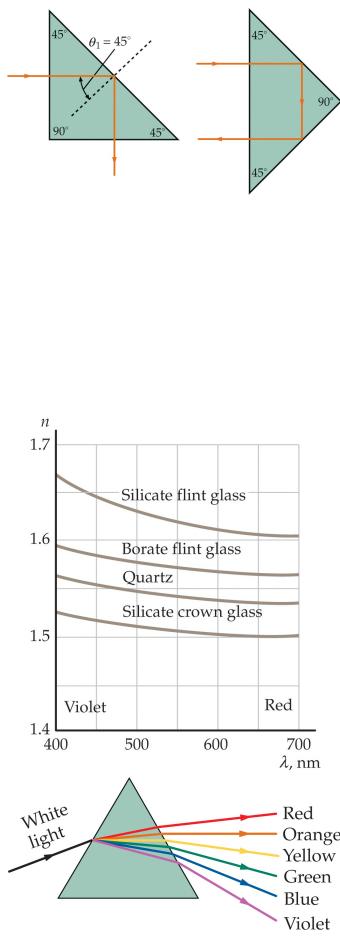
Puede hallarse el ángulo crítico en función de los índices de refracción de los dos medios despejando en la ecuación (8.4)  $\sin \theta_1 = 1$  y haciendo  $\theta_2 = 90^\circ$ :

### Ángulo crítico para la reflexión interna total

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1} \quad (8.5)$$

Obsérvese que solo se presenta la reflexión interna total cuando la luz se encuentra originalmente en el medio con mayor índice de refracción. Matemáticamente, si  $n_2 > n_1$ , no puede verificarse la ley de Snell porque no existe ningún ángulo real cuyo seno sea mayor que 1.

Una aplicación de la reflexión total se encuentra en los prismáticos, como el que se muestra en la figura adyacente. En este caso, la luz incide normalmente sobre uno de los catetos de un prisma de vidrio de  $45^\circ$ - $45^\circ$ - $90^\circ$ . Si el índice de refracción del prisma vale 1.5, el ángulo crítico correspondiente a la reflexión total interna es  $41.8^\circ$ . Como el ángulo de incidencia del rayo sobre la superficie vidrio-aire es  $45^\circ$ , la luz se reflejará totalmente y saldrá perpendicularmente a la otra cara del prisma, como se indica en la figura. Si la luz incide perpendicularmente a la hipotenusa del mismo tipo de prisma, se refleja totalmente dos veces, de modo que emerge a  $180^\circ$  respecto a su dirección inicial. Los prismas se utilizan para variar la dirección de los rayos luminosos. En los llamados prismáticos se utilizan dos prismas en cada lado. Estos prismas reflejan la luz, reduciendo de este modo la longitud necesaria, y enderezan la imagen que las lentes del sistema óptico dan invertida. El diamante tiene un índice de refracción muy alto ( $n \approx 2.4$ ), de modo que casi toda la luz que entra en un diamante se ve reflejada finalmente hacia afuera, dando origen a sus característicos destellos.



### 8.2.3. Dispersión

El índice de refracción de un material tiene una ligera dependencia con la longitud de onda. Para muchos materiales,  $n$  disminuye ligeramente cuando crece la longitud de onda, como se muestra en la figura. Esta dependencia del índice de refracción con la longitud de onda (y, por lo tanto, con la frecuencia), se denomina **dispersión**. Cuando un haz de luz blanca incide formando un cierto ángulo con la superficie de un prisma de vidrio, el ángulo de refracción (medido respecto a la normal) correspondiente a las longitudes de onda más cortas (hacia el extremo violeta del espectro), es ligeramente menor que el correspondiente a longitudes de onda más largas (hacia el extremo rojo del espectro). Por consiguiente, la luz de longitud de onda más corta, se desvía más (se acerca más a la normal) que la luz de longitud de onda más larga. Así pues, el haz de luz blanca se esparce o dispersa en sus colores o longitudes de onda componentes.

## 8.3. Espejos

### 8.3.1. Espejos planos

La figura 8.3 muestra un haz de rayos luminosos que proceden de una

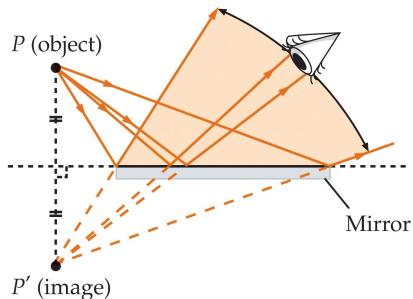


FIGURA 8.3: Imagen formada por un espejo plano. Los rayos procedentes del punto  $P$  que inciden sobre el espejo y entran en el ojo parecen proceder del punto imagen  $P'$ , detrás del espejo. El ojo puede ver la imagen siempre que se encuentre en la región sombreada.

fuente puntual  $P$  y se reflejan en un espejo plano. Después de la reflexión, los rayos divergen exactamente como si procediesen de un punto  $P'$ , detrás del plano del espejo. El punto  $P'$  se denomina la **imagen del objeto**  $P$ . Cuando estos rayos entran en el ojo, no pueden distinguirse de los rayos que pudieran proceder de una fuente situada en  $P'$  sin que hubiese espejo. El plano del espejo es perpendicular al plano bisector de la recta que une el punto objeto  $P$  y el punto imagen  $P'$ , como se muestra. La imagen se denomina **imagen virtual** debido a que la luz no procede realmente de la imagen. La imagen puede verse siempre que el ojo esté en cualquier lugar de la región indicada, de modo que una línea trazada desde la imagen al ojo pase cortando el espejo. Siempre que el objeto no esté detrás del plano del espejo, existe una posición en la cual puede situarse el ojo para ver la imagen.

Si levantamos la mano derecha sobre un espejo, la imagen que vemos es del mismo tamaño, pero parece una mano izquierda. Esta inversión derecha-izquierda es el resultado de una **inversión en profundidad**, es decir, la mano derecha se transforma en una mano izquierda porque el espejo ha invertido la palma y el dorso de la mano. La figura adyacente muestra la imagen espectral de un sistema de coordenadas rectangular. El espejo transforma un sistema de coordenadas ordenado según la regla de la mano derecha, denominado normalmente directo (o dextrógiro), para el cual  $\hat{i} \wedge \hat{j} = \hat{k}$ , en un sistema de coordenadas invertido (o levógiro), cuyo orden quedaría regulado por una análoga regla de la mano izquierda, y, para el cual  $\hat{i} \wedge \hat{j} = -\hat{k}$ .

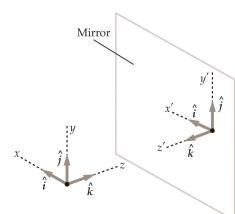
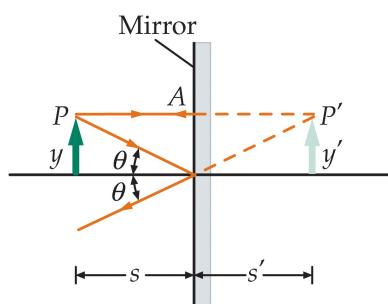


FIGURA 8.4: Diagrama de rayos para localizar la imagen de una flecha en un espejo plano.

En la figura 8.4 se muestra una flecha de altura  $y$  que se mantiene paralela a un espejo plano y a una distancia  $s$  del mismo. Podemos localizar la imagen de la punta de la flecha (y de cualquier otro punto de la misma) di-

bujando dos rayos. Uno de ellos se dibuja perpendicular al espejo. Incide en el espejo en el punto A y se refleja hacia atrás sobre sí mismo. El otro rayo, que incide en el espejo formando un ángulo  $\theta$  con la normal al espejo, se refleja formando un ángulo  $\theta$  igual con el eje x. La prolongación de estos dos rayos hacia atrás, detrás del espejo, sitúa la imagen de la punta de la flecha, como se indica con las líneas a trazos en la figura. Podemos ver en ella que la imagen está a la misma distancia detrás del espejo que el objeto está delante de él, y que la imagen es derecha (apunta en el mismo sentido que el objeto) y tiene el mismo tamaño que el objeto.

### 8.3.2. Espejos esféricos

La figura 8.5a muestra un haz de rayos que proceden de un punto  $P$  situado en el eje de un espejo esférico cóncavo, y que, después de reflejarse en el mismo, convergen en el punto  $P'$ . Los rayos divergen entonces desde este punto como si hubiese un objeto en el mismo. Esta imagen se denomina **imagen real**, debido a que la luz realmente emana del punto imagen. Puede ser vista por un ojo cualquiera situado a la izquierda de la imagen y que mire hacia el espejo. Podría observarse también sobre una pequeña pantalla visora de vidrio o una pequeña película fotográfica colocada en el punto imagen. Una imagen virtual, como la que se forma en un espejo plano, no puede ser observada en una pantalla situada en el punto imagen puesto que allí no existe luz. A pesar de esta diferencia entre imagen real y virtual, los rayos luminosos que divergen de una imagen real y los que parecen diverger de una imagen virtual, son idénticos para el ojo.

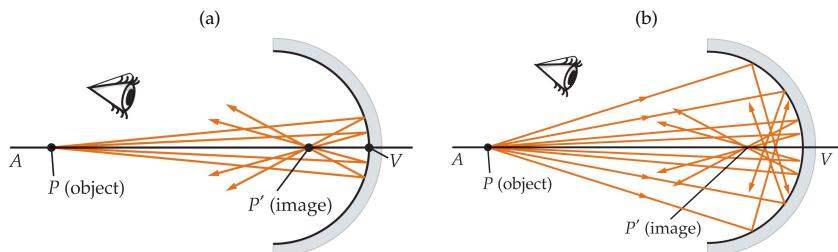


FIGURA 8.5: (a) Los rayos procedentes de un punto objeto  $P$  situado en el eje óptico ( $AV$ ) de un espejo esférico cóncavo forman una imagen en  $P'$ . La imagen es nítida si los rayos inciden sobre el espejo cerca del eje y si los rayos son casi paralelos al eje. (b) Aberración esférica de un espejo. Los rayos no-paraxiales que inciden sobre el espejo en puntos alejados del eje  $AV$  no se reflejan pasando por el punto imagen  $P'$  que definen los rayos paraxiales. Estos rayos forman una imagen borrosa.

En la figura 8.5b vemos que solo los rayos que inciden en el espejo en los puntos próximos al eje que une el punto  $A$  con el vértice  $V$  (llamado también eje óptico) se reflejan pasando por el punto imagen. Estos rayos se denominan **rayos paraxiales**. Los rayos que inciden en puntos del espejo alejados de su eje pasan cerca del punto imagen, pero no exactamente por él. Debido a estos rayos, la imagen aparece borrosa, efecto denominado **aberración esférica**. La imagen puede hacerse más nítida bloqueando el espejo por los extremos de modo que no incida en él rayos que no sean paraxiales. Aunque la imagen es entonces más nítida, se reduce su brillo debido a que se refleja menos intensidad lumínosa hacia el punto imagen.

Queremos obtener una ecuación que relacione la posición del punto ima-

gen con el punto objeto. Para hacer esto, dibujamos dos rayos desde una

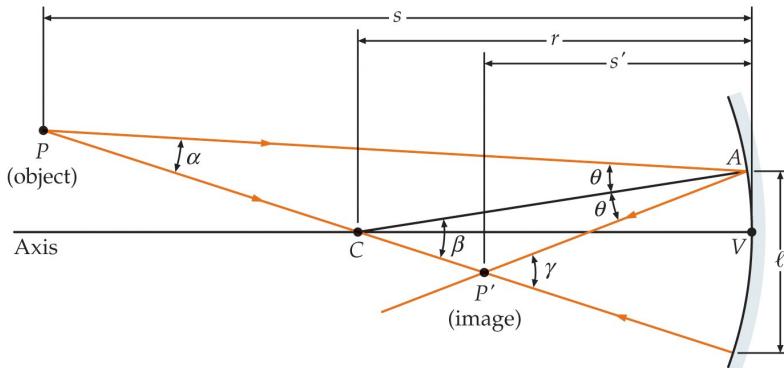


FIGURA 8.6: Geometría para el cálculo de la distancia imagen  $s'$  a partir de la distancia objeto  $s$  y del radio de curvatura  $r$ .

posición arbitraria en la que colocamos el punto objeto  $P$  (figura 8.6). Un rayo pasa por el punto  $C$ , centro de curvatura del espejo, y otro rayo se refleja en un punto arbitrario  $A$  del espejo. El punto imagen  $P'$  está localizado en el punto de intersección de estos dos rayos, después de haberse reflejado en el espejo. Utilizando la ley de la reflexión, obtenemos la localización del punto  $P'$ . El rayo que pasa por el punto  $C$  choca con el espejo con incidencia normal y se refleja sobre sí mismo (invirtiendo el sentido). El rayo que choca en el punto  $A$  del espejo, lo hace con un ángulo  $\theta$  con respecto a la normal (cualquier línea normal a la superficie esférica pasa por el centro de curvatura). Las distancias de la imagen y del objeto,  $s$  y  $s'$ , respectivamente, se miden tomando como referencia el plano tangente al espejo en su vértice  $V$ . El ángulo  $\beta$  es exterior al triángulo  $PAC$ , por lo que  $\beta = \alpha + \theta$ . De forma similar, a partir del triángulo  $PAP'$ , se deduce  $\gamma = \alpha + 2\theta$ . Eliminando  $\theta$  de estas ecuaciones, tenemos que  $2\beta = \alpha + \gamma$ . Suponiendo que todos los rayos son paraxiales, obtenemos  $\alpha \approx \ell/s$ ,  $\beta \approx \ell/r$  y  $\gamma \approx \ell/s'$ , donde hemos utilizado la aproximación de ángulos pequeños, también conocida como **aproximación paraxial**. De todo lo anterior se deduce la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{r} \quad (8.6)$$

Ecuación del espejo

Esta ecuación relaciona las distancias del objeto y de la imagen con el radio de curvatura. Lo importante de esta ecuación es que no depende de la localización del punto  $A$ . Por lo tanto, la ecuación es válida independientemente del punto de contacto del rayo con el espejo, siempre y cuando el punto  $A$  esté en la superficie del mismo, y los rayos sean paraxiales. Es decir, todos los rayos paraxiales procedentes de un punto objeto, después de reflejarse en el espejo, pasan a través de un único punto imagen.

Cuando la distancia del objeto es grande en comparación con el radio de curvatura del espejo, el término  $1/s$  de la ecuación 8.6 es mucho menor que  $2/r$  y puede despreciarse. Es decir, para  $s \rightarrow \infty$ , la distancia imagen cumple  $s' \rightarrow r/2$  y recibe el nombre de **distanzia focal**,  $f$ , del espejo. El plano en el que resultan enfocados todos los rayos paralelos que inciden en el espejo, se denomina **plano focal**. La intersección del eje con el plano focal es el **punto focal o foco**  $F$ , como se ilustra en la figura 8.7 (una vez más, solo los rayos

paraxiales se enfocan en un solo punto).

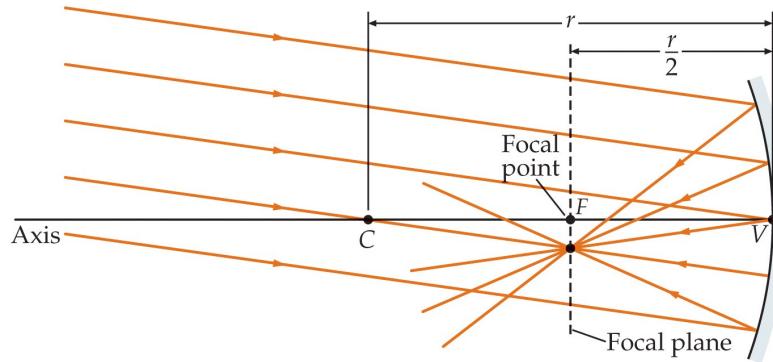


FIGURA 8.7: Rayos paralelos que inciden sobre un espejo cóncavo y se reflejan en un punto del plano focal a la izquierda del espejo, siendo la distancia focal  $r/2$ .

**Distancia focal de un espejo**

$$f = \frac{r}{2} \quad (8.7)$$

La distancia focal de un espejo esférico es igual a la mitad del radio de curvatura. En función de la distancia focal  $f$ , la ecuación (8.6) toma la forma

**Ecuación del espejo**

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (8.8)$$

La ecuación (8.8) se denomina **ecuación del espejo**.

### 8.3.3. Diagrama de rayos para los espejos

Un método que resulta útil a la hora de situar imágenes consiste en la construcción de un **diagrama de rayos**. Este método se aclara en la figura 8.8, en donde el objeto es una figura humana perpendicular al eje a una dis-

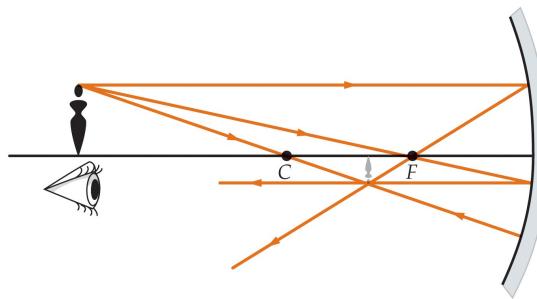


FIGURA 8.8: Diagrama de rayos para la localización de la imagen mediante una construcción geométrica.

tancia  $s$  del espejo. Mediante una selección razonable de los rayos que parten

desde la cabeza, podemos localizar rápidamente la imagen. Existen tres **rayos principales**, que son convenientes para su utilización en el diagrama:

1. El **rayo paralelo** al eje. Este rayo se refleja pasando por el foco.
2. El **rayo focal**, que pasa por el foco. Este rayo se refleja paralelamente al eje.
3. El **rayo radial**, que pasa por el centro de curvatura. Este rayo incide sobre el espejo, perpendicularmente a su superficie y, por ello, se refleja coincidiendo consigo mismo.

Estos rayos se muestran la figura 8.8. La intersección de dos rayos paralelos cualesquiera, sitúa el punto imagen de la cabeza. Los tres rayos principales son más fáciles de dibujar que cualquier otro rayo. Normalmente, se dibujan dos rayos para localizar la imagen y el tercero sirve para comprobar el resultado. Los diagramas de rayos son más fáciles de dibujar si el espejo se reemplaza por una línea recta que se prolonga lo necesario para interceptar los rayos, como indica la figura. Obsérvese que en este caso, la imagen está invertida y es menor que el objeto.

Cuando el objeto está entre el espejo y su punto focal, los rayos reflejados en el espejo no convergen, sino que parecen divergir desde un punto situado detrás del espejo, como se ilustra en la figura 8.9. En este caso, la imagen es virtual y derecha. En concreto,  $s' < r/2$ , de modo que la distancia imagen  $s'$  calculada con la ecuación (8.6) resulta ser negativa.

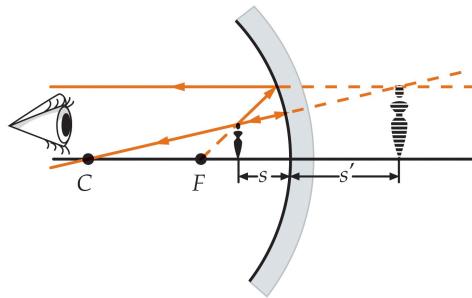
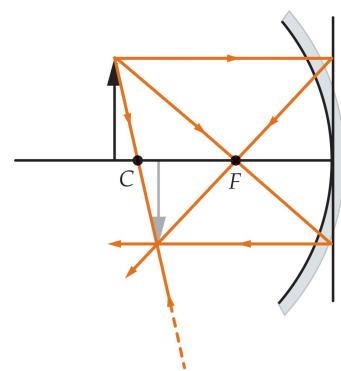


FIGURA 8.9: Imagen virtual formado por un espejo cóncavo cuando el objeto está a una distancia del vértice del espejo menor que su distancia focal. La imagen se localiza mediante la intersección del rayo radial, que se refleja en sentido inverso sobre sí mismo, y del rayo focal, que se refleja paralelo al eje. Parece que estos dos rayos divergen de un punto situado detrás del espejo. El punto imagen se determina extendiendo los rayos reflejados.

Podemos aplicar las ecuaciones (8.6)-(8.8) a este caso y a los espejos convexos si adoptamos un convenio de signos conveniente. Con independencia de que el espejo sea convexo o cóncavo, solo pueden formarse imágenes reales delante del espejo. Se forman imágenes virtuales detrás del espejo, en donde no existen rayos luminosos reales. Nuestro convenio de signos es el siguiente:

1.  $s > 0$  si el objeto está delante del espejo (en el lado del espejo donde incide la luz).
2.  $s' > 0$  si la imagen está delante del espejo.

3.  $r > 0, f > 0$  si el espejo es cóncavo, es decir, cuando el centro de curvatura está en el lado del espejo donde se encuentran los rayos reflejados. Para un espejo convexo,  $r < 0$  y  $f < 0$ .

El lado del espejo por donde incide la luz es, obviamente, el mismo del de la luz reflejada. Los parámetros  $s$  o  $s'$  son positivos si tenemos un objeto o una imagen **real**, respectivamente. Si  $s$  o  $s'$  fueran negativos, tendríamos un objeto o una imagen **virtual**, respectivamente.

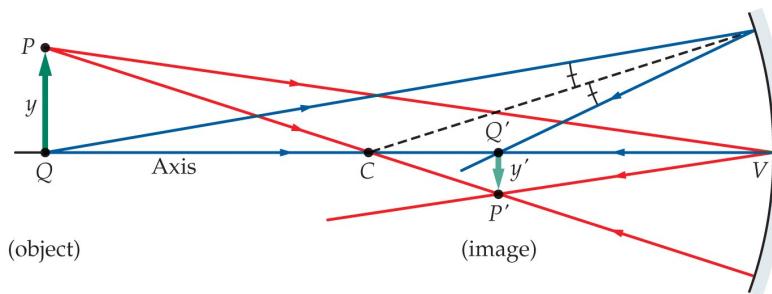


FIGURA 8.10: Geometría para determinar el aumento lateral. Los rayos procedentes de la parte superior del objeto,  $P$ , después de reflejarse, se cruzan en  $P'$ , y los rayos procedentes de la parte inferior  $Q$ , lo hacen en  $Q'$ . Las posiciones verticales de  $P$  y  $P'$ , son  $y$  e  $y'$ , respectivamente. El aumento lateral  $m$  viene dado por la relación  $y'/y$ . Como los triángulos  $PQV$  y  $P'Q'V$  son semejantes, y las distancias  $QV$  y  $Q'V$  son iguales, respectivamente, a  $s$  y  $s'$ , resulta que  $y'/y = -s'/s$ . El signo menos resulta del hecho de que  $y'/y$  es negativo cuando tanto  $s$  como  $s'$  son positivos.

La relación entre el tamaño de la imagen y el tamaño del objeto se denomina **aumento lateral**,  $m$ , de la imagen. A partir de la figura 8.10 podemos ver que el aumento lateral es:

Aumento lateral

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad (8.9)$$

Un aumento negativo, lo que tiene lugar cuando  $s$  y  $s'$  son positivos, significa que la imagen está invertida. Análogamente, un aumento positivo, implicaría que la imagen estaría derecha. Si  $|m| > 1$ , la imagen está ampliada, mientras que si  $|m| < 1$ , la imagen está reducida.

En el caso de espejos planos, el radio de curvatura es infinito. La distancia focal dada por la ecuación (8.7) es entonces también infinita. La ecuación (8.8) da, pues,  $s' = -s$ , lo que indica que la imagen está detrás del espejo y a una distancia igual a la del objeto. La amplificación dada por la ecuación (8.9) da ahora  $m = +1$ , lo que indica que la imagen es derecha y tiene el mismo tamaño que el objeto.

Aunque las ecuaciones precedentes combinadas con nuestro convenio de signos son relativamente sencillas de utilizar, es frecuente que solo se necesite saber si una imagen es real o virtual, si es derecha o invertida, su posición y amplificación aproximadas. Esta información es normalmente más fácil de obtener con la simple construcción de rayos. Sin embargo, es siempre una buena idea utilizar ambos métodos, gráfico y algebraico, para situar una imagen de forma que uno de los métodos sirva de comprobación del otro.

---

**EJEMPLO 8.1 Imagen para un espejo cóncavo**

Un punto objeto está a 12 cm de un espejo cóncavo y 3 cm por encima del eje. El radio de curvatura del espejo es 6 cm. Determinar (a) la distancia focal del espejo y (b) la distancia imagen. (c) Calcular la posición relativa al eje de la imagen. (d) Determinar la posición y la altura de la imagen mediante un diagrama de rayos.

Los datos del problema son  $R = 6$  cm,  $s = 12$  cm e  $y = 3$  cm.

(a) La distancia focal es la mitad del radio de curvatura:

$$f = \frac{R}{2} = 3 \text{ cm}$$

(b) Utilizamos la ecuación del espejo para determinar  $s'$ :

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

es decir,

$$s' = \frac{sf}{s-f} = 4 \text{ cm}$$

(c) La altura de la imagen la calculamos de (8.9):

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

es decir,

$$y' = -y \frac{s'}{s} = -1 \text{ cm}$$

En consecuencia, la imagen es real, invertida y reducida.

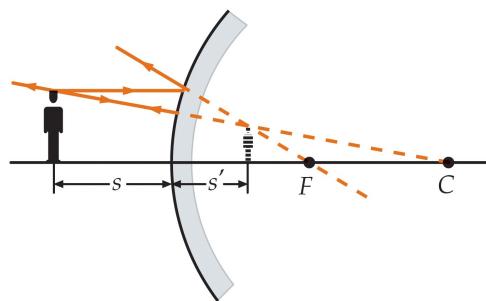
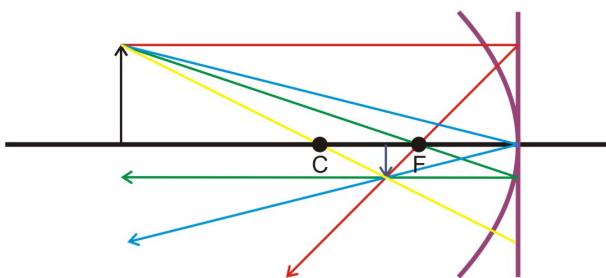


FIGURA 8.11: Diagrama de rayos correspondiente a un espejo convexo.

En la figura 8.11 se muestra un diagrama de rayos para un objeto situado delante de un espejo convexo. El rayo central que se dirige hacia el centro

de curvatura  $C$  es perpendicular al espejo, y se refleja sobre sí mismo. El rayo paralelo al eje se refleja como si procediese del punto focal  $F$  detrás del espejo. El rayo focal (no indicado) se dibujaría hacia el punto focal y se reflejaría paralelo al eje. Podemos ver en la figura que la imagen está detrás del espejo y, por lo tanto, es virtual. Además, es derecha y menor que el objeto.

#### EJEMPLO 8.2 Imagen para un espejo convexo

**Un objeto de 2 cm de alto está a 10 cm de un espejo convexo cuyo radio de curvatura es 10 cm. (a) Localizar la imagen y (b) hallar su altura. (c) Determinar la posición y la altura de la imagen mediante un diagrama de rayos.**

Los datos del problema son  $R = -10$  cm,  $s = 10$  cm e  $y = 2$  cm.

(a) Utilizamos la ecuación del espejo para determinar  $s'$ :

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

con  $f = R/2 = -5$  cm. En consecuencia,

$$s' = \frac{sf}{s-f} = -\frac{10}{3} \text{ cm} = 3.33 \text{ cm}$$

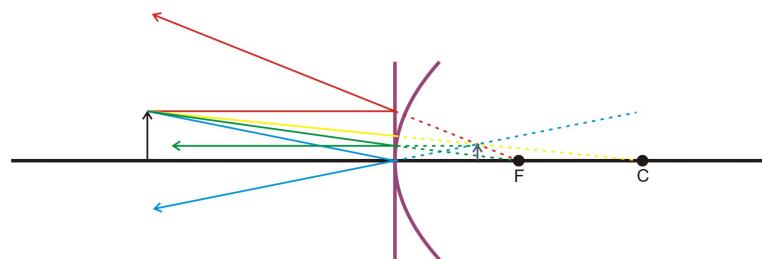
(b) La altura de la imagen la calculamos de (8.9):

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s}$$

es decir,

$$y' = -y \frac{s'}{s} = \frac{2}{3} \text{ cm} = 0.67 \text{ cm}$$

En consecuencia, la imagen es virtual, derecha y reducida.



#### 8.3.4. Resultados generales para espejos

Supongamos un objeto real ( $s > 0$ ). Vamos a determinar la naturaleza de la imagen (es decir, si es real o virtual) aplicando la ecuación del espejo (8.8) y si la imagen es invertida o derecha, así como si está ampliada o reducida, mediante la ecuación del aumento lateral (8.9).

Así, a partir de (8.8),

$$s' = \frac{sf}{s-f}$$

y, combinando esta ecuación con (8.9),

$$m = -\frac{s'}{s} = -\frac{s}{s-f} \Rightarrow |m| = \frac{1}{\left|\frac{s}{f}-1\right|}$$

A partir de esta ecuación se puede deducir que si  $|m| > 1$ ,  $|s'| > |s|$ , y si  $|m| < 1$ , entonces,  $|s'| < |s|$ .

### Espejo cóncavo

En este caso,  $f > 0$ . Como  $sf > 0$  siempre, el signo de  $s'$  será siempre el mismo de  $s - f$ . Por tanto,  $s' > 0$  si  $s > f$  y  $s' < 0$  si  $s < f$ .

Por otro lado, el signo de  $m$  será el opuesto de  $s - f$ , o bien, el opuesto de  $s'$

Finalmente,  $|m| > 1$  sí y solo sí  $-1 < s/f - 1 < 2$ , es decir,  $s < 2f$ . Análogamente, como  $f > 0$ ,  $|m| < 1$  si  $s > 2f$ .

En resumen,

- Si  $s > 2f$ , la imagen es real, invertida y reducida.
- Si  $2f > s > f$ , la imagen es real, invertida y aumentada.
- Si  $s < f$ , la imagen es virtual, derecha y aumentada.

### Espejo convexo

Ahora,  $f < 0$ , por lo que siempre se cumplirá que  $sf < 0$  y  $s - f > 0$ . En consecuencia,  $s' < 0$  y  $m > 0$ . Por otro lado,  $|m|$  no puede ser mayor que 1, ya que para que esto ocurriera,  $s$  debería ser menor que  $2f$ , lo cual no sería posible al ser  $f < 0$  y  $s > 0$ . Por tanto,  $|m| < 1$ .

Por consiguiente, *la imagen de un espejo convexo es siempre virtual, derecha y reducida*.

## 8.4. Lentes

### 8.4.1. Imágenes formadas por refracción (dioptrios)

Supongamos un cilindro transparente cuyo extremo se trabaja y pule para formar una superficie esférica convexa. La figura 8.12 muestra la formación de una imagen mediante refracción en una superficie como esta. Supongamos que el cilindro se sumerge en un líquido transparente de índice de refracción  $n_1$  y que el cilindro está hecho de un material plástico de índice de refracción  $n_2$  donde  $n_2 > n_1$ . De nuevo, solo los rayos paraxiales convergen en un punto. Aplicado la ley de Snell de la refracción puede deducirse una ecuación que relacione la distancia imagen con la distancia objeto, el radio de curvatura y los índices de refracción, siempre que se utilice las aproximación paraxial. Usando las relaciones geométricas indicadas en el pie de la figura 8.12 , se obtiene:

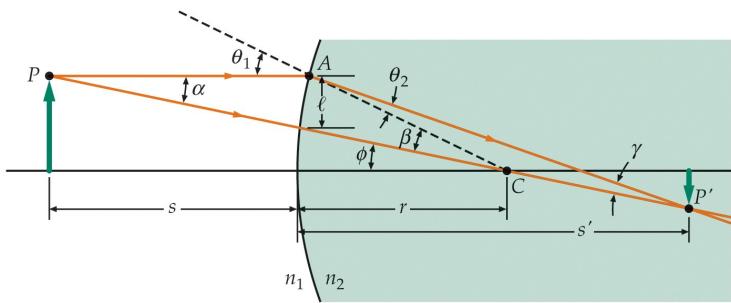


FIGURA 8.12: Construcción geométrica para relacionar la posición de la imagen con la posición del objeto en la refracción producida por una sola superficie esférica. Los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  están relacionados por la ley de Snell. Utilizando la aproximación de ángulos pequeños, se tiene  $n_1\theta_1 = n_2\theta_2$ . Del triángulo  $ACP'$  resulta  $\beta = \theta_2 + \gamma = (n_1/n_2)\theta_1 + \gamma$ . Podemos obtener otra relación para  $\theta_1$  a partir del triángulo  $PAC$ :  $\theta_1 = \alpha + \beta$ . Eliminando  $\theta_1$  entre estas dos ecuaciones se tiene  $n_1\alpha + n_1\beta + n_2\gamma = n_2\beta$ . Simplificando:  $n_1\alpha + n_2\gamma = (n_2 - n_1)\beta$ . Utilizando la aproximación de ángulos pequeños  $\alpha \approx \ell/s$ ,  $\beta \approx \ell/r$  y  $\gamma \approx \ell/s'$  se obtiene la ecuación (8.10).

### Refracción en una superficie única

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{r} \quad (8.10)$$

En la refracción, las imágenes reales se obtienen detrás de la superficie, que recibe el nombre de lado de transmisión, mientras que las imágenes virtuales se presentan en el lado de incidencia, delante de la superficie. El convenio de signos que utilizamos para la refracción es semejante al empleado en la reflexión:

1. La superficie refractante (dioptrio) separa el espacio en dos semiespacios.  $s > 0$  para objetos que estén en el semiespacio en el que está la luz incidente (objetos reales).
2.  $s' > 0$  para imágenes que estén en el semiespacio en el que está la luz refractada (imágenes reales).
3.  $r > 0$  si el centro de curvatura está en el semiespacio donde se halla la luz refractada.

El aumento debido a la refracción en una superficie esférica es:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{n_1 s'}{n_2 s} \quad (8.11)$$

### 8.4.2. Lentes delgadas

La aplicación más importante de la ecuación (8.10) para la refracción en una superficie simple consiste en hallar la posición de la imagen formada por una lente. Para ello hay que considerar la refracción de cada superficie por separado, con objeto de deducir una ecuación que relacione la distancia imagen con la distancia objeto, el radio de curvatura de cada superficie de la lente y el índice de refracción de la misma.

Consideraremos una lente muy delgada de índice de refracción  $n$  rodeada de aire. Sean  $r_1$  y  $r_2$  los radios de curvatura de cada una de las superficies de la lente. Si un objeto está a una distancia  $s$  de la primera superficie (y, por lo tanto, de la lente) puede determinarse la distancia  $s'_1$  de la imagen debida a la refracción en la primera superficie utilizando la ecuación (8.10):

$$\frac{1}{s} + \frac{n}{s'_1} = \frac{n-1}{r_1} \quad (8.12)$$

Esta imagen no llega a formarse porque la luz se refracta de nuevo en la segunda superficie.

En la figura se muestra el caso en que la distancia imagen  $s'_1$  para la primera superficie es negativa, indicando que sería una imagen virtual a la izquierda de la superficie. Los rayos dentro del vidrio, refractados por la primera superficie, divergen como si procediesen del punto imagen  $P'_1$ . Estos inciden sobre la segunda superficie formando los mismos ángulos que si se encontrase un objeto en este punto imagen. Por consiguiente, la imagen dada por la primera superficie se convierte en objeto para la segunda superficie. Como la lente es de grosor despreciable, la distancia objeto es igual a  $s'_1$ , pero como la distancia objeto delante de la superficie de incidencia es positiva, mientras la distancia imagen es negativa allí, la distancia objeto para la segunda superficie es  $s_2 = -s'_1$ . A continuación escribimos la ecuación (8.10) para la segunda superficie con  $n_1 = n$ ,  $n_2 = 1$ , y  $s = -s'_1$ . La distancia imagen para la segunda superficie es la distancia imagen final  $s'$  para la lente:

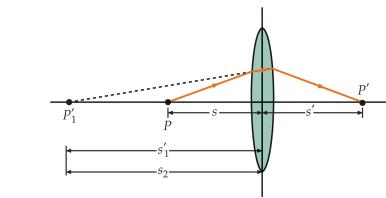
$$\frac{n}{-s'_1} + \frac{1}{s'} = \frac{1-n}{r_2} \quad (8.13)$$

Podemos eliminar la distancia imagen de la primera superficie,  $s'_1$  sumando las ecuaciones (8.12) y (8.13). Así, se obtiene:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (8.14)$$

Esta ecuación da la distancia imagen  $s'$  en función de la distancia objeto  $s$  y de las propiedades de la lente delgada ( $r_1$ ,  $r_2$  y su índice de refracción  $n$ ). Como en el caso de los espejos, la distancia focal  $f$  de una lente delgada se define como la distancia imagen que corresponde a una distancia objeto infinita. Haciendo  $s \rightarrow \infty$  y escribiendo  $f$  en lugar de la distancia imagen  $s'$ , se tiene:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) \quad (8.15)$$



Fórmula del constructor de lentes

Esta ecuación se denomina **ecuación del constructor de lentes**; nos da la distancia focal de una lente delgada en función de sus propiedades. Sustituyendo el segundo miembro de la ecuación (8.14) por  $1/f$  se tiene:

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \quad (8.16)$$

Ecuación de la lente delgada

Esta ecuación se denomina **ecuación de la lente delgada**. Obsérvese que es la misma que la ecuación del espejo (8.8). Recuérdese, sin embargo, que el

convenio de signos para la refracción es un poco diferente del definido para la reflexión. En el caso de las lentes, la distancia imagen  $s'$  es positiva cuando la imagen está en el lado de transmisión de la lente, es decir, cuando está en el lado opuesto de aquél por donde incide la luz. El signo de la distancia focal (ver 8.15) está determinado por el convenio de signos de la refracción en una sola superficie. Es decir, el radio es positivo si el centro de curvatura está en el lado de transmisión de la lente, y negativo si se encuentra en la parte por donde incide la luz. Para lentes como las de la figura anterior (biconvexa),  $r_1 > 0$  y  $r_2 < 0$ , de modo que  $f > 0$ . Una lente para la que  $r_1 < 0$  y  $r_2 > 0$  (bícónica), cumplirá que  $f < 0$ . Las lentes con distancia focal positiva reciben el apelativo de **convergentes** y las de distancia focal negativa se denominan **divergentes**. Toda lente que es más gruesa en el centro que en los bordes es una lente convergente (con tal de que el índice de refracción de la lente sea mayor que el del medio que la rodea), mientras que las lentes más gruesas por los bordes son divergentes.

Si sobre una lente convergente inciden rayos paralelos de luz desde la izquierda, estos se verán enfocados en un punto situado a una determinada distancia a la derecha de la lente, mientras que en caso de que incidieran procediendo de la derecha, se enfocaría a la misma distancia a la izquierda de la lente. Ambos puntos son los **puntos focales** o **focos** de la lente. Utilizando la propiedad de los rayos luminosos, podemos ver que la luz que diverge desde un foco e incide sobre la lente saldrá de ella como un haz de rayos paralelos, como se ve en la figura 8.13a. En un problema sobre lentes en particular,

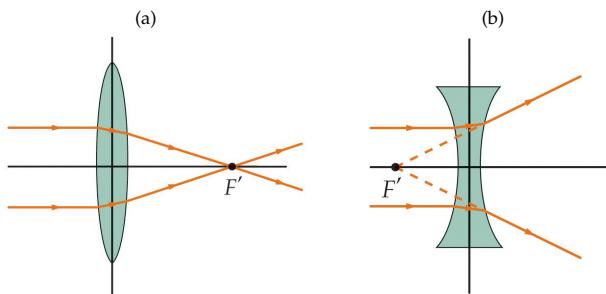
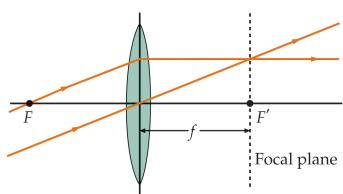


FIGURA 8.13: (a) Rayos de luz incidiendo sobre una lente convergente. Los rayos se desvían en cada superficie y convergen en el punto focal  $F'$ . (b) Rayos incidiendo sobre una lente divergente. Los rayos se desvían hacia el exterior y divergen como si procediesen del punto focal  $F'$ .

en que se especifique el sentido de la luz incidente, el punto objeto para el cual la luz emerge de la lente como un haz de rayos paralelos, se denomina **primer punto focal**  $F$  y el punto donde se enfocan los rayos incidentes paralelos se llama **segundo punto focal**  $F'$ . En el caso de una lente convergente, el primer punto focal está en el lado de incidencia y el segundo, en el lado de transmisión. Si un haz de rayos paralelos incide sobre la lente formando un pequeño ángulo con el eje<sup>1</sup>, como se indica en la figura, se enfocará en un punto situado en el **plano focal** a una distancia  $f$  de la lente.



En el caso de una lente divergente, los rayos paralelos al eje que inciden por la izquierda, divergen al pasar a través de la lente. Las prolongaciones de estos rayos se cortan en el segundo punto focal, situado ahora en la región de incidencia (ver figura 8.13b). Por tanto, en el caso de una lente divergente, el primer punto focal está en el lado de transmisión y el segundo, en el lado de incidencia.

<sup>1</sup>Este eje también recibe el nombre de *eje principal*

La inversa de la distancia focal se denomina **potencia de la lente**. Cuando se expresa en metros una distancia focal, la potencia viene dada en inversos de metros ( $m^{-1}$ ), denominados **dioptras** (D):

$$P = \frac{1}{f} \quad (8.17)$$

La potencia de una lente mide su capacidad para enfocar los rayos paralelos a una distancia corta de la misma. Cuanto más corta es la distancia focal, mayor es la potencia. Por ejemplo, una lente con una distancia focal de 25 cm = 0.25 m, tiene una potencia de 4 D. Como la distancia focal de una lente divergente es negativa, su potencia es también negativa. En los experimentos de laboratorio con lentes, es mucho más fácil medir la distancia focal que calcularla a partir de los radios de curvatura de las superficies.

#### 8.4.3. Diagramas de rayos para las lentes

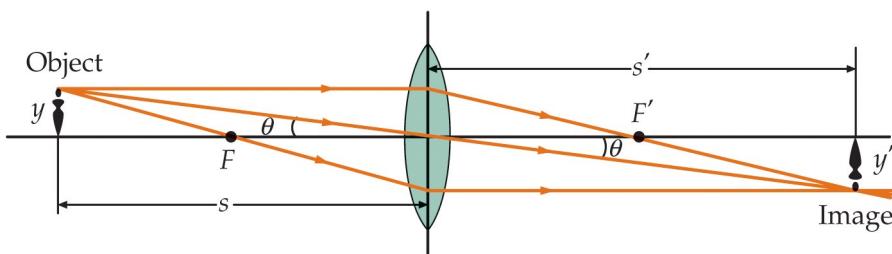


FIGURA 8.14: Diagrama de rayos para una lente delgada convergente. Para mayor sencillez se ha supuesto que toda la desviación de los rayos tiene lugar en el plano central. Los rayos que pasan por el centro no se desvían porque las caras de la lente son paralelas y están muy próximas.

Como sucede con las imágenes formadas por los espejos, es conveniente situar las imágenes dadas por las lentes mediante métodos gráficos. La figura 8.14 ilustra este método en el caso de una lente convergente delgada. Para mayor sencillez, consideremos que los rayos solo se desvían en el plano que pasa por el centro de la lente. Los tres rayos principales son:

1. El **rayo paralelo** al eje. Este rayo se desvía de modo que pasa por el segundo punto focal de la lente.
2. El **rayo central** que pasa por el centro de la lente (también llamado centro óptico). Este rayo no sufre desviación <sup>2</sup>.
3. El **rayo focal**, que pasa por el primer punto focal y emerge paralelo al eje.

Estos tres rayos convergen en el punto imagen, como se ve en la figura 8.14. En este caso, la imagen es real e invertida. En esta figura tenemos  $\tan \theta = y/s = -y'/s'$ . El aumento lateral viene dado por:

$$m = \frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \quad (8.18)$$

<sup>2</sup>Las caras de la lente son paralelas en este punto, de modo que el rayo emerge en la misma dirección pero ligeramente desplazado. Como la lente es delgada, dicho desplazamiento es despreciable

Esta expresión es la misma que la obtenida para los espejos. Una vez más, un aumento negativo indica que la imagen está invertida. En la figura 8.15, se muestra el diagrama de rayos para una lente divergente.

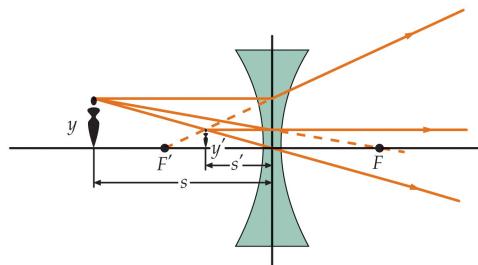


FIGURA 8.15: Diagrama de rayos para una lente delgada divergente. El rayo paralelo se desvía alejándose del eje como si procediese del segundo punto focal  $F'$ . El rayo dirigido hacia el punto focal  $F$  emerge paralelo al eje.

Finalmente, observemos que la imagen de una lente convergente (divergente) tendrá las mismas características que la de un espejo cóncavo (convexo), ya que la ecuación de la lente (8.16) es la misma que la del espejo (8.8), así como la expresión del aumento lateral. Las características de la imagen de un espejo se encuentran en la Sección 8.3.4.

---

#### EJEMPLO 8.3 Imagen para una lente convergente

**Un objeto de 1.2 cm de alto se coloca a 4 cm de una lente biconvexa cuya distancia focal es de 12 cm. (a) Localizar la imagen y (b) hallar su altura. (c) Determinar la posición y la altura de la imagen mediante un diagrama de rayos.**

Los datos del problema son  $f = 12 \text{ cm}$ ,  $s = 4 \text{ cm}$  e  $y = 1.2 \text{ cm}$ .

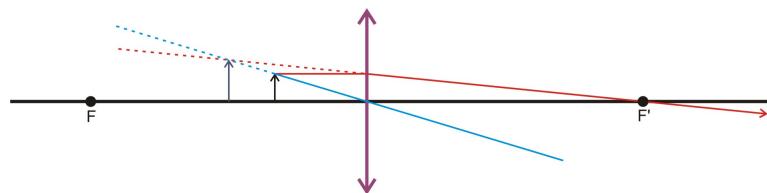
(a) Utilizamos la ecuación de la lente para determinar  $s'$ :

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow s' = \frac{sf}{s-f} = \frac{12 \times 4}{12-4} = -6 \text{ cm}$$

(b) La altura de la imagen la calculamos de (8.18):

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \Rightarrow y' = -y \frac{s'}{s} = -1.2 \frac{-6}{4} = 1.8 \text{ cm}$$

En consecuencia, la imagen es virtual, derecha y aumentada.



---

**EJEMPLO 8.4 Imagen para una lente divergente**

Un objeto de 1.2 cm de alto se coloca a 4 cm de una lente biconcava cuya distancia focal es de 12 cm. (a) Localizar la imagen y (b) hallar su altura. (c) Determinar la posición y la altura de la imagen mediante un diagrama de rayos.

Los datos del problema son  $f = -12$  cm,  $s = 4$  cm e  $y = 1.2$  cm.

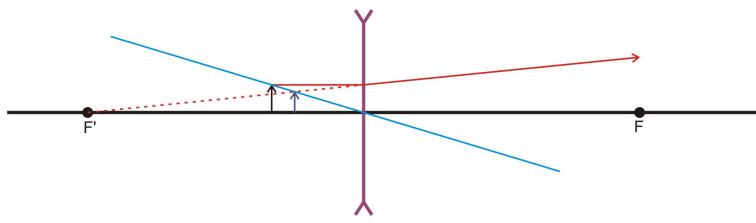
- (a) Utilizamos la ecuación de la lente para determinar  $s'$ :

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f} \Rightarrow s' = \frac{sf}{s-f} = -1.71 \text{ cm}$$

- (b) La altura de la imagen la calculamos de (8.18):

$$\frac{y'}{y} = -\frac{s'}{s} \Rightarrow y' = -y \frac{s'}{s} = 0.51 \text{ cm}$$

En consecuencia, la imagen es virtual, derecha y reducida.




---

**Lentes múltiples**

Si combinamos en un sistema óptico dos o más lentes delgadas, podemos hallar la imagen final producida por el sistema hallando la distancia imagen correspondiente a la primera lente y utilizándola junto con la distancia entre lentes para hallar la distancia objeto correspondiente a la segunda lente. Es decir, se considera cada imagen, sea real o virtual, como el objeto para la siguiente lente.

---

**EJEMPLO 8.5 Imagen formada por una segunda lente**

A la derecha de la lente del ejemplo 8.3 y a 12 cm de ella se coloca una segunda lente de distancia focal 6 cm. (a) Localizar la imagen final y (b) determinar su altura. (c) Realizar un diagrama de rayos.

Ahora, la imagen de la primera lente, será el objeto para la segunda. Como la imagen se formaba 6 cm a la izquierda de la primera lente, el objeto de la segunda lente estará a una distancia  $s_2 = 6 + 12 = 18$  cm, debido a que las lentes están separadas 12 cm. Otros datos del problema son  $f_2 = 6$  cm e  $y_2 = 1.8$  cm.

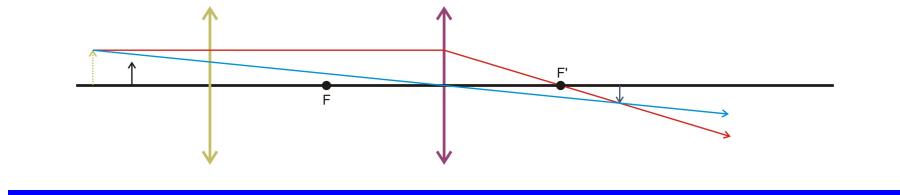
- (a) Utilizamos la ecuación de la lente para determinar  $s'_2$ :

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{s'_2} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow s'_2 = \frac{s_2 f_2}{s_2 - f_2} = 9 \text{ cm}$$

(b) La altura de la imagen la calculamos de (8.18):

$$\frac{y'_2}{y_2} = -\frac{s'_2}{s_2} \Rightarrow y'_2 = -y_2 \frac{s'_2}{s_2} = 0.9 \text{ cm}$$

En consecuencia, la imagen es real, derecha y reducida.



### Lentes compuestas

Cuando dos lentes delgadas de distancias focales  $f_1$  y  $f_2$  se sitúan en contacto, la distancia focal efectiva de la combinación,  $f_{\text{ef}}$ , viene dada por:

$$\frac{1}{f_{\text{ef}}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \quad (8.19)$$

mientras que la potencia efectiva es:

$$P_{\text{ef}} = P_1 + P_2 \quad (8.20)$$

## 8.5. Aberraciones

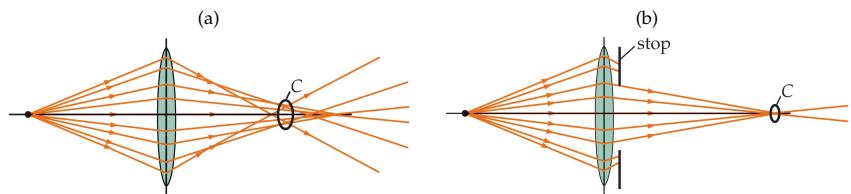


FIGURA 8.16: Aberración esférica para una lente. (a) Los rayos que proceden de un punto objeto situado en el eje no se enfocan en un solo punto. (b) Puede reducirse la aberración esférica bloqueando las partes exteriores de la lente con un diafragma, pero así se reduce también la cantidad de luz que llega a la imagen.

Cuando los rayos procedentes de un punto objeto no se enfocan todos en un solo punto imagen, la imagen resultante está borrosa o distorsionada y se denomina **aberración**. La figura 8.16 muestra los rayos que, procedentes de una fuente puntual sobre el eje, atraviesan una lente delgada con superficies esféricas. Los rayos que inciden sobre la lente lejos del eje se desvían mucho más que los próximos al mismo, con el resultado de que no todos los rayos se enfocan en un solo punto. En lugar de ello, la imagen tiene el aspecto de un disco circular. El **círculo de mínima confusión** se encuentra en el punto  $C$  en donde el diámetro es mínimo. Este tipo de aberración se denomina **aberración esférica**. Es el mismo tipo de aberración que el considerado en la Sección 8.3 al estudiar los espejos. El efecto correspondiente para los puntos situados fuera del eje produce imágenes en forma de cometa en lugar de círculos, y se denomina **coma**.

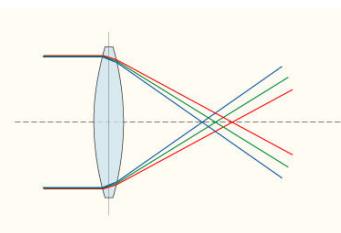
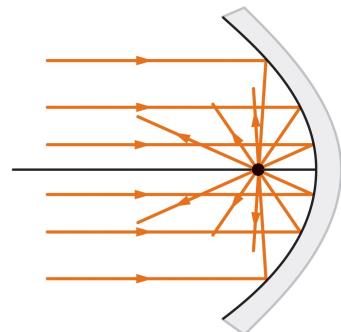
El **astigmatismo** es la formación de la imagen de un punto situado fuera del eje como una línea; con esta aberración, los rayos procedentes de un punto objeto convergen a una cierta distancia de la lente en una línea que se encuentra en el lugar definido por el eje óptico y el punto objeto y, a una distancia algo diferente de la lente, en otra línea perpendicular a este plano. El círculo de mínima confusión aparece entre ambas posiciones en un lugar que depende de la distancia del punto objeto al eje y de su distancia a la lente. Como consecuencia de esto, las imágenes de los puntos objeto que se encuentran en un plano no están, en general, en otro plano, sino en una superficie algo curvada; este efecto se denomina **curvatura de campo**. Finalmente, la imagen de una línea recta que no pasa por el eje puede curvarse, y debido a ello, la imagen de un cuadrado cuyo centro está en el eje puede parecer un barrilete (los lados se curvan hacia afuera) o un corsé (los lados se curvan hacia adentro). Este efecto, denominado **distorsión**, no está relacionado con la ausencia de nitidez de la imagen, sino que es el resultado de una variación del aumento lateral con la distancia al eje.

Todas estas aberraciones, llamadas también **aberraciones monocromáticas**, no se deben a ningún defecto de la lente o del espejo, sino que son simples resultados de la aplicación de las leyes de la refracción y de la reflexión a las superficies esféricas. Las aberraciones no resultan patentes en nuestras sencillas ecuaciones porque hemos utilizado la aproximación paraxial en la deducción de las mismas.

Algunas aberraciones pueden eliminarse o corregirse parcialmente con el empleo de superficies no esféricas para las lentes y espejos; pero las superficies no esféricas son normalmente mucho más difíciles y costosas de fabricar que las esféricas. Un ejemplo de superficie reflectora no esférica es el espejo parabólico que puede verse en la figura. Los rayos que son paralelos al eje de una superficie parabólica se reflejan y enfocan en un punto común sin que importen lo alejados que se encuentren del eje. Se utilizan comúnmente las superficies reflectoras parabólicas en los grandes telescopios astronómicos, que necesitan una gran superficie reflectora para recoger el máximo de luz y conseguir así que la imagen sea lo más intensa posible (antenas parabólicas). Los detectores para enfocar microondas procedentes de satélites de comunicación se construyen con superficies parabólicas. También se utilizan estas superficies en los proyectores con el fin de producir un haz luminoso paralelo a partir de un pequeño foco situado en el punto focal de la superficie.

Una aberración importante que aparece en las lentes, pero no en los espejos es la **aberración cromática** (ver figura), que se debe a las variaciones del índice de refracción con la longitud de onda. A partir de la ecuación (8.15) podemos ver que la distancia focal de una lente depende de su índice de refracción  $n$ , y, por lo tanto, es diferente para cada longitud de onda. Como  $n$  es ligeramente mayor para la luz azul que para la luz roja, la distancia focal para la luz azul será más corta que para la luz roja. Puesto que la aberración cromática no aparece en los espejos, muchos de los grandes telescopios utilizan un gran espejo en lugar de una gran lente captadora de luz.

La aberración cromática, y otras aberraciones, pueden corregirse parcialmente utilizando combinaciones de lentes en lugar de una sola. Por ejemplo, una lente convergente, y una divergente de mayor distancia focal, pueden utilizarse juntas para producir un sistema equivalente a una lente convergente que tenga una aberración cromática mucho menor que una lente simple de la misma distancia focal. La lente de una buena cámara fotográfica contiene normalmente seis elementos para corregir las diversas aberraciones que se encuentran presentes.





## Apéndice A

### Polímetros

---

Los dispositivos que miden la corriente, la diferencia de potencial y la resistencia se denominan **amperímetros**, **voltímetros** y **ohmímetros**, respectivamente. A menudo, los tres dispositivos están incluido en un solo **polímetro**, que se conecta según el uso de cada uno de ellos. Cualquiera puede usar un voltímetro para medir la tensión entre los bornes de la batería del coche o un ohmímetro para determinar la resistencia entre dos puntos de un aparato eléctrico doméstico (por ejemplo, un tostador o una bombilla) en el que se sospecha que hay un cortocircuito o un cable roto.

Para medir la intensidad de corriente a través de la resistencia del circuito simple de la Figura 1.1a colocamos un amperímetro en serie con la resistencia, según se indica en la figura, de modo que el amperímetro y la resistencia sean recorridos por la misma corriente. Puesto que el amperímetro tiene cierta resistencia, la corriente del circuito se modifica cuando se incluye el amperímetro. En el caso ideal, el amperímetro deberá tener una resistencia muy pequeña de modo que introduzca una variación despreciable en la corriente a medir.

La diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia se mide colocando un voltímetro en paralelo con la misma, según se indica en la Figura 1.1b, de modo que la caída de potencial a través del voltímetro sea la misma que a través de la resistencia. El voltímetro reduce la resistencia entre los puntos *a* y *b*, aumentando así la corriente total que circula en el circuito y variando la caída de potencial a través de la resistencia. Un buen voltímetro tiene una resistencia muy grande para hacer mínima su influencia sobre el circuito.

El componente principal de un amperímetro o un voltímetro es el **galvanómetro**, aparato que detecta una pequeña corriente que pasa a través de él. El galvanómetro se proyecta de modo que la lectura en la escala sea proporcional a la corriente que pasa por él. Un galvanómetro típico utilizado en los laboratorios de prácticas consiste en una bobina de alambre situada en el campo magnético de un imán permanente. Cuando circula una corriente por la bobina, el campo magnético ejerce un momento de fuerza sobre ella y la hace girar. Un vástago unido a la bobina indica la lectura sobre una escala. La propia bobina contribuye con una pequeña resistencia al conectar el galvanómetro al circuito.

Para construir un amperímetro mediante un galvanómetro se coloca una resistencia pequeña, denominada **resistencia shunt**, en *paralelo* con el galvanómetro. Puesto que la resistencia shunt es normalmente mucho menor

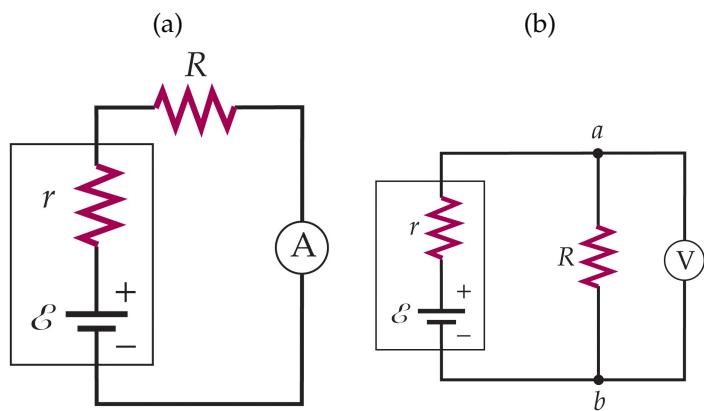


FIGURA 1.1: (a) Para medir la corriente que circula por la resistencia  $R$  se coloca un amperímetro  $\textcircled{A}$  en serie con ella, de tal modo que por él circula la misma corriente que por la resistencia. (b) Para medir la caída de tensión entre los extremos de una resistencia, se coloca un voltímetro  $\textcircled{V}$  en paralelo con ella, de modo que las caídas de potencial a través del voltímetro y la resistencia son las mismas.

que la resistencia del galvanómetro, la mayor parte de la corriente circula por el shunt. De este modo la resistencia efectiva del amperímetro es aproximadamente igual que la resistencia shunt, la cual es mucho menor que la resistencia interna del galvanómetro solo. Para construir un voltímetro, se conecta en *serie* con el galvanómetro una resistencia grande, de manera que la resistencia equivalente del voltímetro es mucho mayor que la del galvanómetro solo. La Figura 1.2 ilustra la construcción de un amperímetro y de un voltímetro a partir de un galvanómetro. En estos dibujos esquemáticos se muestra separadamente la resistencia del galvanómetro  $R_g$ , pero en realidad esta forma parte del galvanómetro.

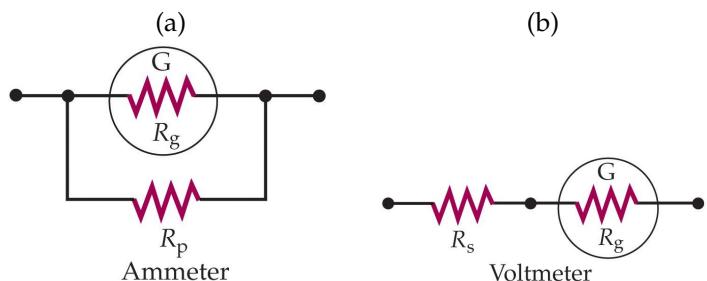


FIGURA 1.2: (a) Un amperímetro se compone de un galvanómetro  $\textcircled{G}$  cuya resistencia es  $R_g$  y una resistencia pequeña en paralelo  $R_p$ . (b) Un voltímetro se compone de un galvanómetro  $\textcircled{G}$  y una resistencia grande en serie  $R_s$ .

Un ohmímetro simple para medir resistencia consiste en una batería conectada en serie con un galvanómetro y una resistencia, como indica la Figura 1.3a. La resistencia  $R_s$  se elige de modo que cuando los terminales  $a$  y  $b$  se cortocircuitan (es decir, se ponen en contacto eléctrico con una resistencia despreciable entre ellos) y la corriente a través del galvanómetro ofrece una desviación a fondo de escala. Así, una desviación a fondo de escala significa que no hay resistencia entre los terminales  $a$  y  $b$  y una desviación nula indica que existe una resistencia infinita entre los terminales. Cuando estos se conectan a través de una resistencia incógnita  $R$ , la intensidad de corriente

que circula a través del galvanómetro depende de  $R$ , de modo que la escala puede calibrarse para dar una lectura directa de la resistencia  $R$ , como indica la Figura 1.3b. Como el ohmímetro suministra una corriente a través de la resistencia a medir, este instrumento debe manejarse con precaución. Por ejemplo, no es aconsejable medir la resistencia de un galvanómetro sensible con un ohmímetro pues la corriente suministrada por la batería de este aparato lo dañaría.

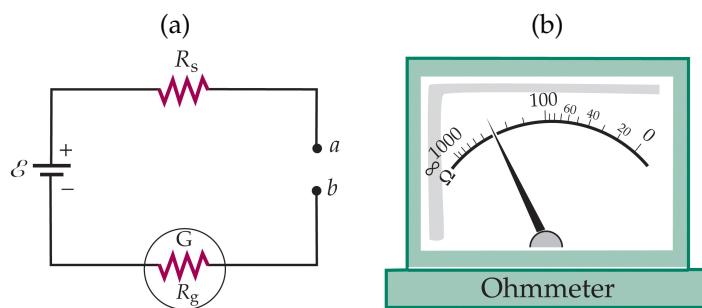


FIGURA 1.3: (a) Ohmímetro formado por una batería en serie con un galvanómetro y una resistencia  $R_s$ , elegida de tal modo que el galvanómetro sufre una desviación a fondo de escala cuando los puntos  $a$  y  $b$  están en cortocircuito. (b) Cuando una resistencia  $R$  se sitúa entre  $a$  y  $b$ , la aguja del galvanómetro se desvía en una cantidad que depende del valor de  $R$ . La escala del galvanómetro está calibrada para hacer lecturas en ohmios.



## Apéndice B

# Transitorios en circuitos RC y circuitos RL

---

### B.1. Circuitos RC

Se denomina **circuito RC** a aquel en el que interviene una resistencia y una capacidad. La corriente en un circuito RC fluye en un solo sentido, como en los circuitos de corriente continua (cc), pero la intensidad de corriente varía con el tiempo. Un ejemplo práctico de un circuito RC es de un dispositivo de flash en una cámara fotográfica. Antes de tomar la fotografía, la batería del flash carga el condensador a través de una resistencia. Cuando esto se verifica, el flash está preparado. Al hacer la fotografía, el condensador se descarga a través de la lámpara del flash. El condensador se recarga por acción de la batería y poco tiempo después, el flash está dispuesto para otra fotografía. Mediante las reglas de Kirchhoff, podemos obtener unas ecuaciones que expresan la carga  $Q$  y la intensidad de corriente  $I$  en función del tiempo, tanto en el proceso de carga como en el de descarga de un condensador a través de una resistencia.

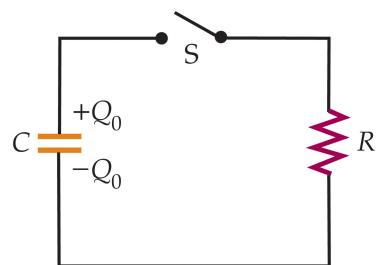
#### B.1.1. Descarga de un condensador

La figura muestra un condensador con una carga inicial  $+Q_0$  en la placa superior y  $-Q_0$  en la placa inferior. Se conecta a una resistencia  $R$  y a un interruptor  $S$  que está inicialmente abierto. La diferencia de potencial a través del condensador es inicialmente  $V_0 = Q_0/C$ , siendo  $C$  su capacidad.

Cerramos el interruptor en instante  $t = 0$ . Puesto que ahora existe una diferencia de potencial entre los extremos de la resistencia, debe pasar una corriente por la misma. La corriente inicial es:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = \frac{Q_0}{RC} \quad (\text{B.1})$$

La corriente se debe al flujo de carga que va desde la placa positiva a la negativa pasando por la resistencia y así, después de cierto tiempo, la carga del condensador se ve reducida. Si tomamos como positiva la corriente en el sentido de las agujas del reloj, la intensidad de corriente es igual a la



disminución de esta carga por unidad de tiempo. Si  $Q$  es la carga sobre el condensador en un instante cualquiera, la corriente en dicho momento es:

$$I = -\frac{dQ}{dt} \quad (B.2)$$

(el signo menos debe ser interpretado en el sentido de como  $Q$  decrece,  $dQ/dt$  es una cantidad negativa, e  $I$  debe ser positiva). Recorriendo el circuito en el sentido de la corriente (sentido horario) nos encontramos con una caída de potencial  $IR$  en la resistencia y aumento de potencial  $Q/C$  entre las placas del condensador. La regla de las mallas nos da:

$$\frac{Q}{C} - IR = 0 \quad (B.3)$$

en donde tanto  $Q$  como  $I$  son funciones del tiempo y están relacionadas por la ecuación (B.2). Sustituyendo  $I$  por  $-dQ/dt$  en la ecuación (B.3) tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{C} + R \frac{dQ}{dt} &= 0 \\ \text{o} \quad \frac{dQ}{dt} &= -\frac{1}{RC} Q \end{aligned} \quad (B.4)$$

Para resolver esta ecuación, en primer lugar, sepáramos las variables  $Q$  y  $t$ . Multiplicando ambos miembros por  $dt$  y dividiendo por  $Q$  resulta:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} dt \quad (B.5)$$

Ahora, las variables  $Q$  y  $t$  están en diferentes miembros de la ecuación anterior, por lo que integrando desde  $Q_0$  en  $t = 0$  hasta  $Q(t)$  en  $t$ , tenemos que:

$$\int_{Q_0}^{Q(t)} \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC} \int_0^t dt$$

de modo que

$$\ln \frac{Q(t)}{Q_0} = -\frac{t}{RC}$$

Despejando  $Q(t)$  nos da:

$$Q(t) = Q_0 \exp \left( -\frac{t}{RC} \right) = Q_0 \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) \quad (B.6)$$

en donde  $\tau$ , llamado **tiempo característico**, es el tiempo durante el cual la carga disminuye hasta  $1/e$  de su valor original:

Tiempo característico

$$\tau = RC \quad (B.7)$$

La Figura 2.1a muestra la carga del condensador del circuito en función del tiempo. Después de un tiempo  $t = \tau$ , la carga es  $Q = Q_0/e \approx 0.37Q_0$ . Después de un tiempo igual a varias veces el tiempo característico, la carga del condensador es despreciable. Este tipo de disminución, muy común en la Naturaleza, se llama **decrecimiento exponencial**. Ocurre siempre que

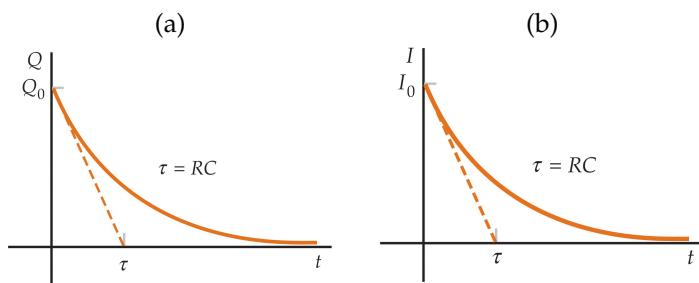


FIGURA 2.1: Representación de la carga de un condensador (a) y de la intensidad de corriente (b) en función del tiempo para la descarga de un condensador en un circuito RC. El tiempo característico  $\tau = RC$  es el tiempo necesario para que la carga decrezca en un factor  $e^{-1}$ ; el tiempo característico es también el tiempo que tardaría el condensador en descargarse completamente si su velocidad de descarga fuera constante, como indica la línea de trazos).

la disminución de una magnitud con el tiempo es proporcional a la propia magnitud.

La disminución de carga en un condensador puede compararse con disminución de la cantidad de agua en un vaso que tiene un pequeño agujero en el fondo. El flujo de agua que sale por el orificio es proporcional a la presión del agua, la cual es a su vez proporcional a la cantidad de agua existente en el vaso.

La intensidad de corriente se obtiene derivando la ecuación (B.6):

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$$

Usando la ecuación (B.1) obtenemos:

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{B.8})$$

en donde  $I_0 = V_0/R = Q_0/(RC)$  es la corriente inicial. La corriente, como la carga, también disminuye exponencialmente con el tiempo siendo su tiempo característico  $\tau = RC$ . Este proceso se representa en la Figura 2.1b.

### B.1.2. Carga de un condensador

La Figura 2.2a muestra el circuito que puede utilizarse para cargar un condensador inicialmente descargado. El interruptor  $S$ , abierto inicialmente, se cierra en el instante  $t = 0$ . La carga comienza a fluir inmediatamente a través de la resistencia, depositándose en la placa positiva del condensador (Figura 2.2b). Si la carga del condensador en un instante cualquiera  $t$  es  $Q$ , la corriente en el circuito es  $I$ , y el sentido positivo es el de las agujas del reloj, la regla de las mallas nos da:

$$\mathcal{E} - IR - \frac{Q}{C} = 0 \quad (\text{B.9})$$

Analizando esta ecuación, vemos que para  $t = 0$ , la carga del condensador es cero y la corriente es  $I_0 = \mathcal{E}/R$ . La carga entonces crece y la corriente decrece. La carga alcanza su valor máximo de  $Q_f = C\mathcal{E}$  cuando la corriente

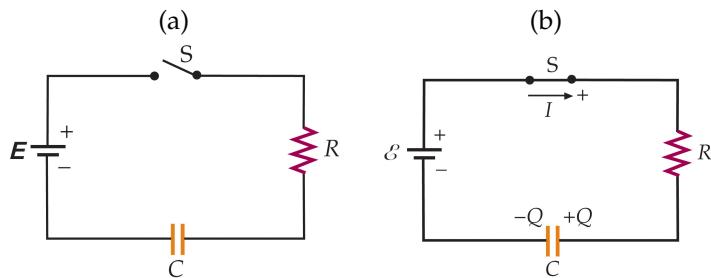


FIGURA 2.2: (a) Circuito para cargar un condensador hasta una diferencia de potencial  $\mathcal{E}$ . (b) Despues de cerrar el interruptor existe una corriente y una caída de potencial a través de la resistencia y una carga y una caída de potencial en el condensador.

$I$  es cero, lo cual coincide con el resultado obtenido a partir de la ecuación (B.9).

En este circuito se ha elegido el sentido de modo que si  $I$  es positiva,  $Q$  aumenta. Por lo tanto:

$$I = +\frac{dQ}{dt} \quad (\text{B.10})$$

Sustituyendo esta ecuación en (B.9)

$$\mathcal{E} - R \frac{dQ}{dt} - \frac{Q}{C} = 0 \quad (\text{B.11})$$

Para resolver esta ecuación se sigue el mismo procedimiento que en la descarga del condensador. El resultado es:

$$Q(t) = C\mathcal{E} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{t}{RC} \right) \right] = Q_f \left[ 1 - \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) \right] \quad (\text{B.12})$$

en donde  $Q_f = C\mathcal{E}$  es la carga final. La intensidad de corriente se obtiene de (B.10):

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} \exp \left( -\frac{t}{RC} \right) = I_0 \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) \quad (\text{B.13})$$

en donde la corriente inicial en este caso es  $I_0 = \mathcal{E}/R$ . La Figura 2.3 muestra la carga y la corriente en función del tiempo.

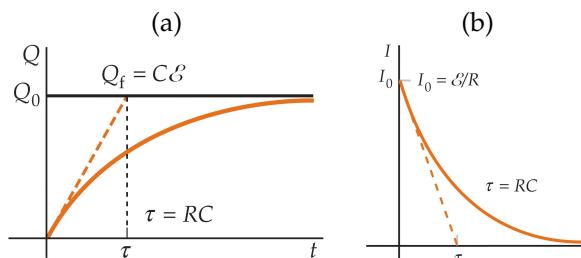


FIGURA 2.3: Representación de la carga de un condensador (a) y de la intensidad de corriente (b) en función del tiempo para la carga de un condensador en un circuito RC. El tiempo característico  $\tau = RC$  es el tiempo necesario para que la carga decrezca en un factor  $1 - e^{-1}$ ; si la velocidad de carga fuera constante, el condensador se cargaría al cabo de un tiempo  $t = \tau$ .

A partir de las expresiones (B.6), (B.8), (B.12) y (B.13), se puede observar el comportamiento del circuito en tiempos extremos. Cuando el condensador

está descargado actúa igual que un cortocircuito (es decir, es equivalente a un cable de resistencia nula). Cuando el condensador está cargado, actúa como un circuito abierto (o resistencia infinita).

## B.2. Circuitos RL

Un circuito que contiene una resistencia y una autoinducción tal como el indicado en la figura se denomina **circuito RL**. Como a temperatura ambiente todos los circuitos contienen resistencia y autoinducción, el análisis de un circuito RL puede aplicarse en cierta extensión a todo circuito. Para el circuito de la figura la aplicación de la regla de las mallas nos dio la ecuación (6.12):

$$\mathcal{E}_0 - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (\text{B.14})$$

Podemos entender muchas de las características de la corriente en este circuito a partir de la ecuación anterior sin necesidad de resolverla. Inicialmente (justo después de cerrar el interruptor) la corriente es nula, de modo que  $IR = 0$  y  $L dI/dt$  es igual a la fem de la batería,  $\mathcal{E}_0$ . Haciendo  $I = 0$  en la ecuación (B.14) resulta:

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} \quad (\text{B.15})$$

Cuando la corriente crece,  $IR$  también lo hace y  $dI/dt$  disminuye. Obsérvese que la corriente no puede saltar súbitamente de 0 a un valor finito como lo haría si no tuviera autoinducción. Cuando la autoinducción  $L$  no es despreciable,  $dI/dt$  es finita y, por lo tanto, la corriente debe ser continua en el tiempo. En un tiempo breve, la corriente alcanza un valor positivo  $I$ , y su variación con el tiempo es:

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E}_0}{L} - \frac{IR}{L} \quad (\text{B.16})$$

En este momento, la corriente es todavía creciente, pero su ritmo de crecimiento es menor que en el instante  $t = 0$ . El valor final de la corriente puede obtenerse haciendo  $dI/dt$  igual a cero. El valor final de la corriente es, por lo tanto,

$$I_f = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \quad (\text{B.17})$$

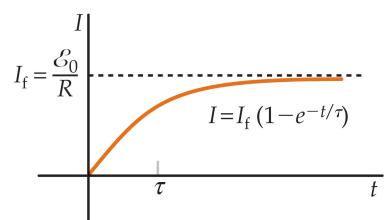
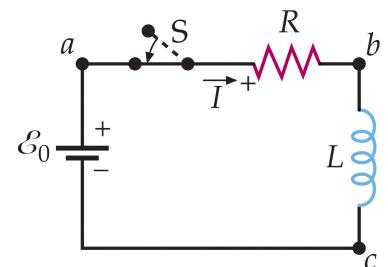
La figura muestra la variación de la corriente en este circuito en función del tiempo. Esta figura es semejante a la que representa la variación de la carga en un condensador cuando este se carga en un circuito RC (Figura 2.2).

La ecuación (B.14) tiene la misma forma que la ecuación (B.11) correspondiente a la carga de un condensador y puede resolverse de igual modo, es decir, separando variables e integrando. El resultado es:

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{R}{L} t \right) \right] = I_f \left[ 1 - \exp \left( -\frac{t}{\tau} \right) \right] \quad (\text{B.18})$$

en donde  $I_f = \mathcal{E}_0/R$  es la corriente cuando  $t \rightarrow \infty$ ,

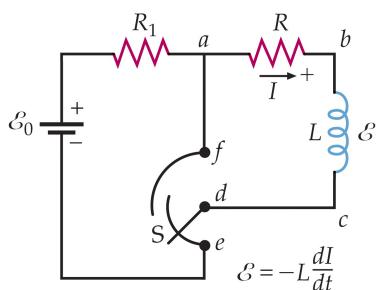
$$\tau = \frac{L}{R} \quad (\text{B.19})$$



es el **tiempo característico** del circuito. Cuanto mayor es la autoinducción  $L$  o menor la resistencia  $R$ , más tiempo exige el establecimiento de una fracción determinada de la corriente final  $I_f$ .

En la figura adjunta, el circuito posee un interruptor adicional que nos permite eliminar la batería del circuito sin interrumpir la corriente que circula por la autoinducción y una resistencia adicional  $R_1$  para proteger a la batería, de modo que no resulte cortocircuitada cuando el interruptor hace contacto. Si el interruptor está en la posición  $e$ , la batería, la autoinducción y las dos resistencias se encuentran conectadas en serie, y la corriente crece en el circuito del modo que acabamos de analizar, excepto en que ahora la resistencia total es  $R_1 + R$  y la corriente final  $\mathcal{E}_0 / (R_1 + R)$ . Supongamos que el polo del interruptor ha permanecido en la posición  $e$  durante un tiempo largo, de modo que la corriente es aproximadamente estacionaria en su valor final, que llamaremos  $I_0$ . En el tiempo  $t = 0$  movemos rápidamente el polo a la posición  $f$  (para la eliminar la batería de cualquier consideración). Tenemos ahora un circuito con una resistencia y una bobina solamente (malla  $abcta$ ) sobre las cuales circula una corriente inicial  $I_0$ . Aplicando la regla de las mallas a este circuito resulta:

$$-IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \quad (\text{B.20})$$

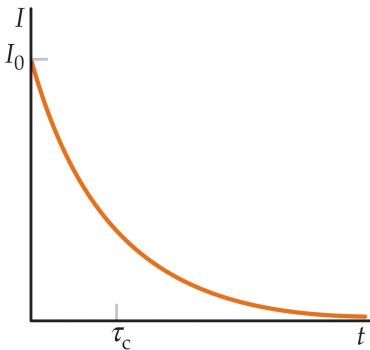


Reajustando esta ecuación para separar las variables  $I$  y  $t$  se obtiene

$$\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L} dt \quad (\text{B.21})$$

Esta ecuación es de la misma forma que la ecuación (B.5), correspondiente a la descarga de un condensador. Integrando y despejando  $I$  se llega a:

$$I(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{B.22})$$



en donde  $\tau = L/R$ , como vimos anteriormente. La figura muestra la corriente en función del tiempo.

A partir de las expresiones (B.18) y (B.22), se puede observar el comportamiento del circuito en tiempos extremos. Cuando la autoinducción está des cargada actúa igual que un circuito abierto (es decir, es equivalente a un cable de resistencia infinita). Cuando la autoinducción está cargada, actúa como un cortocircuito (o resistencia nula).

## Apéndice C

# Generadores de corriente alterna

---

La Figura 3.1 muestra un **generador de corriente alterna** simple formado por una bobina de área  $A$  y  $N$  vueltas, en rotación dentro de un campo magnético uniforme. Los extremos de la bobina están conectados a unos anillos deslizantes que giran con la espira. El contacto eléctrico con la espira se realiza mediante escobillas fijas conductoras en contacto con los anillos.

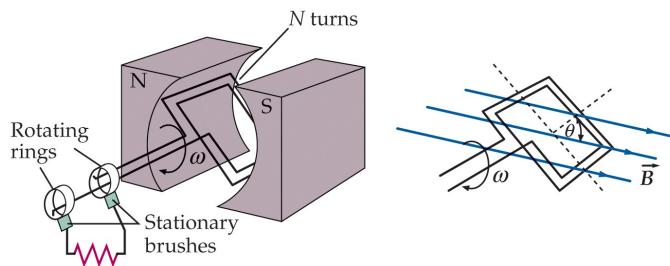


FIGURA 3.1: (Izquierda) Generador de corriente alterna. Una bobina que gira con una frecuencia angular constante  $\omega$  en un campo magnético  $\vec{B}$  genera una fem sinusoidal. La energía procedente de un salto de agua o de una turbina de vapor se utiliza para hacer girar la bobina y producir energía eléctrica. La fem se suministra a un circuito externo mediante las escobillas en contacto con los anillos. (Derecha) En este instante la normal al plano de la espira forma un ángulo  $\theta$  con el campo magnético y el flujo que atraviesa la superficie plana de la espira es  $BA \cos \theta$ .

Cuando la línea perpendicular al plano de la espira forman un ángulo  $\theta$  con un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , como se indica en la figura, el flujo magnético a través de la bobina es

$$\phi_m = NBA \cos \theta \quad (\text{C.1})$$

donde  $A$  es el área de la superficie plana de una espira de la bobina y  $N$  es el número de espiras. Cuando la bobina gira mecánicamente, el flujo que la atraviesa varía con el tiempo y se induce una fem. Si  $\omega$  es la velocidad angular de rotación y  $\delta$  el ángulo inicial, al cabo de cierto tiempo  $t$  el ángulo viene dado por

$$\theta = \omega t + \delta \quad (\text{C.2})$$

Por lo tanto,

$$\phi_m = NBA \cos(\omega t + \delta) = NBA \cos(2\pi\nu t + \delta) \quad (\text{C.3})$$

La fem en la bobina será, por lo tanto,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = NBA\omega \sin(\omega t + \delta) \quad (C.4)$$

donde  $NBA\omega$  es la fem máxima o de pico. Entonces tenemos

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{\max} \sin(\omega t + \delta) \quad (C.5)$$

en donde,

$$\mathcal{E}_{\max} = NBA\omega \quad (C.6)$$

Podemos, por lo tanto, producir una fem sinusoidal en una bobina haciéndola girar con velocidad angular constante en un campo magnético. Aunque los generadores reales son considerablemente más complicados, trabajan según el mismo principio que tiene lugar cuando una fem alterna se produce al girar una espira en un campo magnético y se diseñan de modo que la fem generada es sinusoidal.

La misma bobina que se utiliza en un campo magnético para generar una fem alterna, puede también usarse como **motor** de corriente alterna. En lugar de girar mecánicamente la bobina para generar una fem, se aplica una diferencia de potencial de corriente alterna a la bobina procedente de otro generador de corriente alterna. Esto produce una corriente alterna en la bobina, y el momento debido a la fuerza magnética actúa sobre la bobina y la hace girar. Cuando la espira gira en el campo magnético, se genera una fuerza contraelectromotriz que tiende a contrarrestar la diferencia de potencial que produce la corriente. Cuando el motor se pone en marcha, no existe fuerza contraelectromotriz y la corriente es muy intensa, limitada solo por la resistencia del circuito. Cuando el motor comienza a girar la fuerza contraelectromotriz se incrementa y la intensidad de corriente disminuye.

## Apéndice D

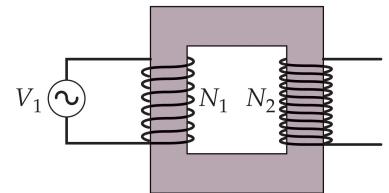
# Transformadores

Un transformador es un dispositivo utilizado para elevar o disminuir la tensión sin una pérdida de potencia apreciable. La figura muestra un transformador simple compuesto por dos bobinas de hilo conductor arrolladas sobre un núcleo de hierro común. La bobina que se conecta a la fuente de entrada se denomina **primario** y la otra, **secundario**. Puede utilizarse cualquiera de los dos arrollamientos de un transformador como primario o secundario. Su funcionamiento se basa en el hecho de que una corriente alterna en un circuito inducirá una fem alterna en otro circuito próximo debido a la inducción mutua entre ambos. La función del núcleo de hierro consiste en aumentar el campo magnético creado por una corriente determinada y guiar dicho campo de tal forma que prácticamente todo el flujo magnético que atravesie uno de los arrollamientos atraviese el otro. Si no se perdiera potencia alguna, el producto de la tensión y la corriente en el circuito secundario sería igual al producto de la tensión y la corriente en el circuito primario. Así, si la tensión en el circuito secundario es mayor que la del primario, la corriente será menor, y viceversa. Las pérdidas de potencia proceden del calentamiento por efecto Joule en las pequeñas resistencias de ambos arrollamientos o en las espiras de corrientes dentro del núcleo y a la histéresis que se presenta en los núcleos de hierro. Despreciaremos estas pérdidas y consideraremos un transformador ideal con un rendimiento del 100 %, en el que toda la potencia suministrada al arrollamiento primario aparece en el secundario. Los transformadores comerciales suelen tener rendimientos comprendidos entre el 90 % y el 95 %.

Consideremos un transformador con tensión  $V_1$  en el primario de  $N_1$  vueltas; el arrollamiento secundario de  $N_2$  vueltas es un circuito abierto. Debido al núcleo de hierro, existe un flujo magnético grande que atraviesa ambos arrollamientos aunque la corriente magnetizante (corriente original en la bobina primaria)  $I_m$  en el circuito primario sea muy pequeña. Podemos despreciar las resistencias de los arrollamientos. El primario es entonces un circuito simple formado por un generador de corriente alterna y una autoinducción pura. Si  $\phi_{\text{vuelta}}$  es el flujo magnético que atraviesa una espira o vuelta del primario, la caída de tensión en él es igual a la fem, de modo que

$$V_1 = N_1 \frac{d\phi_{\text{vuelta}}}{dt} \quad (\text{D.1})$$

Si se considera que no existe ninguna pérdida de flujo en el núcleo de hierro, el flujo que atraviesa cada espira es el mismo en ambos arrollamientos. Así pues, el flujo total que atraviesa el arrollamiento secundario es  $N_2\phi_{\text{vuelta}}$



y la tensión que aparece en dicho secundario es

$$V_2 = N_2 \frac{d\phi_{\text{vuelta}}}{dt} \quad (\text{D.2})$$

Comparando estas ecuaciones, podemos ver que

$$V_2 = \frac{N_2}{N_1} V_1 \quad (\text{D.3})$$

Si  $N_2 > N_1$ , la tensión en el secundario es mayor que la aplicada al primario y el transformador se designa como *transformador elevador* o de alta. Si  $N_2 < N_1$ , la tensión en el secundario es menor que en el primario y el transformador recibe el nombre de *transformador reductor* o de baja.

Consideremos a continuación lo que ocurre cuando colocamos una resistencia  $R$  denominada **resistencia de carga** conectada al secundario. Entonces aparecerá una corriente  $I_2$  en el circuito del secundario que estará en fase con la tensión  $V_2$  aplicada a la resistencia. Esta corriente originará un flujo adicional  $\phi'_{\text{vuelta}}$  a través de cada espira que será proporcional a  $N_2 I_2$ . Este flujo se opone al flujo original creado por la corriente original  $I_m$  del primario. Sin embargo, la tensión que aparece en el arrollamiento primario está determinada por la fem del generador, que no se ve afectada por el circuito secundario. De acuerdo con la ecuación (D.2), el flujo total en el núcleo de hierro debe variar al ritmo original; es decir, el flujo total en el núcleo de hierro debe ser el mismo que cuando no existía la carga en el secundario. El arrollamiento primario extrae así una corriente adicional  $I_1$  para mantener el flujo original  $\phi_{\text{vuelta}}$ . El flujo que atraviesa cada espira producido por esta corriente adicional es proporcional a  $N_1 I_1$ . Como este flujo es igual a  $-\phi'_{\text{vuelta}}$ , la corriente adicional  $I_1$  en el primario está relacionada con la corriente  $I_2$  en el secundario por

$$N_1 I_1 = -N_2 I_2 \quad (\text{D.4})$$

Estas corrientes están desfasadas en  $180^\circ$  y producen flujos que se contrarrestan. Como  $I_2$  está en fase con  $V_2$ , la corriente adicional  $I_1$  está en fase con la tensión del circuito primario. A partir de las ecuaciones (D.3) y (D.4) se llega a la relación:

$$V_1 I_1 = -V_2 I_2 \quad (\text{D.5})$$

Uno de los usos más importantes de los transformadores es el del transporte de energía eléctrica. Para reducir hasta el mínimo posible las pérdidas en forma de calor Joule ( $I^2 R$ ) que tienen lugar en las líneas de transmisión de energía, resulta más económico emplear alto voltaje y baja corriente. Por otro lado, la seguridad en su empleo y otras consideraciones, como el aislamiento, hacen necesario distribuir la energía a los consumidores a tensiones más bajas y, por lo tanto, corrientes más altas. Supóngase, por ejemplo, que cada persona de una ciudad con una población de 100000 habitantes consume 2.3 kW de potencia eléctrica a 230 V, la corriente requerida por cada individuo sería  $I = 10$  A. La corriente total para 100000 personas sería entonces 1 MA. El transporte de dicha corriente desde los generadores de una central eléctrica hasta una ciudad a muchos kilómetros de distancia requeriría conductores de tamaño enorme y la pérdida de potencia dada por  $I^2 R$  sería sustancial. Así pues, en lugar de transportar la potencia a 230 V, se utilizan transformadores de alta en la central para elevar el voltaje a unos valores muy elevados, tales como 500 kV. Así se reduce la corriente necesaria a

$$I = \frac{230 \text{ V}}{5 \times 10^5 \text{ V}} \times 10^6 \text{ A} = 460 \text{ A}$$

---

Para reducir luego la tensión a unos niveles más seguros durante su transporte dentro de la ciudad, se sitúan estaciones transformadoras a la entrada de la misma para bajar su valor hasta, por ejemplo, 10 kV. Luego, en la proximidad de los bloques de viviendas se instalan nuevos transformadores que reduzcan otra vez la tensión hasta 230 V para su distribución en el interior de las mismas. Debido a esta facilidad para aumentar o disminuir la tensión de la corriente alterna mediante transformadores, se utiliza ordinariamente este tipo de corriente y no corriente continua.