Escuela Politécnica Superior
Departamento de Matemática Aplicada II

Matemáticas I. Curso 2023-24

PRIMERA CONVOCATORIA **25-01-2024**

Grado en Ingeniería Química Industrial

Apellidos: ______________________________

Nombre: ______________________________ **Grupo:** ______________

PRIMERA PARTE

PROBLEMA 1

Considérese el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4x_1 + 4\lambda x_2 + 2x_3 & = & 2 \\ \lambda x_1 + x_2 + \lambda x_3 & = & \mu \\ 4\lambda x_1 + 4x_2 + \lambda x_3 & = & 9\mu \end{array}\right. \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

a) [**3 ptos**] Utilizando el método de Gauss y el teorema de Rouché-Frobenius, discuta la compatibilidad del sistema de ecuaciones lineales en función de los parámetros $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

b) [**2 ptos**] Para $\lambda = 0$, determine, en función del parámetro $\mu \in \mathbb{R}$, la dimensión, una base y unas ecuaciones implícitas de los subespacios vectoriales $N(A|b)$ y $R(A|b)$, donde $(A|b)$ es la matriz de coeficientes ampliada del sistema de ecuaciones lineales anterior.

c) [**1,5 ptos**] Calcule la inversa de la matriz A con $\lambda = 2$, usando el método de Gauss-Jordan.

PROBLEMA 2

[**3,5 ptos**] Indique, justificando la respuesta, si las siguientes afirmaciones son ciertas o falsas:

a) El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

b) Si $\{u_1, u_2, u_3\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y $v \in \mathbb{R}^3$, con $v \neq 0$, entonces $\{v + u_1, v + u_2, v + u_3\}$ es otra base de $\mathbb{R}^3$.

c) El subespacio vectorial $S = \{(x, x, x),\ x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ tiene dimensión 3.

d) Sea el espacio vectorial $V = L(\{v_1, v_2\}) \subset \mathbb{R}^3$, generado por los vectores $v_1 = (1, 2, 1)$ y $v_2 = (2, 2, 1)$. Entonces, $V = \{(2x, 2x + 2y, x + y) :\ x, y \in \mathbb{R}\}$.

e) Si a, b, y c son vectores de $\mathbb{R}^n$, entonces no pueden existir cuatro vectores linealmente independientes en el espacio vectorial $L(\{a, b, c\})$.

► **Todas las respuestas deberán estar debidamente razonadas.**

Escuela Politécnica Superior

Departamento de Matemática Aplicada II

Matemáticas I. Curso 2023-24

PRIMERA CONVOCATORIA **25-01-2024**

Grado en Ingeniería Química Industrial

Apellidos: ____________________

Nombre: ____________________ **Grupo:** __________

SEGUNDA PARTE A

PROBLEMA 3

Sea $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x + y - z + t = 0,\ 2x + y - z + 3t = 0\}$.

a) **[1 pto]** Calcule una base del espacio complemento ortogonal de S.

b) **[2,5 ptos]** Dado el vector $v = (1, -1, 2, 3)$, halle v_1 y v_2, tales que $v = v_1 + v_2$, con $v_1 \in S$ y $v_2 \in S^{\perp}$.

c) **[1,5 ptos]** Halle el valor mínimo de $\{||u - v|| : u \in S\}$.

▶ **Todas las respuestas deberán estar debidamente razonadas.**

Escuela Politécnica Superior
Departamento de Matemática Aplicada II

Matemáticas I. Curso 2023-24

PRIMERA CONVOCATORIA **25-01-2024**

Grado en Ingeniería Química Industrial

Apellidos: ____________________

Nombre: ____________________ **Grupo:** __________

SEGUNDA PARTE B

PROBLEMA 4

Sea la matriz A de orden 3, con a y b parámetros reales:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) **[2,5 ptos]** Estudie la diagonalizabilidad de la matriz A respecto de los parámetros a y b sin calcular explícitamente ningún autovector, únicamente calculando rangos y dimensiones.

b) **[2,5 ptos]** Para los valores de los parámetros $a = -1$ y $b = 0$ realice una diagonalización ortogonal de la matriz A, dando las correspondientes matrices de paso Q, y diagonal D.

► **Todas las respuestas deberán estar debidamente razonadas.**

Escuela Politécnica Superior
Departamento de Matemática Aplicada II

Matemáticas I. Curso 2023-24

PRIMERA CONVOCATORIA **25-01-2024**

Grado en Ingeniería Química Industrial

Apellidos: ____

Nombre: ______________________________ **Grupo:** ______________

TERCERA PARTE

PROBLEMA 5

[**3 ptos**] Resuelva la siguiente ecuación compleja y exprese sus soluciones en notación exponencial:

$$iz^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{20} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{20}.$$

PROBLEMA 6

Sea la función $f(x) = e^x - 1 - \cos x$.

a) [**3,5 ptos**] Demuestre que la función f posee un solo cero en el intervalo $[0, \pi/2]$. Dé una aproximación de dicho punto mediante una iteración, usando el método de Newton y $x_1 = 0$. Indique, aplicando el teorema de convergencia de Newton, si la convergencia del método está o no asegurada.

b) [**3,5 ptos**] Calcule el polinomio de Maclaurin de grado $n = 2$ de la función f. Aproxime mediante el polinomio obtenido el valor de la función en el punto $x = 0,1$ y dé una cota del error cometido con dicha aproximación.

► **Todas las respuestas deberán estar debidamente razonadas.**