Capítulo 2
EL ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^N$

2.1. Espacios vectoriales

El punto de partida de este tema lo constituyen los vectores en el plano y en el espacio tridimensional, que son ya conocidos por los alumnos, así como las operaciones con los mismos. Nuestro objetivo es generalizar la idea de vector e introducir la noción de espacio vectorial de dimensión finita, centrándonos especialmente en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ y en su aplicación al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales.

Definición 55 *Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ es un conjunto no vacío de elementos, llamados vectores, con dos operaciones:*

- *Suma:* $V \times V \to V$, $(u, v) \to u + v$
- *Producto por un escalar:* $\mathbb{R} \times V \to V$, $(\lambda, v) \to \lambda v$.

Que verifican las siguientes condiciones. Para todo $u, v, w \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se cumple:

1. $u + v = v + u$.
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$.
3. *Existe* $\mathbf{0} \in V$, *llamado vector nulo,* $v + \mathbf{0} = \mathbf{0} + v = v$.
4. *Para cada* $v \in V$, *existe* $-v \in V$, *llamado opuesto de* v, *tal que* $v + (-v) = (-v) + v = \mathbf{0}$.
5. $\lambda(\mu v) = (\lambda\mu)v$.
6. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
7. $(\lambda + \mu)v = \lambda v + \mu v$.
8. *Existe* $1 \in \mathbb{R}$, *que cumple:* $1v = v$ *para todo* $v \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 56 *El conjunto* $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$ *es un espacio vectorial con las operaciones suma y producto por un escalar definidas del siguiente modo*

- *Suma: Dados* $u = (u_1, \ldots, u_n), v = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$u + v = (u_1 + v_1, \ldots, u_n + v_n)$$

- *Producto por un escalar: Dados* $u = (u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\lambda u = (\lambda u_1, \ldots, \lambda u_n)$$

Obsérvese que tanto $\mathbb{R}$ *(números reales),* $\mathbb{R}^2$ *(vectores en el plano), como* $\mathbb{R}^3$ *(vectores en el espacio) son casos particulares del espacio vectorial* $\mathbb{R}^n$*, el cual también se representa con la notación* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Ejemplo 57 *El conjunto de las matrices* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *con las operaciones de suma y producto por un escalar, definidas en el primer capítulo, tiene estructura de espacio vectorial.*

Ejemplo 58 *El conjunto* $V = \{f(x)$ *continuas en* $[a, b]\}$ *con las operaciones habituales de suma de funciones y producto por un escalar por una función,* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, *tiene estructura de espacio vectorial.*

Se deja como ejercicio la comprobación de las ocho propiedades de la definición 55 para los ejemplos anteriores. Otras propiedades de los espacios vectoriales se incluyen en la siguiente proposición.

Proposición 59 *Sean* $u, v \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *se cumple:*

1. $0 \cdot u = \mathbf{0}$.
2. $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
3. *Si* $\lambda \cdot u = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = 0$ *ó* $u = \mathbf{0}$.
4. *Si* $\lambda \cdot u = \mu \cdot u$, *con* $u \neq \mathbf{0} \Rightarrow \lambda = \mu$.
5. *Si* $\lambda \cdot u = \lambda \cdot v$, *con* $\lambda \neq 0 \Rightarrow u = v$.
6. $\lambda(-u) = -(\lambda u) = (-\lambda)u$.

Sugerimos se haga la demostración de esta proposición para el caso del espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$ al que vamos a referirnos en lo sucesivo para introducir las nociones de subespacio vectorial, base, dimensión, dependencia lineal, etc... No obstante, hay que indicar que estos conceptos también pueden enunciarse para espacios vectoriales en general.

2.2. Subespacios Vectoriales

En el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ hay subconjuntos que también son espacios vectoriales. Así una recta o un plano que pasan por el origen son espacios vectoriales que estan contenidos en el espacio vectorial $\mathbb{R}^n$. Es conocido, que la suma de dos vectores que pertenecen a un mismo plano (o recta) que pasa por el origen también está en dicho plano (o recta). Además, si un vector está en un plano (o en una recta), cualquier múltiplo de él tambien está en el plano (o en la recta). Estas consideraciones nos conducen a la definición de subespacio vectorial.

Definición 60 *Un conjunto no vacío $S \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que un subespacio vectorial (s.v.) si satisface las siguientes propiedades:*

1. *Si $u, v \in S$, entonces $u + v \in S$.*
2. *Si $u \in S$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, entonces $\lambda u \in S$.*

Observaciones

a) La condición anterior equivale a decir que S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ si y sólo si para todo $u, v \in S$, y para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, se verifica: $\lambda u + \mu v \in S$.

b) Si S es un subespacio vectorial, entonces $\mathbf{0} \in S$.

c) $S = \{\mathbf{0}\}$ es el subespacio trivial.

d) Todo espacio vectorial es subespacio de sí mismo.

e) Los subespacios de $\mathbb{R}^3$ son: $\{\mathbf{0}\}$, rectas que pasan por el origen, planos que pasan por el origen y el propio $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 61 1. *Dada $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, el conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \mathbf{0}\}$ es un subespacio vectorial. En efecto, si $x, y \in S$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, entonces*

$$A(\lambda x + \mu y) = A(\lambda x) + A(\mu y) = \lambda Ax + \mu Ay = \lambda\mathbf{0}+\mu\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

luego $\lambda x + \mu y$ también es solución del sistema.

2. *El conjunto $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, 2x_1 - x_3 = 0\}$ es un subespacio vectorial, pues se trata del conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales homogéneo $Ax = \mathbf{0}$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.*

3. *El conjunto* $S = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\}$ *no es un subespacio vectorial pues* $\mathbf{0} \notin S$. *Obsérvese además que dados* $u = (u_1, u_2, 1), v = (v_1, v_2, 1),\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$, *cualesquiera, se verifica:*

$$u + v = (u_1, u_2, 1) + (v_1, v_2, 1) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, 2) \notin S.$$

4. *El conjunto* $S = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 x_2 = 0\}$ *contiene al vector nulo, pero* S *no es un subespacio vectorial, porque dados* $(1, 0), (0, 1) \in S$, *se tiene que* $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin S$.

5. *Vamos a comprobar que* $S = \{(a, b - a, a + b, b)\}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^4$.

   Sean $x = (a_1, b_1 - a_1, a_1 + b_1, b_1), y = (a_2, b_2 - a_2, a_2 + b_2, b_2)$, *vectores arbitrarios de* S, *y* λ *un escalar cualquiera. Hemos de probar que* $x + y \in S$, $\lambda x \in S$

$$\begin{aligned} x + y &= (a_1, b_1 - a_1, a_1 + b_1, b_1) + (a_2, b_2 - a_2, a_2 + b_2, b_2) \\ &= (a_1 + a_2, (b_1 - a_1) + (b_2 - a_2), (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2), b_1 + b_2) \\ &= (a_1 + a_2, (b_1 + b_2) - (a_1 + a_2), (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2), b_1 + b_2) \\ &= (\alpha, \beta - \alpha, \alpha + \beta, \beta) \in S \end{aligned}$$

   siendo $\alpha = a_1 + a_2$, *y* $\beta = b_1 + b_2$.

   Por otro lado,

$$\begin{aligned} \lambda x &= \lambda(a_1, b_1 - a_1, a_1 + b_1, b_1) = (\lambda a_1, \lambda b_1 - \lambda a_1, \lambda a_1 + \lambda b_1, \lambda b_1) \\ &= (\alpha, \beta - \alpha, \alpha + \beta, \beta) \in S \end{aligned}$$

   siendo $\alpha = \lambda a_1$, *y* $\beta = \lambda b_1$.

2.2.1. Combinación Lineal. Subespacio generado

En $\mathbb{R}^3$ el vector $w = (2, 3, -2)$ se puede expresar en función de los vectores $v_1 = (1, 3, 5)$ y $v_2 = (0, -1, -4)$, del siguiente modo: $w = 2v_1 + 3v_2$. Esta forma de expresión se denomina combinación lineal, y de hecho podemos formar combinaciones lineales con dos o más vectores. Las combinaciones lineales finitas de vectores nos van a permitir caracterizar los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.

Definición 62 *Sean* $v_1, \ldots, v_p \in \mathbb{R}^n$, *se denomina combinación lineal de ellos a cualquier vector* w *de la forma:* $w = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$, *donde* $\lambda_i \in \mathbb{R}$. *Los escalares* $\lambda_i, i = 1, \ldots, p$ *se denominan los coeficientes (o pesos) de la combinación lineal.*

Ejemplo 63 *Dados los vectores* $v_1 = (1, -1)$ *y* $v_2 = (2, 3)$. *La operación* $2v_1 + 3v_2$ *proporciona una combinación lineal de los vectores* v_1 *y* v_2. *Puesto que,*

$$w = 2v_1 + 3v_2 = 2(1, -1) + 3(2, 3) = (2, -2) + (6, 9) = (8, 7).$$

siendo $\lambda_1 = 2$ *y* $\lambda_2 = 3$ *los coeficientes de la combinación lineal.*

Nótese que el vector v_1 *es combinación lineal de* v_1 *y* v_2 *ya que puede escribirse en la forma* $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2$*. Análogamente,* $-7v_2$ *también es combinación lineal de* v_1 *y* v_2 *o simplemente combinación lineal de* v_2*.*

Proposición 64 *Dados los vectores* $v_1, ..., v_p \in \mathbb{R}^n$*, el conjunto* S *de todas las combinaciones lineales de ellos es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$ *y se representa por* $S = L\{v_1, ..., v_p\}$*.*

Demostración: Para probar que $S = L\{v_1, ..., v_p\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ hemos de probar que la suma y el producto por un escalar son operaciones cerradas en S.

Sean $x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$, $y = \mu_1 v_1 + \cdots + \mu_p v_p$, donde $\lambda_i, \mu_i \in \mathbb{R}$ son escalares cualesquiera, ha de verificarse que $x + y \in S$, $\alpha x \in S$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$. En efecto,

- $x + y = (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p) + (\mu_1 v_1 + \cdots + \mu_p v_p)$

  $= (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \cdots + (\lambda_p + \mu_p)v_p$

  $= h_1 v_1 + \cdots + h_p v_p$, siendo $h_i = \lambda_i + \mu_i \in \mathbb{R}$, luego $x + y \in S$

- $\alpha x = \alpha(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p) = (\alpha\lambda_1)v_1 + \cdots + (\alpha\lambda_p)v_p$

  $= k_1 v_1 + \cdots + k_p v_p$, siendo $k_i = \alpha\lambda_i$, tanto $\alpha x \in S$. $\square$

Nota 65 *Un subespacio vectorial* $S = L\{v_1, ..., v_p\}$ *también puede denotarse de las siguientes formas:* $S = \operatorname{lin}\{v_1, ..., v_p\}$ *y* $S = < v_1, ..., v_p >$

Ejemplo 66 *Comprobar que* $S = \{(a, b - a, a + b, b)\}$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^4$*.*

Este ejercicio ya lo hemos resuelto anteriormente haciendo uso de la definición de subespacio vectorial. Ahora se trata de resolverlo usando la proposición anterior.

Para todo $x \in S$ *se tiene que* $x = (a, b-a, a+b, b) = a(1, -1, 1, 0) + b(0, 1, 1, 1)$*, luego* $S = L\{v_1, v_2\}$*, con* $v_1 = (1, -1, 1, 0)$ *y* $v_2 = (0, 1, 1, 1)$*, es un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^4$*.*

Definición 67 *Sea* $S = L\{v_1, ..., v_p\}$ *un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$*. El conjunto* $H = \{v_1, ..., v_p\}$ *se denomina sistema generador del subespacio* S*, y los vectores* v_i *se les denomina generadores de* S*. Abreviadamente podremos escribir* $S = L(H)$*. Por convenio* $\{\mathbf{0}\} = L(\emptyset)$*.*

Ejemplo 68 *¿Pertenece el vector $b = (4, 2, 4)$ al subespacio vectorial generado por los vectores $a_1 = (2, -1, 3)$ y $a_2 = (0, 4, -2)$? En caso afirmativo, obtener los coeficientes de la combinación lineal.*

Si $b \in L\{a_1, a_2\}$, existirán dos escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tales que $b = \alpha a_1 + \alpha_2 a_2$. En consecuencia,

$$b = \alpha_1(2, -1, 3) + \alpha_2(0, 4, -2)$$

escribiendo los vectores por columnas, se tiene

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

de donde, resulta el sistema matricial $A\alpha = b$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

es decir, los coeficientes α_1 y α_2 deben satisfacer el sistema $\left\{ \begin{array}{l} 2\alpha_1 = 4 \\ -\alpha_1 + 4\alpha_2 = 2 \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 = 4 \end{array} \right.$

y el vector b es combinación lineal de los vectores a_1 y a_2 si y sólo si este sistema de ecuaciones lineales es compatible. Para analizar la compatibilidad del sistema usamos el método de Gauss..

$$(A|b) = \left[\begin{array}{rr|r} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{array} \right] \underset{\substack{F_{21}(1/2) \\ F_{31}(-3/2)}}{\sim} \left[\begin{array}{rr|r} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -2 & -2 \end{array} \right] \underset{F_{32}(1/2)}{\sim} \left[\begin{array}{rr|r} 2 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

El sistema es compatible determinado, pues $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 2$, *y su única solución es $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$. El vector $b = (4, 2, 4)$ se puede expresar como combinación lineal de los vectores $a_1 = (2, -1, 3)$, $a_2 = (0, 4, -2)$ y los coeficientes de la combinación lineal son $\alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1$. Es decir, $b = 2a_1 + a_2$.*

Desde un punto de vista geométrico, el conjunto $S = L\{a_1, a_2\}$ es un plano que pasa por el origen y el vector b es un vector de dicho plano pues es una combinación lineal de a_1 y a_2.

Observación: Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times p}(\mathbb{R})$, si la representamos por columnas $A = [a_1|\cdots|a_p]$ el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ puede escribirse en forma vectorial del siguiente modo:

$$Ax = b \Leftrightarrow x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_p a_p = b$$

y dicho sistema es compatible (posee solución) si y sólo si el término independiente b es combinación lineal de las columnas de la matriz A.

Ejemplo 69 *Estudiar si el vector* $b = (1, 2, -3)$ *es combinación lineal de los vectores* $a_1 = (1, -1, 1)$ *y* $a_2 = (2, 1, -1)$.

El vector b *será combinación lineal de los vectores* a_1 *y* a_2 *si existen dos escalares* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *tales que* $b = x_1 a_1 + x_2 a_2$. *Es decir, si el sistema* $Ax = b$ *es compatible, siendo* $A = [a_1|a_2]$.

$$(A|b) = \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{21}(1)\\F_{31}(-1)}}{\sim} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -4 \end{array}\right] \underset{F_{32}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

como $\operatorname{rg}(A) = 2$ *y* $\operatorname{rg}(A|b) = 3$, *el sistema es incompatible y, por tanto,* b *no es combinación lineal de los vectores* a_1 *y* a_2.

Desde un punto de vista geométrico, el conjunto $S = L\{a_1, a_2\}$ *forma un plano que pasa por el origen y el vector* b, *al no ser combinación lineal de* a_1 *y* a_2, *no pertenece a dicho plano.*

Ejemplo 70 *¿Es el vector* $b = (-1, -2, 3)$ *combinación lineal de* $a_1 = (1, -1, 3)$, $a_2 = (2, 1, 0)$ *y* $a_3 = (3, 0, 3)$*? En caso afirmativo, obtener los coeficientes de la combinación lineal.*

El vector b *será combinación lineal de los vectores* a_1, a_2 *y* a_3 *si existen tres escalares* $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ *tales que* $b = x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3$. *Es decir, si el sistema* $Ax = b$ *es compatible, siendo* $A = [a_1|a_2|a_3]$.

$$(A|b) = \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{21}(1)\\F_{31}(-3)}}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & -6 & -6 & 6 \end{array}\right] \underset{F_{32}(2)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se verifica que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b) = 2 < 3$, *el sistema es compatible indeterminado y por tanto el vector* $b = (-1, -2, 3)$ *es combinación lineal de* $a_1 = (1, -1, 3)$, $a_2 = (2, 1, 0)$ *y* $a_3 = (3, 0, 3)$.

Resolviendo el sistema triangular equivalente $\left\{\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ 3x_2 + 3x_3 = -3 \end{array}\right.$ *se obtiene una solución que no es única:* $\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 - t \\ x_2 = -1 - t \\ x_3 = t \end{array}}$ *con* $t \in \mathbb{R}$.

Nota: puede probarse que el vector a_3 es combinación lineal de a_1 y a_2 y por tanto, el subespacio que generan los vectores a_1, a_2 y a_3 coincide con el que subespacio que generan los dos primeros vectores a_1 y a_2; es decir, $L\{a_1, a_2, a_3\} = L\{a_1, a_2\}$ Esto justifica la existencia de infinitas soluciones en el sistema anterior.

Ejemplo 71 *¿Qué condición debe satisfacer el vector $b = (x, y, z)$ para ser combinación lineal de los vectores $a_1 = (1, -1, 3)$ y $a_2 = (3, 1, 7)$?*

Hemos de encontrar dos escalares α_1 y α_2 tales que $b = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2$. Para ello estudiaremos la compatibilidad del sistema cuya matriz ampliada es $(A|b) = \left[\begin{array}{c|c|c} a_1 & a_2 & b \end{array}\right]$.

$$(A|b) = \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 3 & x \\ -1 & 1 & y \\ 3 & 7 & z \end{array}\right] \underset{\substack{F_{21}(1)\\F_{31}(-3)}}{\sim} \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 4 & x+y \\ 0 & -2 & z-3x \end{array}\right] \underset{F_{32}(1/2)}{\sim} \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 4 & y+x \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2}x + \frac{1}{2}y + z \end{array}\right]$$

$$\underset{F_3(2)}{\sim} \left[\begin{array}{rr|c} 1 & 3 & x \\ 0 & 4 & y+x \\ 0 & 0 & -5x + y + 2z \end{array}\right]$$

El sistema es compatible si y sólo si $-5x + y + 2z = 0$. Esta ecuación recibe el nombre de ecuación implícita (o general) del subespacio generado por los vectores $a_1 = (1, -1, 3)$ y $a_2 = (3, 1, 7)$.

2.3. Dependencia lineal, bases y dimensión

2.3.1. Dependencia e independencia lineal

Estamos interesados en obtener sistemas generadores con el menor número posible de vectores, en los que ningún generador se pueda expresar como combinación lineal de los demás. Sobre esta cuestión vamos a profundizar en la presente sección, que comenzamos introduciendo los conceptos de dependencia e independencia lineal.

Definición 72 *Sea $H = \{a_1, \ldots, a_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$, se dice que el conjunto H es linealmente dependiente (l.d.) si existen escalares $h_1, \ldots, h_p \in \mathbb{R}$ no todos nulos de forma que $h_1 a_1 + \cdots + h_p a_p = \mathbf{0}$. En cambio, diremos que el conjunto H es linealmente independiente (l.i.) si la igualdad $h_1 a_1 + \cdots + h_p a_p = \mathbf{0}$ sólo se satisface para $h_1 = \cdots = h_p = 0$.*

Observación: Para estudiar la dependencia lineal de un conjunto $H = \{a_1, \ldots, a_p\}$ podemos escribir la ecuación vectorial $h_1 a_1 + \cdots + h_p a_p = \mathbf{0}$ en forma matricial

$$[a_1|\cdots|a_p] \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad Ah = \mathbf{0}$$

siendo $A = [a_1|\cdots|a_p]$. El conjunto H será l.i. cuando este sistema sólo posea la solución trivial ($\mathrm{rg}(A) = p$). En cambio será l.d. cuando el sistema sea compatible indeterminado ($\mathrm{rg}(A) < p$).

Cuando A es una matriz cuadrada, de orden n, se tiene que A es regular $\Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = n \Leftrightarrow$ las columnas de A son linealmente independientes.

Ejemplo 73 *Estudiar la dependencia lineal de los vectores $a_1 = (1, 2)$ y $a_2 = (3, -5)$.*

Puesto que la ecuación $h_1a_1 + h_2a_2 = \mathbf{0}$ es equivalente a la ecuación matricial $Ah = \mathbf{0}$, estudiamos el rango de la matriz $A = [a_1|a_2]$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \underset{F_{21}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -11 \end{bmatrix}$$

se verifica que $\mathrm{rg}(A) = 2$, luego el sistema $Ah = \mathbf{0}$ es compatible determinado y la única solución es la trivial: $h_1 = h_2 = 0$. El conjunto $\{a_1, a_2\}$ es l.i.

Ejemplo 74 *Los vectores de $C = \{e_1, ..., e_n\}$, con $e_i = (0, ..., \underset{i)}{1}, ..., 0)$ son un conjunto l.i., puesto que la ecuación $h_1e_1 + \cdots + h_ne_n = \mathbf{0}$ es equivalente a la ecuación matricial $Ah = \mathbf{0}$, siendo $A = I_n$. Se verifica que $\mathrm{rg}(A) = n$ y la única solución es la trivial: $h_1 = \cdots = h_n = 0$.*

Ejemplo 75 *Analizar la dependencia lineal del conjunto de vectores $H = \{a_1, a_2, a_3\}$, siendo $a_1 = (1, 2, -1), a_2 = (0, 1, -3)$ y $a_3 = (1, 1, 2)$.*

La ecuación $h_1a_1 + h_2a_2 + h_3a_3 = \mathbf{0}$ es equivalente al sistema $Ah = \mathbf{0}$, con $A = [a_1|a_2|a_3]$.

Podemos determinar el rango de A mediante eliminación gaussiana:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21}(-2) \\ F_{31}(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \end{bmatrix} \underset{F_{32}(3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

luego $\mathrm{rg}(A) = 2 < 3$ (nº de incógnitas). El sistema $Ah = \mathbf{0}$ es compatible indeterminado, y el conjunto H es l.d.

Para encontrar una relación de dependencia basta resolver el sistema triangular equivalente

$$\left\{ \begin{array}{rr} h_1 + & h_3 = 0 \\ & h_2 - h_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} h_1 = -h_3 \\ h_2 = h_3 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} h_1 = -\alpha \\ h_2 = \alpha \\ h_3 = \alpha \end{array}} \ \text{con } \alpha \in \mathbb{R}.$$

si tomamos, por ejemplo $\alpha = 1$, se tiene la relación: $-a_1 + a_2 + a_3 = \mathbf{0}$.

Observación: Dados $H = \{a_1, \dots, a_p\}$ y $A = [a_1|\cdots|a_p]$, como $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$ se llega a la misma conclusión acerca de la dependencia lineal de los vectores del conjunto H si se considera la matriz A^T, lo cual implica disponer los vectores $\{a_1, \dots, a_p\}$ como filas. Ahora bien, para encontrar una relación de dependencia, en el caso de que H sea l.d., ha de resolverse necesariamente el sistema $Ah = 0$.

Proposición 76 *a) Cualquier conjunto de vectores que contenga al vector* $\mathbf{0}$ *es l.d.*
b) Si $p > n$*, entonces* $\{v_1, \dots, v_p\}$ *es l.d. Esto es, en* $\mathbb{R}^n$ *no hay un subconjunto l.i. con más de* n *vectores.*

Demostración:
a) Sea $H = \{v_1, \dots, v_p, \mathbf{0}\}$, se verifica que $h \cdot \mathbf{0} + 0v_1 + \cdots + 0v_p = \mathbf{0}$, para algún $h \neq 0$. Luego H es l.d.
b) Sabemos que $h_1v_1 + \cdots + h_pv_p = \mathbf{0}$ es equivalente al sistema $Ah = \mathbf{0}$, siendo $A = [v_1|\cdots|v_p]$, que posee n ecuaciones y p incógnitas. Si $p > n$, entonces este sistema homogéneo tiene más incógnitas que ecuaciones y en consecuencia, dicho sistema posee soluciones no triviales, por tanto el conjunto H es l.d. $\square$

Ejemplo 77 *a) El conjunto de vectores* $\{(1,2,3),(0,0,0),(3,2,-1)\}$ *es l.d., ya que contiene al vector nulo.*
b) El conjunto $\{(1,2),(3,-1),(5,7)\}$ *es l.d., pues está formado por tres vectores de* $\mathbb{R}^2$*.*

Proposición 78 *a) Un conjunto* H *de dos o más vectores es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de ellos es combinación lineal de los demás.*
b) Un conjunto H *de dos o más vectores es linealmente independiente si y sólo si ningún vector se puede expresar como combinación lineal de los demás.*
c) La expresión de un vector como combinación lineal de vectores de un conjunto l.i. es única.
d) Sea $H = \{v_1, \dots, v_p\}$ *un conjunto l.d., entonces cualquier conjunto de vectores que contenga a* H *también es linealmente dependiente.*
e) Sea $H = \{v_1, \dots, v_p\}$ *un conjunto l.i., entonces cualquier subconjunto no vacío de* H *es l.i.*

Demostración:

a) $\boxed{\Rightarrow}$ Sea $H = \{v_1, \dots, v_p\}$ l.d., entonces se verifica que $h_1v_1 + \cdots + h_pv_p = \mathbf{0}$, con algún $h_i \neq 0$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $h_1 \neq 0$, entonces

$$h_1v_1 = -h_2v_2 - \cdots - h_pv_p \Rightarrow v_1 = -\frac{h_2}{h_1}v_2 - \cdots - \frac{h_p}{h_1}v_p$$

y es posible expresar v_1 como combinación lineal de los demás.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supongamos, sin pérdida de generalidad, que v_p es combinación lineal de $\{v_1, \ldots, v_{p-1}\}$, entonces

$$v_p = k_1 v_1 + \cdots + k_{p-1} v_{p-1} \Rightarrow k_1 v_1 + \cdots + k_{p-1} v_{p-1} - v_p = \mathbf{0}$$

luego H es l.d. ya que $k_p = -1$.

b)Es consecuencia del apartado anterior, pues si algún vector de H fuera combinación lineal de los demás, el conjunto H sería l.d., y recíprocamente si el conjunto H es l.d. entonces al menos un vector de H sería combinación lineal de los demás.

c) Sea un vector $u \in L(H)$, supongamos que puede expresarse de dos formas distintas como combinación lineal de los vectores del conjunto H :

$$\left.\begin{array}{l} u = h_1 v_1 + \cdots + h_p v_p \\ u = k_1 v_1 + \cdots + k_p v_p \end{array}\right\} \Rightarrow (h_1 - k_1) v_1 + \cdots + (h_p - k_p) v_p = \mathbf{0}$$

como el conjunto $H = \{v_1, \ldots, v_p\}$ es l.i., resulta que $h_i - k_i = 0 \Rightarrow h_i = k_i$, para $i = 1, .., p$. Por tanto, la expresión del vector u respecto del sistema generador H l.i. es única.

d) Sea $H = \{v_1, \ldots, v_p\}$ un conjunto l.d., y sea $F = \{v_1, \ldots, v_p, u_1, ..., u_r\}$. Como el conjunto H es l.d. se tiene que $h_1 v_1 + \cdots + h_p v_p = \mathbf{0}$ con algún $h_i \neq 0$, y también se verifica

$$h_1 v_1 + \cdots + h_p v_p + 0 u_1 + \cdots + 0 u_r = \mathbf{0}, \text{ con algún } h_i \neq 0$$

por tanto, F es l.d.

e) Es consecuencia inmediata del apartado anterior. Sea $H' \subseteq H$, si H' fuera l.d., entonces H también sería l.d. y ello supone una contradicción. Por tanto, necesariamente H' es l.i. □

Ejemplo 79 *a) El conjunto $H = \{v_1, v_2\}$, con $v_1 = (-1, 2, -4)$ y $v_2 = (3, -6, 12)$ es linealmente dependiente pues $v_2 = -3v_1$ (i.e., son proporcionales).*

El conjunto $H' = \{v_1, v_{2,}, v_3\}$, con $v_1 = (-1, 2, -4)$, $v_2 = (3, -6, 12)$ y $v_3 = (1, 1, 1)$ es linealmente dependiente pues $H \subseteq H'$ y H es l.d.

b) Los vectores $a_1 = (1, 2)$ y $a_2 = (3, 7)$ son l.i., pues no son proporcionales.

c) El conjunto $F = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ es l.i., y los siguientes subconjuntos de F también lo son: $F' = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$ y $F'' = \{(0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

Definición 80 *Sea $H = \{v_1, \ldots, v_p\}$, se llama rango de H y se denota por $\mathrm{rg}(H)$ al número máximo de vectores l.i. que hay en dicho conjunto.*

Teorema 81 *Sea $S = L(H)$, siendo $H = \{v_1, \ldots, v_p\}$ un subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$. Se obtiene un conjunto de vectores H', con la misma dependencia lineal de H,si se somete a los vectores de H a alguna de las transformaciones siguientes:*

a) Cambiar el orden de los vectores.

b) Multiplicar un vector cualquiera por un escalar distinto de cero.

c) Sumar a uno de los vectores un múltiplo de otro vector.

Además, se verifica que $S = L(H) = L(H')$.

Demostración: Sea $S = L(H)$, $H = \{v_1, ..., v_p\}$ y $H' = \{u_1, ..., u_p\}$ un conjunto obtenido a partir de H siguiendo las transformaciones citadas.

$$u_1 = \lambda v_2, \;\; \lambda \neq 0, \;\; u_2 = v_1, u_3 = v_3, \; \ldots \;, u_{p-1} = v_{p-1}, \;\; u_p = v_p + h v_1, \;\; h \neq 0.$$

Supongamos que H es l.i., entonces: $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = \mathbf{0}$ con $\alpha_i = 0$ para todo $i = 1, ..., p$. veamos que H' también es l.i., para ello consideramos la ecuación:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_p u_p = \mathbf{0}.$$

Sustituyendo los vectores u_i por los v_i, resulta

$$\alpha_1(\lambda v_2) + \alpha_2(v_1) \cdots + \alpha_p(v_p + h v_1) = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\alpha_2 + h\alpha_p)v_1 + (\alpha_1 \lambda)v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = \mathbf{0}$$

de donde,

$$\left\{ \begin{array}{r} \alpha_2 + h\alpha_p = 0 \\ \alpha_1 \lambda = 0 \\ \alpha_3 = 0 \\ \vdots \\ \alpha_p = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_p = 0 \Rightarrow H' \text{ es l.i.}$$

Por otro lado si H es l.d., entonces H' es l.d., pues si H' fuese l.i. entonces, invirtiendo las transformaciones realizadas, H también lo sería, contradiciendo la hipótesis.

Para probar que $S = L(H')$, hemos de probar que $L(H) \subseteq L(H')$ y que $L(H') \subseteq L(H)$, lo cual nos garantizará que $L(H) = L(H')$.

- $L(H) \subseteq L(H')$.

En efecto, sea un vector cualquiera $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p \in L(H)$, se verifica que:

$$w = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p = \frac{\alpha_2}{\lambda}(\lambda v_2) + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p + \alpha_p h v_1 - \alpha_p h v_1$$

$$= \frac{\alpha_2}{\lambda}(\lambda v_2) + (\alpha_1 - \alpha_p h) v_1 + \cdots + \alpha_p (v_p + h v_1)$$

$$= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_p u_p \in L(H')$$

siendo $\beta_1 = \dfrac{\alpha_2}{\lambda}, \beta_2 = (\alpha_1 - \alpha_p h)$, y $\beta_i = \alpha_i \ (i = 3, ..., p)$.

luego para todo $w \in L(H)$, se verifica que $w \in L(H')$. Por tanto, $L(H) \subseteq L(H')$

- $L(H') \subseteq L(H)$.

  Sea un vector cualquiera $z = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \cdots + \delta_p u_p \in L(H')$, se verifica que

$$z = \delta_1 u_1 + \delta_2 u_2 + \cdots + \delta_p u_p = \delta_1(\lambda v_2) + \delta_2 v_1 + \cdots + \delta_p (v_p + h v_1)$$

$$= (\delta_2 + h\delta_p) v_1 + (\delta_1 \lambda) v_2 + \cdots + \delta_p v_p \in L(H)$$

$$= \beta'_1 v_1 + \beta'_2 v_2 + \cdots + \beta'_p v_p \in L(H)$$

siendo $\beta'_1 = (\delta_2 + h\delta_p), \beta'_2 = (\delta_1 \lambda)$, $\beta'_i = \delta_i \ (i = 3, ..., p)$

luego para todo $z \in L(H')$, se tiene que $z \in L(H)$. Por tanto $L(H') \subseteq L(H)$. $\square$

Corolario 82 *Sea $S = L\{u_1, \ldots, u_q\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Si $\{u_1, \ldots, u_q\}$ es un conjunto l.d., entonces algún vector u_i es combinación lineal de los demás y se verifica que $S = L\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, ...u_q\}$; es decir, el vector u_i puede suprimirse del sistema generador.*

Demostración: Para todo $x \in S$ se verifica que existen escalares $\alpha_i \ (i = 1, ..., q)$ tales que:

$$x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_q u_q$$

Si u_i es combinación lineal de $\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, ...u_q\}$ entonces también existen escalares $\beta_j \ (j = 1, ..., q$ y $j \neq i)$ tales que

$$u_i = \beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{i-1} u_{i-1} + \beta_{i+1} u_{i+1} + \cdots + \beta_q u_q.$$

Luego, $x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{i-1}u_{i-1} + \alpha_i u_i + \alpha_{i+1}u_{i+1} \cdots + \alpha_q u_q$

$x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{i-1}u_{i-1} + \alpha_i(\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_{i-1}u_{i-1} + \beta_{i+1}u_{i+1} + \cdots + \beta_q u_q) + \alpha_{i+1}u_{i+1} \cdots + \alpha_q u_q$

$x = (\alpha_1 + \alpha_i\beta_1)u_1 + \cdots + (\alpha_{1-1} + \alpha_i\beta_{i-1})u_{i-1} + (\alpha_{1+1} + \alpha_i\beta_{i+1})u_{i+1} + \cdots + (\alpha_q + \alpha_i\beta_q)u_q$

luego $x \in L\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, ...u_q\}$. □

Ejemplo 83 *Sea $S = L\{v_1, v_2\}$, con $v_1 = (-1, \frac{2}{3}, 2)$ y $v_2 = (3, -1, 0)$. Como consecuencia del Teorema 81 anterior, se verifica que:*

a) $S = L\{u_1, u_2\}$, siendo $u_1 = v_2$ y $u_2 = v_1$.

b) $S = L\{z_1, z_2\}$, siendo $z_1 = 3v_1 = (-3, 2, 6)$, y $z_2 = v_2$.

c) $S = L\{w_1, w_2\}$, siendo $w_1 = v_1$, y $w_2 = v_2 + 3v_1 = (0, 1, 6)$

2.3.2. Bases y Dimensión

Es sabido que en el plano se suele asociar a un punto de coordenadas (a, b) su vector de posición, el cual se expresa como combinación lineal de dos vectores que se suelen denotar por **i**, **j**, o bien e_1, e_2, siendo $e_1 = (1, 0)$ y $e_2 = (0, 1)$. Así dado un punto $(3, 2)$ podemos escribir $v = 3e_1 + 2e_2$ para referirnos a su vector de posición. Abreviadamente podemos escribir: $v = (3, 2) = 3(1, 0) + 2(0, 1) = 3e_1 + 2e_2 = (3, 2)_C$. Al conjunto $C = \{e_1, e_2\}$ se le llama "*base canónica*", y cualquier vector del plano se puede representar como combinación lineal única de estos dos vectores:

$$x = (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1(1, 0) + x_2(0, 1) = x_1e_1 + x_2e_2 = (x_1, x_2)_C$$

De hecho se verifica que: $\mathbb{R}^2 = L(C)$, pues $C = \{e_1, e_2\}$ es un sistema generador de $\mathbb{R}^2$, que tiene la propiedad de ser linealmente independiente

El conjunto $C = \{e_1, e_2\}$ no es el único sistema generador linealmente independiente de $\mathbb{R}^2$, así, por ejemplo, el conjunto $B = \{u_1, u_2\}$, donde $u_1 = (1, 0)$ y $u_2 = (1, 1)$, es otro sistema generador l.i. y respecto de él podemos expresar el vector $v = (3, 2)$ del siguiente modo:

$$v = (3, 2) = (1, 0) + 2(1, 1) = u_1 + 2u_2 = (1, 2)_B$$

Estamos interesados en los sistemas generadores l.i. en $\mathbb{R}^n$, a dichos conjuntos los denominaremos bases.

Definición 84 *Sea S un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$,y $B \subseteq S$. Se dice que B es una base de S si es un sistema generador de S linealmente independiente.*

Ejemplo 85 *Sea $S = \{(a, b-a, a+b, b)\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, con a, b cualesquiera. Determinar una base de S.*

Cualquier vector $(a, b-a, a+b, b) \in S$ se puede escribir del siguiente modo:

$(a, b-a, a+b, b) = a(1, -1, 1, 0) + b(0, 1, 1, 1),$ *donde* $a, b \in \mathbb{R}$.

Luego el conjunto $B_S = \{u_1, u_2\}$, con $u_1 = (1, -1, 1, 0)$ y $u_2 = (0, 1, 1, 1)\}$ es un sistema generador de S que, además es l.i., por tanto B_S es una base de S.

Nota: Obsérvese que los vectores u_1 y u_2 se pueden calcular dando a los parámetros a y b los siguientes valores:

$a = 1, b = 0 \Rightarrow u_1(1, -1, 0, 0)$

$a = 0, b = 1 \Rightarrow u_2 = (0, 1, 1, 1)$

Ejemplo 86 *En $\mathbb{R}^n$ el conjunto $C = \{e_1, ..., e_n\}$ es un sistema generador l.i., y por tanto una base, denominada base canónica de $\mathbb{R}^n$.*

$$x = (x_1, ..., x_2) = (x_1, 0, ..., 0) + \cdots (0, ..., 0, x_n)$$

$$x = x_1(1, 0, ..., 0) + \cdots + x_n(0, ..., 0, 1)$$

$$x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$$

Observación: Para todo vector x de $\mathbb{R}^n$ coinciden sus componentes con las coordenadas de dicho vector en la base canónica.

Teorema 87 *Todo subespacio vectorial S no trivial de $\mathbb{R}^n$ admite una base.*

Demostración: Sea S un subespacio no nulo de $\mathbb{R}^n$, entonces existe al menos un vector $a_1 \neq \mathbf{0}$, $a_1 \in S$. Si a_1 genera S, entonces $\{a_1\}$ sería una base de de S, en caso contrario habría algún vector $a_2 \in S$ que no sería múltiplo de a_1. Si el conjunto $\{a_1, a_2\}$, que es l.i., genera S habríamos terminado, en caso contrario habría algún vector $a_3 \in S$ que no sería combinación lineal de $\{a_1, a_2\}$. Seguidamente consideraríamos el conjunto l.i. $\{a_1, a_2, a_3\}$ y reiteraríamos el proceso hasta completar la base de S. Nótese que este proceso es finito pues en $\mathbb{R}^n$ no puede haber más de n vectores l.i. $\square$

Proposición 88 *Sea S un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, $S = L\{u_1, \ldots, u_q\}$. Todo conjunto l.i. $\{w_1, \ldots, w_p\} \subseteq S$ verifica que $p \leq q$.*

Demostración: Sea $H = \{u_1, \ldots, u_q\}$, y $H_1 = \{w_1\} \cup H = \{w_1, u_1, \ldots, u_q\}$. Como H genera S, también lo hace H_1 que es un conjunto l.d. pues w_1 es combinación lineal de $H = \{u_1, \ldots, u_q\}$. Entonces, podemos expresar algún vector u_i como combinación lineal de los demás vectores de H_1 y podríamos eliminarlo del s.g. H_1. Si eliminamos este vector u_i nos queda el sistema generador $T_1 = \{w_1, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_q\}$. Ahora añadimos el vector w_2 y obtenemos el s.g. $H_2 = \{w_1, w_2, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_q\}$ que es l.d. pues w_2 es combinación lineal de los vectores $\{w_1, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_q\}$; por tanto, algún vector u_j $(i \neq j)$ de H_2 es combinación lineal de los demás, así obtenemos el conjunto $T_2 = \{w_1, w_2, u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_{j-1}, u_{j+1}, ..., u_q\}$. Seguidamente reiteramos este proceso hasta que no queden vectores u_k $(k = 1, ..., q)$. Si todos los vectores u_k se eliminan antes de terminar con los vectores w_r $(r = 1, ..., p)$, entonces el conjunto de vectores $\{w_1, ..., w_p\}$ sería linealmente dependiente y ello supone una contradicción, pues el conjunto $\{w_1, \ldots, w_p\}$ es linealmente independiente. Por tanto, necesariamente $p \leq q$. $\square$

Teorema 89 *Todas las bases de un subespacio vectorial S no trivial tienen el mismo número de vectores. Este número es la dimensión del subespacio y se denota mediante* $\dim(S)$. *Por convenio, si $S = \{\mathbf{0}\}$,* $\dim(S) = 0$.

Demostración: Sean $B_1 = \{v_1, \ldots, v_p\}$ y $B_2 = \{u_1, \ldots, u_q\}$ bases de S. Como B_1 es un conjunto l.i. se tiene que $p \leq q$, como B_2 es un conjunto l.i. se tiene que $q \leq p$. En consecuencia, $p = q$. $\square$

Observaciones:

a) $C = \{e_1, ..., e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ formada por n vectores, luego $\dim \mathbb{R}^n = n$.

b) Si $\dim S = p$, no puede haber ningún sistema generador de S con más de p vectores que sea l.i.

c) Si $\dim S = p$, no puede haber ningún sistema generador de S con menos de p vectores.

Proposición 90 *Si $B = \{v_1, ..., v_p\}$ es una base de un subespacio S, entonces todo vector $u \in S$ se puede expresar de forma única como $u = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p$. Los escalares se denominan coordenadas de u respecto de B. Abreviadamente escribiremos* $u = (\alpha_1, ..., \alpha_p)_B$.

Demostración: Como B es un sistema generador, cualquier vector de S se puede expresar como combinación lineal de los vectores de B. Además, esta expresión es única por ser B un conjunto l.i. $\square$

Proposición 91 *Sea $S = L(H)$, $H = \{v_1, ..., v_p\}$, entonces algún subconjunto de H es una base se S.*

Demostración:

- Si H es l.i. entonces es una base de S, por ser un sistema generador l.i.
- Si H es l.d., entonces $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_p v_p = 0$ con algún $\alpha_j \neq 0$, y podemos expresar v_j como combinación lineal de los demás vectores; así obtenemos el conjunto. $H' = \{v_1, ..., v_{j-1}, v_{j+1}, ..., v_p\} \subset H$, que es un s.g. de S. Si el conjunto H' es linealmente independiente, entonces sería una base de S, en caso de que no lo fuera repetiríamos el proceso de eliminación hasta alcanzar un conjunto $H^* \subset H$ que sea un sistema generador l.i. del subespacio S. Este conjunto H^* sería la base de S buscada. $\square$

Observación: Como consecuencia del resultado anterior, de todo sistema generador se puede obtener una base suprimiendo vectores que sean combinación lineal de los demás.

Ejemplo 92 *Sea* $S = L\{a_1, a_2, a_3\}$, *donde* $a_1 = (1, 1, 0, 2), a_2 = (0, -1, 1, -1), a_3 = (0, -2, 2, -2)$.

Se verifica que $a_3 = 2a_2$, *luego el vector* a_3 *puede suprimirse del sistema generador. Por tanto,* $S = L\{a_1, a_2\}$, *al ser* $B_S = \{a_1, a_2\}$ *un sistema generador l.i. de* S, *se tiene ques es una base de* S.

Proposición 93 *Sea* S *un s.v. de* R^n *con* $\dim(S) = p$ *y* $H = \{v_1, \ldots, v_p\} \subset S$. *Se verifica:*
a) Si H *es un sistema generador de* S, *entonces* H *es una base de* S.
b) Si H *es linealmente independiente, entonces* H *es una base de* S.

Demostración:

a) Si H es un sistema generador de S, necesariamente debe ser l.i, pues en caso de no serlo se podrían suprimir del conjunto H vectores que fueran combinación lineal de los demás, y se obtendría un nuevo sistema generador de H linealmente independiente con un número de vectores estrictamente menor que p, lo cual supondría una contradicción pues $\dim S = p$.

b) Sea H un conjunto linealmente independiente. Si H no genera S, entonces existe algún vector $u \in S$ tal que $u \notin L(H)$ y por tanto el conjunto $\{v_1, \ldots, v_p, u\}$ sería un conjunto l.i. de $p + 1$ vectores, lo cual no es posible pues $\dim S = p$. En consecuencia H es un conjunto l.i. que genera S, y por tanto es una base de S. $\square$

Proposición 94 *Dado un subespacio vectorial S, tal que $\dim S = q$, y un conjunto l.i. $H = \{v_1, ..., v_p\} \subset S$, $p < q$, se puede obtener una base de S añadiendo $q - p$ vectores de S que sean l.i. al conjunto H.*

Demostración:

Dado $H = \{v_1, ..., v_p\} \subset S$, como $p < q$ se verifica que $L(H) \subset S$. En primer lugar elegimos un vector $w_1 \in S$ y tal que $w_1 \notin L(H)$ entonces $\{v_1, ..., v_p, w_1\} \subset S$. Si $p+1 = q$, entonces $\{v_1, ..., v_p, w_1\}$ es un conjunto formado por p vectores de S linealmente independiente y por tanto sería una base de S, en caso contrario añadimos al conjunto $\{v_1, ..., v_p, w_1\}$ un nuevo vector w_2 de S que no pertenezca a $L\{v_1, ..., v_p, w_1\}$ con lo que se tendría un nuevo conjunto $\{v_1, ..., v_p, w_1, w_2\}$ l.i. contenido en S.Si $p + 2 = q$, entonces $\{v_1, ..., v_p, w_1, w_2\}$ sería la base buscada, en caso contrario se reiteraría el proceso hasta llegar a la etapa $q - p$ en la que se obtendría un conjunto $\{v_1, ..., v_p, w_1, w_2, ..., w_{q-p}\}$ l.i. formado por q vectores de S, dicho conjunto sería la base buscada.

Ejemplo 95 *Sea $L(H)$, un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, $H = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ siendo $v_1 = (1, 1, 0, 2)$, $v_2 = (1, 0, 1, 1)$, $v_3 = (0, -1, 1, -1)$, $v_4 = (1, 2, -1, 3)$. Determinar una base de S y expresar los vectores v_i respecto de dicha base.*

Estudiamos la dependencia lineal de los vectores de H, estudiando el rango de la matriz de coeficientes del sistema $Ax = \mathbf{0}$, donde $A = [v_1|v_2|v_3|v_4]$.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21}(-1) \\ F_{41}(-2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{32}(1) \\ F_{42}(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

Como el rango de la matriz es 2, el conjunto H es l.d., y se verifica que:

$$S = L\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = L\{v_1, v_2\}$$

Así, $H' = \{v_1, v_2\}$ es una base formada por dos vectores.

Considerando la base $H' = \{v_1, v_2\}$, vamos a determinar las coordenadas de los vectores $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ respecto de la misma.

$v_1 = 1v_1 + 0v_2 = (1, 0)_{H'}$

$v_2 = 0v_1 + 1v_2 = (0, 1)_{H'}$

$v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

$(0,-1,1,-1) = \alpha_1(1,1,0,2) + \alpha_2(1,0,1,1) \Rightarrow \alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1 \Rightarrow v_3 = (-1,1)_{H'}$

$v_4 = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$

$$(1,2,-1,3) = \beta_1(1,1,0,2) + \beta_2(1,0,1,1) \Rightarrow \beta_1 = 2, \beta_2 = -1 \Rightarrow v_4 = (2,-1)_{H'}$$

Nota: Hemos probado que $S = L(H')$, *siendo* $H' = \{v_1, v_2\}$ *una base de* S, *por tanto* $\dim S = 2$.

Ejemplo 96 *Sea* $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ *una base de* $\mathbb{R}^3$, $u_1 = (-1,0,1), u_2 = (1,1,0), u_3 = (1,2,3)$, *¿cuáles son las coordenadas del vector* $a = (3,-1,2)$ *respecto de* B*?*

$$a = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 \Rightarrow (3,-1,2) = \alpha_1(-1,0,1) + \alpha_2(1,1,0) + \alpha_3(1,2,3)$$

se obtiene el siguiente sistema $\left\{\begin{array}{rl} -\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = & 3 \\ \alpha_2 + 2\alpha_3 = & -1 \\ \alpha_1 \qquad + 3\alpha_3 = & 2 \end{array}\right.$

cuya solución es $\boxed{\begin{array}{l} \alpha_1 = -7 \\ \alpha_2 = -7 \\ \alpha_3 = 3 \end{array}} \Rightarrow a = (-7,-7,3)_B$

Ejemplo 97 *Sea* $F = L\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *un subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^3$. *Hallar una base de* F *sabiendo que* $v_1 = (2,-3,1)$, $v_2 = (3,-1,5)$, $v_3 = (-1,2,4)$ *y* $v_4 = (2,3,-3)$.

Estudiamos la dependencia lineal de este conjunto de vectores, estudiando el rango de la matriz de coeficientes del sistema $Ax = \mathbf{0}$, *donde* $A = [v_1|v_2|v_3|v_4]$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 2 \\ -3 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & -3 \end{bmatrix} \underset{F_{13}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & -3 \\ -3 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21}(3) \\ F_{31}(-2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & -3 \\ 0 & -14 & 14 & -6 \\ 0 & -7 & -9 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\underset{F_{32}(-\frac{1}{2})}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & -3 \\ 0 & -14 & 14 & -6 \\ 0 & 0 & -16 & 11 \end{bmatrix}$$

De aquí se deduce que $\mathrm{rg}(A) = 3$, *y podemos construir una base de* F *con los vectores* v_1, v_2 *y* v_3.

$$B_F = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(2,-3,1), (3,-1,5\}, (-1,2,4)\}.$$

Nota: al ser $\dim F = 3$, *resulta que* $F = \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 98 *Probar que* $B = \{a_1, a_2, a_3\}$ *con* $a_1 = (0, 2, -2)$, $a_2 = (1, 2, 3)$, $a_3 = (1, 5, 2)$ *es una base de* $\mathbb{R}^3$.

Puesto que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$, *es suficiente probar que el conjunto* B *es l.i., para ello calculamos el rango de la matriz de coeficientes del sistema* $Ax = \mathbf{0}$, *donde* $A = [a_1|a_2|a_3]$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underset{F_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underset{F_{31}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \underset{F_{32}\left(-\frac{1}{5}\right)}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{34}{5} \end{bmatrix}$$

Luego $\mathrm{rg}(A) = 3 \Rightarrow B$ *es un conjunto l.i. formado por tres vectores y por tanto es una base de* $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 99 *Determinar una base de* $\mathbb{R}^4$ *que contenga a los vectores* $v_1 = (1, 0, 1, 0)$, $v_2 = (-1, 1 - 1, 0)$.

Escribimos la matriz $A = [v_1, v_2, e_1, e_2, e_3, e_4]$, *y hallamos una forma escalonada* U*:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{F_{31}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = U$$

Se verifica que $rg(A) = 4$, *y si nos fijamos en las columnas de la matriz* U *que contienen a los pivotes, concluimos que los vectores situados en las mismas columnas de la matriz* A *son linealmente independientes.*

Luego $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^4$, *siendo* $v_3 = (1, 0, 0, 0)$ *y* $v_4 = (0, 0, 0, 1)$.

2.3.3. Cambio de base

En cualquier espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ existe un número infinito de bases, y fijada una base, cada vector puede ser expresado de forma única como combinación lineal de los vectores de dicha base. Nuestro objetivo es establecer que relación existe entre las coordenadas de un vector expresadas en dos bases diferentes de $\mathbb{R}^n$.

Sean $B = \{u_1, ..., u_n\}$ y $B' = \{v_1, ..., v_n\}$ dos bases de $\mathbb{R}^n$. Si $x \in \mathbb{R}^n$, entonces,

$x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = (\alpha_1, ..., \alpha_n)_B \qquad x = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n = (\beta_1, ..., \beta_n)_{B'}$

matricialmente, por columnas

$$x = [u_1|\cdots|u_n]\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{bmatrix}, \quad x = [v_1|\cdots|v_n]\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$$

si escribimos $M_B = [u_1|\cdots|u_n]$ y $M_{B'} = [v_1|\cdots|v_n]$, resulta la siguiente expresión de la ecuación del cambio de base:

$$M_B x_B = M_{B'} x_{B'}$$

M_B y $M_{B'}$ son matrices regulares por ser sus columnas l.i., por tanto si multiplicamos por M_B^{-1}, resulta:

$$x_B = P x_{B'}$$

siendo $P = M_B^{-1} M_{B'}$. La matriz P es la matriz de paso de B' a B, y el significado de sus columnas es el siguiente:

Sea $v_i \in B'$, si se expresa en esta base, se tiene: $v_i = (0, ..., \underset{i)}{1}, ..., 0)_{B'} = v_{i_{B'}}$. Si se sustituye en la ecuación de cambio de base $x_B = P x_{B'}$,

$$v_{i_B} = P v_{i_{B'}} \Rightarrow v_{i_B} = [p_1|\cdots|p_n]\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix} = p_i$$

es decir, se verifica que las columnas de la matriz P son las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B.

Ejemplo 100 *Sean B y B'. dos bases de $\mathbb{R}^2$. $B = \{u_1, u_2\}$, $u_1 = (1,2), u_2 = (3,5)$, $B' = \{v_1, v_2\}$, $v_1 = (1,3)$, $v_2 = (1,4)$.*

a) Calcular las coordenadas del vector $x = (1,1)_B$ en la base B'.

b) Obtener la matriz de paso de B' a B.

Para hallar las coordenadas de x en la base B', partimos de la primera ecuación de cambio de base:

$$M_B x_B = M_{B'} x_{B'}$$

donde $M_B = [u_1|u_2] = \begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$, $M_{B'} = [v_1|v_2] = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$.

Sustituyendo,

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha'_1 \\ \alpha'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$$

la solución de este sistema es: $\boxed{\begin{array}{l} \alpha'_1 = 9 \\ \alpha'_2 = -5 \end{array}}$

luego $x_{B'} = (9, -5)_{B'}$

Para hallar la matriz de paso P de B' a B, consideramos la ecuación

$$x_B = P x_{B'}$$

siendo $P = M_B^{-1} M_{B'}$. Sustituyendo resulta:

$$P = M_B^{-1} M_{B'} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

Es decir, $P = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$

Nota: Recordemos que el significado de las columnas de P es que son las coordenadas de los vectores de la base B' respecto de la base B.

$B' = \{v_1, v_2\}$, $v_1 = (1, 3) = (1, 0)_{B'}$

$$v_2 = (1, 4) = (0, 1)_{B'}$$

sustituyendo en la ecuación de cambio de base: $x_B = P x_{B'}$, resulta:

$$v_{1_B} = P v_{1_{B'}} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = (4, -1)_B$$

$$v_{2_B} = P v_{2_{B'}} = \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = (7, -2)_B$$

obsérvese también que

$$v_1 = (4, -1)_B = 4u_1 - u_2 = 4(1, 2) - (3, 5) = (1, 3)$$

$$v_2 = (7, -2)_B = 7u_1 - 2u_2 = 7(1, 2) - 2(3, 5) = (1, 4)$$

Ejemplo 101 *Dado el vector $v = (8, 2)$, calcular sus coordenadas respecto de la base $B = \{(2, 2), (1, 0)\}$*

Puesto que las componentes de un vector coinciden con sus coordenadas en la base canónica, se trata de hacer un cambio de base la base canónica C a la base B. Por tanto, consideramos la ecuación

$$M_C x_C = M_B x_B$$

donde $M_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$. *En consecuencia*

$$M_C x_C = M_B x_B \Rightarrow Ix = M_B x_B \Rightarrow x = P x_B$$

siendo en este caso $P = M_B$.

Si $v = (8, 2)$, sustituyendo en $P x_B = x$ se tiene:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{rl} 2\alpha_1 + \alpha_2 &= 8 \\ 2\alpha_1 \qquad &= 2 \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_2 = 6 \end{array}$$

con lo que se obtiene, $v = (1, 6)_B$

Ejemplo 102 *Sean las bases $B = \{u_1, u_2, u_3\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3\}$ de $\mathbb{R}^3$, donde $u_1 = v_2 + v_3$, $u_2 = v_1 + v_3$ y $u_3 = v_1 + v_2$.*

a) Hallar las coordenadas del vector $u = u_1 + u_2 + u_3$ respecto de la base B'.
b) Hallar las coordenadas del vector $v = v_1 - 2v_2 + v_3$ respecto de la base B.

a) Como $u = u_1 + u_2 + u_3$, sabemos que $u = (1, 1, 1)_B$, y también comocemos la expresión de los vectores de la base B, respecto de la base B'.

$$u_1 = v_2 + v_3 = (0, 1, 1)_{B'}$$

$$u_2 = v_1 + v_3 = (1, 0, 1)_{B'}$$

$$u_3 = v_1 + v_2 = (1, 1, 0)_{B'}$$

luego basta sustituir en la ecuación del cambio de base: $u_{B'} = P u_B$

$$u_{B'} = P u_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow u = (2, 2, 2)_{B'}$$

Nota: un procedimiento alternativo es el siguiente:

$$u = u_1+u_2+u_3 = (v_2+v_3)+(v_1+v_3)+(v_1+v_3) = 2v_1+2v_2+2v_3 = (2,2,2)_{B'}.$$

b) Como $v = v_1 - 2v_2 + v_3$, se sigue que $v = (1,-2,1)_{B'}$. Sustituyendo en la ecuación del cambio de base determinada en el apartado a) resulta: $v_{B'} = Pv_B$, y se tiene el sistema:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} \quad \textit{cuya solución es :} \boxed{\begin{array}{l} \alpha_1 = -1 \\ \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 = -1 \end{array}}$$

Por tanto, $v = (-1,2,-1)_B$.

2.3.4. Ecuaciones paramétricas e implícitas

A continuación describimos las ecuaciones paramétricas e implícitas de un subespacio vectorial mediante dos ejemplos.

Ejemplo 103 *Demostrar que $S = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 3x_3 = 0\}$ es un subespacio vectorial y encontrar una base de S.*

S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ pues el conjunto solución de un sistema de ecuaciones homogéneo, $Ax = \mathbf{0}$, siendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. Todas las soluciones pueden expresar en la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 = -\lambda + 3\mu \\ x_2 = \lambda \\ x_3 = \mu \end{array} \right. \qquad \textit{con } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

*Estas ecuaciones se denominan **ecuaciones paramétricas** del subespacio S.*

Podemos escribir las soluciones en la forma vectorial

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda + 3\mu \\ \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

y expresar las soluciones como combinación lineal de los vectores $a_1 = (-1,1,0)$ y $a_2 = (3,0,1)$. En consecuencia, $S = L\{a_1,a_2\}$. Además $B = \{a_1,a_2\}$ es una base de S por ser un sistema generador de S linealmente independiente.

Nota: Las ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial no son únicas. En el presente ejemplo, si tomamos la base $B' = \{v_1,v_2\}$, con $v_1 = (2,1,1)$ y $v_2 = (0,-3,-1)$, *se tendría que* $x \in S$ *si y sólo si se puede expresar como combinación lineal de los vectores* $\{v_1, v_2\}$, *es decir:*

$$x = \alpha v_1 + \beta v_2 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = \alpha(2, 1, 1) + \beta(0, -3, -1)$$

de donde, $\left\{ \begin{array}{l} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = \alpha - 3\beta \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \\ x_3 = \alpha - \beta \end{array} \right.$

y estas son otras ecuaciones paramétricas de S.

Ejemplo 104 *Sea* $S = L\{a_1, a_2, a_3\}$, *con* $a_1 = (1, -2, 1), a_2 = (2, 0, 3), a_3 = (-1, -2, -2)$ *¿Qué condiciones debe satisfacer el vector* $x = (x_1, x_2, x_3)$ *para pertenecer a* S*?*

Sabemos que $x \in S$ *si es combinación lineal de los vectores* a_1, a_2 *y* a_3.

$$x = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 \Rightarrow [a_1|a_2|a_3] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = x \Rightarrow A\lambda = x$$

tenemos que $x \in S$ *si el sistema* $A\lambda = x$ *posee solución.*

Como, $(A|x) = \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ -2 & 0 & -2 & x_2 \\ 1 & 3 & -2 & x_3 \end{array} \right]$

hacemos t.e. por filas para estudiar el rango,

$$(A|x) \underset{\substack{F_{21}(2) \\ F_{31}(-1)}}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 4 & -4 & x_2 + 2x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_3 - x_1 \end{array} \right] \underset{F_{32}(-1/4)}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|c} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & 4 & -4 & x_2 + 2x_1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + x_3 \end{array} \right]$$

Como $A\lambda = x$ *es compatible si y sólo si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|x)$ *se deduce que* $-\frac{3}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_2 + x_3 = 0$.

Esta ecuación (en general sería un S.E.L. homogéneo) se denomina ***ecuación implícita*** *del subespacio vectorial* S.

Nota 1: Las ecuaciones implícitas de un subespacio no son únicas. Cualquier sistema de ecuaciones homogéneo que fuera equivalente al obtenido también constituiría un sistema de ecuaciones implícitas. Por ejemplo, en el presente caso: $6x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$, *es otra ecuación implícita de* S.

Nota 2: Obsérvese que los tres vectores a_1, a_2 *y* a_3 *satisfacen las ecuaciones implicítas*

$6x_1 + x_2 - 4x_3 = 0$. *Puesto que* $\text{rg}(A) = 2$, *los vectores* $\{a_1, a_2, a_3\}$ *son linealmente dependientes. De hecho,* $a_3 = a_1 - a_2$, *y dicho vector puede suprimirse del sistema generador, por ser combinación lineal de los otros dos, con lo que podemos expresar,* $S = L\{a_1, a_2\}$. *El conjunto* $\{a_1, a_2\}$ *es una base de* S, *por ser un sistema generador linealmente independiente.*

2.4. Espacios fundamentales de una matriz

2.4.1. Rango y espacios fundamentales de una matriz

Sea la matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ podemos considerar sus filas como vectores de n componentes y sus columnas como vectores de m componentes, lo que permite expresar la matriz A de las dos formas siguientes:

$$A = \left[\begin{array}{c} f_1 \\ \hline \vdots \\ \hline f_m \end{array}\right] \qquad\qquad A = [a_1 | \cdots | a_n]$$

donde f_i denota la fila i de A, $i = 1, ..., m$; y a_j la columna j de A, $j = 1, ..., n$. A la matriz A vamos a asociarle cuatro subespacios vectoriales, considerando los conjuntos solución de los sistemas $Ax = 0$, $A^T y = 0$, y los subespacios que tienen a las filas o columnas de A como sistema generador.

Definición 105 *Dada una matriz* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, *se llaman espacios fundamentales de la* A *a los siguientes subespacios vectoriales:*

1. *Espacio fila de* A*:* $F(A) = L\{f_1, ..., f_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
2. *Espacio columna de* A*:* $R(A) = L\{a_1, ..., a_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$.
3. *Espacio nulo de* A*:* $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
4. *Espacio nulo de* A^T*:* $N(A^T) = \{y \in \mathbb{R}^m : A^T y = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

Observaciones:

1) Para cualquier matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ se verifica que $F(A) = R(A^T)$.

2) Como $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$ se cumple que $\dim F(A) = \dim R(A) = r$.

Proposición 106 *Sea* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, *con* $\text{rg}(A) = r$, *se verifica que* $\dim R(A) + \dim N(A) = n$.

Demostración: Si U es una forma escalonada de A, obtenida haciendo sólo t.e. por filas, se verifica que $Ax = \mathbf{0} \sim Ux = \mathbf{0}$, y la solución de este sistema equivalente viene dada en función de $n-r$ parámetros, en consecuencia: $\dim N(A) = \dim N(U) = n-r$, donde $r = \operatorname{rg}(A)$, luego $\dim R(A) + \dim N(A) = n$ $\square$

Ejemplo 107 *Determinar una base para los espacios fundamentales de la matriz A.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculamos en primer lugar una forma escalonada de A :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21}(2) \\ F_{31}(-3)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \underset{F_{32}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = U$$

- *Espacio fila de* A : *Se tiene que* $\operatorname{rg}(A) = 2$, *y por tanto* $\dim F(A) = 2$.

  Al no haber hecho permutaciones de filas, las dos primeras filas de A *son l.i., se tiene:*

  $B_{F(A)} = \{(1,0,2),(-2,1,1)\} \Rightarrow F(A) = L\{(1,0,2),(-2,1,1)\}$

  Nota: Como las filas U *se han obtenido haciendo t.e. con las filas de* A *se tiene, en aplicación del Teorema 81, que* $F(A) = F(U)$ *y, por tanto, otra base del espacio fila de* A *sería:* $B'_{F(A)} = \{(1,0,2),(0,1,5)\}$.

- *Espacio columna: Se verifica que* $\dim R(A) = \operatorname{rg}(A) = 2$

  Para hallar un sistema generador de $R(A)$ *basta tomar dos columnas l.i. de* A:

  $R(A) = L\{(1,-2,3),(0,1,-1)\}$, *y por tanto* $B_{R(A)} = \{(1,-2,3),(0,1,-1)\}$ *es la base pedida.*

- *Espacio nulo de* A: $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \mathbf{0}\}$

  $$Ax = \mathbf{0} \sim Ux = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 5x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = -5x_3 \end{cases}$$

de donde: $\boxed{\begin{array}{c} x_1 = -2\alpha \\ x_2 = -5\alpha \\ x_3 = \alpha \end{array}}$ $\alpha \in \mathbb{R}$.

en consecuencia, $N(A) = L\{(-2,-5,1)\} \Rightarrow B_{N(A)} = \{(-2,-5,1)\}$

Obsérvese que $\dim N(A) = n - r = 3 - 2 = 1$.

Nota: Al verificarse que $Ax = \mathbf{0} \sim Ux = \mathbf{0}$*, se sigue que* $N(A) = N(U)$.

- *Espacio nulo de* A^T*:* $N(A^T) = \{y \in \mathbb{R}^n : A^T y = \mathbf{0}\}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \underset{F_{31}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \underset{F_{32}(-5)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^T y = \mathbf{0} \sim \left\{ \begin{array}{r} y_1 - 2y_2 + 3y_3 = 0 \\ y_2 - y_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y_1 = -y_3 \\ y_2 = y_3 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} y_1 = -\alpha \\ y_2 = \alpha \\ y_3 = \alpha \end{array}} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

por tanto, $N(A^T) = L\{(-1,1,1)\}$*, y una base sería* $B_{N(A^T)} = \{(-1,1,1)\}$.

2.4.2. Teorema de Rouché-Frobënius

En el primer capítulo enunciamos sin demostración el Teorema de Rouché-Frobënius que nos caracteriza la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales. Ahora incluimos una demostración de este teorema en la que empleamos conceptos introducidos en el presente capítulo.

Teorema 108 (de Rouché-Frobënius) *Sea* $(S) : Ax = b$*, con* $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$*,* $b \in \mathbb{R}^m$*, y* $x \in \mathbb{R}^n$*, se verifica:*

1. *El sistema (S) es compatible si y sólo si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$*.*
2. *Si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = n$*, entonces* (S) *es compatible determinado.*
3. *Si* $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = r < n$*, entonces* (S) *es compatible indeterminado.*

Demostración:

1. $Ax = b$ es compatible$\Leftrightarrow$ existe $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $\alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n = b \Leftrightarrow \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$.

2. Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = n \Rightarrow (S)$ es compatible, $b \in R(A)$, y las columnas de A son una base de $R(A)$ por ser l.i., luego las coordenadas de b respecto de $B_{R(A)} = \{a_1, ..., a_n\}$ son únicas: $b = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n \Rightarrow$ la solución $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ es única, y por tanto (S) es un sistema C.D.

3. Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = r < n \Rightarrow (S)$ es compatible, $b \in R(A)$ y las columnas de A son un sistema generador de $R(A)$ linealmente dependiente. Luego la expresión del vector b como combinación lineal de las columnas de la matriz A no es única, y por tanto el sistema (S) es compatible indeterminado. $\square$

Observación: En el caso de que un sistema sea compatible indeterminado su solución se puede expresar como suma de una solución particular del sistema $Ax = b$ más una solución cualquiera del sistema homogéneo asociado $Ax = \mathbf{0}$. Este hecho se pone de manifiesto en la siguiente proposición.

Proposición 109 *Sea $(S) : Ax = b, A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, un sistema de ecuaciones compatible. Si $N(A)$ es el conjunto solución del sistema homogéneo $(S_h) : Ax = \mathbf{0}$ y x_p es una solución particular de (S), entonces el conjunto C_s, dado por*

$$C_s = x_p + N(A) = \{y \in \mathbb{R}^n : y = x_p + z, z \in N(A)\}$$

contiene todas las soluciones de (S).

Demostración:

- Cualquier $y \in C_s$ es solución de (S): $Ay = A(x_p + z) = Ax_p + Az = b + \mathbf{0} = b$.
- Toda solución y de (S) puede escribirse como $y = x_p + z, z \in N(A)$.

  En efecto, $y = x_p + y - x_p$ siendo $y - x_p \in N(A)$ pues $A(y - x_p) = Ay - Ax_p = b - b = \mathbf{0}$. $\square$

Ejemplo 110 *Estudiar la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones según los valores de los parámetros a y b. A continuación, resolverlo cuando sea compatible.*

$$\begin{cases} 2x_1 - ax_2 + bx_3 = 4 \\ x_1 \qquad\quad + \ x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 \ \ + \ x_3 = 2 \end{cases}$$

$$(A|b) = \begin{bmatrix} 2 & -a & b & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underset{P_{13}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -a & b & 4 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21}(-1) \\ F_{31}(-2)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -a-2 & b-2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underset{F_{32}(-a-2)}{\sim}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-2 & 0 \end{bmatrix} = (U|c).$$

Por tanto $Ax = b \sim Ux = c$, y la compatibilidad se resume en el siguiente cuadro:

	rg(A)	*rg(A|b)*	*Conclusión*
$b = 2$	2	2	*C. I.*
$b \neq 2$	3	3	*C. D.*

Solución del sistema para $b \neq 2$

$$(U|c) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b-2 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y+z = 2 \\ -y \quad = 0 \\ (b-2)z = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{array}}$$

Solución del sistema para $b = 2$

$$(U|c) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 2-z \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 2-\alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{array}} \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

Nota: En el caso de $b = 2$, si (x, y, z) es una solución del sistema $Ax = b$, puede escribirse del siguiente modo.

$$(x, y, z) = (2-\alpha, 0, \alpha) = \underbrace{(2,0,0)}_{\textit{Solución particular de } Ax=b} + \underbrace{\alpha(-1,0,1)}_{\textit{Solución general de } Ax=0}$$

Obsérvese que $(x, y, z) = (2, 0, 0)$ es una solución particular del sistema $Ax = b$ (se obtiene para $\alpha = 0$), y que $L = N(A) = L\{(-1, 0, 1)\}$ es el conjunto solución del sistema homogéneo asociado $Ax = \mathbf{0}$.