Capítulo 1
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES

1.1. Introducción

En Secundaria y Bachillerato se incia el estudio de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, y se consideran la regla de Cramer y el método de Gauss como métodos de resolución. Nuestro objetivo es profundizar en el conocimiento de la eliminación gaussiana haciendo uso de notación matricial.

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas en $\mathbb{R}$ es una expresión de la forma

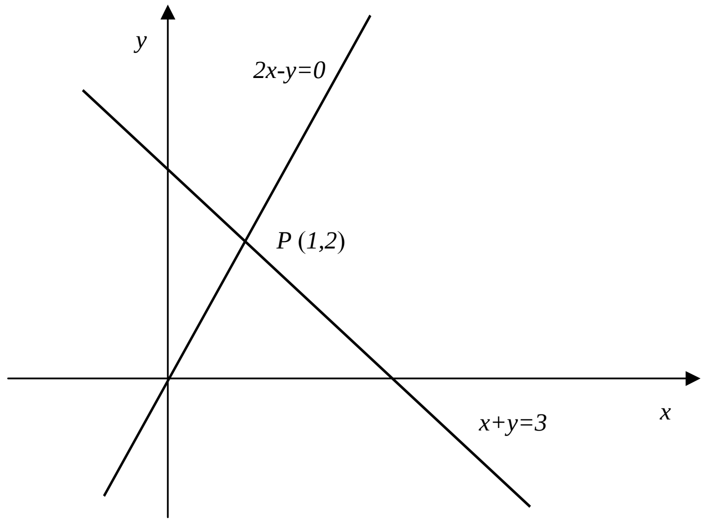
$$(S) : \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array} \right.$$

donde $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ son números conocidos y x_j son las incógnitas con $i = 1, ..., m$ y $j = 1, ..., n$. Una solución de (S) es un vector de n componentes $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ que verifica todas las ecuaciones de (S) simultáneamente.

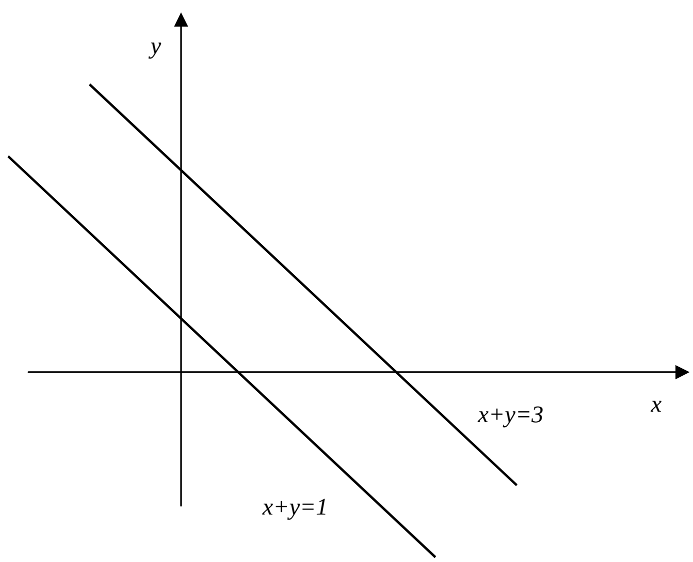
Estamos interesados en conocer cuando un sistema de ecuaciones posee solución (es *compatible*) o no (es *incompatible*), y para el caso en que tenga solución si esta es única (sistema *compatible determinado*) o si posee más de una (sistema *compatible indeterminado*).

A continuación recordamos el caso particular de sistemas de 2 ecuaciones con 2 incógnitas, analizándolo desde un punto de vista geométrico:

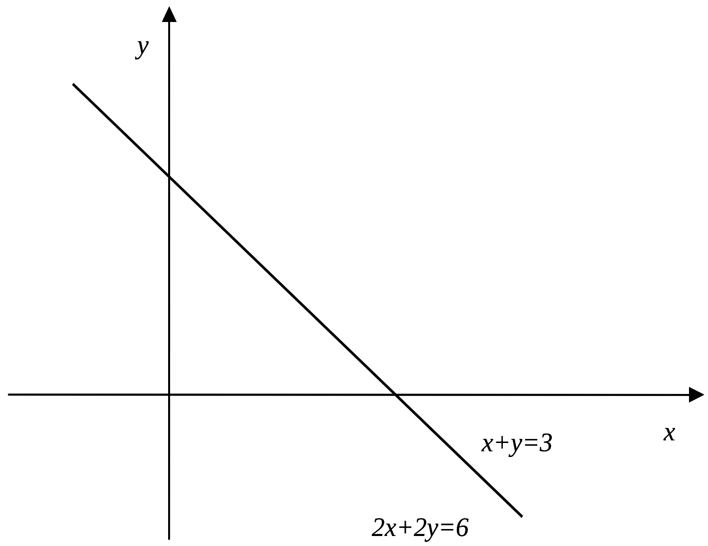
Ejemplo 1 *Consideremos el sistema* $(S_1) : \left\{ \begin{array}{c} x + y = 3 \\ 2x - y = 0 \end{array} \right.$ *, la gráfica de cada una de las ecuaciones dadas es una recta. Ambas rectas se cortan en el punto* $P\ (1, 2)$ *y la solución del sistema* (S_1) *es* $x = 1, y = 2$. *El sistema* (S_1) *tiene solución única.*



Ejemplo 2 *Para el sistema* (S_2) : $\begin{cases} x+y=3 \\ x+y=1 \end{cases}$, *las rectas que representan a las ecuaciones del sistema son dos rectas paralelas. Como las rectas paralelas no se cortan, se tiene que el sistema* (S_2) *no tiene solución.*

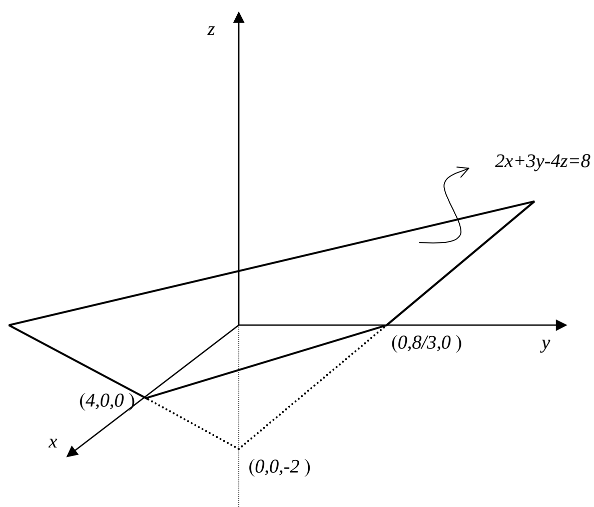


Ejemplo 3 *Para el sistema* (S_3) : $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$, *las gráficas de las dos ecuaciones son una misma recta. Como las rectas coinciden, hay infinitas soluciones para el sistema* (S_3).



En el caso de ecuaciones lineales con tres incógnitas, la representación geométrica viene dada por un plano.

Ejemplo 4 *La representación gráfica de la ecuación lineal :* $2x + 3y - 4z = 8$ *es un plano en el espacio tridimensional.*



Para sistemas de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas se pueden presentar las siguientes situaciones:

a) Los planos que representan a cada ecuación se cortan en un punto, luego existe solución única.

b) Los tres planos poseen una recta común, o son planos coincidentes. Se tiene que hay infinitas soluciones.

c) Los tres planos no poseen puntos comunes de manera simultánea. El sistema carece de solución.

Al resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas en $\mathbb{R}$ se presentan estas mismas situaciones. Es decir, son compatibles determinados (solución única), son compatibles indeterminados (infinitas soluciones) o son incompatibles (carecen de solución). Ahora bien, ¿qué estrategia emplearemos para resolver sistemas de ecuaciones lineales?

Tal y como se ha dicho anteriormente, el objetivo es profundizar en el método de Gauss, y poner de manifiesto las limitaciones de la regla de Cramer dado el excesivo número de operaciones que requiere. Para el estudio de la eliminación gaussiana nos ayudaremos de la notación matricial, y será suficiente conocer los coeficientes del sistema.

1.2. Matrices

1.2.1. Definiciones y ejemplos

Definición 5 *Una matriz $A = (a_{ij})$ es un conjunto de números ordenados en filas y columnas.* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Si m es el número de filas y n el de columnas diremos que A es una matriz de orden (tamaño o dimensión) m por n y escribiremos $A_{m\times n}$ ó $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, donde $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ representa el conjunto de las matrices de orden $m \times n$ con con elementos o coeficientes reales.

Ejemplo 6 *La matriz* $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ *posee 2 filas y 3 columnas, $A \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$.*

Observación: Pueden definirse también matrices con elementos complejos. El conjunto de las matrices complejas de orden $m \times n$ se representa por $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{C})$.

Definición 7 *Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, diremos que es un matriz cuadrada si $m = n$, que es una matriz fila si $m = 1$, y que es una matriz columna si $n = 1$.*

Ejemplo 8 *La matriz* $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ *es cuadrada,* $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ *es una matriz fila, y* $C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ *es una matriz columna.*

Observaciones:

a) Dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ del mismo orden son *iguales* si $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i, j.

b) Si $A = (a_{ij})$ es una matriz cuadrada de orden n, los elementos $a_{ii}, i = 1, ..., n$, forman la *diagonal* y la *traza* es su suma.

c) Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ en la que todos los elementos no diagonales son cero se denomina *matriz diagonal*, y se verifica que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

d) Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ en la que todos los elementos situados por encima de la diagonal principal son nulos se denomina *triangular inferior*, y se tiene que $a_{ij} = 0$ si $i < j$.

e) Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ en la que todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal son nulos se denomina *triangular superior,* y se tiene que $a_{ij} = 0$ si $i > j$.

Ejemplo 9 *a) La matriz D es diagonal, la matriz L es triangular inferior y U es triangular superior.*

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

b) La matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, *tiene por traza:* $tr(A) = -1 + 2 = 1$

1.2.2. Operaciones con matrices

A continuación se definen las operaciones básicas con matrices.

- **Suma**: dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ del mismo orden, la suma $A + B$ es la matriz que se obtiene al sumar los elementos correspondientes de las dos matrices. Es decir, si $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$, se define $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

- **Producto de un escalar por una matriz**: Si A es cualquier matriz y λ es cualquier número real, el producto λA es la matriz que se obtiene al multiplicar cada elemento de A por λ. Esto es, $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

- **Producto de matrices**: Si $A_{m\times r}$ y $B_{r\times n}$, el producto AB es la matriz $C_{m\times n}$ definida del siguiente modo:

$$c_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ir} \end{bmatrix}}_{\text{fila } i \text{ de } A} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{bmatrix}}_{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

para $i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n.$

- **Matriz traspuesta**: Sea $A_{m\times n}$, la traspuesta de A es la matriz que se obtiene al intercambiar las filas por las columnas, y se representa por A^T.

Ejemplo 10 *Sea* $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, *su traspuesta es* $A^T = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Ejemplo 11 *Dadas* $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ *y* $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}$, *se verifica que*

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

Sin embargo no es posible calcular $A + C$ *por ser matrices de distinto tamaño.*

También podemos efectuar el producto CA,

$$CA = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ -1 & 2 & -5 \end{bmatrix}}_{3\times 3} \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{3\times 2} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -9 \\ -9 & -13 \end{bmatrix}}_{3\times 2}$$

pero no es posible efectuar los productos AC *ó* AB.

Observación: El producto de matrices no es conmutativo. Como consecuencia de ello, para matrices cuadradas, en general, $(A + B)^2 \neq A^2 + 2AB + B^2$.

Ejemplo 12 *Dadas las matrices* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ *y* $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ *comprobar que* $(A+B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2$.

$$(A+B)^2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^2 + AB + BA + B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Proposición 13 *Sean A, B y C matrices de órdenes convenientes para que puedan realizarse las operaciones que a continuación se indican. Se verifica:*

1) $A + B = B + A$	5) $A(BC) = (AB)C$
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$	6) $(A + B)^T = A^T + B^T$
3) $A(B + C) = AB + AC$	7) $(A^T)^T = A$
4) $(A + B)C = AC + BC$	8) $(AB)^T = B^T A^T$

Ejemplo 14 *Sean* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix}$, *es fácil comprobar que* $(AB)^T = B^T A^T$.

En efecto, $AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 6 & 5 \\ 2 & 8 & -2 \end{bmatrix}$

luego, $(AB)^T = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 8 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$

Por otro parte se tiene que,

$$B^T A^T = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 6 & 8 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$$

Hagamos un breve paréntesis para recordar que el 0 y el 1 juegan un papel importante en las operaciones con números reales. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ se verifica:

1) $a+0=0+a=a$	4) $a\cdot b=a\cdot c$ y $a\neq 0 \Rightarrow b=c$
2) $a\cdot 0=0\cdot a=0$	5) $a\cdot 1=1\cdot a=a$
3) $a\cdot b=0 \Leftrightarrow a=0$ ó $b=0$	6) $a\neq 0 \Rightarrow a\cdot\frac{1}{a}=\frac{1}{a}\cdot a=1$

¿Qué matrices "juegan" el papel del 0 y el 1, y cuáles de estas reglas son válidas para matrices? Dichas matrices son la matriz nula y la matriz identidad, respectivamente, que se definen del siguiente modo:

- Matriz nula: $\mathbf{O}_{m\times n}=(\theta_{ij})$, siendo $\theta_{ij}=0$ para todo i, j.
- Matriz identidad**:** $I_n=(\delta_{ij})$, siendo $\delta_{ii}=1, \delta_{ij}=0$ si $i\neq j$. Es decir:

$$I_n=\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Proposición 15 *Sean $A_{m\times n}$, se verifica:*

1. $A_{m\times n}+\mathbf{O}_{m\times n}=\mathbf{O}_{m\times n}+A_{m\times n}=A_{m\times n}$
2. $A_{m\times n}\mathbf{O}_{n\times p}=\mathbf{O}_{m\times p}$
3. $A_{m\times n}I_n=A_{m\times n}$
4. $I_mA_{m\times n}=A_{m\times n}$

Observación

En general $AB=\mathbf{O} \not\Rightarrow A=\mathbf{O}$ ó $B=\mathbf{O}$, y $AB=AC \not\Rightarrow B=C$.

Ejemplo 16 *Sean $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ y $C=\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$. Es fácil comprobar que $AB=AC$, siendo $B\neq C$.*

1.2.3. Matriz inversa

Definición 17 *Una matriz cuadrada A es invertible (o regular) si existe una matriz cuadrada B, denominada inversa de A, tal que $AB = BA = I$.*

Proposición 18 *La inversa de una matriz regular es única.*

Demostración:

Si B y C son dos matrices inversas de A, se verifica que $AB = BA = I$, y también $AC = CA = I$. Luego $B = BI = B(AC) = (BA)C = C$. Es decir, la inversa de la matriz A es única $\square$

Observación:

a) Dada un matriz A, su inversa se representa por A^{-1}.

b) Cuando una matriz no posee inversa se dice que es *singular*.

Proposición 19 *Sean A y B matrices regulares del mismo orden, se verifica:*
a) La matriz AB también es regular y su inversa es $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

b) $(A^{-1})^{-1} = A$ y $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Demostración: Si A y B son regulares existen A^{-1} y B^{-1}, y se verifica:

a) $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$

$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$

es decir, la matriz inversa de AB es $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

b) $(A^{-1}A)^T = A^T(A^{-1})^T = I$ y $(AA^{-1})^T = (A^{-1})^TA^T = I$, luego $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$. Es decir, la inversa de la matriz traspuesta es la traspuesta de la inversa. $\square$

Ejemplo 20 *La matriz $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ es la inversa de $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ pues se cumple que $AB = BA = I$. En consecuencia $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.*

Ejemplo 21 *¿Posee inversa la matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$?*

Buscamos una matriz $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ tal que $AB = BA = I$.

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b_{11} + b_{21} & 2b_{12} + b_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I \Rightarrow A \text{ no posee inversa.}$$

1.2.4. Matrices simétricas

Definición 22 *Dada una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$, diremos que es simétrica si $A = A^T$.*

Como consecuencia de esta definición se tiene que si A es simétrica se cumple que $a_{ij} = a_{ji}$ para todo i, j.

A continuación se recogen algunas propiedades de las matrices simétricas, cuya demostración dejamos como ejercicio.

Proposición 23 *Si A y B son matrices simétricas del mismo orden, se verifica:*

1. $A + B$ es simétrica.
2. kA es simétrica para todo $k \in \mathbb{R}$.
3. AB es simétrica si y sólo si A y B conmutan.
4. Si A es simétrica e invertible, entonces A^{-1} es simétrica.
5. Si $A_{m\times n}$, AA^T es simétrica de orden m y A^TA es simétrica de orden n.
6. Si A es simétrica e invertible, entonces AA^T y A^TA son invertibles.

1.3. Eliminación gaussiana

1.3.1. Método de Gauss

Este método consiste en transformar el sistema de ecuaciones dado en otro *equivalente* (que tenga la misma solución) y cuya matriz de coeficientes sea *triangular*. Los métodos de resolución de sistemas triangulares se denominan métodos de *subida* o *bajada*, según que la matriz de coeficientes sea triangular superior o inferior.

Ejemplo 24 *Solución de un sistema por el método de subida.*

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x + \ y + \ z & = 1 \\ y + 2z & = 4 \\ 4z & = 4 \end{array}\right.$$

Se resuelve en primer lugar la tercera ecuación, y se obtiene $z = 1$. A continuación se sustituye en la segunda y se encuentra $y = 2$, finalmente se sustituyen estos valores en la primera ecuación y se determina $x = -1$.

La solución es $\boxed{\begin{array}{r} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{array}}$

Ejemplo 25 *Solución de un sistema por el método de bajada*

$$\left\{\begin{array}{ll} 2x & = 2 \\ -x + y & = 0 \\ 2x - 3y + 4z & = 3 \end{array}\right.$$

El planteamiento para la resolución es análogo. En este caso se comienza resolviendo la primera ecuación, y se continúa con las siguientes.

En este caso, la solución es $\boxed{\begin{array}{c} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{array}}$

Transformaciones elementales en S.E.L.

Para transformar un sistema de ecuaciones en otro *equivalente* se pueden realizar las siguientes transformaciones que denominaremos *elementales*.

- $F_i(\alpha)$ Multiplicar la ecuación i por un escalar $\alpha \neq 0$.
- F_{ij} Permutar las ecuaciones i y j.
- $F_{ij}(\alpha)$ Sumar a la ecuación i la ecuación j multiplicada por un escalar α.

En los siguientes ejemplos ilustramos la solución de dos sistemas mediante el método de Gauss. En el primero de ellos sólo realizamos transformaciones del tercer tipo, en el segundo también se hace una permutación de ecuaciones.

Ejemplo 26 *Resolución mediante el método de Gauss.*

$$\left\{\begin{array}{rl} 2x_1 + x_2 + x_3 = & 1 \\ 4x_1 + x_2 = & -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = & 7 \end{array}\right. \underset{\substack{F_{21}(-2) \\ F_{31}(1)}}{\sim} \left\{\begin{array}{rl} 2x_1 + x_2 + x_3 = & 1 \\ -x_2 - 2x_3 = & -4 \\ 3x_2 + 2x_3 = & 8 \end{array}\right. \underset{F_{32}(3)}{\sim} \left\{\begin{array}{rl} 2x_1 + x_2 + x_3 = & 1 \\ -x_2 - 2x_3 = & -4 \\ -4x_3 = & -4 \end{array}\right.$$

donde $\sim$ es el símbolo de equivalencia.

Resolviendo el sistema triangular equivalente por el método de subida se obtiene la siguiente solución: $\boxed{\begin{array}{c} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{array}}$

Ejemplo 27 *Resolución mediante el método de Gauss.*

$$\left\{\begin{array}{rl} x_1 + \ \ x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 = 0 \end{array}\right. \underset{\substack{F_{21}(-3) \\ F_{31}(-1)}}{\sim} \left\{\begin{array}{rl} x_1 + x_2 - x_3 & = \ \ 2 \\ 4x_3 & = -4 \\ -x_2 + 2x_3 & = -2 \end{array}\right. \underset{F_{32}}{\sim} \left\{\begin{array}{rl} x_1 + x_2 - x_3 & = \ \ 2 \\ -x_2 + 2x_3 & = -2 \\ 4x_3 & = -4 \end{array}\right.$$

Obsérvese que en este caso ha habido que hacer una permutación de ecuaciones debido a que el coeficiente de x_2 es cero *en la segunda ecuación del segundo sistema.*

La s*olución es:* $\boxed{\begin{array}{rr} x_1 = & 1 \\ x_2 = & 0 \\ x_3 = & -1 \end{array}}$

El proceso de eliminación gaussiana seguido para resolver los sistemas anteriores podemos describirlo matricialmente.

Definición 28 *Dado un sistema* (S) *de* m *ecuaciones lineales con* n *incógnitas:*

$$(S): \left\{\begin{array}{r} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$$

la matriz $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, *recibe el nombre de matriz de coeficientes, el vector* $b = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$ *se denomina término independiente y el vector* $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *se llama vector de incógnitas o vector incógnita.*

Con esta notación el sistema (S) se escribe como $Ax = b$, y los vectores x y b se representan por columnas.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Observación:

Si denotamos por a_i la columna i de la matriz A, podemos escribir el sistema $Ax = b$ del siguiente modo:

$$Ax = b \Leftrightarrow [a_1|\cdots|a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = b \Leftrightarrow a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b$$

Definición 29 *Dado el sistema* $Ax = b$, *a la matriz que se obtiene añadiéndole a* A *el vector* b *como última columna se le llama matriz ampliada del sistema y la denotamos por* $(A|b)$. *Si* $b = \mathbf{0}$, *el sistema se denomina homogéneo.*

Si consideramos el sistema del ejemplo 26,

$$(S):\left\{\begin{array}{rl} 2x_1+x_2+x_3= & 1\\ 4x_1+x_2 \quad\;\; = & -2\\ -2x_1+2x_2+x_3= & 7\end{array}\right.$$

su representación matricial es $(S): Ax=b$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 0\\ -2 & 2 & 1\end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}}_{x}=\underbrace{\begin{bmatrix} 1\\ -2\\ 7\end{bmatrix}}_{b}$$

y la matriz ampliada es: $(A|b)=\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 0 & -2\\ -2 & 2 & 1 & 7\end{array}\right]$

Una vez que tenemos la matriz ampliada $(A|b)$ la sometemos a las mismas tranformaciones elementales que realizamos en el ejemplo 26. En este caso, el significado de $F_i(\alpha), F_{ij}$ y $F_{ij}(\alpha)$ es el siguiente:

- $F_i(\alpha)$ Multiplicar la *fila* i por un escalar $\alpha\neq 0$.
- F_{ij} Permutar las *filas* i y j.
- $F_{ij}(\alpha)$ Sumar a la *fila* i la *fila* j multiplicada por un escalar α.

$$(A|b)=\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1\\ 4 & 1 & 0 & -2\\ -2 & 2 & 1 & 7\end{array}\right]\underset{\substack{F_{21}(-2)\\ F_{31}(1)}}{\sim}\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -4\\ 0 & 3 & 2 & 8\end{array}\right]\underset{F_{32}(3)}{\sim}\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & 1 & 1\\ 0 & -1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & -4 & -4\end{array}\right]=(U|c)$$

Es decir, podemos trabajar sólo con la matriz ampliada y la solución la calculamos resolviendo el sistema equivalente $Ux=c$. La matriz U es una matriz triangular superior, y es una forma escalonada de la matriz A. En general, diremos que U es una *forma escalonada* si el primer elemento no nulo de cada fila, *llamado pivote*, se encuentra en una columna que está a la derecha de la columna que ocupa el pivote de la fila anterior, y si sólo hay ceros bajo cada pivote en la columna correspondiente.

Puesto que los sistemas $Ax=b$ y $Ux=c$ son equivalentes*, y hemos pasado de uno a otro sometiendo a la matriz $(A|b)$ a transformaciones elementales por filas, diremos que las matrices $(A|b)$ y $(U|c)$ son *equivalentes* y por tanto tienen el mismo *rango*. El concepto de rango podemos introducirlo sin necesidad de acudir a la teoría de determinantes.

*Esta equivalencia se probará en la proposición 41

Definición 30 *El rango de una matriz es el número máximo de filas no nulas una vez reducida la matriz a una forma escalonada.*

Nota 31 *Puede probarse que el rango de una matriz A coincide con el de la matriz A^T.*

Observación

Para las matrices $(A|b)$ y $(U|c)$ precedentes se verifica:

$\text{rg}(A) = \text{rg}(U) = 3$, y $\text{rg}(A|b) = \text{rg}(U|c) = 3$

$\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3 = n$ (n^o de incógnitas), y el sistema $Ax = b$ es compatible determinado (C.D.)

A continuación vamos a considerar algunos ejemplos más usando notación matricial.

Ejemplo 32 *Resolver el sistema (S): $Ax = b$, con* $(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -6 & 8 \end{array}\right]$

$$(A|b)=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & -6 & 8 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{21}(-2)\\ F_{31}(-4)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \end{array}\right] \underset{F_{32}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -5 & 2 \\ 0 & -7 & 14 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] =(U|c)$$

Para hallar la solución resolvemos el sistema equivalente $Ux = c$.

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 2 \\ -7x_2 + 14x_3 = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 2 + 5x_3 \\ -7x_2 = -14x_3 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 2 + \lambda \\ x_2 = 2\lambda \\ x_3 = \lambda \end{array}}$$

donde λ es un número real arbitrario. Por tanto, el sistema tiene infinitas soluciones, es decir es compatible indeterminado (C.I.).

Obsérvese que hemos tomado como incógnitas principales *a x_1 y a x_2 que son las que corresponden a las columnas de cada elemento* pivote *(primer elemento no nulo que aparece en cada fila de la matriz escalonada*** *U). La incógnitas restantes, en este caso la x_3, las denominamos* secundarias o libres *y se les asignan valores arbitrarios.*

Nótese también que $\text{rg}(A) = \text{rg}(U) = 2$, *y* $\text{rg}(A|b) = \text{rg}(U|c) = 2$; *y que* $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2 < n = 3$ *(n^o incógnitas).*

** Cuando todos los pivotes son 1 y encima de ellos sólo hay ceros, se dice que se tiene una forma escalonada reducida, que denotaremos por U_r.

Ejemplo 33 *Resolver el sistema (S): $Ax = b$, donde* $(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right]$

$$(A|b)=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 4 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{21}(-2)\\F_{31}(-1)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \underset{F_{32}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]=(U|c)$$

En el sistema equivalente $Ux = c$ la tercera ecuación carece de soluciones:

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

Por tanto, el sistema $Ax = b$ es incompatible (S.I.). Obsérvese que, en este caso, se verifica que $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(U) = 2$, *y* $\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(U|c) = 3$. *Por tanto,* $\mathrm{rg}(A) \neq \mathrm{rg}(A|b)$.

Los ejemplos anteriores nos conducen al siguiente resultado que nos permite caracterizar la compatibilidad de un sistema de ecuaciones lineales. Este teorema se probará al final de siguiente capítulo.

Teorema 34 (Rouché-Frobënius) *Sea $(S) : Ax = b$, con $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^m$, y $x \in \mathbb{R}^n$, se verifica:*

1. El sistema (S) es compatible si y sólo si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b)$.

2. Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = n$, *entonces (S) es compatible determinado.*

3. Si $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) < n$, *entonces (S) es compatible indeterminado.*

Sistemas homogéneos

Son sistemas del tipo $(S) : Ax = \mathbf{0}$, con $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $x \in \mathbb{R}^n$. Son siempre compatibles pues $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|\mathbf{0})$. Como consecuencia del Teorema de Rouché-Frobënius se verifica:

1. Si $\mathrm{rg}(A) = n$, el sistema es compatible determinado, y la única solución es $x = \mathbf{0}$. A esta solución se le denomina *solución trivial.*

2. Si $\mathrm{rg}(A) < n$, el sistema es compatible indeterminado.

En el siguiente capítulo, con ocasión de la demostración del Teorema de Rouché, se profundizará en la relación existente entre las soluciones de un sistema $Ax = b$ y las de su correspondiente sistema homogéneo asociado $Ax = \mathbf{0}$.

Para profundizar en las ideas anteriores, sugerimos la resolución de los ejercicios y ejemplos siguientes:

Ejercicio 35 *Estudiar la compatibilidad de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y resolverlos cuando sea sea posible.*

$$a)\left\{\begin{array}{r} x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = -4 \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = -1 \\ x_2 = 3 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{rl} 2x - y & = 0 \\ -x + 2y - z & = 0 \\ -y + 2z - t & = 0 \\ -z + 2t & = 5 \end{array}\right.$$

Ejercicio 36 *Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales*

$$a)\left\{\begin{array}{r} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{array}\right. \quad b)\left\{\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{array}\right. \quad c)\left\{\begin{array}{rl} 2x - y & = 0 \\ -x + 2y - z & = 0 \\ -y + 2z - t & = 0 \\ -z + 2t & = 0 \end{array}\right.$$

Ejemplo 37 *Dado el sistema (S) estudiar su compatibilidad en función del parámetro a y resolverlo cuando sea compatible.*

$$(S):\left\{\begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = -4 \\ x - y + (a+2)z = -3a - 5 \\ 4x + 2y + (a+6)z = -3a^2 - 8 \end{array}\right.$$

Consideremos la matriz ampliada

$$(A|b) = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & -1 & a+2 & -3a-5 \\ 4 & 2 & a+6 & -3a^2-8 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{21}(-2) \\ F_{31}(-1) \\ F_{41}(-4)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & -3 & a+1 & -3a-6 \\ 0 & -6 & a+2 & -3a^2-12 \end{array}\right]$$

$$\underset{\substack{F_{32}(-1) \\ F_{42}(-2)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & a & -3a \\ 0 & 0 & a & -3a^2 \end{array}\right] \underset{F_{43}(-1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & a & -3a \\ 0 & 0 & 0 & -3a^2+3a \end{array}\right] = (U|c)$$

Se verifica que $-3a^2 + 3a = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $a = 1$. Por tanto,

Si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, $\mathrm{rg}(A) = 3$ y $\mathrm{rg}(A|b) = 4 \Rightarrow (S)$ es incompatible.

Si $a = 0$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 2 <$ *nºi ncógnitas* $\Rightarrow (S)$ *es compatible indeterminado*

Si $a = 1$, $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|b) = 3 =$*nº incógnitas* $\Rightarrow (S)$ *es compatible determinado,*

$$\textit{Si } a = 0,\ Ax = b \sim \left\{ \begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ -3y + z = -6 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = -\dfrac{5}{3}\lambda - 3 \\ y = \dfrac{1}{3}\lambda + 2 \\ z = \lambda \end{array}} \ \textit{siendo } \lambda \in \mathbb{R}.$$

$$\textit{Si } a = 1,\ Ax = b \sim \left\{ \begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ -3y + z = -6 \\ z = -3 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -3 \end{array}}$$

Ejercicio 38 *Estudiar la compatibilidad de los sistemas* (S_1) *y* (S_2) *según los valores de* a *y* b.

$$a)\ (S_1) : \left\{ \begin{array}{r} x - y + 2z = 0 \\ -x + (3 - a)y + (a + 1)z = 1 \\ 2x + 2y + 24z = b \end{array} \right. \qquad b)\ (S_2) : \left\{ \begin{array}{r} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{array} \right.$$

1.3.2. Matrices elementales y eliminación gaussiana

Hasta ahora hemos hablado de transformaciones elementales. Ahora vamos a profundizar sobre esta cuestión introduciendo las denominadas matrices elementales. Dada la matriz identidad de orden n, se consideran tres tipos de *matrices elementales*.

- $F_i(\alpha)$ es la matriz que se obtiene al multiplicar la fila i de la matriz I_n por un escalar $\alpha \neq 0$.
- F_{ij} es la matriz que se obtiene al permutar las filas i y j de la matriz I_n.
- $F_{ij}(\alpha)$ es la matriz que se obtiene al sumar a la fila i de la matriz I_n la fila j multiplicada por un escalar α.

Observación:

Es importante indicar que si una matriz A, de un orden adecuado, se multiplica por la izquierda por una matriz elemental se traslada a dicha matriz la correspondiente transformación elemental. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 39 *Dada la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, *hallar las matrices elementales* $F_2(3), F_{12}$ *y* $F_{31}(2)$. *A continuación, calcular* $F_2(3)A, F_{12}A$ *y* $F_{31}(2)A$.

Para hallar las matrices $F_2(3), F_{12}$ *y* $F_{31}(2)$, *partimos de la matriz* $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *y la sometemos a la correspondiente transformación elemental por filas.*

$$F_2(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad F_{31}(2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese el resultado que se obtiene al efectuar los siguientes productos:

$$F_2(3)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$F_{12}A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$F_{31}(2)A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix}$$

Es decir, premultiplicar una matriz A *por una matriz elemental equivale a realizar en la matriz* A *la correspondiente transformación elemental, tal y como ponemos de manifiesto a continuación:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \underset{F_2(3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = F_2(3)A$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \underset{F_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = F_{12}A$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \underset{F_{31}(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 12 & 15 \end{bmatrix} = F_{31}(2)A$$

Proposición 40 *Las matrices elementales son regulares y sus inversas también son matrices elementales. Además se verifica:*

a) $F_i(\alpha)^{-1} = F_i(\frac{1}{\alpha})$, *siendo* $\alpha \neq 0$.

b) $F_{ij}^{-1} = F_{ij}$.

c) $F_{ij}(\alpha)^{-1} = F_{ij}(-\alpha)$.

Proposición 41 *Dado un sistema* $Ax = b$, *se obtiene un sistema equivalente si se premultiplican ambos miembros por una matriz* F *regular. Es decir:*

$$Ax = b \sim FAx = Fb.$$

Demostración:

Sea x_0 solución de $Ax = b$, entonces $Ax_0 = b$. Si F es regular, se verifica que $FAx_0 = Fb$, y x_0 es solución de $FAx = Fb$.

Recíprocamente, si x_0 es solución de $FAx = Fb$, se tiene que $FAx_0 = Fb$ y premultiplicando por F^{-1}, pues F es regular, se sigue que $F^{-1}(FAx_0) = F^{-1}(Fb) \Rightarrow Ax_0 = b \Rightarrow x_0$ es solución de $Ax = b$. □

Observación:

Puesto que las matrices elementales son regulares, cuando se realizan transformaciones elementales en un sistema de ecuaciones lineales se obtiene un sistema equivalente al dado.

Las matrices elementales nos permiten describir el proceso de eliminación gaussiana con una nueva perspectiva. Analicemos nuevamente el sistema $Ax = b$ del ejemplo 26

$$(A|b)=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{21}(-2)\\F_{31}(1)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right] \underset{F_{32}(3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right]=(U|c)$$

Este proceso de eliminación gaussiana podemos describirlo de forma compacta:

$$(A|b) = (A^{(1)}|b^{(1)}) \underset{\substack{F_{21}(-2)\\F_{31}(1)}}{\sim} (A^{(2)}|b^{(2)}) \underset{F_{32}(3)}{\sim} (A^{(3)}|b^{(3)}) = (U|c)$$

donde $(A^{(i)}|b^{(i)})$ representa la matriz ampliada de la i-ésima etapa del proceso de eliminación.

Puesto que hacer una transformación elemental equivale a premultiplicar por la correspondiente matriz elemental podemos escribir:

$$\underbrace{F_{32}(3)F_{31}(1)F_{21}(-2)}_{F}(A|b) = (U|c) \Rightarrow F(A|b) = (U|c) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} U = FA \\ c = Fb \end{array} \right.$$

Como $F = F_{32}(3)F_{31}(1)F_{21}(-2)$ es una matriz regular, por la Proposición 41, se tiene que los sistemas $Ax = b$ y $Ux = c$ son equivalentes.

En general, para cualquier sistema $(S) : Ax = b$, se tiene:

$$(A|b) = (A^{(1)}|b^{(1)}) \underset{F_1}{\sim} (A^{(2)}|b^{(2)}) \underset{F_2}{\sim} \cdots \underset{F_{n-1}}{\sim} (A^{(n)}|b^{(n)}) = (U|c)$$

donde F_i denota el conjunto de transformaciones elementales de la etapa i del proceso de eliminación.

$$\underbrace{F_{n-1}\cdots F_1}_{F}(A|b) = (U|c) \Rightarrow F(A|b) = (U|c) \Rightarrow Ax = b \sim Ux = c$$

pues $FA = U$ y $Fb = c$, siendo $F = F_{n-1}\cdots F_1$ una matriz regular.

1.3.3. Número de operaciones del método de Gauss

Para determinar el número de operaciones (sumas/restas, productos/divisiones) necesarias para resolver un sistema de ecuaciones lineales de orden n por el método de Gauss se distinguen dos etapas: triangularización del sistema, y resolución del sistema triangular equivalente. Puede probarse que son necesarias $\frac{1}{6}n(n-1)(4n+7)$ operaciones para la primera etapa y n^2 operaciones para la segunda, lo cual hace un total de $\frac{1}{6}(4n^3 + 9n^2 - 7n)$ operaciones. Para valores grandes de n el número de operaciones es del orden de $\frac{2}{3}n^3$.

La resolución de un sistema compatible determinado con 16 ecuaciones e incógnitas por el método de Gauss puede hacerse en un ordenador convencional en milésimas de segundo. En cambio, el método de Cramer, con estrategia de fuerza bruta (es decir, sin hacer ningún tipo de transformación previa a la hora de calcular los determinantes), requiere un número de operaciones muy superior, del orden de $n!$, y por este motivo es un método desaconsejable para sistemas cuadrados de más de 5 ecuaciones.

El método de Gauss es el método más utilizado para resolver sistemas lineales cuando las matrices no tienen propiedades particulares. En general, este método se emplea para los sistemas con matrices llenas (es decir, matrices en las que no es significativo el número de elementos nulos). Ahora bien, el método de Gauss tiene una limitación importante, y es que puede ser sensible a los errores de redondeo. Téngase presente que cuando trabajamos con una calculadora u ordenador la aritmética no es exacta, y que hay limitaciones a la hora de almacenar los números.

1.3.4. Arimética de punto flotante. Método de Gauss con pivote parcial.

Cuando se utiliza aritmética de punto flotante, un número real se representa por $f \cdot 10^z$, con $0{,}1 \leq |f| < 1$, f se denomina mantisa y z es un número entero que se denomina exponente. En la mayoría de los ordenadores la mantisa tiene 16 dígitos y z está comprendido entre -308 y y 308. Cuando $z > 308$ el número no se almacena y se dice que hay desbordamiento, cuando $z < -308$ el número se considera nulo.

El almacenamiento en un ordenador de números con aritmética de punto flotante tiene una limitación: Sólo se puede representar un subconjunto del conjunto de los números racionales. Por tanto, hay números (racionales o irracionales) que no pueden ser representados de manera exacta.

Cuando un número no se puede almacenar de manera exacta se suele emplear la técnica del redondeo. Así, el número $\frac{2}{3}$ en un ordenador con 3 dígitos se almacenaría como: $\left[\frac{2}{3}\right] = 0{,}667 \cdot 10^0$. Evidentemente $\frac{2}{3} \neq 0{,}667$. Una alternativa, menos usual, es el trucamiento, así el número $\frac{2}{3}$ se almacenaria como $\langle\frac{2}{3}\rangle = 0{,}666 \cdot 10^0$.

La aproximación por redondeo (o truncamiento) puede llevar aparejado un gran error incluso en operaciones elementales, y puede provocar resultados no deseados a la hora de resolver sistemas de ecuaciones lineales. Consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 42 *Resolver el sistema (S_0) a mano y con una calculadora con tres dígitos. Comparar los resultados.*

$$(S_0) : \left\{ \begin{aligned} 0{,}0001x_1 + x_2 &= 1 \\ x_1 + x_2 &= 2 \end{aligned} \right.$$

La solución haciendo los cálculos a mano (aritmética exacta) es la siguiente:

$$(S_0) \underset{F_{21}(-10000)}{\sim} \left\{ \begin{aligned} 0{,}0001x_1 + x_2 &= \quad 1 \\ -9999x_2 &= -9998 \end{aligned} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} x_1 &= 1{,}00010 \\ x_2 &= 0{,}99990 \end{aligned}}$$

En cambio, si usamos una calculadora con tres dígitos significativos y redondeo, se obtiene una solución muy distinta al resolver el sistema triangular equivalente.

$$\left\{\begin{array}{rl} 0{,}0001x_1 + x_2 = & 1 \\ -10000x_2 = & -10000 \end{array}\right. \Longrightarrow \boxed{\begin{array}{rl} x_1 = & 0 \\ x_2 = & 1 \end{array}}$$

Como observamos el resultado es completamente disparatado, ¿qué podemos hacer?

Consideremos nuevamente el proceso de eliminación, pero permutando las ecuaciones:

$$(S_0) \underset{F_{12}}{\sim} \left\{\begin{array}{r} x_1 + x_2 = 2 \\ 0{,}0001x_1 + x_2 = 1 \end{array}\right. \underset{F_{21}(-0{,}0001)}{\sim} \left\{\begin{array}{r} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{rl} x_1 = & 1 \\ x_2 = & 1 \end{array}}$$

Obsérvese en este caso la proximidad entre la solución obtenida y la solución exacta.

La resolución de un S.E.L. por el método de Gauss, con aritmética de punto flotante, depende del orden en que dispongamos las ecuaciones, y un orden inadecuado puede llevarnos a soluciones disparatadas. La explicación de este hecho es la siguiente: cuando resolvemos el sistema (S_0) directamente, utilizamos como pivote $a_{11} = 10^{-4}$ y para anular el elemento a_{21} dividimos por a_{11} obteniendo 10^4 como multiplicador. De esta forma estamos trabajando con números bastante elevados y por dicho motivo se magnifican los errores de redondeo. En cambio, si intercambianos las ecuaciones se obtiene como pivote $a_{11} = 1$ y para anular el elemento a_{21} se necesitaría como multiplicador un número muy pequeño: 10^{-4}. Por tanto, los errores de redondeo serían pequeños. En consecuencia, conviene no tomar pivotes pequeños en el proceso de eliminación gaussiana, siendo ésta la base del método de Gauss con pivoteo parcial, que es el método directo más extendido para resolver sistemas de ecuaciones lineales.

El método de Gauss con pivote parcial consiste en elegir como pivote, en la etapa i del proceso de eliminación, el elemento de mayor valor absoluto bajo la diagonal, e intercambiar filas. Una variante de este método no exige la elección del elemento de mayor valor absoluto bajo la diagonal en la columna dada como pivote, sino que procura simplemente que el pivote no sea demasiado pequeño, por ejemplo: no menor que una décima parte del elemento de mayor valor absoluto.

1.3.5. Método de Gauss-Jordan y cálculo eficiente de la matriz inversa

Metodo de Gauss-Jordan para la resolución de sistemas

Es una variante del método de Gauss, cuyo objetivo es transformar la matriz de coeficientes en la matriz identidad. Consideremos el siguiente ejemplo:

Ejemplo 43 *Sea el sistema* $(S) : \left\{\begin{array}{rl} x_1 + x_2 - x_3 & = 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 & = 2 \\ x_1 \qquad + x_3 & = 0 \end{array}\right.$ *Para transformar el sistema dado* $(S) : Ax = b$ *en otro sistema cuya matriz de coeficientes sea la matriz* *identidad, vamos a partir de la matriz $(U|c)$ que se obtiene al utilizar el método de Gauss.*

$$(A|b)=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{21}(-3)\\F_{31}(-1)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \underset{F_{32}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right]=(U|c)$$

$$(U|c)=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & \text{-}1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{23}(-\frac{1}{2})\\F_{13}(\frac{1}{4})}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right] \underset{F_{11}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right]=(D|s)$$

El sistema $Dx = s$ es equivalente al sistema dado:

$$(S): \left\{\begin{array}{rcr} x_1 \qquad\qquad & = & 1 \\ -x_2 \qquad & = & 0 \\ 4x_3 & = & -4 \end{array}\right. \qquad \textit{la solución es: } \begin{array}{rr} x_1 = & 1 \\ x_2 = & 0 \\ x_3 = & -1 \end{array}$$

Si realizamos una etapa más, dividiendo por los pivotes (elementos diagonales) obtendremos un sistema equivalente cuya matriz de coeficientes es la matriz identidad.

$$(D|s)=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{2}(-1)\\F_{3}(\frac{1}{4})}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]=(I|t)$$

obsérvese que $x = t$ es la solución del sistema.

El método de Gauss-Jordan suministra un algoritmo igual de eficiente que el método de Gauss eliminación gaussiana (del orden de $\frac{2}{3}n^3$).

Observaciones:

a) Hay una variante del método de Gauss-Jordan que consiste en hacer ceros todos los elementos de una columna una vez determinado un pivote y convertido en un 1.

b) Para matrices singulares, al aplicar el método de Gauss-Jordan, se obtiene una forma escalonada reducida U_r con alguna fila nula.

c) Los métodos de Gauss y Gauss-Jordan no suelen implementarse computacionalmente para sistemas no cuadradados o sistemas de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes no regular. El programa MatLab, por ejemplo, resuelve dichos sistemas en el sentido de los mínimos cuadrados. Este método se estudiará en el capítulo tercero.

Cálculo de la matriz inversa con el método de Gauss-Jordan

El interés del método de Gauss-Jordan radica fundamentalmente en que proporciona un algoritmo eficiente para calcular la inversa de una matriz. Dada una matriz A regular de orden n, escribimos la matriz $(A|I)$ donde I es la matriz identidad de orden n, y a continuación sometemos la matriz $(A|I)$ a una serie de transformaciones elementales por filas hasta obtener, si es posible, una matriz de la forma $(I|B)$.

Si $F_1, \ldots, F_t$ son las matrices elementales correspondientes a las transformaciones elementales por filas realizadas en el proceso de eliminación, se tendrá:

$$F_t \cdots F_1(A|I) = (I|B)$$

Si escribimos $F = F_t \cdots F_1$, resulta: $\left\{ \begin{array}{l} FA = I \\ FI = B \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A^{-1} = F \\ F = B \end{array} \right. \Longrightarrow \boxed{A^{-1} = B}$

Ejemplo 44 *Cálculo de la inversa de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$(A|I) = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{21}(-3) \\ F_{31}(-1)}}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{F_{23}}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{23}(-\frac{1}{2}) \\ F_{13}(\frac{1}{4})}}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{F_{12}(1)}{\sim}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{2}(-1) \\ F_{3}(\frac{1}{4})}}{\sim} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{array}\right] = (I|B)$$

finalmente:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}$$

A continuación enunciamos resultados relativos a matrices triangulares y a sus inversas, que nos serán de utilidad para el estudio de la descomposición LU de una matriz que se estudiará a continuación.

Proposición 45 *a) Si A y B son matrices triangulares inferiores (superiores), su producto es una matriz del mismo tipo.*

b) Si A es una matriz triangular inferior (superior) con elementos no nulos en la diagonal, su inversa A^{-1} es una matriz del mismo tipo.

Corolario 46 *a) Si A y B son matrices triangulares inferiores (superiores) con unos en la diagonal, su producto es una matriz del mismo tipo.*

b) Si A es una matriz triangular inferior (superior) con unos en la diagonal, su inversa A^{-1} es una matriz del mismo tipo.

1.4. Descomposición de matrices

1.4.1. Factorización LU

El interés de esta factorización radica en su utilidad para resolver distintos sistemas de ecuaciones lineales que comparten la misma matriz de coeficientes. Nuestro objetivo es describir el proceso de cálculo de la descomposición $A = LU$, en los casos en que sea posible, empleando eliminación gaussiana. En lo sucesivo consideraremos matrices cuadradas. Consideremos de nuevo el sistema del ejemplo 26,

$$(S): \left\{ \begin{array}{rl} 2x_1 + x_2 + x_3 = & 1 \\ 4x_1 + x_2 \qquad = & -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = & 7 \end{array} \right.$$

y analicemos matricialmente su resolución por el método de Gauss, deteniéndonos en las transformaciones que sufre la matriz de coeficientes.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21}(-2) \\ F_{31}(1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underset{F_{32}(3)}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = U$$

entonces, podemos escribir:

$F_{32}(3)F_{31}(1)F_{21}(-2)A = U$, y despejando

$A = F_{21}^{-1}(-2)F_{31}^{-1}(1)F_{32}^{-1}(3)U = F_{21}(2)F_{31}(-1)F_{32}(-3)U$

si llamamos $L = F_{21}(2)F_{31}(-1)F_{32}(-3)$, resulta $A = LU$.

L es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal, cuyos elementos bajo la diagonal son los multiplicadores cambiados de signo.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que no es necesario realizar el producto anterior para obtener la matriz L. La matriz $L = (l_{ij})$ podemos escribirla de manera directa teniendo en cuenta que es triangular inferior con unos en la diagonal y que $l_{ij} = -m$ (para $i > j$), siendo m el multiplicador correspondiente a la transformación $F_{ij}(m)$ realizada en el proceso de escalonamiento de la matriz A.

Tenemos pues descompuesta la matriz A como producto de una matriz triangular inferior con unos en la diagonal por una matriz triangular superior:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}}_{U} = LU$$

La factorización $A = LU$ nos permite resolver el sistema $(S) : Ax = b$ mediante la resolución de dos sistemas triangulares. Se verifica que: $Ax = b \sim LUx = b$, y este sistema podemos descomponerlo en dos sistemas triangulares. Si llamamos $Ux = c$, resulta:

$$Ax = b \sim L\underbrace{Ux}_{c} = b \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Lc = b \\ Ux = c \end{array} \right.$$

Es decir, una vez que conocemos L y U podemos trabajar sin la matriz A. Puesto que la información del proceso de eliminación gaussiana está recogida en L, podemos obtener c resolviendo el sistema triangular $Lc = b$ mediante el método de bajada y a continuación obtenemos la solución de (S) resolviendo el sistema equivalente $Ux = c$ con el método de subida. Este hecho tiene una importancia indudable para resolver sistemas de ecuaciones en los que la matriz A es siempre la misma y lo único que cambia es el término independiente.

Este método de resolución del sistema $Ax = b$, mediante la resolución de dos sistemas triangulares, recibe el nombre de Método LU.

Ejemplo 47 *Resolver el sistema (S) con el método LU.*

$$(S) : \left\{ \begin{array}{rl} 2x_1 + x_2 + x_3 = & 1 \\ 4x_1 + x_2 \qquad = & -2 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = & 7 \end{array} \right.$$

La matriz de coeficientes es $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

y su factorización $A = LU$ *es:* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = LU$

Hallaremos la solución del sistema $Ax = b$*, resolviendo los sistemas triangulares:*

$$Ax = b \sim L\underbrace{Ux}_{c} = b \Rightarrow \begin{cases} Lc = b \\ Ux = c \end{cases}$$

$\boxed{Lc = b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 1 \\ c_2 = -4 \\ c_3 = -4 \end{array}$$

$\boxed{Ux = c}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 1 \end{array}}$$

que es la solución del sistema (S).

Ejemplo 48 *Resolver el sistema* (S) *con el método LU.*

$$(S) : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ 4x_1 + x_2 = 5 \\ -2x_1 + 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

Este sistema tiene la misma matriz de coeficientes que el sistema del ejemplo anterior, y conocemos su descomposición LU.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = LU$$

Hallaremos la solución del sistema $Ax = b$*, resolviendo los sistemas triangulares:*

$$Ax = b \sim L\underbrace{Ux}_{c} = b \Rightarrow \begin{cases} Lc = b \\ Ux = c \end{cases}$$

$\boxed{Lc = b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 4 \\ c_2 = -3 \\ c_3 = -4 \end{array}$$

$\boxed{Ux = c}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{array}}$$

Otro detalle importante es que la factorización $A = LU$ sólo es posible si no se hacen intercambios de filas. Analicemos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 49 *Sea* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$*, veamos si es posible obtener la factorización* $A = LU$*. Para ello consideremos el proceso de eliminación.*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21}(-3) \\ F_{31}(-1)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{F_{23}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = U$$

Se verifica: $F_{23}F_{31}(-1)F_{21}(-3)A = U \Rightarrow A = F_{21}(3)F_{31}(1)F_{23}U = FU$

siendo $F = F_{21}(3)F_{31}(1)F_{23}$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

que no es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal. Por tanto, si hay que hacer intercambios de filas se pierde la factorización LU*.*

Ahora bien, si premultiplicamos la matriz A por una matriz P que recoja todas las permutaciones realizadas en el proceso de eliminación sí es posible hallar la factorización $PA = LU$.

Ejemplo 50 *Obtener la factorización $PA = LU$ para la matriz A del ejemplo anterior.*

En este caso sólo se ha realizado una permutación, elegimos $P = F_{23}$ y se tiene:

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$PA = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21}(-1) \\ F_{31}(-3)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = U$$

y por tanto, $PA = LU$, siendo $L = F_{21}(1)F_{31}(3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

En general se tiene el siguiente resultado.

Proposición 51 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz regular, entonces existe una matriz de permutación P tal que $PA = LU$, siendo L triangular inferior con unos en la diagonal y U triangular superior.*

Proposición 52 *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es una matriz regular y admite la descomposición LU ésta es única.*

Demostración: Supongamos que $A = L_1U_1$ y $A = L_2U_2$, siendo L_1 y L_2 matrices triangulares inferiores con unos en la diagonal, y U_1 y U_2 matrices triangulares superiores.

Entonces: $L_1U_1 = L_2U_2 \Rightarrow L_2^{-1}L_1 = U_2U_1^{-1}$,

siendo $L_2^{-1}L_1$ triangular inferior con unos en la diagonal y $U_2U_1^{-1}$ triangular superior.

Por tanto: $L_2^{-1}L_1 = I_n$ y $U_2U_1^{-1} = I_n \Rightarrow \begin{cases} L_1 = L_2 \\ U_1 = U_2 \end{cases}$

Es decir, la factorización $A = LU$ es única. $\square$

Observación:

El método LU para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, al igual que el método de Gauss, también requiere un número de operaciones del orden de $\frac{2}{3}n^3$. Ahora bien, una vez almacenada la factorización $A = LU$, la resolución de sucesivos sistemas que tengan la misma matriz de coeficientes sólo exigiría un n^2 operaciones para cada uno de ellos.

1.4.2. Factorización de Cholesky

A partir de la factorización LU se obtiene la factorización triangular: $A = LDT$, donde $U = DT$. La matriz D es una matriz diagonal cuyos elementos diagonales son los de la matriz U y T es una matriz triangular superior. En el caso de que la matriz A sea simétrica puede probarse que $T = L^T$ y se tiene la factorización $A = LDL^T$

Dentro del conjunto de las matrices simétricas se encuentra una clase especial de matrices cuya factorización LU nos proporciona una matriz U con elementos diagonales estrictamente positivos. Estas matrices se denominan matrices simétricas definidas positivas y pueden factorizarse mendiante la denominada descomposición de Cholesky:

$$A = BB^T$$

siendo $B = L\sqrt{D}$. La matriz diagonal $\sqrt{D}$ se construye a partir de la matriz D tomando la raíz cuadrada de cada elemento diagonal. La matriz B se denomina *matriz de Cholesky.*

Ejemplo 53 *Hallar la factorización de Cholesky de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$.

Partimos de la factorización LU de la matriz A, $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = LU$

Como A es simétrica y los elementos diagonales de U son estrictamente positivos, podemos afirmar que la matriz A es simétrica definida positiva y, en consecuencia, va a a admitir la descomposición de Cholesky. Para obtenerla, hallaremos previamente la factorización triangular:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = LDL^T$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \underbrace{L\sqrt{D}}_{B}\underbrace{\sqrt{D}L^T}_{B^T}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = BB^T$$

Método de Cholesky para la resolución de sistemas

El método de Cholesky para la resolución de un sistema $Ax = b$, con matriz A simétrica definida positiva, conlleva la resolución de dos sistemas de ecuaciones triangulares. El esquema de resolución es el siguiente:

$$Ax = b \quad \sim \quad B\underbrace{B^T x}_{c} = b \quad \left\{ \begin{array}{l} Bc = b \\ B^T x = c \end{array} \right.$$

Ejemplo 54 *Resolver el sistema (S) con el método de Cholesky.*

$$(S) : \left\{ \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 2x_1 + 8x_2 = 10 \end{array} \right.$$

La matriz de coeficientes es la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ cuya descomposición de Cholesky ya conocemos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = BB^T$$

Hallaremos la solución del sistema $Ax = b$, resolviendo los sistemas triangulares:

$$Ax = b \sim B\underbrace{B^T x}_{c} = b \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Bc = b \\ B^T x = c \end{array} \right.$$

$\boxed{Bc = b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 10 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} c_1 = 3 \\ c_2 = 2 \end{array}$$

$\boxed{B^T x = c}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 \end{array}}$$