TEMA 2: ESPACIOS VECTORIALES.

ÍNDICE

TEMA 2: ESPACIOS VECTORIALES

2.1. Espacios y subespacios vectoriales.

Espacio vectorial

Definición

Un espacio vectorial V sobre $\mathbb{R}$ es un conjunto no vacio de elementos, llamados vectores, con las operaciones:

- Suma: $V \times V \to V,\ (u,v) \to u+v.$
- Producto por un escalar: $\mathbb{R} \times V \to V,\ (\lambda,\mathrm{v}) \to \lambda v.$

Además, para todo $u, v, w \in V,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ se cumple:

1) $u+v=v+u.$

2) $(u+v)+w=u+(v+w).$

3) Existe $0 \in V,\ u+0=0+u=u.$

4) Para cada $u \in V$ existe $-u \in V,\ u+(-u)=0.$

5) $\lambda(\mu u)=(\lambda\mu)u.$

6) $\lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v.$

7) $(\lambda+\mu)v=\lambda v+\mu v.$

8) $1 \cdot u=u,$ para todo $u \in V.$

2.1. Espacios y subespacios vectoriales.

Ejemplos

1) $V=\mathbb{R}^n$, siendo $\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,\ldots,x_n):x_i\in\mathbb{R}\}$ con las operaciones:

- Suma: $u=(u_1,\ldots,u_n)$, $v=(v_1,\ldots,v_n)$, $\quad u+v=(u_1+v_1,\ldots,u_n+v_n)$.
- Producto por un escalar: $\lambda u=(\lambda u_1,\ldots,\lambda u_n)$.

2) $V=\mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, siendo $\mathfrak{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ el conjunto de las matrices de orden $m\times n$ con las operaciones suma y producto por un escalar ya definidas.

3) $V=\{f$ continua en $[a,b]\}$ con las operaciones habituales.

$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$.

$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$.

2.1. Espacios y subespacios vectoriales.

Subespacios vectoriales

Subespacio vectorial. Se llama *subespacio vectorial de* $\mathbb{R}^n$ a todo subconjunto no vacío $S \subseteq \mathbb{R}^n$ que verifica que si dos vectores están en S, entonces también lo está cualquiera de sus combinaciones lineales, esto es,

$$\text{si } u, v \in S \text{ y } \alpha, \beta \in \mathbb{R} \text{ entonces } \alpha u + \beta v \in S.$$

Notas:

(1) El vector nulo pertenece a cualquier subespacio vectorial.

(2) $S = \{0\}$ y $S = \mathbb{R}^n$ son subespacios vectoriales llamados *subespacios triviales*.

(3) En el espacio bidimensional $\mathbb{R}^2$ los subespacios son, además de los dos subespacios triviales, las rectas que pasan por el origen.

(4) En el espacio tridimensional $\mathbb{R}^3$ los subespacios son, además de los dos subespacios triviales, las rectas y planos que pasan por el origen.

2.1. Espacios y subespacios vectoriales.

Subespacios vectoriales

Subespacio generado por un conjunto de vectores. Dado un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de $\mathbb{R}^n$, se llama *subespacio generado por dichos vectores* al conjunto de todas las combinaciones lineales de dichos vectores,

$$\text{Gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_p v_p : \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p \in \mathbb{R}\}.$$

Propiedades de los subespacios generados.

(1) $\text{Gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

(2) $\text{Gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \supseteq \text{Gen}\{v_2, \ldots, v_p\}$.

(3) $\text{Gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} = \text{Gen}\{\alpha v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ si $\alpha \neq 0$.

(4) $\text{Gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} = \text{Gen}\{v_1 + \alpha v_2, v_2, \ldots, v_p\}$.

(5) El subespacio generado por un conjunto de vectores no cambia al añadir combinaciones lineales de dichos vectores.

(6) El subespacio generado por un conjunto de vectores no cambia al quitar vectores que sean combinación lineal de los restantes.

Cuestión: ¿Qué son Gen{(1,0),(1,2)}, Gen{(1,0,0),(1,2,0)}, Gen{(1,0,1)}, Gen{(1,0,1),(2,0,2)}?

2.2. Espacio columna y espacio nulo de una matriz.

Espacio nulo de una matriz

Espacio nulo de una matriz. Se denomina *espacio nulo de la matriz A* al conjunto solución del sistema homogéneo $Ax = 0$,

$$Nul(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}.$$

El espacio nulo de A es un subespacio vectorial contenido en $\mathbb{R}^n$.

Un vector $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ pertenece al espacio nulo de A si y sólo si $Ax = 0$,

esto es, si y sólo si,

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Estas ecuaciones son llamadas *ecuaciones implícitas del espacio $Nul(A)$*.

Cuestión: ¿Qué vector pertenece siempre a Nul(A), para cualquier matriz A?

2.2. Espacio columna y espacio nulo de una matriz.

Espacio columna de una matriz

Espacio columna de una matriz. Se denomina *espacio columna de la matriz* A al conjunto formado por todas las combinaciones lineales de las columnas de A, es decir, si $v_1, v_2, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$ son los $n-$vectores columnas de A,

$$Col(A) = \text{Gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}.$$

El espacio columna de A es un subespacio vectorial contenido en $\mathbb{R}^m$.

Un vector $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ pertenece al subespacio columna de A si y sólo si existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que $y = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$,

2.2. Espacio columna y espacio nulo de una matriz.

Espacio columna de una matriz

esto es, existen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{cases} y_1 = \alpha_1 a_{11} + \alpha_2 a_{12} + \cdots + \alpha_n a_{1n}, \\ y_2 = \alpha_1 a_{21} + \alpha_2 a_{22} + \cdots + \alpha_n a_{2n}, \\ \vdots \\ y_m = \alpha_1 a_{m1} + \alpha_2 a_{m2} + \cdots + \alpha_n a_{mn}. \end{cases}$$

Estas ecuaciones son llamadas *ecuaciones paramétricas del espacio* $Col(A)$.
En particular ocurre que

$$Col(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : Ax = y \text{ es un sistema compatible}\}.$$

Cuestión: ¿Qué vector pertenece siempre a Col(A), para cualquier matriz A?

2.2. Espacio columna y espacio nulo de una matriz.

Ecuaciones implícitas y paramétricas.

Ecuaciones implícitas y paramétricas de un subespacio. Todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ puede describirse como el espacio nulo de una matriz. Se denominan *ecuaciones implícitas del subespacio* a unas ecuaciones implícitas de dicho espacio nulo. De forma análoga, todo subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ puede describirse como el espacio columna de una matriz. Se denominan *ecuaciones paramétricas del subespacio* a unas ecuaciones paramétricas de dicho espacio columna.

1. *Espacio fila de A:* $F(A) = L\{f_1, ..., f_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
2. *Espacio columna de A:* $R(A) = L\{a_1, ..., a_n\} \subseteq \mathbb{R}^m$.
3. *Espacio nulo de A:* $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^n$.
4. *Espacio nulo de A^T:* $N(A^T) = \{y \in \mathbb{R}^m : A^T y = \mathbf{0}\} \subseteq \mathbb{R}^m$.

2.3. Dependencia lineal.

Conjunto linealmente dependiente.

Definición *Sea* $H = \{a_1, \ldots, a_p\} \subseteq \mathbb{R}^n$, *se dice que el conjunto* H *es linealmente dependiente (l.d.) si existen escalares* $h_1, \ldots, h_p \in \mathbb{R}$ *no todos nulos de forma que* $h_1a_1 + \cdots + h_pa_p = \mathbf{0}$. *En cambio, diremos que el conjunto* H *es linealmente independiente (l.i.) si la igualdad* $h_1a_1 + \cdots + h_pa_p = \mathbf{0}$ *sólo se satisface para* $h_1 = \cdots = h_p = 0$.

Observación: Para estudiar la dependencia lineal de un conjunto $H = \{a_1, \ldots, a_p\}$ podemos escribir la ecuación vectorial $h_1a_1 + \cdots + h_pa_p = \mathbf{0}$ en forma matricial

$$[a_1|\cdots|a_p]\begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad Ah = \mathbf{0}$$

siendo $A = [a_1|\cdots|a_p]$. El conjunto H será l.i. cuando este sistema sólo posea la solución trivial ($\mathrm{rg}(A) = p$). En cambio será l.d. cuando el sistema sea compatible indeterminado ($\mathrm{rg}(A) < p$).

2.3. Dependencia lineal.

Propiedades

Proposición *a) Cualquier conjunto de vectores que contenga al vector* $\mathbf{0}$ *es l.d.*
b) Si $p > n$*, entonces* $\{v_1, \ldots, v_p\}$ *es l.d. Esto es, en* $\mathbb{R}^n$ *no hay un subconjunto l.i. con más de* n *vectores.*

Proposición *a) Un conjunto* H *de dos o más vectores es linealmente dependiente si y sólo si al menos uno de ellos es combinación lineal de los demás.*
b) Un conjunto H *de dos o más vectores es linealmente independiente si y sólo si ningún vector se puede expresar como combinación lineal de los demás.*
c) La expresión de un vector como combinación lineal de vectores de un conjunto l.i. es única.
d) Sea $H = \{v_1, \ldots, v_p\}$ *un conjunto l.d., entonces cualquier conjunto de vectores que contenga a* H *también es linealmente dependiente.*
e) Sea $H = \{v_1, \ldots, v_p\}$ *un conjunto l.i., entonces cualquier subconjunto no vacío de* H *es l.i.*

2.3. Dependencia lineal.

Propiedades

Teorema *Sea $S = L(H)$, siendo $H = \{v_1, \ldots, v_p\}$ un subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^n$. Se obtiene un conjunto de vectores H', con la misma dependencia lineal de H, si se somete a los vectores de H a alguna de las transformaciones siguientes:*

a) Cambiar el orden de los vectores.

b) Multiplicar un vector cualquiera por un escalar distinto de cero.

c) Sumar a uno de los vectores un múltiplo de otro vector.

Además, se verifica que $S = L(H) = L(H')$.

Corolario *Sea $S = L\{u_1, \ldots, u_q\}$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Si $\{u_1, \ldots, u_q\}$ es un conjunto l.d., entonces algún vector u_i es combinación lineal de los demás y se verifica que $S = L\{u_1, \ldots, u_{i-1}, u_{i+1}, \ldots u_q\}$; es decir, el vector u_i puede suprimirse del sistema generador.*

2.4. Bases y dimensión de un subespacio.

Base de un subespacio vectorial.

Base de un subespacio. Dado un subespacio vectorial $S \subseteq \mathbb{R}^n$ distinto del subespacio nulo $S \neq \{0\}$, se dice que un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de S es una *base* de S si:

(1) $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ es un conjunto linealmente independiente.

(2) $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ generan S, esto es, $S = \text{Gen}\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$.

Caracterización matricial de base. Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio no nulo. El conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\} \subset S$ es una base de S si y sólo si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_p \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

verifica que $Nul(A) = \{0\}$ y $Col(A) = S$.

2.4. Bases y dimensión de un subespacio.

Coordenadas de un vector.

Base canónica de $\mathbb{R}^n$. $\left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, e_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Coordenadas de un vector respecto de una base. Sea S un subespacio vectorial con base $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$, cada vector v de S se puede expresar de forma única como combinación lineal de los vectores de la base dada,

$$v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_pv_p.$$

Los coeficientes que aparecen en dicha expresión $(c_1, c_2, \ldots, c_p)$ se denominan *coordenadas de v respecto a la base* dada $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ y se suele denotar $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_p \end{bmatrix}$

2.4. Bases y dimensión de un subespacio.

Dimensión de un subespacio vectorial.

Dimensión de un subespacio vectorial. Dado un subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^n$ distinto del subespacio nulo $S \neq \{0\}$, se verifican:

(1) S tiene base.

(2) Todas las bases de S tienen el mismo número de elementos.

Al número de elementos de una base de S se le denomina *dimensión de* S, que denotaremos como $dim(S)$. Por definición, la dimensión del subespacio formado por el vector nulo es cero.

El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ tiene dimensión n y si S es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ y $\dim(S) = n$, entonces $S = \mathbb{R}^n$.

Cuestión: Si A es una matriz de dimensión nxm, ¿se verifica que R(A)=n y Nul(A)=m?

2.4. Bases y dimensión de un subespacio.

Teorema del rango

Relación de la dimensión de un subespacio con el rango de una matriz.

Sea A una matriz $m \times n$ cualquiera.

(1) $dim(Col(A)) = r(A)$.

(2) $r(A) = r(A^T)$.

(3) *Teorema del rango.*

$$\dim(Col(A)) + \dim(Nul(A)) = n.$$

Si la matriz A representa la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones lineales compatible, entonces el Teorema del rango se puede expresar mediante

$$(\text{número de pivotes}) \ + \ (\text{número de variables libres}) \ = n.$$

2.4. Bases y dimensión de un subespacio.

Teorema de la base.

Teorema de la base. Consideremos un subespacio vectorial S de $\mathbb{R}^n$ de dimensión p ($p \leq n$) y un conjunto de vectores $\{u_1, u_2, \ldots, u_q\} \subset S$.

(1) Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_q\}$ generan S, entonces $q \geq p$. Además, $q = p$ si y sólo si $\{u_1, u_2, \ldots, u_q\}$ es una base de S.

(2) Si $\{u_1, u_2, \ldots, u_q\}$ es linealmente independiente, entonces $q \leq p$. Además $q = p$ si y sólo si $\{u_1, u_2, \ldots, u_q\}$ es una base de S.

Observación: Como consecuencia del resultado anterior, de todo sistema generador se puede obtener una base suprimiendo vectores que sean combinación lineal de los demás.

Cuestión: ¿Cuántos vectores puede tener un sistema generador de $\boldsymbol{R}^3$? ¿Cuántos vectores puede tener una base de $\boldsymbol{R}^3$?

2.4. Bases y dimensión de un subespacio.

Cambio de base.

Cambio de base. Sean dos bases $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ y $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ y las matrices B y U cuyas columnas son, respectivamente, los vectores de dichas bases, esto es,

$$B = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

La matriz

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{U}}{P} = B^{-1}U$$

permite cambiar las coordenadas de cualquier vector respecto de la base $\mathcal{U}$ a sus coordenadas respecto de $\mathcal{B}$, esto es, si $v \in \mathbb{R}^n$ entonces

$$[v]_{\mathcal{B}} = \underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{U}}{P}\,[v]_{\mathcal{U}}\,.$$

2.4. Bases y dimensión de un subespacio.

Cambio de base.

Propiedades de la matriz de cambio de base. Sean dos bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^n$.

(1) Si $\mathcal{U} = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$, entonces

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{U}}{P} = \left[\ [u_1]_{\mathcal{B}} \ \middle|\ [u_2]_{\mathcal{B}} \ \middle|\ \cdots \ \middle|\ [u_n]_{\mathcal{B}}\ \right],$$

esto es, las columnas de la matriz del cambio están formadas por las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{U}$ respecto de la base $\mathcal{B}$.

(2) La matriz del cambio de base es invertible y se tiene que $\underset{\mathcal{U}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \left(\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{U}}{P}\right)^{-1}$.

Cuestión: ¿Cuál es la matriz del cambio de base de B a B?