Matemáticas I **Tercera Convocatoria Oficial - Parte 1** **25 de septiembre de 2024**

Grado en Ingeniería Química Industrial

Apellidos, Nombre: Grupo:

Problema 1 [**2 puntos**] Determinar de forma justificada si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1) El producto de cualesquiera dos matrices triangulares superiores de orden 2x2 es también triangular superior.
2) El conjunto $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 - y = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.
3) Dada una matriz A, se cumple que $N(A^T)$ coincide con el espacio ortogonal a $R(A)$.
4) Si una matriz cuadrada tiene el 0 como autovalor entonces no es invertible.

Problema 2 [**5 puntos**] Sean la matriz A y el vector b los siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -\alpha & 0 & \alpha - 1 \\ 1 & 2\alpha + 2 & -1 \\ \beta & 2\beta & -\beta - 1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha \\ 2\beta \\ 2\alpha \end{bmatrix}.$$

a) [**1.75 puntos**] Discutir, utilizando el método de Gauss y el teorema de Rouché-Frobenius, la compatibilidad del sistema $Ax = b$ según los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b) Para $\alpha = \beta = 0$:

   b.1) [**0.5 puntos**] Determinar unas ecuaciones paramétricas de $N(A)$.
   b.2) [**1 punto**] Obtener una base ortonormal de $(R(A))^\perp$.
   b.3) [**0.75 puntos**] Encontrar la proyección ortogonal de b sobre $(R(A))^\perp$.
   b.4) [**1 punto**] Resolver, en el sentido de los mínimos cuadrados, el sistema $A'x = b$, siendo A' la matriz formada por las dos últimas columnas de A.

Problema 3 [**3 puntos**] Considerando la matriz siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \alpha & -1 & \beta \\ \beta & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

.

1) [**0.5 puntos**] Determinar para que valores $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ la matriz A tiene el $(0, 0, 1)$ como autovector asociado al autovalor 1.
2) [**1.5 puntos**] Discutir, en función de los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si la matriz A es diagonalizable.
3) [**1 punto**] ¿Existe algún valor de los parámetros para los cuales A sea ortogonalmente diagonalizable? En caso afirmativo obtener para dichos valores una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tales que $D = Q^t AQ$.

- **Todos los resultados deberán presentarse simplificados.**
- **Todas las respuestas deberán estar debidamente razonadas y justificadas.**
- **En la parte superior de todas las hojas deberán aparecer los apellidos y el nombre.**

Matemáticas I **Tercera Convocatoria Oficial - Parte 2** **25 de septiembre de 2024**

GRADO EN INGENIERÍA QUÍMICA INDUSTRIAL

APELLIDOS, NOMBRE: GRUPO:

PROBLEMA 1

1) **[2.5 ptos]** Calcular y expresar en notación exponencial el siguiente número complejo, t:

$$t = \frac{\exp(i\frac{\pi}{3})(-1+i)(-i)}{(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)\exp(i\frac{3\pi}{2})}$$

2) **[2.5 ptos]** Utilizando el resultado del apartado anterior, resolver la siguiente ecuación compleja y dar sus soluciones en notación exponencial:

$$z^3 - t = 0$$

PROBLEMA 2

1) **[1.0 ptos]** La ecuación $\operatorname{tg}(xy) = \frac{x}{y}$ define implícitamente a y como función de x. Calcular $\frac{dy}{dx}$.

2) **[2.0 ptos]** Dada la función $f(x) = \ln(2(1-x)^5)$, obtener su polinomio de MacLaurin de grado 3 y utilizarlo para aproximar el valor de $\ln(64)$.

3) **[2.0 ptos]** Dada las funciones $h(x) = \frac{1}{2}(x + \cos x)$ y $s(x) = x$, demostrar que sus gráficas se cortan en un único punto en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.