1. APLICACIONES DE LA DERIVADA

1.1. Definición e interpretación de la derivada

Sean I un intervalo de números reales, $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $a \in I$. Se dice que la función f es derivable en a si existe (es decir, es un número real) el siguiente límite:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Si f es derivable en a, al valor del límite anterior se le denomina *derivada de f en a*, y se notará $f'(a)$. Es decir, si f es derivable en a se tiene

$$f'(a) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}. \tag{1}$$

Analicemos brevemente el límite expresado en la definición de derivada. Supongamos que $x \in I$ (para fijar ideas, supondremos que $x > a$). El valor $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ expresa el cociente entre la variación registrada por la función en el intervalo $[a, x]$ y la longitud de dicho intervalo. En otras palabras, dicho cociente describe la variación por unidad de longitud (o tasa de variación) de f en el intervalo $[a, x]$. Si tomamos valores de x cercanos a a estamos expresando tasas de variación en intervalos más y más pequeños. Así, el límite expresado en (1) podría describirse como la tasa de variación instantánea de f en a y, hablando sin rigor, viene a decirnos que si consideramos un intervalo de longitud "pequeña" dx, siendo a uno de los extremos de dicho intervalo, entonces el cambio registrado entre los valores que toma la función en los extremos de dicho intervalo sería $dy = f'(a)\,dx$.

Supongamos que f es derivable en a. De la expresión (1) se obtiene que

$$\lim_{x\to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a) \right) = 0 \tag{2}$$

Para cada $x \in I \setminus \{a\}$ notemos

$$\varepsilon(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a} - f'(a).$$

De esta expresión se obtiene

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \tag{3}$$

Además, por (2), se verifica $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. La expresión (3) nos da el sentido más profundo del significado de que una función sea derivable en un punto. Dicha expresión nos dice que f es derivable en a si f se puede "aproximar" por una recta "localmente cerca" de a (cuando decimos "una recta" nos referimos a una función cuya gráfica sea una recta). En efecto, si notamos $r(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ se tiene que

$$f(x) - r(x) = \varepsilon(x)(x-a). \tag{4}$$

Esta expresión nos está indicando que f se puede aproximar por r localmente cerca de a, puesto que $\lim_{x\to a} \varepsilon(x) = 0$. En este punto, alguien podría preguntarse: "¿y qué papel juega el factor $x-a$?" o "¿no bastaría con que $f(x)-r(x)$ tendiera a 0 cuando x tendiera a a?". La respuesta a la segunda pregunta es que, desde luego, eso no sería suficiente para afirmar que f se puede aproximar por una recta localmente cerca de a. En efecto, fijaos en que si f es continua en a y s es una recta cualquiera que pasa por $(a, f(a))$ entonces ya debe ocurrir que $f(x) - s(x)$ se aproxima a 0 cuando x se aproxima a a, por el hecho de que, cuando x tienda a a, tanto $f(x)$

como $r(x)$ se aproximarán a $f(a)$. Sin embargo, la expresión (4) nos está diciendo algo "más fuerte". Nos dice que si f es derivable en a entonces la diferencia entre $f(x)$ y $r(x)$ cuando x tiende a a se va haciendo "mucho" más pequeña que la diferencia entre x y a. Hablando sin rigor, esto viene a decir que si hacemos un zoom suficientemente grande en la gráfica de la función f cerca del punto $(a, f(a))$ veremos las gráficas de f y r "casi superpuestas". Por ello, parece plausible decir que la recta dada por $y = r(x)$ será la recta tangente a f en el punto $(a, f(a))$.

Si f es derivable en a entonces la recta tangente a f en $(a, f(a))$ viene dada por

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Ejemplo. Calcular la recta tangente a $f(x) = x^2$ en el punto $(3, 9)$.

Se tiene que

$$\lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} = \lim_{x\to 3} x + 3 = 6.$$

Por tanto, la recta tangente a f en el punto $(3, 9)$ viene dada por

$$y = 9 + 6(x-3) = 6x - 9.$$

1.2. Reglas de derivación

Sean I un intervalo de números reales, $a \in I$ y $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones derivables en a. Entonces se verifica:

a) Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ la función αf es derivable en a y

$$(\alpha f)'(a) = \alpha f'(a)$$

b) $f + g$ es derivable en a y

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

c) fg es derivable en a y

$$(fg)'(a) = f'(a)\, g(a) + f(a)\, g'(a)$$

d) Si $g(a) \neq 0$ entonces $\dfrac{f}{g}$ es derivable en a y

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$$

Regla de la cadena. *Sean I, J intervalos de números reales, $a \in I$, $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon J \to \mathbb{R}$ tales que $g(x) \in J$ para todo $x \in I$, f es derivable en a y g es derivable en $f(a)$. Definimos la función $f \circ g\colon I \to \mathbb{R}$ como*

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Entonces $f \circ g$ es derivable en a y se verifica

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a)$$

Sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ derivable en todo punto de I. La función derivada de f, que notaremos f', es la función que asigna a cada $x \in I$ el valor de la derivada de f en x.

Sean I un intervalo de números reales, $a \in I$ y $f, g\colon I \to \mathbb{R}$ funciones derivables en I. Entonces se verifica:

a) Para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ la función αf es derivable en I y

$$(\alpha f)' = \alpha f'$$

b) $f + g$ es derivable en I y

$$(f + g)' = f' + g'$$

c) fg es derivable en I y

$$(fg)' = f'\, g + f\, g'$$

d) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ entonces $\dfrac{f}{g}$ es derivable en I y

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Regla de la cadena
Sean I, J intervalos de números reales, $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon J \to \mathbb{R}$ tales que $g(x) \in J$ para todo $x \in I$, f es derivable en I y g es derivable en J. Definimos la función $f \circ g\colon I \to \mathbb{R}$ como

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

Entonces $f \circ g$ es derivable en I y se verifica

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x) \qquad \text{para todo } x \in I$$

1.3. Derivación implícita

Sea F una función real definida en un dominio abierto Ω de $\mathbb{R}^2$. Sea $(a, b) \in \Omega$ tal que $F(a, b) = 0$. Entonces, si F satisface ciertas condiciones (que no especificaremos aquí y que se verificarán en los ejercicios que realicemos), se tiene que existe un intervalo abierto I centrado en a y una única función $f\colon I \to \mathbb{R}$ verificando:

a) $f(a) = b$,

b) $F(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in I$,

c) f es derivable en I.

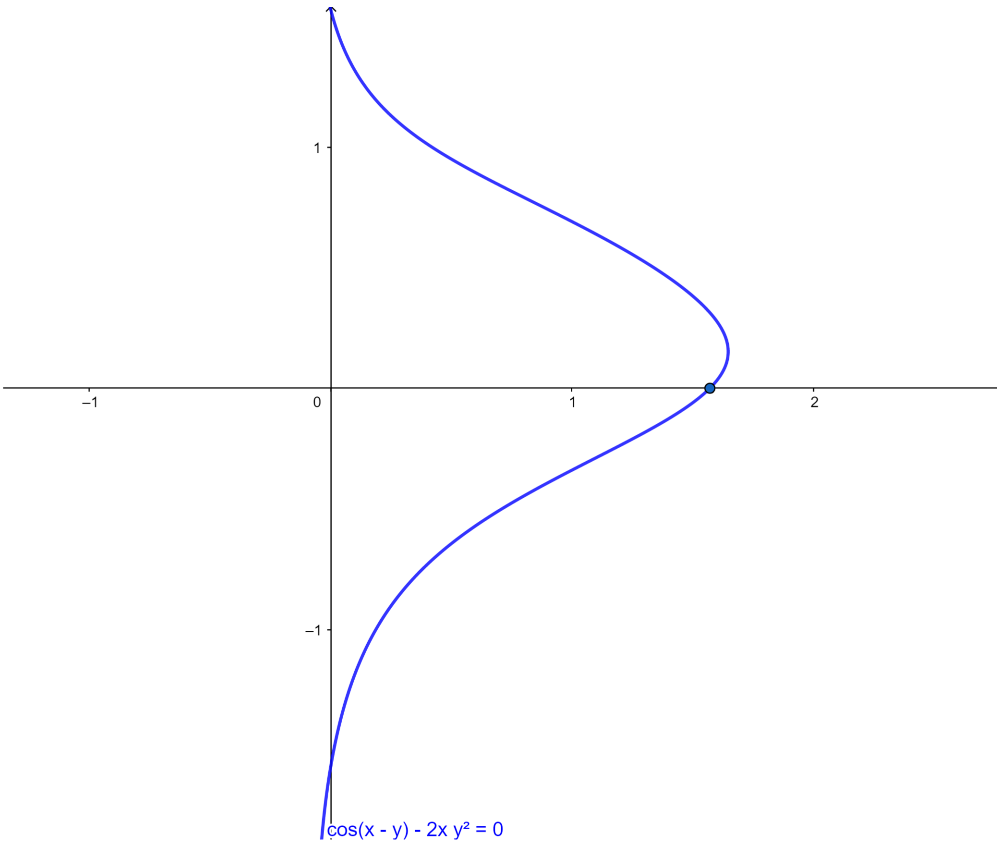
Diremos que la curva $F(x, y) = 0$ determina implícitamente la función f localmente cerca de (a, b).

Ejemplo. La curva

$$\cos(x - y) - 2xy^2 = 0$$

determina implícitamente una función f localmente cerca de $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Calcule $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

Consideremos la función $F(x, y) = \cos(x - y) - 2xy^2$. Obsérvese que $F\left(\frac{\pi}{2}, 0\right) = 0$, es decir, el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ está en la curva de ecuación $\cos(x - y) - 2xy^2 = 0$. Dicha curva define de forma implícita localmente cerca de $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ una función $f\colon I \to \mathbb{R}$, siendo I un intervalo centrado en $\frac{\pi}{2}$, verificando que f derivable en I, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ y $F(x, f(x)) = 0$ para todo $x \in I$, .



Se tiene que

$$\cos(x - f(x)) - 2xf(x)^2 = 0 \qquad \text{para todo } x \in I.$$

Puesto que la función dada por $\cos(x - f(x)) - 2xf(x)^2$ es constantemente igual a 0 en I, su derivada debe ser igual a 0 en I. Lo que haremos será derivar usando las reglas de derivación e igualar la derivada a 0.

$$-\operatorname{sen}(x - f(x))(1 - f'(x)) - 2f(x)^2 - 4xf(x)f'(x) = 0 \qquad \text{para todo } x \in I.$$

Ahora evaluamos la igualdad anterior en $x = \frac{\pi}{2}$.

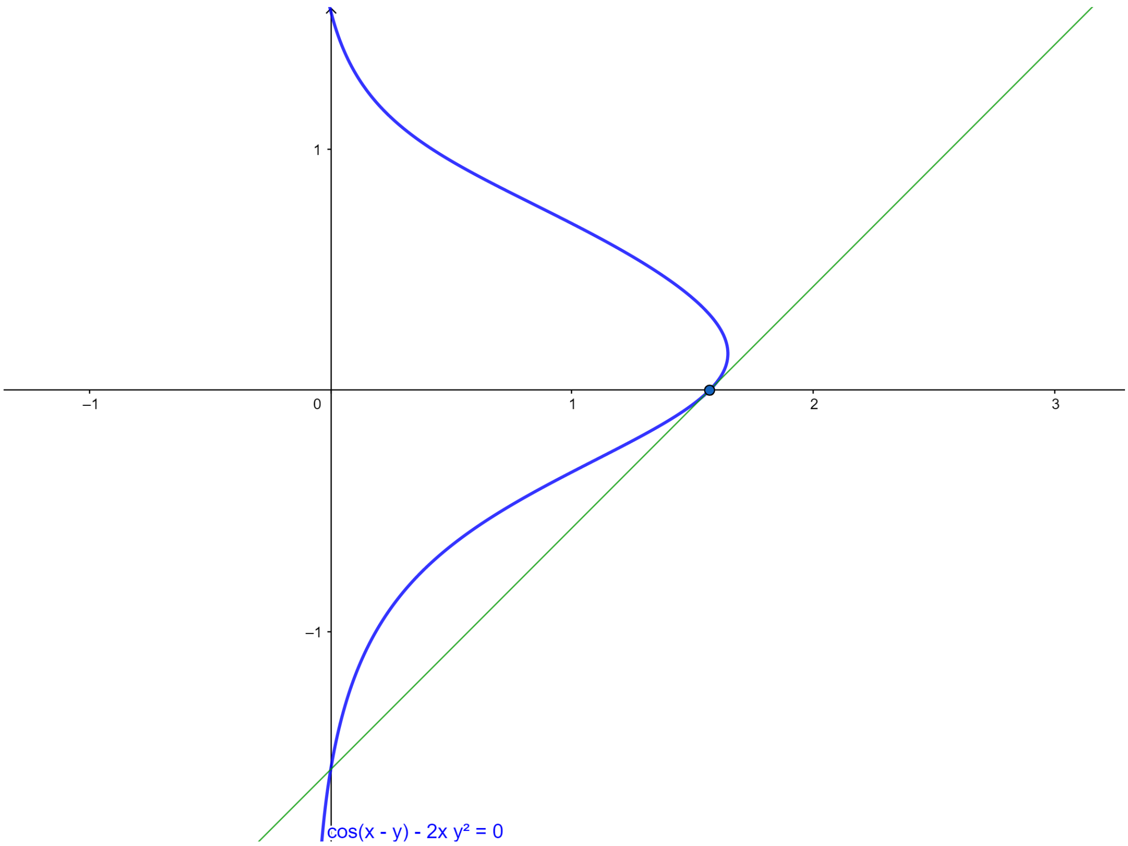
$$-\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)\left(1 - f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - 2\left(f\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)^2 - 4\frac{\pi}{2}f\left(\frac{\pi}{2}\right)f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Teniendo en cuenta que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ se obtiene

$$-1 + f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

de donde $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. Usando la expresión de la recta tangente a una función (derivable) en un punto se obtiene que la recta tangente a f en $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ viene dada por

$$y = x - \frac{\pi}{2}$$



En la práctica, para simplificar la escritura, en estos ejercicios no usaremos la notación $f(x)$ para indicar la función definida de forma implícita. En su lugar usaremos la variable y y tendremos en cuenta que y es función de x, es decir, $y = y(x)$. Escribamos el problema usando esta notación más sencilla. Partimos de

$$\cos(x-y) - 2xy^2 = 0$$

Derivamos, recordando que la variable independiente es x y que $y = y(x)$, y obtenemos

$$-\operatorname{sen}(x-y)(1-y') - 2y^2 - 4xyy' = 0 \qquad \text{para todo } x \in I.$$

Evaluamos en $x = \frac{\pi}{2}$, teniendo en cuenta que $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Obtenemos

$$1 - y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

de donde $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

1.4. Crecimiento y decrecimiento de funciones

Sea I un intervalo y $f\colon I \to \mathbb{R}$. Se dice que:

- f es creciente en I si para cualesquiera $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 \leqslant x_2$ se verifica $f(x_1) \leqslant f(x_2)$.
- f es decreciente en I si para cualesquiera $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 \leqslant x_2$ se verifica $f(x_1) \geqslant f(x_2)$.

Usaremos el siguiente criterio para estudiar el crecimiento o decrecimiento de una función derivable:

Sea $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable en (a,b). Se verifica:

- f es creciente en (a,b) si y solo si $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in (a,b)$.
- f es decreciente en (a,b) si y solo si $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in (a,b)$.

Ejemplo. Determine los intervalos de crecimiento o decrecimiento de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

Obsérvese que nuestro criterio de crecimiento o decrecimiento de una función en un intervalo es aplicable a funciones derivables en un intervalo abierto. Además, para aplicar el criterio necesitamos que el signo de la derivada no cambie en el intervalo correspondiente. Por tanto, para poder aplicar el criterio necesitamos encontrar intervalos en los que la función f reúna esas características. Para ello, necesitamos determinar:

- los puntos del dominio de f en los que f no es derivable.
- los puntos en los que f es derivable y su derivada se anula.

Los intervalos en el dominio de f que no contengan a puntos de los anteriores servirán para aplicar nuestro criterio de crecimiento y decrecimiento.

Empezamos calculando el dominio de f. Es evidente que $D(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.
A continuación determinamos los puntos del dominio en los que la función no es derivable. En nuestro caso, la función f es derivable en todos los puntos de su dominio. Pasamos ahora a calcular la derivada de f. Podéis comprobar que

$$f'(x) = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x+1)^2(x-1)^2} \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Pasamos ahora a calcular los puntos en los que se anula la derivada. Está claro que

$$f'(x) = 0 \longleftrightarrow x \in \{-\sqrt{3}, 0, \sqrt{3}\}$$

Por tanto, los intervalos de mayor "tamaño" en los que podemos aplicar el criterio de crecimiento o decrecimiento son:

$$(-\infty, -\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, \sqrt{3}), (\sqrt{3}, +\infty)$$

Solo queda determinar el signo de la derivada de f en cada uno de estos intervalos. Podéis comprobar que:

- $f'(x) > 0$ para todo $x \in (-\infty, -\sqrt{3})$,
- $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-\sqrt{3}, -1)$,
- $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-1, 0)$,
- $f'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 1)$,
- $f'(x) < 0$ para todo $x \in (1, \sqrt{3})$,
- $f'(x) > 0$ para todo $x \in (\sqrt{3}, +\infty)$.

Aplicando el criterio de crecimiento o decrecimiento de una función derivable en cada uno de los intervalos anteriores obtenemos que

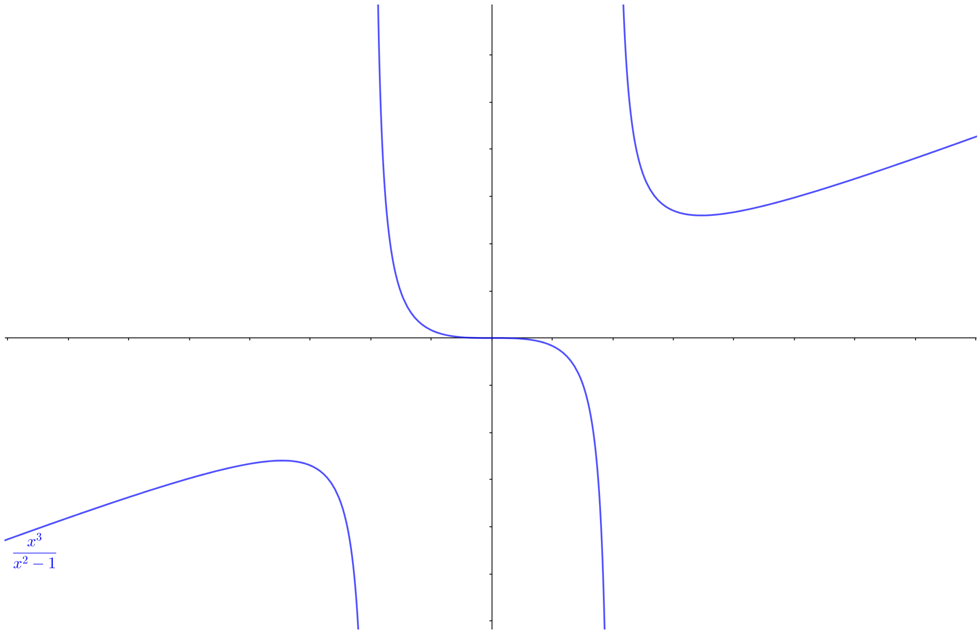
- f es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3})$,
- f es decreciente en $(-\sqrt{3}, -1)$,
- f es decreciente en $(-1, 0)$,
- f es decreciente en $(0, 1)$,

- f es decreciente en $(1, \sqrt{3})$,
- f es creciente en $(\sqrt{3}, +\infty)$.

De forma más breve, podríamos escribir lo siguiente:

$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Se puede comprobar que la gráfica de la función tiene la forma siguiente:



1.5. Concavidad y convexidad de funciones

No daremos la definición general de convexidad o concavidad de una función. Nos limitaremos al caso de funciones derivables.

Sea $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ una función derivable en (a, b). Se dice que

- f es convexa en (a, b) si f' es creciente en (a, b).
- f es cóncava en (a, b) si f' es decreciente en (a, b).

Teniendo en cuenta el criterio de crecimiento y decrecimiento de una función derivable, es fácil deducir el siguiente criterio para la concavidad o convexidad de una función dos veces derivable:

> Sea $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ dos veces derivable en (a, b) (es decir, f es derivable en (a, b) y f' es derivable en (a, b)). Se verifica:
>
> - f es convexa en (a, b) si y solo si $f''(x) \geqslant 0$ para todo $x \in (a, b)$.
> - f es cóncava en (a, b) si y solo si $f''(x) \leqslant 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Un punto en el que una función "cambie" de convexa a cóncava o viceversa se denominará *punto de inflexión*. Damos una definición formal:

Sea $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ y $c \in (a, b)$. Se dice que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión de f si, en primer lugar, existe $\delta > 0$ (con $(c - \delta, c + \delta) \subseteq (a, b)$) tal que o bien f es convexa en $(c - \delta, c)$ y cóncava en $(c, c + \delta)$ o bien f es cóncava en $(c - \delta, c)$ y convexa en $(c, c + \delta)$ y, en segundo lugar, además se verifica una de las siguientes condiciones:

- f es derivable en c.
- f es continua en c y o bien $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = +\infty$ o bien $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = -\infty$.

Ejemplo. Determine los intervalos de concavidad o convexidad, así como los puntos de inflexión, de la función

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$$

Obsérvese que nuestro criterio de concavidad o convexidad de una función en un intervalo es aplicable a funciones dos veces derivables en un intervalo abierto. Además, para aplicar el criterio necesitamos que el signo de la derivada segunda no cambie en el intervalo correspondiente. Por tanto, para poder aplicar el criterio necesitamos encontrar intervalos en los que la función f reúna esas características. Para ello, necesitamos determinar:

- los puntos del dominio de f en los que f no es dos veces derivable.
- los puntos en los que f es dos veces derivable y su derivada segunda se anula.

Los intervalos en el dominio de f que no contengan a puntos de los anteriores servirán para aplicar nuestro criterio de concavidad y convexidad. Ya calculamos en el ejemplos anterior el dominio y la derivada de f. Podéis comprobar que se verifica

$$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x+1)^3(x-1)^3} \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Pasamos ahora a calcular los puntos en los que se anula la derivada segunda. Está claro que

$$f''(x) = 0 \longleftrightarrow x = 0$$

Por tanto, los intervalos de mayor "tamaño" en los que podemos aplicar el criterio de crecimiento o decrecimiento son:

$$(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, +\infty)$$

Solo queda determinar el signo de la derivada segunda de f en cada uno de estos intervalos. Podéis comprobar que:

- $f'(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, -1)$,
- $f'(x) > 0$ para todo $x \in (-1, 0)$,
- $f'(x) < 0$ para todo $x \in (0, 1)$,
- $f'(x) > 0$ para todo $x \in (1, +\infty)$.

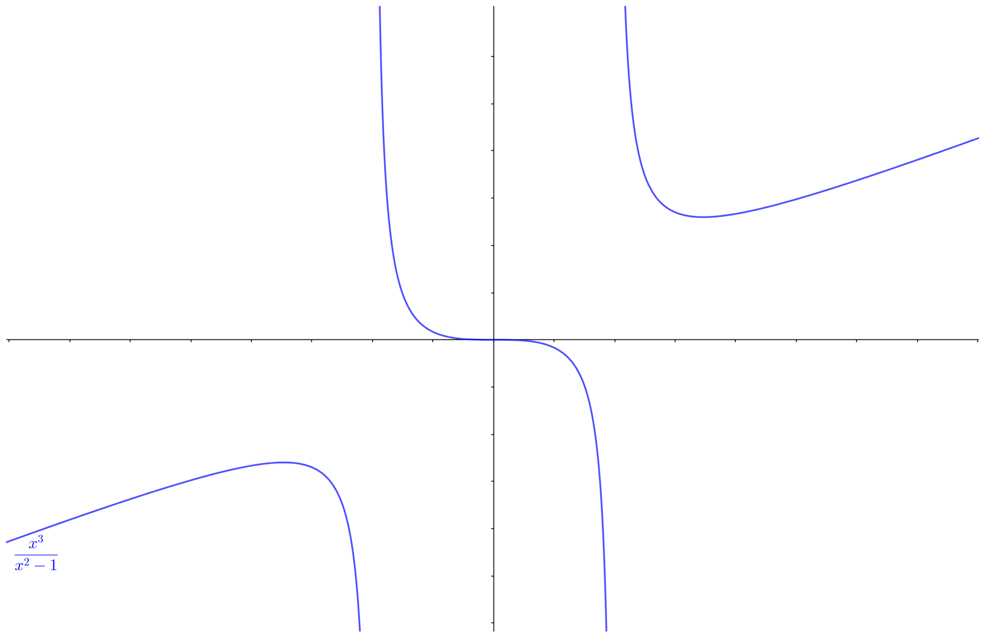
Aplicando el criterio de concavidad o convexidad de una función dos veces derivable en cada uno de los intervalos anteriores obtenemos que

- f es cóncava en $(-\infty, -1)$,
- f es convexa en $(-1, 0)$,
- f es cóncava en $(0, 1)$,
- f es convexa en $(1, +\infty)$.

De forma más breve, podríamos escribir lo siguiente:

$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$\frown$	$\smile$	$\frown$	$\smile$

Se puede comprobar que la gráfica de la función tiene la forma siguiente:



1.6. Extremos relativos

Los extremos relativos de funciones se clasifican en máximos relativos y mínimos relativos. Veamos su definición.

Sean I un intervalo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $c \in I$. Se dice que:

- f tiene un máximo relativo en c si existe $\delta > 0$ tal que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo $x \in I \cap (c-\delta, c+\delta)$.
- f tiene un mínimo relativo en c si existe $\delta > 0$ tal que $f(c) \leqslant f(x)$ para todo $x \in I \cap (c-\delta, c+\delta)$.

En lo que sigue de sección veremos algunos criterios que nos permitirán determinar los extremos relativos de una función. En primer lugar veremos un resultado que nos permitirá dar una condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo en un punto.

Sean $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ y $c \in (a,b)$ tales que f es derivable en c. Si f tiene un extremo relativo en c entonces $f'(c) = 0$.

Sean I un intervalo, $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $c \in I$. Se dice que c es un punto crítico de f si o bien f no es derivable en c o bien f es derivable en c y $f'(c) = 0$. Teniendo en cuenta esta definición, podemos reenunciar el resultado anterior de la siguiente forma.

> Sean $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ y $c \in (a,b)$. Si f tiene un extremo relativo en c entonces c es un punto crítico de f.

Este resultado nos proporciona una condición necesaria de extremo relativo, en el sentido de que si una función alcanza un extremo relativo en un punto perteneciente al interior del dominio de la función entonces dicho punto es un punto crítico de la función. Por tanto, si tenemos una función definida en un intervalo abierto y calculamos sus puntos críticos, podremos asegurar que en cualquier otro punto del dominio la función no tendrá un extremo relativo. Ahora bien, la condición de punto crítico, en general, no es suficiente para asegurar la existencia de un extremo relativo en el punto, por lo que no podremos asegurar que la función tendrá un extremo relativo en los puntos críticos previamente calculados. Por ello, necesitaremos condiciones adicionales que nos permitan asegurar que la función tiene un extremo relativo en un punto crítico. Veremos dos criterios que nos darán condiciones de ese tipo: el criterio de la derivada primera y el criterio de la derivada segunda.

Criterio de la derivada primera
Sean $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ continua en (a,b) y $c \in (a,b)$ tales que c es un punto crítico de f y f es derivable en $(a,b) \setminus \{c\}$. Se tiene:

- Si $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in (a,c)$ y $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in (c,b)$ entonces f tiene en c un máximo relativo.
- Si $f'(x) \leqslant 0$ para todo $x \in (a,c)$ y $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in (c,b)$ entonces f tiene en c un mínimo relativo.

Ejemplo. Determinar los extremos relativos de la función

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$$

Obsérvese en primer lugar que f es una función continua en $\mathbb{R}$. Teniendo en cuenta que la función $g(x) = \sqrt[3]{x}$ es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, está claro, por la regla de la cadena, que la función f es derivable en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Veamos ahora que f no es derivable en 0. Se tiene que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^+} 2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x - 3\sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to 0^-} 2 - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

Por tanto, la función f no es derivable en 0. Se tiene, por tanto, que 0 es un punto crítico de f. Si f tiene más puntos críticos deben ser puntos en los que la derivada se anula, así que vamos a calcular $f'(x)$ y a determinar en qué puntos vale cero.

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Se tiene que:

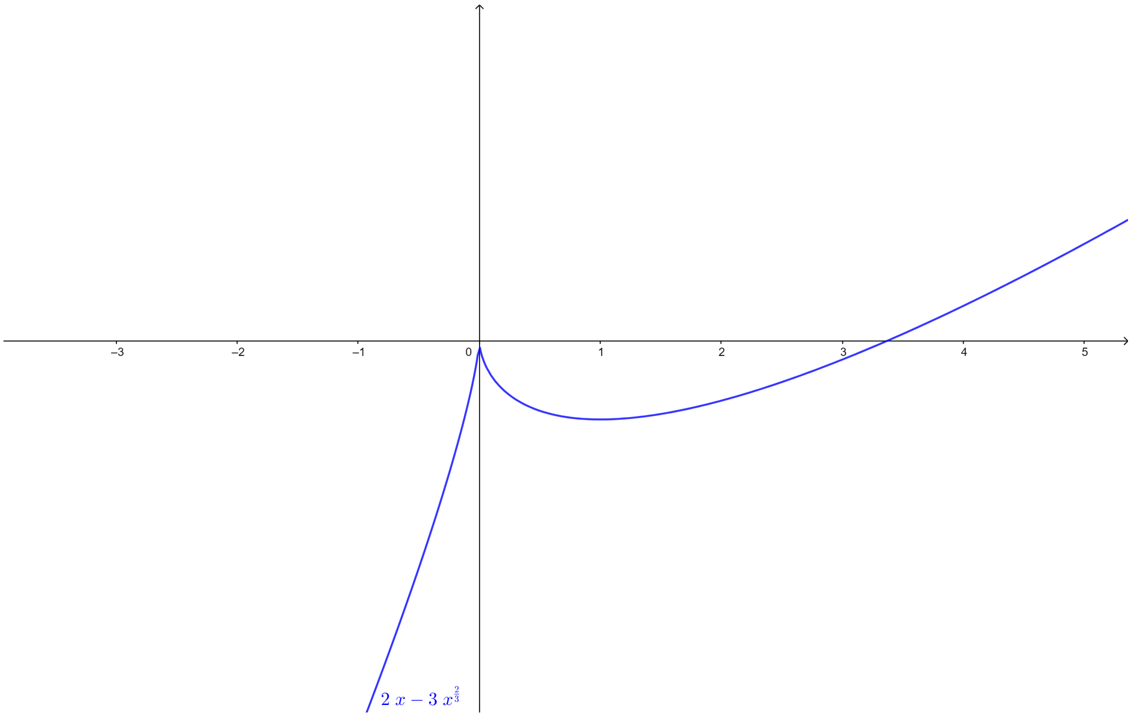
$$f'(x) = 0 \longleftrightarrow x = 1$$

Así, los puntos críticos de f son 0 y 1. A continuación estudiaremos el signo de $f'(x)$ de la misma manera que lo haríamos si nos pidieran estudiar los intevalos de crecimiento y decrecimiento de f. Se tiene que

- $f'(x) > 0$ para todo $x < 0$,
- $f'(x) < 0$ para todo $x \in (0,1)$,
- $f'(x) > 0$ para todo $x > 1$.

Por el criterio de la derivada primera se tiene que

- f tiene un máximo relativo en 0,
- f tiene un mínimo relativo en 1.



Veamos ahora otra condición suficiente para que en un punto crítico exista un extremo relativo.

Criterio de la derivada segunda
Sean $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ y $c \in (a,b)$ tales que c es un punto crítico de f y f es dos veces derivable en (a,b). Se tiene:

- Si $f''(c) > 0$ entonces f tiene en c un mínimo relativo.
- Si $f''(c) < 0$ entonces f tiene en c un máximo relativo.

Obsérvese que el criterio no dice nada en el caso $f''(c) = 0$. En ese caso el criterio de la derivada segunda no sirve.

Veamos un ejemplo de aplicación del criterio de la derivada segunda.

Ejemplo. Determinar los extremos relativos de la función

$$f(x) = e^x(2x^2 + x - 8)$$

Es evidente que la función f es derivable en toda la recta real. Por tanto, si tiene puntos críticos serán puntos en los que la derivada se anule. Calculamos la función derivada:

$$f'(x) = e^x\left(2x^2 + 5x - 7\right)$$

Se tiene que

$$f'(x) = 0 \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} x = 1 \\ \vee \\ x = -\frac{7}{2} \end{array} \right.$$

Por la condición necesaria de extremo relativo, sabemos que f no puede tener un extremo relativo en cualquier valor distinto de 1 y $-\frac{7}{2}$. Nos queda determinar si f tiene o no extremo relativo en cada uno de dichos puntos. Para ello usaremos el criterio de la derivada segunda. Obsérvese que f es dos veces derivable (de hecho, infinitas veces derivable) en $\mathbb{R}$ y que la derivada segunda viene dada por

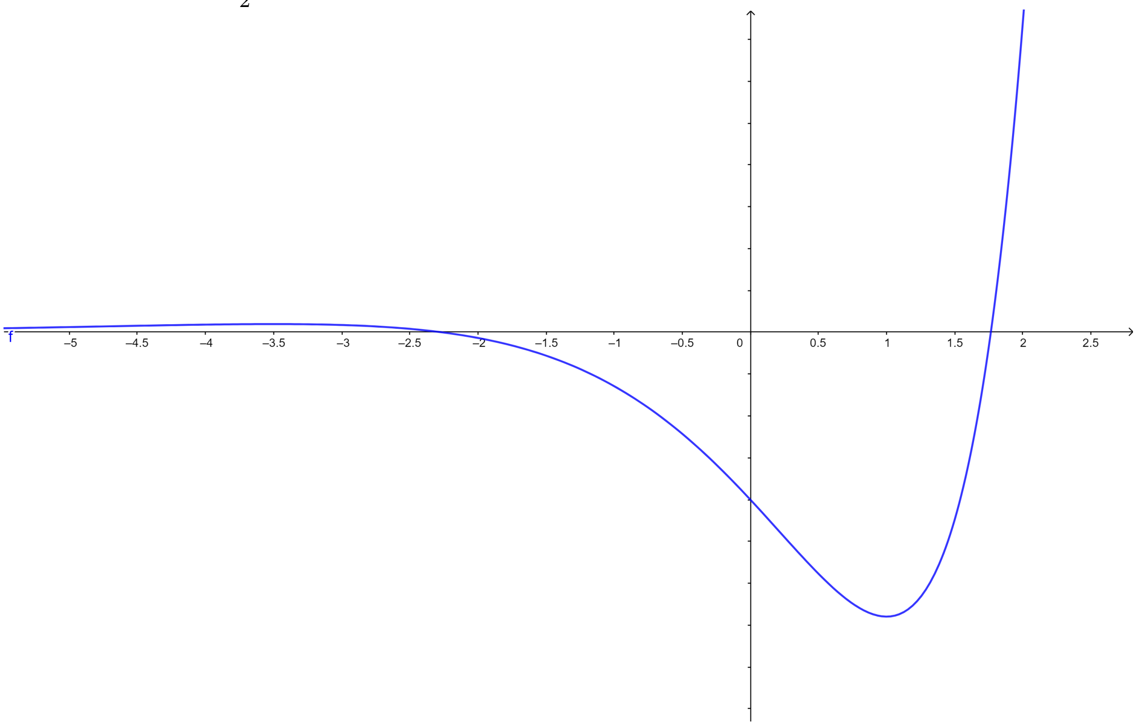
$$f''(x) = e^x\left(2x^2 + 9x - 2\right)$$

A continuación evaluamos f'' en los dos puntos críticos:

$$f''(1) = 9e > 0,$$

$$f''\left(-\frac{7}{2}\right) = -9e^{-\frac{7}{2}} < 0$$

Usando el criterio de la derivada segunda concluimos que f tiene un mínimo relativo en 1 y un máximo relativo en $-\frac{7}{2}$.



1.7. Extremos absolutos

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $c \in I$. Se dice que

- f alcanza en c su máximo absoluto si $f(c) \geqslant f(x)$ para todo $x \in I$. En este caso, $f(c)$ será el máximo absoluto de f en I.
- f alcanza en c su mínimo absoluto si $f(c) \leqslant f(x)$ para todo $x \in I$. En este caso, $f(c)$ será el mínimo absoluto de f en I.

Una función no necesariamente tiene máximo o mínimo absoluto. Por ejemplo, la función dada por $f(x) = \ln x$ para todo $x \in (0, +\infty)$ no tiene máximo ni mínimo absoluto. A continuación daremos una condición suficiente que nos garantizará que una función en cierto dominio alcanza tanto su máximo como su mínimo absoluto.

Teorema de Weierstrass
Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Entonces, f alcanza su máximo y su mínimo absoluto en $[a, b]$.

En el siguiente ejemplo veremos cómo podemos determinar el máximo y el mínimo absoluto de una función continua en un intervalo cerrado y acotado.

Ejemplo. Determinar los extremos absolutos de la función

$$f(x) = (9 - x)\sqrt[3]{(x-4)^2}$$

en el intervalo $[3,8]$.

Puesto que f es una función continua y el intervalo $[3,8]$ es cerrado y acotado, sabemos, por el Teorema de Weierstrass, que f alcanza su máximo y su mínimo absoluto en $[3,8]$. El problema radica ahora en encontrar los puntos en los que f alcanza tales extremos. Para ello, razonemos de la siguiente forma. Supongamos que f (definida en $[3,8]$) alcanza un extremo absoluto en un punto c del interior del intervalo, es decir, en un punto perteneciente a $(3,8)$. Es evidente que entonces f (definida en $(3,8)$) tendría un extremo relativo en c. Aplicando la condición necesaria de extremo relativo concluiríamos que c es un punto crítico de f. Por tanto, si f (en $[3,8]$) alcanza un extremo absoluto en el interior del intervalo, debería ser en un punto crítico. Concluimos que f solo puede alcanzar sus extremos absolutos en los puntos siguientes:

- Los puntos críticos de f en $(3,8)$.
- Los extremos del intervalo, es decir, los puntos 3 y 8.

Teniendo en cuenta lo anterior, lo que haremos será calcular los puntos críticos de f contenidos en $(3,8)$ y a continuación evaluar f en dichos puntos y en los extremos del intervalo. Bastará comparar los valores alcanzados por la función en dichos puntos para obtener el máximo y el mínimo absoluto.

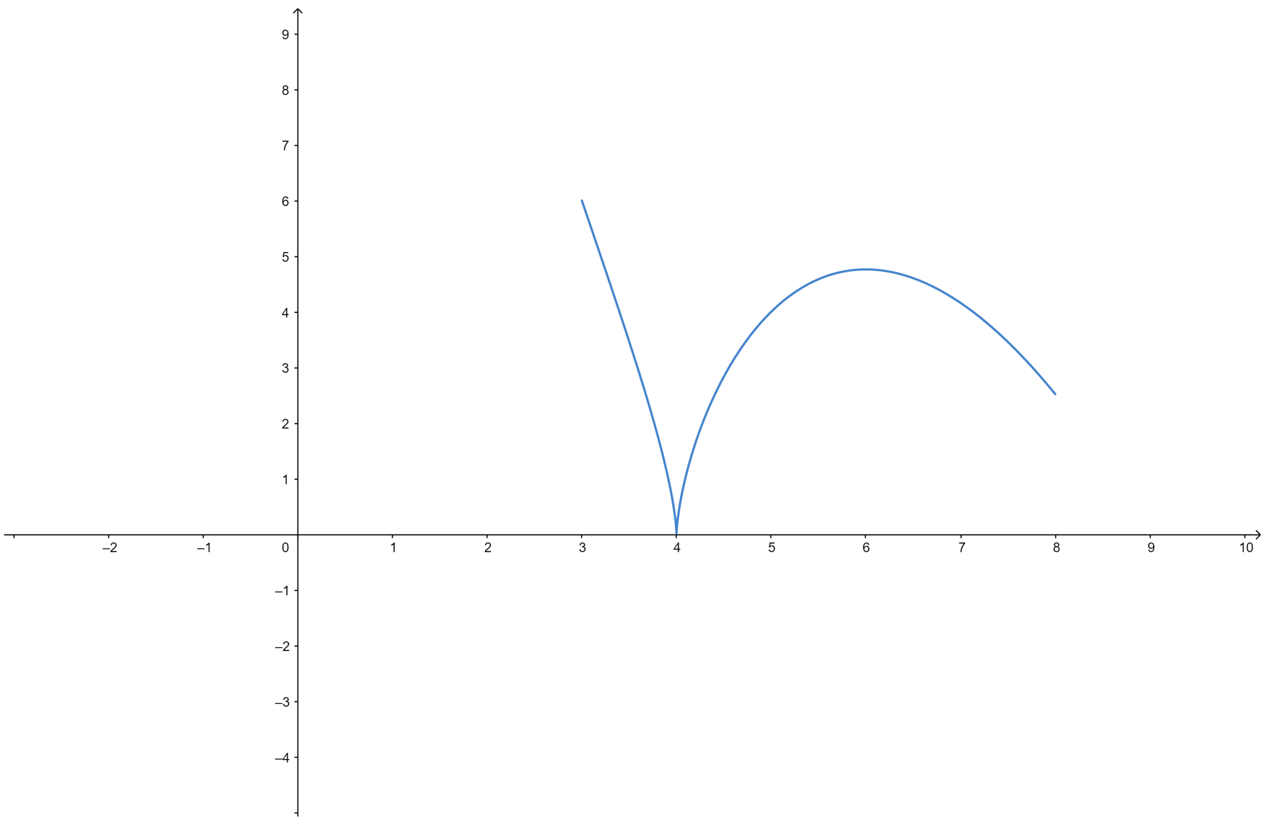
Es fácil comprobar que f es derivable en todo punto excepto en 4. Por tanto, 4 es punto crítico de f. Además, $4 \in (3,8)$. Calculemos ahora f'. Se tiene

$$f'(x) = \frac{-5(x-6)}{3\sqrt[3]{x-4}}$$

Obsérvese que $f'(x)$ solo se anula para $x=6$. Por tanto, los puntos críticos de f en el intervalo $(3,8)$ son 4 y 6. Solo falta evaluar la función en estos puntos y en los extremos del intervalo, e identificar el máximo y el mínimo absoluto. Se tiene

$$\begin{aligned} f(3) &= 6 \\ f(4) &= 0 \\ f(6) &= 3\sqrt[3]{4} \\ f(8) &= 2\sqrt[3]{2} \end{aligned}$$

Es fácil comprobar sin usar calculadora (se deja al lector) que el mayor de los cuatro valores anteriores es 6. Y, evidentemente, el menor es 0. Por tanto, 6 es el máximo absoluto de f en $[3,8]$ y 0 es el mínimo absoluto de f en $[3,8]$.



2. RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES: MÉTODOS DE BISECCIÓN Y NEWTON-RAPHSON

2.1. Introducción

Los métodos de Bisección y Newton-Raphson son dos de los métodos numéricos existentes más conocidos que se usan para hallar de forma aproximada alguna de las raíces de una ecuación dada. Para ello, ambos parten de un intervalo inicial del que se sabe que contiene a alguna de las raíces. El método de bisección, divide por la mitad, de manera sucesiva, una sucesión de intervalos de longitud cada vez menor en los que se encuentra alguna de las raíces de la ecuación considerada. El método de Newton Raphson, por su parte, divide también una sucesión de intervalos de longitud cada vez más pequeña, pero en este caso tales longitudes no guardan relación de proporcionalidad entre ellas.

Teorema 1 (Teorema de Bolzano)**.** *Si una función f es continua en un intervalo $[a,b]$ y $f(a)f(b) < 0$, entonces existe al menos un punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.*

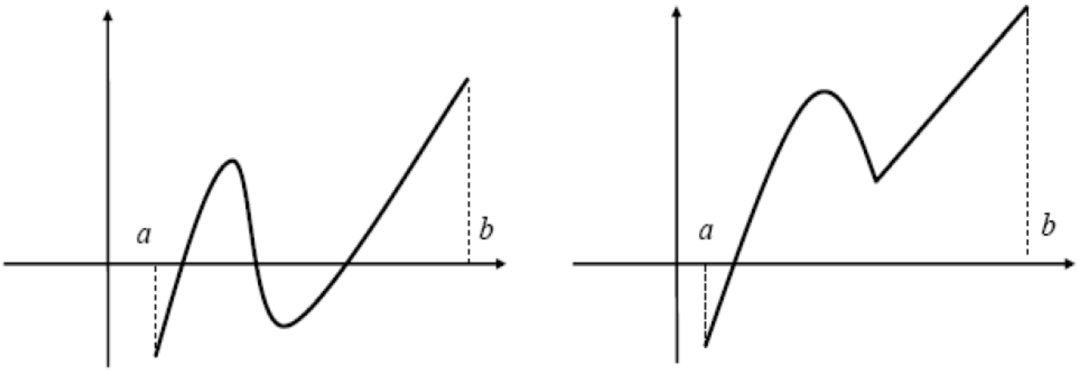


Figura 1: La función de la izquierda tiene tres raíces en el intervalo $[a, b]$. La de la derecha, sólo una.

Ejemplo 1 Por el Teorema de Bolzano, la función $f(x) = x^3 + x + 1$ tiene al menos una raíz en el intervalo $[-2, 0]$, pues es una función continua en dicho intervalo y se tiene que $f(-2)f(0) < 0$.

2.2. Método de bisección

Sea f es una función continua en $[a, b]$ que verifica $f(a)f(b) < 0$, entonces, según el Teorema de Bolzano, f se anula en al menos un punto $c \in [a, b]$. El método de bisección, también conocido como el *método de aproximaciones sucesivas*, divide por la mitad, de manera sucesiva, una sucesión de intervalos de longitud cada vez menor en los que se encuentra c. Esto es,

$$[a_0, b_0] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_k, b_k] \supseteq \dots \tag{5}$$

cumpliéndose que $b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1})$ y $c \in [a_k, b_k]$, $\forall\, k = 0, 1, 2, \dots$.

Si se tiene $[a_k, b_k]$ tal que $a_k \approx b_k$, entonces se puede tomar $c \approx a_k$ o $c \approx b_k$.

A continuación describiremos detalladamente en qué consiste este método para aproximar el valor de c con un error de estimación menor o igual a un ϵ fijado. El mínimo número de iteraciones a ejecutar de este método se puede determinar, tal y como se explicará más adelante.

Procedimiento:

1. Siendo $k = 0$ la iteración actual del algoritmo, identificar un intervalo inicial $[a_0, b_0]$ que contenga una raíz. Esto se puede conseguir mediante:
   - Inspección de la gráfica de la función (si se tiene)
   - Uso del teorema de Bolzano
   - Otras características que se tengan de la función
2. Calcular el punto medio del intervalo $[a_k, b_k]$, $p_k = \frac{a_k + b_k}{2}$, y evaluar f en dicho punto. Identificar en cuál de los dos subintervalos está la raíz.
   - Si $f(a_k)f(p_k) < 0$, entonces f se anula al menos en un punto del intervalo (a_k, p_k). Calcular una cota superior del error utilizando el intervalo de estimación actual.
     - Si $error \leq \epsilon$, entonces dar una estimación de la raíz: $c \approx x_k$, siendo $x_k \in (a_k, p_k)$.
     - Si $error > \epsilon$, entonces ejecutar una nueva iteración $k = k + 1$ del paso 2 usando el intervalo $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, p_k]$.
   - Si $f(p_k)f(b_k) < 0$, entonces f se anula al menos en un punto del intervalo (p_k, b_k). Calcular una cota superior del error utilizando el intervalo de estimación actual.

- Si $error \leq \epsilon$, entonces dar estimación de la raíz: $c \approx x_k$, siendo $x_k \in (p_k, b_k)$.
- Si $error > \epsilon$, entonces ejecutar una nueva iteración $k = k + 1$ del paso 2 usando el intervalo $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [p_k, b_k]$.

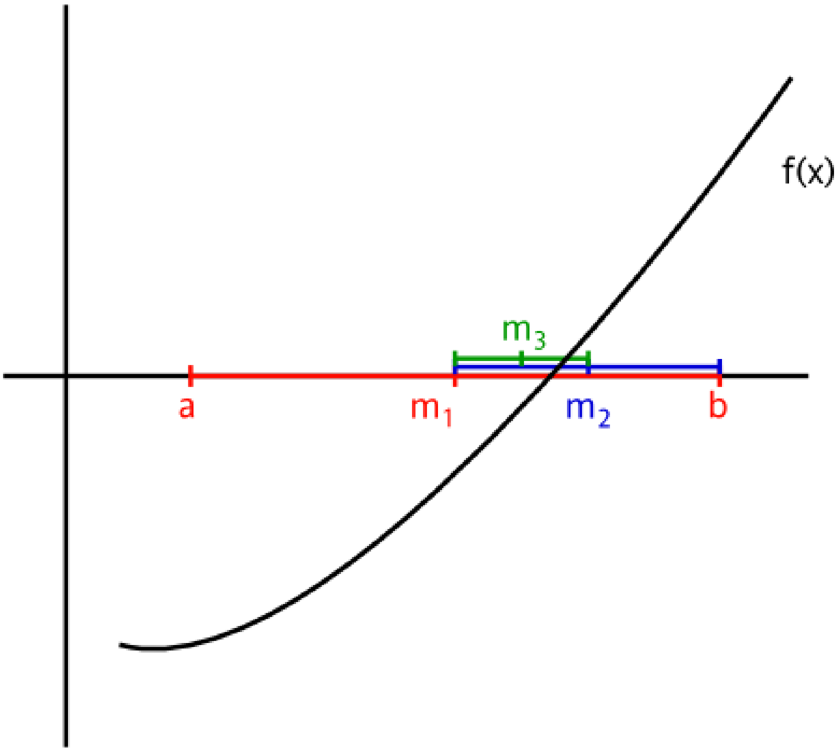


Figura 2: Método de Bisección

Observaciones:

- Considerando el intervalo del paso 2 en el que la función cambia de signo en los extremos, y repitiendo los pasos anteriores, se consigue obtener una sucesión de intervalos de longitud cada vez menor donde se encuentra un cero de f. Por lo tanto, se consigue un número próximo a c.

- Convergencia asegurada, pero lenta.

- El método de bisección se suele utilizar para determinar un intervalo pequeño en el que se encuentre la raíz. Posteriormente, se aplica otro método que conduzca más rápido a la raíz.

- Obviamente, si en algún paso del procedimiento anterior se tiene $f(p) = 0$, entonces $c = p$.

Ejemplo 3 Hallar uno de los ceros de la función $f(x) = x^3 + x - 3$ mediante el método de bisección.

Se tiene que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$. Luego, $\exists\, c \in \mathrm{R}$ tal que $f(c) = 0$. Además, ya que la derivada de f, $f'(x) = 3x^2 + 1$, es estrictamente creciente para todo $x \in \mathrm{R}$, $\exists!\, c \in \mathrm{R}$ tal que $f(c) = 0$.

Observamos que $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$. Por lo tanto, por el Teorema de Bolzano, dicha raíz está dentro del intervalo $[1, 2]$. En la siguiente tabla se muestran los cálculos realizados tras ejecutar 8 iteraciones del método de bisección. La única raíz real es $c \approx 1{,}213411663\ldots$.

n	a_n	b_n	$p_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	$f(p_n)$	$error = \frac{b_n-a_n}{2}$
1	1	2	1.5	1.875	0.5
2	1	1.5	1.25	0.203125	0.25
3	1	1.25	1.125	-0.451172	0.125
4	1.125	1.25	1.1875	-0.137939	0.0625
5	1.875	1.25	1.21875	0.02902	0.03125
6	1.875	1.21875	1.203125	-0.05534	0.015625
7	1.203135	1.21875	1.210937	-0.01338	0.0078125
8	1.210937	1.21875	1.214843	0.00776	0.0039065

Error de estimación:

Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ y que verifica que $f(a)f(b) < 0$ y sea $c \in (a, b)$ una raíz de f. Se define el error de estimación de c en $[a, b]$ como

$$error = |p - c|,\ p \in (a, b). \tag{6}$$

Para cada iteración k del algoritmo se tiene que

$$error = |p_k - c| \leq |b_k - a_k| \tag{7}$$

En cada paso k del algoritmo se divide el intervalo del paso anterior $k-1$ por la mitad. Por lo tanto, de acuerdo a la longitud de estos intervalos se tiene que

$$b_k - a_k = \frac{1}{2}(b_{k-1} - a_{k-1}). \tag{8}$$

Con respecto a la última iteración considerada, $k = n$:

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}), \tag{9}$$

que es lo mismo que

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^2}(b_{n-2} - a_{n-2}). \tag{10}$$

Y así sucesivamente, y de manera regresiva:

$$b_n - a_n = \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0). \tag{11}$$

Por lo tanto,

$$error = |p_n - c| \leq \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0), \tag{12}$$

de donde se deduce que

$$n \geq \frac{\ln \frac{b_0 - a_0}{error}}{\ln 2}. \tag{13}$$

Si en cada iteración se toma $p_k = \frac{a+b}{2}$,

$$error = |p_n - c| \leq \frac{1}{4^n}(b_0 - a_0). \tag{14}$$

Ejemplo 2 Si se tiene un intervalo inicial $[1, 2]$ en el que se quiere encontrar una raíz de una cierta función f con un error de estimación menor que e^{-2}, entonces

$$n \geq \frac{\ln \frac{2-1}{0{,}01}}{\ln 2} \approx 6{,}6438. \tag{15}$$

Esto es, se necesitan al menos 7 iteraciones del algoritmo.

2.3. Método de Newton-Raphson

Sea f es una función continua en $[a,b]$, derivable en (a,b) y que verifica que $f(a)f(b) < 0$. Entonces, según el Teorema de Bolzano, f se anula en al menos un punto $c \in [a,b]$. El método de Newton-Raphson, al igual que el método de bisección, divide de manera sucesiva una sucesión de intervalos de longitud cada vez menor en los que se encuentra c. Sin embargo, más adelante veremos que dos de entre las diferencias que se tienen con respecto al método anterior es que la longitud de los intervalos no guardan una relación predefinida entre sí y que este método no siempre converge.

Para hallar el punto por el que se divide el intervalo de cada iteración, se hace uso de las intersección que se produce entre el eje de abcisas y las recta tangente a f en el punto solución hallado en la iteración antereri.Dado un x_0 conocido, la recta tangente a f que pasa por el punto $(x_0, f(x_0))$ es

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

A continuación se explica detalladamente el método de Newton-Raphson.

Procedimiento:

1. Sea $k = 0$. Seleccionar un punto $x_0 \in [a_0, b_0]$ y hallar $f'(x_0)$.
2. Calcular el punto de corte $x_{k+1} \in [a_k, b_k]$ entre el eje de abcisas y la recta tangente a f en x_k. Esto es,
$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$
3. Identificar en cuál de los dos subintervalos está la raíz.
   - Si $f(a_k)f(x_{k+1}) < 0$, entonces f se anula al menos en un punto del intervalo (a_k, x_{k+1}). Calcular una cota superior del error utilizando el intervalo de estimación actual.
     - Si $error = |x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$, entonces dar una estimación de la raíz: $c \approx x_{k+1}$.
     - Si $error = |x_{k+1} - x_k| > \epsilon$, entonces ejecutar una nueva iteración $k = k + 1$ del paso 2 usando el intervalo $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, x_{k+1}]$.
   - Si $f(x_{k+1})f(b_k) < 0$, entonces f se anula al menos en un punto del intervalo (x_{k+1}, b_k). Calcular una cota superior del error utilizando el intervalo de estimación actual.
     - Si $error = |x_{k+1} - x_k| \leq \epsilon$, entonces dar estimación de la raíz: $c \approx x_{k+1}$.
     - Si $error = |x_{k+1} - x_k| > \epsilon$, entonces ejecutar una nueva iteración $k = k + 1$ del paso 2 usando el intervalo $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [x_{k+1}, b_k]$.

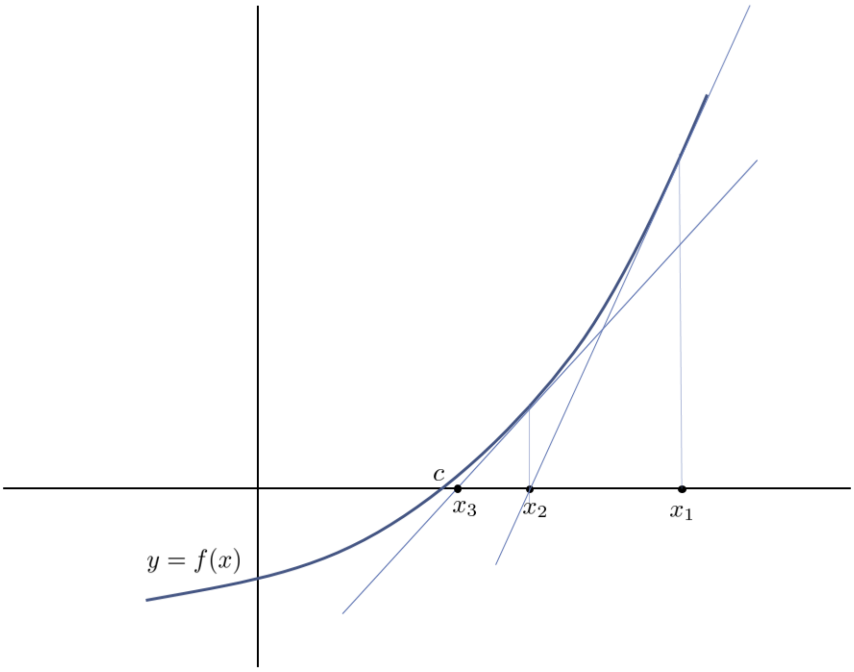


Figura 3: Método de Newton

Desventajas:

- La función f debe ser derivable.
- El método de Newton da lugar a una serie de aproximaciones de c.

$$x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots$$

  Si la sucesión converge: $\lim_{k\to\infty} x_k = c$, siendo c una de las raíces de f. Sin embargo, el método de Newton no siempre da una sucesión convergente:

  - Como $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$, es fácil deducir que el método fallará cuando la derivada $f'(x_k)$ sea nula para algún x_k de la sucesión. Este problema puede soslayarse cambiando el punto inicial seleccionado x_1.
  - Puede fallar también por no converger la sucesión obtenida. (Ver Figura 4)

- Precaución al tomar el punto inicial x_1 de partida. (Ver Figura 5)
- En algunos casos la sucesión construida no converge a la raíz esperada. (Ver Figura 6)
- Si la derivada se anula en algún x_k, el método ”se para”.

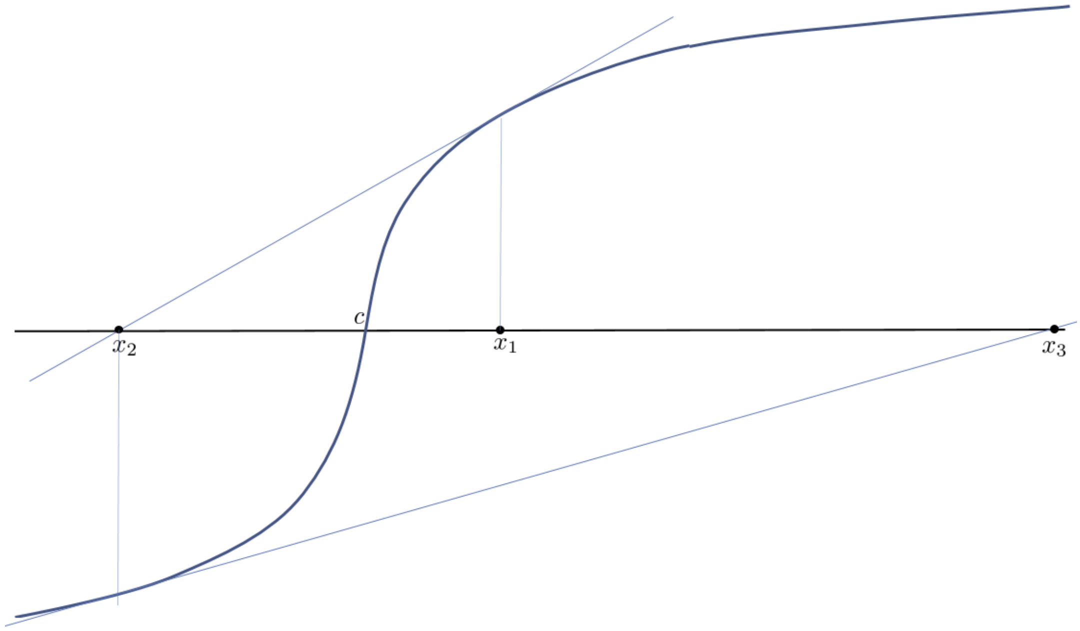


Figura 4: El método de Newton-Raphson no converge si $\nexists\, a, b \in$ R tal que en el intervalo $[a, b]$ no se tenga que f' sea estrictamente mayor que cero.

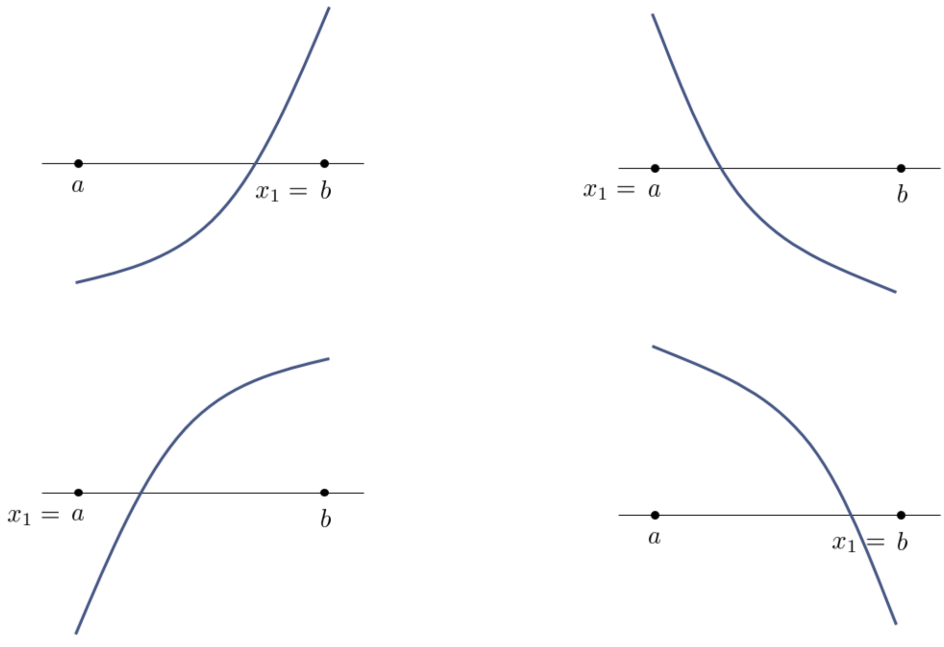


Figura 5: En el método de Newton-Raphson, el punto inicial de partida x_1 debe satisfacer que $f(x_1)f''(x_1) > 0$.

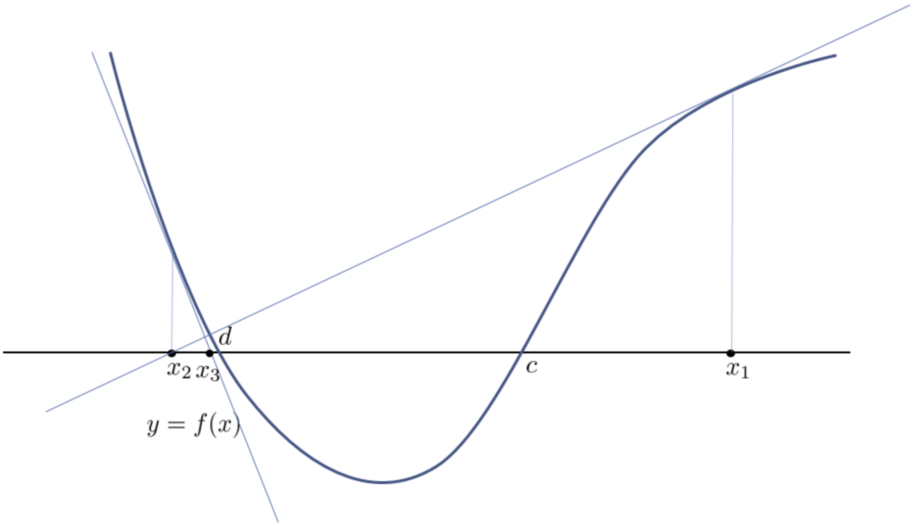


Figura 6: El método de Newton-Raphson no siempre converge a la raíz esperada.

Teorema 2 (Teorema de convergencia del método de Newton-Raphson)**.** *Sea f una función continua y dos veces derivable en un conjunto que contenga al intervalo $[a, b]$. Si se verifica, además, que,*

1. $f(a)f(b) < 0$,
2. $f'(x) \neq 0, \forall\, x \in [a, b]$,
3. $f''(x)$ *no cambia de signo en* $[a, b]$,

entonces, si $x_1 \in [a, b]$ es un punto cualquiera en el que $f(x_1)f''(x_1) > 0$, la sucesión $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ definida por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{16}$$

converge al único punto $c \in (a, b)$ donde $f(c) = 0$.

Nota. Las condiciones establecidas en el Teorema 2 (Teorema de convergencia del método de Newton-Raphson) son condiciones suficientes.

Ejemplo 1 El método de Newton-Raphson no siempre converge. Veámoslo con la siguiente función. Sea $f(x) = \sqrt[3]{x}$, cuya gráfica se muestra en la Figura 4. Es fácil ver que f tiene su única raíz en $x = 0$. Tomemos como punto inicial $x_1 = 0{,}1$ para obtener una estimación de esta raíz. Tal y como se observa en la tabla, en cada iteración del algoritmo la nueva aproximación de la raíz está más lejos de esta.

n	x_n	$f(x_n) = \sqrt[3]{x_n}$	$f'(x_n) = \frac{1}{3}x_n^{-2/3}$	x_{n+1}
1	0.1	0.46416	1.54720	-0.2
2	-0.2	-0.58480	0.97467	0.4
3	0.4	0.73681	0.61401	-0.8
4	-0.8	-0.92832	0.38680	1.6

Haciendo uso del Teorema de convergencia del método de Newton-Raphson, se tiene que:

- f es infinitas veces derivable en R.
- $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3} > 0$ para todo $x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$.
- $f''(x) = -\frac{2}{9}x^{5/3} < 0$ para todo $x \in \mathrm{R} \setminus \{0\}$.
- $\nexists a, b \in \mathrm{R}$ tal que $f(a)f(b) < 0$.

Observamos que el punto 1) del Teorema 2 no se cumple. Luego, no existe un punto cualquiera x_1 en el que $f(x_1)f''(x_1) > 0$ y, por lo tanto, la sucesión $\{x_n\}_{k=1}^{\infty}$ definida por (12) no converge al único punto c donde $f(c) = 0$.

Ejemplo 2 Hallar el punto de corte de las gráficas de las funciones $g(x) = e^{-x}$ y $h(x) = \ln(x)$.

Ya que se quiere hallar el punto en el que intersectan, igualamos ambas funciones

$$g(x) = h(x) \longrightarrow e^{-x} = \ln(x) \longrightarrow e^{-x} - \ln(x) = 0.$$

Esto es lo mismo que decir que se quieren hallar los ceros de la función $f(x) = g(x) - h(x) = e^{-x} - \ln(x)$.

La función f solamente tiene un cero, ya que su derivada es negativa para todo $x > 0$, que es el dominio de la función. Esto es:

$$f'(x) = e^{-x} - \frac{1}{x} < 0, \, \forall \, x > 0.$$

Luego, existe un único $c \in \mathrm{R}$ tal que $f(c) = 0$.

Tomamos como punto inicial $x_1 = 1$. Aplicando el método de Newton-Raphson, se obtiene la tabla de datos siguiente:

n	x_n	$f(x_n) = e^{-x_n} - \ln(x_n)$	$f'(x_n) = -e^{-x_n} - \frac{1}{x_n}$	x_{n+1}
1	1	0.367879	-1.367879	1.268941
2	1.268941	0.042946	-1.069187	1.309108
3	1.309108	0.000714	-1.033939	1.309799

Por lo tanto, con una aproximación de 3 cifras decimales exactas, $c \approx 1{,}30979958\ldots$.

Ejemplo 3 Determinar si la función $f(x) = e^x + x - 2$ satisface en el intervalo $[0, 1]$ las condiciones del Teorema de convergencia del método de Newton-Raphson. Indicar un punto inicial x_1 tal que la sucesión dada por el método de Newton-Raphson para f y dicho valor inicial converja al único cero de f en el intervalo $[0, 1]$.

Se verifica que:

- f es infinitas veces derivable en $[0, 1]$.
- $f'(x) = e^x + 1 > 0$ para todo $x \in [0, 1]$.
- $f''(x) = e^x > 0$ para todo $x \in [0, 1]$.
- $f(0) = -1 < 0$, $f(1) = e - 1 > 0$.

Por el Teorema de convergencia de Newton-Raphson, si se toma $x_1 = 1$, la sucesión dada por dicho método converge al único cero de f en $[0, 1]$.

n	x_n	$f(x_n) = e^{x_n} + x_n - 2$	$f'(x_n) = e^{x_n} + 1$	x_{n+1}
1	1	1.718281		0.5378828
2	0.5378828	0.250260	2.712377	0.4456167
3	0.4456167	0.007069	2.561452	0.4428567
4	0.4428567	0.000005	2.557149	0.4428544

Por lo tanto, con una aproximación de 5 cifras decimales exactas, $c \approx 0{,}44285440100\ldots$.

Ejemplo 4 Sea $f(x) = \ln(x) - 2x + 4$. Para cada uno de los ceros de f, proporcione un valor inicial tal que la sucesión definida por el método de Newton-Raphson para f y dicho valor inicial converja a dicho cero.

Se verifica que:

- f es infinitas veces derivable en $(0, +\infty)$.
- $f'(x) = \frac{1}{x} - 2$. $f'(x) > 0$ si $x \in (0, \frac{1}{2})$. $f'(x) < 0$ si $x \in (\frac{1}{2}, +\infty)$.
- $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ para todo $x \in (0, +\infty)$.
- $f(e^{-1}) = 3 - \frac{2}{e} > 0$, $f(e^{-4}) = -2e^{-4} < 0$, $f(1) = 2 > 0$, $f(e) = 5 - 2e < 0$.

Luego, en este caso, por el Teorema de convergencia, f tiene un cero en el intervalo $[e^{-4}, e^{-1}]$ y otro en el intervalo $[1, e]$. Observando la Tablas 1 y 2, se tienen que las dos raíces son $c_1 \approx 0{,}01902600\ldots$ y $c_2 \approx 2{,}44754237\ldots$.

n	x_n	$f(x_n) = \ln(x_n) - 2x_n + 4$	$f'(x_n) = \frac{1}{x_n} - 2$	x_{n+1}
1	e^{-4}	-0.036631	52.598150	0.019012
2	0.019012	-0.000708	50.598358	0.019025
3	0.019025	-0.000051	50.562417	0.019023
4	0.019023	-0.000152	50.567944	0.019026

Cuadro 1: Iteraciones del método de Netwton-Raphson para hallar una de las dos raíces que tiene $f(x) = \ln(x) - 2x + 4$ en el intervalo $[e^{-4}, e^{-1}]$.

n	x_n	$f(x_n) = \ln(x_n) - 2x_n + 4$	$f'(x_n) = \frac{1}{x_n} - 2$	x_{n+1}
1	e	-0.436563	-1.632120	2.450799
2	2.450799	-0.005183	-1.591969	2.447543
3	2.447543	-0.000001	-1.591426	2.447542

Cuadro 2: Iteraciones del método de Netwton-Raphson para hallar una de las dos raíces que tiene $f(x) = \ln(x) - 2x + 4$ en el intervalo $[1, e]$.

3. POLINOMIO DE TAYLOR

El polinomio de Taylor es un polinomio que se utiliza como aproximación de funciones en un entorno local de un punto.

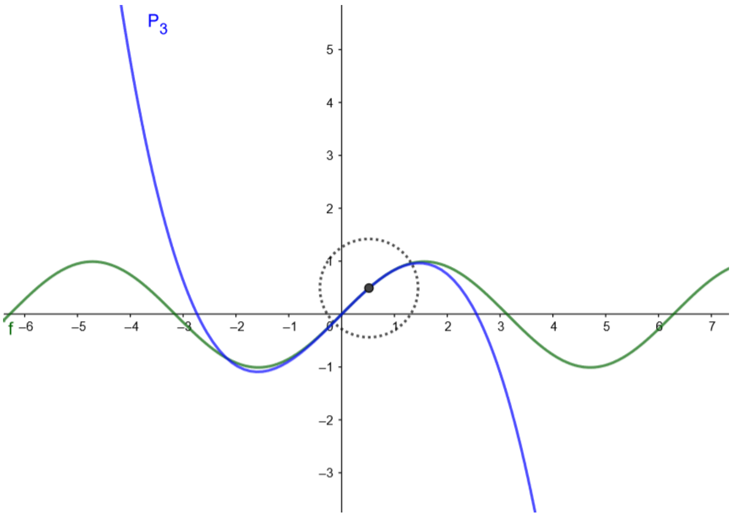
La expresión del polinomio de Taylor de orden n para $f(x)$ centrado en el punto $x = c$ es la siguiente:

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \cdots + \frac{f^{n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

Para poder construir el polinomio de Taylor de una función $f(x)$, es necesario que $f(x)$ sea n veces derivable en el punto $x = c$.

Observando la expresión de $P_n(x)$ se puede deducir que, en el punto $(c, f(c))$, no solo coinciden $f(x)$ y $P_n(x)$, si no que también lo hacen todas sus derivadas sucesivas. Por este motivo, el polinomio de Taylor de una función es muy similar a la propia función en un entorno del punto $x = c$.

Ejemplo 1. Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 que aproxima a $f(x) = sen(x)$ en $x = \frac{\pi}{6}$.



En primer lugar, será necesario calcular las derivadas primera, segunda y tercera de $f(x)$ y obtener su valor en el punto $\frac{\pi}{6}$.

n	$f^{n)}(x)$	$f^{n)}(\frac{\pi}{6})$
0	$f(x) = sen(x)$	$\frac{1}{2}$
1	$f'(x) = cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	$f''(x) = -sen(x)$	$-\frac{1}{2}$
3	$f'''(x) = -cos(x)$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

A partir de los datos anteriores se puede construir el polinomio de Taylor de orden 3 para la función $Sen(x)$ en un entorno de $x = \frac{\pi}{6}$, este sería:

$$P_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}\left(x - \frac{\pi}{6}\right)^3$$

Si se representan gráficamente $P_3(x)$ y $f(x)$ puede apreciarse como el polinomio se asemeja bastante a la función en un entorno del punto de coordenadas $(\frac{\pi}{6}, f(\frac{\pi}{6}))$ pero va diferenciándose de ella conforme la distancia a dicho punto aumenta.

Cuando el polinomio de Taylor se centra en el punto $x = 0$ pasa a denominarse polinomio de MacLaurin.

La aproximación de una función por su polinomio de Taylor pretende agilizar cálculos debido a la simplicidad de las funciones polinómicas. Cuanto mayor sea el grado de P_n mayor similitud habrá entre este polinomio y $f(x)$ en un entorno del punto $x = c$. La siguiente figura muestra los polinomios de MacLaurin de grado 1, 3, 5 y 7 para la función $sen(x)$.

Cuando el polinomio de Taylor se utiliza para aproximar valores de $f(x)$ distintos de c, se estará cometiendo un error de aproximación, debido a que $P_n(x)$ y $f(x)$ no coinciden generalmente en puntos distintos de c. Este error recibe el nombre de resto y se denota $R_n(x)$, verificándose la siguiente equivalencia:

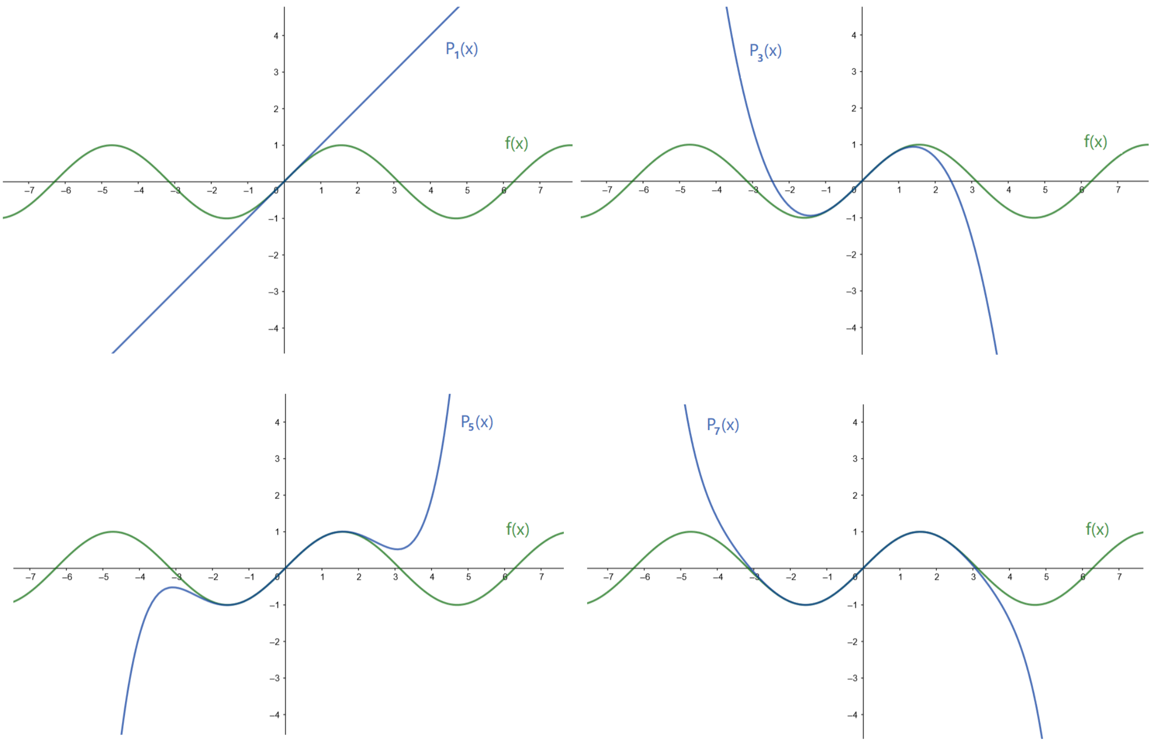
$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

El error asociado a la aproximación se calcula a partir del valor absoluto de $R_n(x)$:

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|$$

y puede estimarse a partir de la expresión que aparece en el siguiente resultado.

Teorema de Taylor: Sea $f(x)$ una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I que contiene al punto $x = c$. Sea P_n el polinomio de Taylor de $f(x)$ de grado n centrado en c. En



estas condiciones, para cada x en I existe un valor z entre x y c verificando

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x),$$

donde $R_n(x)$ es el resto de Lagrange que aproxima el error cometido mediante la expresión:

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Ejemplo 2. Estimar el error cometido al aproximar el valor de $Sen(0{,}1)$ mediante el polinomio de MacLaurin asociado de grado 3.

Comenzamos obteniendo la expresión de $P_3(x)$:

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Si queremos aproximar el valor de $sen(0{,}1)$ mediante el valor de $P_3(0{,}1)$ estaremos cometiendo un error de aproximación que puede estimarse mediante la expresión del resto de Lagrange:

$$R_3(0{,}1) = \frac{f^{iv)}(z)}{4!}(0{,}1)^4 = \frac{sen(z)}{4!}(0{,}1)^4$$

Podemos ahora acotar el error cometido para garantizar cuánto se diferencia como máximo la aproximación $P_3(0{,}1)$ del valor real $Sen(0{,}1)$:

$$|R_3(0{,}1)| = \left|\frac{sen(z)}{4!}(0{,}1)^4\right| < \frac{|sen(z)|}{4!}(0{,}1)^4 < \frac{(0{,}1)^4}{4!}$$

Ejemplo 3. ¿Qué grado debe tener $P_n(x)$ para que el error cometido al aproximar el valor de $\ln(1{,}2)$ mediante su polinomio de Taylor centrado en $c = 1$ sea menor que 0.001?

La expresión del error es

$$R_n(x) = \frac{f^{n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

y buscamos el menor valor de n para el que $|R_n(x)| < 0{,}001$.

Debemos calcular por tanto la derivada $(n+1)$-ésima de $f(x) = \ln x$.

n	$f^{n)}(x)$	$f^{n)}(1)$
0	$f(x) = \ln x$	0
1	$f'(x) = \frac{1}{x}$	1
2	$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$	-1
3	$f'''(x) = \frac{2!}{x^3}$	2
4	$f^{iv)}(x) = -\frac{3!}{x^4}$	$-3!$

Generalizando este proceso, se puede deducir que

$$f^{n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\frac{n!}{x^{n+1}}$$

Y por tanto,

$$|R_n(1{,}2)| = \left|\frac{f^{n+1)}(z)}{(n+1)!}(1{,}2-1)^{n+1}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}n!}{z^{(n+1)}}\right|\frac{(0{,}2)^{n+1}}{(n+1)!} = \left|\frac{1}{z^{(n+1)}}\right|\frac{(0{,}2)^{n+1}}{(n+1)}$$

con z entre 1 y 1.2. Para estos valores de z podemos acotar

$$\left|\frac{1}{z^{(n+1)}}\right| < 1$$

y así obtenemos

$$|R_n(1{,}2)| < \frac{(0{,}2)^{n+1}}{(n+1)}$$

Si deseamos encontrar el menor valor de n verificando $|R_n(1{,}2)| < 0{,}001$ basta comprobar para cada n si se cumple la desigualdad

$$\frac{(0{,}2)^{n+1}}{(n+1)} < 0{,}001$$

De este modo,

n	$\frac{(0{,}2)^{n+1}}{(n+1)}$
0	0,2
1	0,02
2	0,00267
3	0,0004

Pudiendo concluir entonces que para $n \geq 3$ el error cometido al estimar el valor de $\ln(1{,}2)$ mediante el polinomio de Taylor $P_3(x)$ centrado en $c = 1$ es menor que 0.001.