APELLIDOS: NOMBRE:
GRADO: GRUPO:

PROBLEMA 1 [**3 puntos**] Determinar de forma razonada y justificada si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. El conjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 3x + 2y - 4z = 1\}$ es un espacio vectorial.
2. El conjunto de $\mathbb{R}^3$ definido por $S = \{(3\alpha, 2\beta + \alpha + 1, \beta) | \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$ es un espacio vectorial.
3. Si A es una matriz cuadrada de tamaño n (con n filas y n columnas) y el espacio generado por las columnas de A tiene dimensión menor que n, entonces A no es invertible.
4. Si $B = \{u_1, u_2\}$ es una base del espacio nulo de una matriz A, entonces $B' = \{u_1 + u_2, u_1 - u_2\}$ es también una base del espacio nulo de A.
5. Sea A una matriz de orden 7×12, si el espacio nulo de A tiene dimensión 2, entonces el complemento ortogonal de $N(A)$ tiene dimension 10.

PROBLEMA 2 Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 1+a \\ 1 & a \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} a \\ a \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, con $a \in \mathbb{R}$.

1. [**1 punto**] ¿Para qué valores de a el sistema $Ax = b$ es incompatible, siendo $x \in \mathbb{R}^2$?
2. [**3 puntos**] Para $a = 0$:
   a) Resolver el sistema anterior en el sentido de los mínimos cuadrados.
   b) Hallar una base de $R(A)$, su dimensión y unas ecuaciones implícitas.
   c) Hallar la proyección ortogonal de b sobre $R(A)$.
   d) Hallar una base y unas ecuaciones implícitas de $N(A^\top)$.
   e) Hallar la proyección ortogonal de b sobre $N(A^\top)$.
3. [**1 punto**] Para $a = -1$, sea $v = (-7, 13)$. ¿Pertenece v a $N(A)$? ¿Y a $N(A)^\perp$?

PROBLEMA 3 Sean V un subespacio vectorial, y $B = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ y $B' = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ dos bases de V, relacionadas de la siguiente forma:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} v_1 & = & 2u_1 + u_2 - u_3 \\ v_2 & = & 2u_1 + u_3 + 2u_4 \\ v_3 & = & u_1 + u_2 - u_3 \\ v_4 & = & -u_1 + 2u_3 + 3u_4 \end{array} \right.$$

1. [**0.75 puntos**] Hallar la matriz de cambio de base de B' a B.
2. [**0.5 puntos**] Dado $a = (1, 2, 0, 1)_B$ expresado en la base B, obtener sus coordenadas respecto de B'.
3. [**0.75 puntos**] Dado $b = (0, 1, 1, -1)_{B'}$ expresado en la base B', obtener sus coordenadas respecto de B.

▶ **Todos los resultados deberán presentarse simplificados.**
▶ **Todas las respuestas deberán estar debidamente razonadas y justificadas.**
▶ **En la parte superior de todas las hojas deberán aparecer los apellidos y el nombre.**

APELLIDOS: NOMBRE:

GRADO: GRUPO:

PROBLEMA 1 [**3 puntos**] Determinar de forma razonada y justificada si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Las matrices no diagonalizables no tienen autovectores asociados.
2. Existen matrices diagonalizables que no son cuadradas.
3. Sean z y w dos números complejos. Entonces $\mathrm{Re}(zw) = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(w) - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(w)$.
4. Dada $y = x^2 \cos^2(xy)$, se cumple que $y' = 2x\cos^2(xy) - 2x^2 \operatorname{sen}^2(xy)(y + xy')$.
5. Si una función derivable $f = f(x)$ tiene un máximo relativo en $x = c$, entonces $-f(x)$ tendrá un mínimo relativo en dicho punto.

PROBLEMA 2

1. [**1.25 puntos**] Sea A una matriz simétrica cuyos autovalores son 1 y -1. Determinar los autovectores asociados a los autovalores de A y calcular A^{10}, sabiendo que $N(A-I) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0\}$.
2. [**1 punto**] Sea $B = \begin{pmatrix} a & -a \\ b & -b \end{pmatrix}$. Estudiar la diagonalizabilidad de la matriz B en función de los valores $a, b \in \mathbb{R}$.

PROBLEMA 3 [**2 puntos**]

1. Sea $w = -3 - \sqrt{3}i$. Calcular la parte real y la parte imaginaria del número complejo
$$w_1 = \frac{2w}{\sqrt{3}_{-\pi/3}} + (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)^5 - 4i^{19}.$$
2. Sea el número complejo $z = -1 + i\sqrt{3}$. Expresar en forma exponencial y trigonométrica todos los números complejos w tales que
$$(wz)^3 = 16e^{-i\pi/4}.$$

PROBLEMA 4

1. [**1.5 puntos**] Dada la ecuación $1 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + x$:
   a) Probar que tiene una única solución en el intervalo $[0,1]$, y que tomando como punto inicial $x = 1$, se puede asegurar la convergencia del Método de Newton en dicho intervalo.
   b) Realizar una iteración del Método de Newton partiendo del punto $x = 0$. Empleando el apartado anterior, justificar la convergencia desde $x = 0$. ¿Por qué esto no entra en contradicción con el Teorema de Convergencia?
2. [**1.25 puntos**] Dada la función $f(x) = \ln[(1+x)^3]$, obtener una cota del error que se comete al aproximar $\ln(8)$ con el Polinomio de MacLaurin de grado 2 de la función.

- **Todos los resultados deberán presentarse simplificados.**
- **Todas las respuestas deberán estar debidamente razonadas y justificadas.**
- **En la parte superior de todas las hojas deberán aparecer los apellidos y el nombre.**