ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
Grado en Ingeniería del Diseño Industrial y Desarrollo del Producto
Doble Grado en Ing. del Diseño Industrial y Desarrollo del Producto e Ing. Mecánica
Grado en Ingeniería Química Industrial

MATEMÁTICAS I **EJERCICIOS DEL TEMA 3**

1.- a) Encontrar dos vectores en $\mathbb{R}^2$ con norma uno cuyo producto escalar con $(3,-1)$ sea cero.

b) Demostrar que existe una infinidad de vectores en $\mathbb{R}^3$ con norma uno cuyo producto escalar con $(1,-3,5)$ es cero.

Solución:

a) $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ y $\left(\frac{-1}{\sqrt{10}}, \frac{-3}{\sqrt{10}}\right)$

2.- Encontrar todos los escalares k tales que $\|kv\| = 5$, siendo $v = (-2,3,6)$.

Solución: $k = 5/7$ y $k = -5/7$.

3.- Encontrar la distancia entre u y v, siendo

$$a)\ u = (-1,-2)\,,\ v = (-2,3) \qquad b)\ u = (1,0,0)\,,\ v = (4,3,8)$$

Solución:

a) $d(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{26}$

b) $d(u,v) = \|u-v\| = \sqrt{82}$

4.- Determinar si el vector $(-1,1,0,2)$ es ortogonal a todos los vectores del subespacio de $\mathbb{R}^4$

$$W = \mathrm{lin}\left\{(0,0,0,0)\,,(1,-5,-1,2)\,,(4,0,9,2)\right\}.$$

Solución: El vector $(-1,1,0,2)$ no es ortogonal a todos los vectores de W.

5.- ¿Para qué valores de k son ortogonales u y v?

$$a)\ u = (2,1,3)\ \text{ y } v = (1,7,k) \qquad b)\ u = (k,k,1)\ \text{ y } v = (k,5,6)$$

Solución: $a)$ $k = -3$, $b)$ $k = -2$ y $k = -3$.

6.- Demostrar que si u y v son vectores ortogonales tales que $\|u\| = \|v\| = 1$ entonces $\|u-v\| = \sqrt{2}$.

Solución:

Como $\|u-v\|^2 = (u-v)\cdot(u-v) = \|u\|^2 - v\cdot u - u\cdot v + \|v\|^2 = 1+0+0+1$, entonces $\|u-v\| = \sqrt{2}$

7.- Determinar una base de $W^\perp$, siendo $W = \mathrm{lin}\{(1,2)\}$.

Solución: $W^\perp = \mathrm{lin}\{(-2,1)\}$

8.- Encontrar unas ecuaciones paramétricas para $W^\perp$, sabiendo que W está determinado por la ecuación $x-2y-3z=0$. Idem si $W = \mathrm{lin}\{(2,-5,4)\}$.

Solución:

a) Si W está determinado por la ecuación $x-2y-3z=0$, entonces resolviendo el sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right)$ obtenemos las soluciones $\left\{\begin{array}{l} x = 2t+3s \\ y = t \\ z = s \end{array}\right.$. Por lo tanto, $W = \mathrm{lin}\{(2,1,0)\,,(3,0,1)\}$.

Ahora, $W^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{c} 2x+y=0 \\ 3x+z=0 \end{array} \right\}$.

Resolviendo este sistema obtenemos $\left\{ \begin{array}{l} x=t \\ y=-2t \\ z=-3t \end{array} \right.$, que son las ecuaciones paramétricas de $W^{\perp}$. También, $W^{\perp} = \operatorname{lin}\{(1,-2,-3)\}$.

Observemos que cada uno de los vectores de la base de W es ortogonal a cada uno de los vectores de la base de $W^{\perp}$, $(2,1,0)\cdot(1,-2,-3) = 2-2 = 0$ y $(3,0,1)\cdot(1,-2,-3) = 3-3 = 0$.

b) Si $W = \operatorname{lin}\{(2,-5,4)\}$, entonces $W^{\perp} = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ 2x-5y+4z=0 \right\}$. Resolviendo el sistema $2x-5y+4z=0$:

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -5 & 4 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5/2 & 2 & 0 \end{array} \right)$, obtenemos $\left\{ \begin{array}{l} x=5t-2s \\ y=2t \\ z=s \end{array} \right.$, que son las ecuaciones paramétricas de $W^{\perp}$ y $W^{\perp} = \operatorname{lin}\{(5,2,0),(-2,0,1)\}$.

Podemos comprobar que $(2,-5,4)\cdot(5,2,0) = 10-10 = 0$ y $(2,-5,4)\cdot(-2,0,1) = -4+4 = 0$.

9.- Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Encontrar bases para el espacio columna de A y para el espacio nulo de A^T.

b) Comprobar que todo vector en el espacio columna de A es ortogonal a todo vector en el espacio nulo de A^T.

<u>Solución</u>:

a) $R(A) = \operatorname{lin}\{(1,3,1),(2,5,1)\,(-1,0,2)\}$. Veamos si los vectores que generan $R(A)$ son linealmente independientes.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Esto nos dice que las dos primeras columnnas de A son linealmente independientes. De aquí que $R(A) = \operatorname{lin}\{(1,3,1),(2,5,1)\}$. Por tanto, los vectores $(1,3,1)$ y $(2,5,1)$ constituyen una base de $R(A)$, ya que además, ninguno de ellos es proporcional al otro.

$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $N(A^T) = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ A^T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\}$. Resolviendo el sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right)$ obtenemos una base de $N(A^T)$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \end{array} \right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x+3y+z=0 \\ y+z=0 \end{array} \right. \to \left\{ \begin{array}{l} x=2t \\ y=-t \\ z=t \end{array} \right. .$$

Luego, $N(A^T) = \operatorname{lin}\{(2,-1,1)\}$, y una base de $N(A^T)$ está formada por el vector $(2,-1,1)$.

b) Comprobamos que $(1,3,1)\cdot(2,-1,1) = 2-3+1 = 0$ y $(2,5,1)\cdot(2,-1,1) = 4-5+1 = 0$. De ello, deducimos que para cualquier $\vec{x} \in R(A)$ y para cualquier $\vec{y} \in N(A^T)$ se verifica que $\vec{x}\cdot\vec{y} = 0$. Luego, $R(A) \perp N(A^T)$.

10.- Encontrar una base para el complemento ortogonal del subespacio generado por los vectores

a) $v_1 = (1,-1,3)\,, v_2 = (5,-4,-4), v_3 = (7,-6,2)$.

b) $v_1 = (2,0,-1)\,, v_2 = (4,0,-2)$.

c) $v_1 = (1,4,5,2)\,, v_2 = (2,1,3,0), v_3 = (-1,3,2,2)$.

Solución:

a) $W^{\perp} = \text{lin}\{(16,19,1)\}$ y una de sus bases es $\{(16,19,1)\}$.

b) Sea $W = \text{lin}\{(2,0,-1)\,,(4,0,-2)\} = \text{lin}\{(2,0,-1)\}$, pues el segundo vector es combinación lineal del primero.

Entonces, los vectores $(x,y,z) \in W^{\perp}$ han de verificar que $2x - z = 0$. Resolvemos este sistema y obtenemos: $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/2 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = s \\ y = t \\ z = 2s \end{cases}$. Luego, $W^{\perp} = \text{lin}\{(1,0,2)\,,(0,1,0)\}$.

Una base de $W^{\perp}$ es $\{(1,0,2)\,,(0,1,0)\}$ ya que, además de ser un sistema generador, los dos vectores son l.i.

c) $W = \text{lin}\{(1,4,5,2)\,,(2,1,3,0),(-1,3,2,2)\}$. En primer lugar, averiguamos si los vectores que forman el sistema generador son l.i.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$. Luego se tiene que

$W = \text{lin}\{(1,4,5,2)\,,(2,1,3,0),(-1,3,2,2)\} = \text{lin}\{(1,4,5,2)\,,(2,1,3,0)\}$.

Entonces, $W^{\perp} = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{c} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{array}\right\}$. Resolviendo el sistema de ecuaciones, cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$, obtenemos una base de $W^{\perp}$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -7 & -4 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 4 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{4}{7} & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{r} x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + \frac{4}{7}x_4 = 0 \end{array}\right. \to \begin{cases} x_1 = -t + 2s \\ x_2 = -t - 4s \\ x_3 = t \\ x_4 = 7s \end{cases}$$. Luego, $W^{\perp} = \text{lin}\{(-1,-1,1,0)\,,(2,-4,0,7)\}$.

Una base de $W^{\perp}$ es $\{(-1,-1,1,0)\,,(2,-4,0,7)\}$ ya que, además de ser un sistema generador, los dos vectores son l.i.

Comprobamos que cada uno de los vectores de la base de $W^{\perp}$ es ortogonal a cada uno de los vectores de la base de W.

$(-1,-1,1,0) \cdot (1,4,5,2) = -1 - 4 + 5 = 0; \quad (-1,-1,1,0) \cdot (2,1,3,0) = -2 - 1 + 3 = 0$

$(2,-4,0,7) \cdot (1,4,5,2) = 2 - 16 + 14 = 0; \quad (2,-4,0,7) \cdot (2,1,3,0) = 4 - 4 = 0$

Nota: Obsérvese que se verifica siempre que: $\dim(W) + \dim(W^{\perp}) = n$.

11.- Comprobar que los vectores $v_1 = (-3/5, 4/5, 0)$, $v_2 = (4/5, 3/5, 0)$, $v_3 = (0,0,1)$ forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. Expresar el vector $u = (1,-1,2)$ y el vector $w = (3,-7,4)$ como combinación lineal de v_1, v_2, v_3.

Solución:

$u = \frac{-7}{5}v_1 + \frac{1}{5}v_2 + 2v_3; \quad w = \frac{-37}{5}v_1 - \frac{9}{5}v_2 + 4v_3$

12.- Usando el proceso de Gram-Schmidt, transformar la base $\{u_1, u_2\}$ en una base ortonormal

a) $u_1 = (1,-3)\,,\ u_2 = (2,2)$ *b)* $u_1 = (1,0)\,,\ u_2 = (3,-5)$

Solución:

a) $\left\{w_1=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{-3}{\sqrt{10}}\right),w_2=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right\}$

b)$\{w_1=(1,0)\,,w_2=(0,-1)\}$

13.- Usando el proceso de Gram-Schmidt, transformar la base $\{u_1,u_2,u_3\}$ en una base ortonormal

a) $u_1=(1,1,1)\,,u_2=(-1,1,0)\,,u_3=(1,2,1)$.

b) $u_1=(1,0,0)\,,u_2=(3,7,2)\,,u_3=(0,4,1)$.

Solución:

a) $\left\{w_1=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),w_2=\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right),w_3=\left(\frac{1}{\sqrt{6}},\frac{1}{\sqrt{6}},-\frac{2}{\sqrt{6}}\right)\right\}$

b) *Paso 1:* $v_1=u_1=(1,0,0)$

Paso 2: $v_2=u_2-\dfrac{u_2\cdot v_1}{v_1\cdot v_1}v_1=(3,7,2)-\dfrac{3}{1}(1,0,0)=(0,7,2)$.

Antes de continuar comprobamos que $v_1\perp v_2$: $(1,0,0)\cdot(0,7,2)=0$.

Paso 3: $v_3=u_3-\dfrac{u_3\cdot v_1}{v_1\cdot v_1}v_1-\dfrac{u_3\cdot v_2}{v_2\cdot v_2}v_2=(0,4,1)-\dfrac{0}{1}(1,0,0)-\dfrac{30}{53}(0,7,2)=\left(0,\dfrac{2}{53},\dfrac{-7}{53}\right)$.

Antes de continuar comprobamos que $v_1\perp v_3$ y que $v_3\perp v_2$:

$(1,0,0)\cdot(0,2/53,-7/53)=0$ y

$(0,7,2)\cdot(0,2/53,-7/53)=14/53-14/53=0$.

Paso 4: Por último, normalizamos la base ortogonal obtenida en los tres pasos anteriores:

$$w_1=\frac{v_1}{\|v_1\|}=(1,0,0)\,,\qquad w_2=\frac{v_2}{\|v_2\|}=\left(0,\frac{7}{\sqrt{53}},\frac{2}{\sqrt{53}}\right),\qquad w_3=\frac{v_3}{\|v_3\|}=\left(0,\frac{2}{\sqrt{53}},\frac{-7}{\sqrt{53}}\right),$$

Una base ortonormal está formada por los vectores $\{w_1,w_2,w_3\}$.

14.- Encontrar la proyección ortogonal de u sobre el subespacio engendrado por el vector a

$$a)\ u=(-1,-2)\,,\ a=(-2,3)\qquad\qquad b)\ u=(1,0,0)\,,\ a=(4,3,8)$$

Solución: Si $W=lin\{a\}$, entonces

a) $\text{proy}_W(u)=\left(\frac{8}{13},\frac{-12}{13}\right)$

b) $\text{proy}_W(u)=\left(\frac{16}{89},\frac{12}{89},\frac{32}{89}\right)$

15.- Sea $W=\text{lin}\left\{\left(\frac{4}{5},0,-\frac{3}{5}\right),(0,1,0)\right\}$. Expresar $w=(1,2,3)$ en la forma $w=w_1+w_2$, donde $w_1\in W$ y $w_2\in W^{\perp}$.

Solución:

Nos están pidiendo que calculemos $w_1=\text{proy}_W(w)$ y $w_2=\text{proy}_{W^{\perp}}(w)$.

Comprobamos que la base del subespacio W es ortonormal $\left(\frac{4}{5},0,-\frac{3}{5}\right)\cdot(0,1,0)=0$ y $\left\|\left(\frac{4}{5},0,-\frac{3}{5}\right)\right\|=1$ y $\|(0,1,0)\|=1$

En este caso, en el que la base de W es ortonormal, tenemos

$w_1=(w.u_1)\,u_1+(w.u_2)\,u_2=(-1)\left(\dfrac{4}{5},0,-\dfrac{3}{5}\right)+(2)\,(0,1,0)=\left(\dfrac{-4}{5},2,\dfrac{3}{5}\right)$ y

$w_2=w-w_1=(1,2,3)-\left(\dfrac{-4}{5},2,\dfrac{3}{5}\right)=\left(\dfrac{9}{5},0,\dfrac{12}{5}\right)$.

Comprobamos que $w_1\cdot w_2=\left(\dfrac{-4}{5},2,\dfrac{3}{5}\right)\cdot\left(\dfrac{9}{5},0,\dfrac{12}{5}\right)=\dfrac{-36}{5}+\dfrac{36}{5}=0$.

16.- Repetir el ejercicio anterior siendo ahora $W = \text{lin}\{(1,1,1), (2,0,1)\}$.

Solución:

En este caso, la base de W no es ortogonal ya que $(1,1,1)\cdot(2,0,1) = 2+0+1 = 3 \neq 0$. Una forma de hacer el ejercicio es obtener una base de W que sea ortogonal, usando para ello el método de Gram-Schmidt.

Paso 1: $v_1 = u_1 = (1,1,1)$.

Paso 2: $v_2 = u_2 - \dfrac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} v_1 = (2,0,1) - \dfrac{3}{3}(1,1,1) = (1,-1,0)$.

Comprobamos que $v_1 \cdot v_2 = 0$. Luego, son ortogonales.

Ahora, $w_1 = \dfrac{(w\cdot v_1)}{(v_1\cdot v_1)} v_1 + \dfrac{(w\cdot v_2)}{(v_2\cdot v_2)} v_2 = \dfrac{6}{3}(1,1,1) + \dfrac{-1}{2}(1,-1,0) = \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}, 2\right)$,

y $w_2 = w - w_1 = (1,2,3) - \left(\dfrac{3}{2}, \dfrac{5}{2}, 2\right) = \left(\dfrac{-1}{2}, \dfrac{-1}{2}, 1\right)$.

Comprobamos que $w_1 \cdot w_2 = \dfrac{-3}{4} + \dfrac{-5}{4} + 2 = 0$.

17.- Repetir el ejercicio anterior siendo ahora $W = \text{lin}\{(1,1,1)\}$.

Solución: $w_1 = (2,2,2)$, $w_2 = (-1,0,1)$.

18.- Encontrar la solución por mínimos cuadrados del sistema lineal $Ax = b$ y hallar la proyección ortogonal de b sobre el espacio columna de A.

$$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} \qquad b)\ A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$c) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $\text{proy}_{R(A)}(b) = \begin{pmatrix} 15/2 \\ 3/2 \\ 6 \end{pmatrix}$.

b) $\text{proy}_{R(A)}(b) = \begin{pmatrix} 46/21 \\ -5/21 \\ 13/21 \end{pmatrix}$.

c) El sistema normal asociado $A^T Ax = A^T b$ es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 & -6 \\ 4 & 3 & -3 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Ahora, resolvemos este sistema por el método de Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & -6 & 18 \\ 4 & 3 & -3 & 12 \\ -6 & -3 & 6 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4/7 & -6/7 & 18/7 \\ 4 & 3 & -3 & 12 \\ -6 & -3 & 6 & -9 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4/7 & -6/7 & 18/7 \\ 0 & 5/7 & 3/7 & 12/7 \\ 0 & 3/7 & 6/7 & 45/7 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4/7 & -6/7 & 18/7 \\ 0 & 1 & 3/5 & 12/5 \\ 0 & 1 & 2 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4/7 & -6/7 & 18/7 \\ 0 & 1 & 3/5 & 12/5 \\ 0 & 0 & 7/5 & 63/5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4/7 & -6/7 & 18/7 \\ 0 & 1 & 3/5 & 12/5 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{rl} x+(4/7)y-(6/7)z & = 18/7 \\ y+(3/5)z & = 12/5 \\ z & = 9 \end{array}\right. \text{. La pseudosolución obtenida es: } \left\{\begin{array}{r} x=12 \\ y=-3 \\ z=9 \end{array}\right.$$

Una vez obtenida la pseudosolución, la proyección ortogonal de b sobre el espacio columna $R(A)$ es

$$\text{proy}_{R(A)}(b) = 12\begin{pmatrix}1\\2\\1\\1\end{pmatrix} + (-3)\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} + 9\begin{pmatrix}-1\\-2\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\3\\9\\0\end{pmatrix}$$

19.- Determinar la proyección ortogonal de u sobre el subespacio $W = \text{lin}\{v_1, v_2\}$

a) $u = (2,1,3), v_1 = (-1,2,1), v_2 = (2,2,4)$

b) $u = (0,1,-1), v_1 = (-1,2,1), v_2 = (-2,4,2)$

Solución:

a) Vamos a hacer este ejercicio por dos métodos. Llamamos $W = \text{lin}\{(-1,2,1),(2,2,4)\} = R(A)$, donde $A = \begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$.

Primer método:

Buscamos la pseudosolución del sistema $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = u$. Para ello, el sistema normal asociado $A^TAx = A^Tu \Rightarrow \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 2\\ 2 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & 2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}6 & 6\\ 6 & 24\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\18\end{pmatrix}$$

Resolvemos este último sistema por el método de Gauss $\left(\begin{array}{cc|c} 6 & 6 & 3 \\ 6 & 24 & 18 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 18 & 15 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 5/6 \end{array}\right)$. Luego, la pseudosolución es $\left\{\begin{array}{l} x=-2/6 \\ y=5/6 \end{array}\right.$. Por último, la proyección de u sobre el subespacio W es $\text{proy}_W(u) = \frac{-2}{6}(-1,2,1) + \frac{5}{6}(2,2,4) = (2,1,3)$.

Segundo método:

Con el método de Gram-Schmidt, determinamos una base ortogonal para W.

Paso 1: $u_1 = v_1 = (-1,2,1)$.

Paso 2: $u_2 = v_2 - \frac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1}u_1 = (2,2,4) - \frac{6}{6}(-1,2,1) = (3,0,3)$.

Ahora, $\text{proy}_W(u) = \frac{(u\cdot u_1)}{(u_1\cdot u_1)}u_1 + \frac{(u\cdot u_2)}{(u_2\cdot u_2)}u_2 = \frac{3}{6}(-1,2,1) + \frac{15}{18}(3,0,3) = \frac{1}{6}(12,6,18) = (2,1,3)$.

b) $\text{proy}_W(u) = \left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\right)$

20.- Hallar la proyección ortogonal del vector $u = (5,6,7,2)$ sobre el espacio solución del sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=0 \\ 2x_2+x_3+x_4=0 \end{array}\right.$$

Solución: $\text{proy}_W(u) = (0,-1,1,1)$

21.- Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $5x-3y+z=0$.

a) Encontrar una base para W.

b) Encontrar la distancia entre el punto $P(1,-2,4)$ y el subespacio W.

Solución:

a) Para encontrar una base de W resolvemos el sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 1 & 0\end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -3 & 1 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \dfrac{-3}{5} & \dfrac{1}{5} & 0\end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x=3t-s \\ y=5t \\ z=5s \end{cases}, \text{ luego } W=\operatorname{lin}\{(3,5,0),(-1,0,5)\}$$

b) Nos están pidiendo que calculemos $\|\operatorname{proy}_{W^\perp}(v)\|$, siendo $v=(1,-2,4)$.

Obtenemos, primero, una base de $W^\perp$, $W^\perp=\operatorname{lin}\{(5,-3,1)\}$. Ahora, calculamos $\operatorname{proy}_{W^\perp}(v) = \dfrac{v\cdot u}{u\cdot u}u = \dfrac{15}{35}(5,-3,1) = \dfrac{3}{7}(5,-3,1)$

$\|\operatorname{proy}_{W^\perp}(v)\| = \dfrac{3}{7}\sqrt{25+9+1} = \sqrt{\dfrac{45}{7}}.$

22.- Deteminar cuáles de las siguientes matrices son ortogonales. Para las que sí lo sean, encontrar su inversa.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt2} & \frac{-1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}, \quad C=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3} \\ \frac{1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt2} & \frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{1}{\sqrt6} & \frac{1}{\sqrt6} \\ \frac{1}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}$$

Solución: Son ortogonales las matrices A y C y, por tanto, $A^{-1}=A^T$ y $C^{-1}=C^T$

23.- Determinar a,b,c tales que la matriz A sea ortogonal. ¿Son únicos los valores de a,b,c?

$$A=\begin{pmatrix} a & 1\sqrt2 & -1\sqrt2 \\ b & 1\sqrt6 & 1\sqrt6 \\ c & 1\sqrt3 & 1\sqrt3\end{pmatrix}.$$

Solución:

A es ortogonal si y sólo si $AA^T=A^TA=I$, o lo que es lo mismo, si y sólo si sus columnas son vectores ortonormales.

Las columnas de A serán ortonormales si se verifica: $\begin{cases} a/\sqrt2+b/\sqrt6+c/\sqrt3=0 \\ -a/\sqrt2+b/\sqrt6+c/\sqrt3=0 \\ a^2+b^2+c^2=1\end{cases}$. Observamos que este sistema no es un sistema de ecuaciones lineales. No tiene que tener sólo una solución, infinitas soluciones o ninguna. Pueden presentarse otras situaciones.

Una forma de resolverlo podría ser la siguiente. Al ser lineales las dos primeras ecuaciones, utilizamos los métodos que hemos aprendido

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1/\sqrt2 & 1/\sqrt6 & 1/\sqrt3 & 0 \\ -1/\sqrt2 & 1/\sqrt6 & 1/\sqrt3 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt2/\sqrt6 & \sqrt2/\sqrt3 & 0 \\ -1 & \sqrt2/\sqrt6 & \sqrt2/\sqrt3 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt2/\sqrt6 & \sqrt2/\sqrt3 & 0 \\ 0 & 2\sqrt2/\sqrt6 & 2\sqrt2/\sqrt3 & 0\end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \sqrt2/\sqrt6 & \sqrt2/\sqrt3 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt2 & 0\end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-\sqrt2 t \\ c=t\end{cases}$$

Como, además, se tiene que cumplir la tercera ecuación $a^2+b^2+c^2=1$, entonces, de ahí, obtenemos que $0+2t^2+t^2=1$, con lo que $t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Luego, los valores de a, b y c son: $\begin{cases} a=0 \\ b=-\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ c=1/\sqrt{3} \end{cases}$ o $\begin{cases} a=0 \\ b=\sqrt{2}/\sqrt{3} \\ c=-1/\sqrt{3} \end{cases}$

Comprobamos que los valores obtenidos resuelven el problema:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ \sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

24.- Dados los puntos $(-1,0),(0,3),(1,2),(2,1)$. Ajustar a una recta por el método de los mínimos cuadrados. Repetir la operación ajustando a una parábola.

Solución:

a) $y=\frac{1}{5}x+\frac{7}{5}$ b) $y=-x^2+\frac{6}{5}x+\frac{12}{5}$

25.- Unos grandes almacenes obtienen los siguientes datos relacionando el número de ventas con el de ventas anuales:

Número de vendedores	5	6	7	8	9	10
Ventas anuales (en millones de euros)	2.3	3.2	4.1	5.0	6.1	7.2

Emplear el método de los mínimos cuadrados para ajustar los datos a una recta. Utiliza esta recta para estimar el número de ventas con 14 vendedores.

Solución:

$y=0.97429x-2.6571$. Con 14 vendedores se estima un volumen ventas de 10.983 millones de euros.

26.- Encontrar la ecuación cúbica $y=ax^3+bx^2+cx+d$ que mejor se ajusta a la nube de puntos $(-2,-8),(-1,-1),(0,3),(1,1),(2,-1),(3,0)$.

Solución:

$y=\frac{4}{9}x^3-\frac{137}{84}x^2+\frac{5}{36}x+\frac{44}{21}$.