Departamento de Matemática Aplicada II
Matemáticas I

Tema 1: Matrices

1. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$
Halla todas las matrices cuadradas $B \in \mathcal{M}_2$ tales que $A \cdot B = \mathcal{O}$.

2. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
Halla todas las matrices cuadradas $B \in \mathcal{M}_2$ tales que $A \cdot B = \mathcal{O}$.

3. Halla todas las matrices $A \in \mathcal{M}_2$ cuyo cuadrado sea la matriz nula.

4. Dada la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix},$$
calcula todas las matrices X que verifiquen la condición $AX = XA$.

5. Calcula cuáles son las matrices triangulares inferiores de orden 2 que satisfacen $A^4 = I_2$.

6. Calcula el rango de las siguientes matrices en función del parámetro sin utilizar determinantes:
$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1+a \\ a & a & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{B}= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-2a \\ a & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \end{pmatrix}$$

7. Calcula la inversa de cada una de las siguientes matrices por el método de Gauss-Jordan:
$$\text{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{G}= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\text{B}= \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{E} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{H} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\text{C} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{F} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Indica los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que la siguiente matriz es invertible, sin utilizar determinantes:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 2 & 1 & \alpha \\ \alpha & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Calcula la inversa para $\alpha = 1$.

9. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   a) Calcula α, β, tales que $A^2 + \alpha A + \beta I = \mathcal{O}$.

   b) Utilizando el apartado anterior, calcula A^{-1}.

10. Calcula la matriz X que verifica:

$$A \cdot X + B = C$$

siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

11. Calcula la matriz X que verifica:

$$A^2 \cdot X - B = C$$

siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

12. Calcula la matriz X que verifica:

$$A \cdot X \cdot B = 4C$$

siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

13. Demuestra que la siguiente igualdad es cierta:

$$(A^{-1}B)^\top (A + B^{-1})^\top = B^\top (I + (AB)^{-1})^\top$$