Boletín n^o 3: Ortogonalidad y mínimos cuadrados

1. Determinar si el vector $(-1,1,0,2)$ es ortogonal al subespacio de $\mathbb{R}^4$,

$$W = L\{(0,0,0,0),(1,-5,-1,2),(4,0,9,2)\}.$$

2. ¿Para qué valores de k son ortogonales los vectores u y v?
   a) $u=(2,1,3)$ y $v=(1,7,k)$ b) $u=(k,k,1)$ y $v=(k,5,6)$.

3. Determinar una base de $W^{\perp}$, siendo $W = L\{(1,2)\}$.

4. Encontrar unas ecuaciones paramétricas para $W^{\perp}$, sabiendo que W está determinado por la ecuación $x-2y-3z=0$. Idem si $W = L\{(2,-5,4)\}$.

5. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

   (a) Encontrar bases para el espacio columna de A y para el espacio nulo de A^T.
   (b) Comprobar que todo vector en el espacio columna de A es ortogonal a todo vector en el espacio nulo de A^T.

6. Encontrar una base para el complemento ortogonal del subespacio generado por los vectores:

   (a) $v_1=(1,-1,3), v_2=(5,-4,-4), v_3=(7,-6,2)$.
   (b) $v_1=(2,0,-1), v_2=(4,0,-2)$.
   (c) $v_1=(1,4,5,2), v_2=(2,1,3,0), v_3=(-1,3,2,2)$.

7. Demostrar que si u y v son vectores ortogonales tales que $\|u\|=\|v\|=1$ entonces $\|u-v\|=\sqrt{2}$.

8. Comprobar que los vectores $v_1 = \left(-\frac{3}{5},\frac{4}{5},0\right), v_2=\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},0\right), v_3=(0,0,1)$ forman una base ortonormal para $\mathbb{R}^3$. Expresar cada uno de los siguientes vectores como una combinación lineal de v_1,v_2,v_3.
   a) $(1,-1,2)$ b) $(3,-7,4)$.

9. Transformar la base $\{u_1,u_2\}$ en una base ortonormal.
   a) $u_1=(1,-3), u_2=(2,2)$ b) $u_1=(1,0), u_2=(3,-5)$.

10. Sea $S=L\{u_1,u_2\}$, un subespacio de $\mathbb{R}^3$, determinar una base ortonormal S.
    a) $u_1=(1,1,1), u_2=(-1,1,0)$.
    b) $u_1=(1,0,0), u_2=(3,7,2)$.

11. Encontrar la proyección ortogonal de u sobre el espacio vectorial generado por el vector a
    a) $u=(-1,-2), a=(-2,3)$ b) $u=(1,0,0), a=(4,3,8)$.

12. a) Encontrar todos los escalares k tales que $\|kv\|=5$, siendo $v=(-2,3,6)$.
    b) Encontrar dos vectores en $\mathbb{R}^2$ con norma uno cuyo producto escalar con $(3,-1)$ sea cero.
    c) Demostrar que existe una infinidad de vectores en $\mathbb{R}^3$ con norma uno cuyo producto escalar con $(1,-3,5)$ es cero.

13. Encontrar la distancia entre u y v, siendo

    a) $u = (-1, -2), v = (-2, 3)$; b) $u = (1, 0, 0), v = (4, 3, 8)$.

14. Sea $W = L\left\{\left(\frac{4}{5}, 0, -\frac{3}{5}\right), (0, 1, 0)\right\}$. Expresar el vector $w = (1, 2, 3)$ en la forma $w = w_1 + w_2$, donde $w_1 \in W$ y $w_2 \in W^{\perp}$.

15. Repetir el ejercicio anterior con $W = L\{(1, 1, 1), (2, 0, 1)\}$ y $w = (4, 2, 0)$.

16. Repetir el ejercicio anterior siendo ahora $W = L\{(1, 1, 1)\}$ y $w = (-1, 1, 0)$.

17. Encontrar la solución por mínimos cuadrados del sistema lineal $Ax = b$ y hallar la proyección ortogonal de b sobre el espacio columna de A.

    a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

    c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$.

18. Determinar la proyección ortogonal de u sobre el subespacio $W = L\{v_1, v_2\}$

    (a) $u = (2, 1, 3), v_1 = (-1, 2, 1), v_2 = (2, 2, 4)$

    (b) $u = (0, 1, -1), v_1 = (-1, 2, 1), v_2 = (-2, 4, 2)$.

19. Hallar la proyección ortogonal del vector $u = (5, 6, 7, 2)$ sobre el espacio solución del sistema

$$\left\{ \begin{array}{r} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right.$$

20. Sea W el subespacio de $\mathbb{R}^3$ de ecuación $5x - 3y + z = 0$.

    (a) Encontrar una base para W.

    (b) Encontrar la distancia entre el punto $P(1, -2, 4)$ y el subespacio W.

21. Deteminar cuáles de las siguientes matrices son ortogonales. Para las que lo sean, encontrar su inversa.

$$\text{a)} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{b)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \text{c)} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} \text{d)} \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

22. Determinar a, b, c tales que la matriz A sea ortogonal. ¿son únicos los valores de a, b, c?

$$A = \begin{bmatrix} a & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ b & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ c & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

23. Si medimos cuatro veces el peso de un cuerpo, obtenemos los siguietes resultados $p_1 = 150, p_2 = 153, p_3 = 150, p_4 = 151$. ¿Cúal es el valor que asignaríamos al peso según el método de los mínimos cuadrados?

24. Se ha observado en una granja que la producción diaria de huevos está relacionada con las cantidades de dos comidas fijas x_1 y x_2, por $y = c_1x_1 + c_2x_2$, con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Para determinar la relación se ha realizado un programa de investigación donde se han obtenido los siguientes datos:

y	4	5	6	5	4
x_1	1	0	1	2	1
x_2	0	1	1	1	2

    Encontrar la mejor aproximación utilizando el método de los mínimos cuadrados.

25. Dados los puntos $(-1, 0), (0, 3), (1, 2), (2, 1)$. Ajustar a una recta por el método de los mínimos cuadrados. Repetir la operación ajustando a una parábola.

26. Unos grandes almacenes obtienen los siguientes datos relacionando el número de ventas con el de ventas anuales:

Número de vendedores	5	6	7	8	9	10
Ventas anuales (en millones de euros)	2.3	3.2	4.1	5.0	6.1	7.2

    Emplear el método de los mínimos cuadrados para ajustar los datos a una recta. Utiliza esta recta para estimar el número de ventas con 14 vendedores.

27. Encontrar la ecuación cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ que mejor se ajusta a la nube de puntos $(-2, -8), (-1, -1), (0, 3), (1, 1), (2, -1), (3, 0)$.

28. En un experimento para determinar la capacidad de orientación de una persona, se coloca a un individuo en una habitación especial y después de un cierto tiempo en ella se le pide que encuentre el camino de salida en un laberinto. Los resultados que se obtienen son:

Tiempo en una habitación (horas)	1	2	3	4	5	6
Tiempo en salir del laberinto (minutos)	0.8	2.1	2.6	3	3.1	3.3

    Encontrar la recta que mejor se aproxime a los datos anteriores y estimar el tiempo que tardaría en salir una persona que hubiera permanecido en la habitación 10 horas.

Solución de los ejercicios del boletín n^o 3.

1. v no es ortogonal a W.

2. a) $k=-3$ b) $k=-2$ ó -3.

3. $B_{W^\perp}=\{(-2,1)\}$.

4. a) Unas ecuaciones parámetricas de $W^\perp$ son $\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=-2t \\ z=-3t \end{array}\right.$ con $t\in\mathbb{R}$.

   b) Unas ecuaciones paramétricas de $W^\perp$: $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{5}{2}t-2s \\ y=t \\ z=s \end{array}\right.$ con $t,s\in\mathbb{R}$.

5. a) $B_{R(A)}=\{(1,3,1),(2,5,1)\}$, $B_{N(A^T)}=\{(2,-1,1)\}$.
   b) Sugerencia: verificar que las bases de $R(A)$ y $N(A^T)$ son ortogonales.

6. a) $B_{W^\perp}=\{(16,19,1)\}$.
   b) $B_{W^\perp}\ \{(1,0,2),(0,1,0)\}$.
   c) $B_{W^\perp}=\{(-1,-1,1,0),(2,-4,0,7)\}$.
   Nota: Observese que $\dim(W)+\dim(W^\perp)=n$.

7. $\|u-v\|^2=(u-v)\cdot(u-v)=u\cdot u-v\cdot u-u\cdot v+v\cdot v=\underbrace{\|u\|}_{=1}{}^2-2\underbrace{u\cdot v}_{=0}+\underbrace{\|v\|}_{=1}{}^2=1+1=2,$

   luego $\|u-v\|=\sqrt{2}$.

8. Verificar que $v_1\cdot v_2=v_1\cdot v_3=v_2\cdot v_3=0$ y $\|v_1\|=\|v_2\|=\|v_3\|=1$.
   a) $(1,-1,2)=-\frac{7}{5}v_1+\frac{1}{5}v_2+2v_3$.
   b) $(3,-7,4)=-\frac{37}{5}v_1-\frac{9}{5}v_2+4v_3$.

9. a) $\{w_1,w_2\}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{10}},-\frac{3}{\sqrt{10}}\right),\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{1}{\sqrt{10}}\right)\right\}$.
   b) $\{w_1,w_2\}=\{(1,0),(0,-1)\}$.

10. a) $\{w_1,w_2\}=\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{-1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0\right)\right\}$.
    b) $\{w_1,w_2\}=\left\{(1,0,0),\left(0,\frac{7}{\sqrt{53}},\frac{2}{\sqrt{53}}\right)\right\}$

11. Sea $S = L\{a\}$, a) $\text{proy}_S(u) = \left(\frac{8}{13}, -\frac{12}{13}\right)$.b) $\text{proy}_S(u) = \left(\frac{16}{89}, \frac{12}{89}, \frac{32}{89}\right)$

12. a) $k = \frac{5}{7}$ y $k = -\frac{5}{7}$.
    b) $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ y $-\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.
    c) Todos los vectores $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ortogonales al vector $(1, -3, 5)$ deben pertenecer al plano que pasa por el origen y su ecuación es $x - 3y + 5z = 0$. De estos vectores debemos encontrar aquellos que tienen norma uno. Por tanto, deben pertencer a la esfera de centro el origen y radio uno (cuya ecuación es $x^2 + y^2 + z^2 = 1$). Es decir, los vectores de norma unidad y ortogonales al vector $(1, -3, 5)$ son los que están en la intersección del plano con la esfera y esta intersección tiene infinitos vectores.

13. a) $\text{d}(u, v) = \sqrt{26}$. b) $\text{d}(u, v) = \sqrt{82}$.

14. $w_1 = \left(\frac{-4}{5}, 2, \frac{3}{5}\right)$ y $w_2 = \left(\frac{9}{5}, 0, \frac{12}{5}\right)$.

15. $w_1 = (3, 1, 2)$ y $w_2 = (1, 1, -2)$.

16. $w_1 = (0, 0, 0)$ y $w_2 = (-1, 1, 0)$.

17. a) $x_1 = 3, x_2 = 9/2$, $b_1 = \text{proy}_{R(A)}\, b = (\frac{15}{2}, \frac{3}{2}, 6)$
    b) $x_1 = 3/7, x_2 = -2/3$. $b_1 = \text{proy}_{R(A)}\, b = (\frac{46}{21}, -\frac{5}{21}, \frac{13}{21})$
    c) $x_1 = 12, x_2 = -3, x_3 = 9,$. $b_1 = \text{proy}_{R(A)}\, b = (3, 3, 9, 0)$

18. a) $\text{proy}_W\, u = u$ b)$\text{proy}_W\, u = (-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6})$

19. $\text{proy}_W\, u = (0, 0, 0, 1)$.

20. a) $B = \{(3, 5, 0), (-1, 0, 5)\}$
    b) Nos están pidiendo que calculemos $\|\text{proy}_{W^\perp}(v)\| = \sqrt{\frac{45}{7}}$, siendo $v = (1, -2, 4)$.

21. a) Si, $Q^{-1} = Q^t$. b) No c) Si, $Q^{-1} = Q^t$ d) No es cuadrada.

22. $(a, b, c) = \left(0, -\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ y $(a, b, c) = \left(0, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

23. $p = \dfrac{p_1 + p_2 + p_3 + p_4}{4}$

24. La pseudosolución es $c_1 = 2$, $c_2 = 2$.

25. a) $y = \frac{1}{5}x + \frac{7}{5}$ b) $y = -x^2 + \frac{6}{5}x + \frac{12}{5}$.

26. $y = 0.974\,29x - 2.657\,1$. Con 14 vendedores se estima un volumen ventas de 10.983 millones de euros.

27. $y = \frac{4}{9}x^3 - \frac{137}{84}x^2 + \frac{5}{36}x + \frac{44}{21}$.

28. $y = 0.454\,29x + 0.893\,33$. Si una persona permanece 10 horas en la habitación, el tiempo estimado para salir del laberinto es 5.4362.