Matemáticas I **Primera Convocatoria Oficial - Parte 1** **23 de enero de 2025**

GRADO EN INGENIERÍA QUÍMICA INDUSTRIAL

APELLIDOS, NOMBRE: GRUPO:

PROBLEMA 1 **[1.5 puntos]** Determinar de forma justificada si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones.

a) El conjunto $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|x^2 - y^2 = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$.

b) Teniendo $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $b \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ax = b$ es un sistema compatible, entonces $\text{proy}_{R(A)^\perp} b = 0$.

c) Sean $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$. Si ambas matrices son ortogonalmente diagonalizables entonces $A+B$ también lo es.

PROBLEMA 2 **[4.25 puntos]** Sean la matriz A y el vector b los siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ \alpha & -\beta \\ -\alpha & \beta \\ \alpha^2 & -\alpha^2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \beta \\ -\alpha^2\beta \end{bmatrix}.$$

a) **[1.75 puntos]** Discutir, utilizando el método de Gauss y el teorema de Rouché-Frobenius, la compatibilidad del sistema $Ax = b$ según los valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mediante el teorema del rango, determinar en cada caso la dimensión de $N(A|b)$.

b) **[1 punto]** Para $\alpha = \beta = 1$ determinar unas ecuaciones implícitas de $R(A)$ y una base de $R(A)^\perp$.

c) **[1.5 puntos]** Para $\alpha = 0, \beta = 1$ resolver, en el sentido de los mínimos cuadrados, el sistema $Ax = b$. Usar dicho resultado para obtener $\text{proy}_{R(A)} b$ y determinar el error de la solución.

PROBLEMA 3 **[4.25 puntos]** Considerando la matriz siguiente:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & \alpha \\ 2 & -1 & \beta \\ 0 & 0 & \alpha+1 \end{bmatrix}$$

.

a) **[0.75 puntos]** Probar que el polinomio característico de la matriz es $p_A(\lambda) = (\alpha + 1 - \lambda)(-3 - \lambda)(1 - \lambda)$.

b) **[1.25 puntos]** Discutir, en función de los parámetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, si la matriz A es diagonalizable.

c) **[1.25 puntos]** ¿Existen valores de los parámetros para los cuales la matriz A es ortogonalmente diagonalizable? En tal caso obtener matrices Q y D tal que $Q^t DQ = A$.

d) **[1 punto]** Para $\alpha = \beta = 0$, descomponer el vector $v = (0, 1, 2)$, como suma de un vector de $V_A(2)$ y uno de $(V_A(2))^\perp$.

▶ **Todos los resultados deberán presentarse simplificados y las respuestas deben estar debidamente razonadas.**

El álgebra no es más que geometría escrita y la geometría no es más que álgebra figurada. (Sophie Germain)

Matemáticas I **Primera Convocatoria Oficial - Parte 2** **23 de enero de 2025**

GRADO EN INGENIERÍA QUÍMICA INDUSTRIAL

APELLIDOS, NOMBRE: GRUPO:

PROBLEMA 1

1) **[5.0 ptos]** Calcular y expresar en notación binómica el siguiente número complejo, u:

$$u = \frac{(-1-\sqrt{3}i)\exp(i\frac{3\pi}{2})}{(1_{\frac{\pi}{3}})(2i)}(1_{2\pi})$$

2) **[5.0 ptos]** Utilizando el resultado del apartado anterior, resolver la siguiente ecuación compleja y dar sus soluciones en notación exponencial:

$$z^4 + u = 0$$

PROBLEMA 2

1) **[2.0 ptos]** La ecuación $\operatorname{tg}(xy) = \frac{x}{y}$ define implícitamente a y como función de x. Calcular $\frac{dy}{dx}$.

2) **[4.0 ptos]** Dada la función $f(x) = \exp((1-x)^3)$, obtener su polinomio de MacLaurin de grado 2 y utilizarlo para aproximar el valor de $\exp(8)$.

3) **[4.0 ptos]** Dada las funciones $h(x) = \operatorname{sen}^2(x)$ y $s(x) = \cos(x)$, demostrar que sus gráficas se cortan en un único punto en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

► **Todos los resultados deberán presentarse simplificados.**

► **Todas las respuestas deberán estar debidamente razonadas y justificadas.**

► **En la parte superior de todas las hojas entregadas deberán aparecer la numeración de las mismas, los apellidos y el nombre.**