Tema 5. FUNCIONES DE UNA VARIABLE

DIFERENCIACIÓN Y APLICACIONES

- Funciones de una variable. Límites, continuidad y derivada.
- Derivación implícita
- Crecimiento/decrecimiento y concavidad de una función
- Extremos relativos y absolutos
- Resolución numérica de ecuaciones: método de bisección y Newton
- Polinomio de Taylor

Límites
Continuidad
Derivada

$$f : S \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Función real de variable real

$$S = \text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} : \text{existe } f(x)\}$$

LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Si $f(x)$ se hace arbitrariamente próximo a un único número L cuando x se aproxima a c por ambos lados, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L y escribimos

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

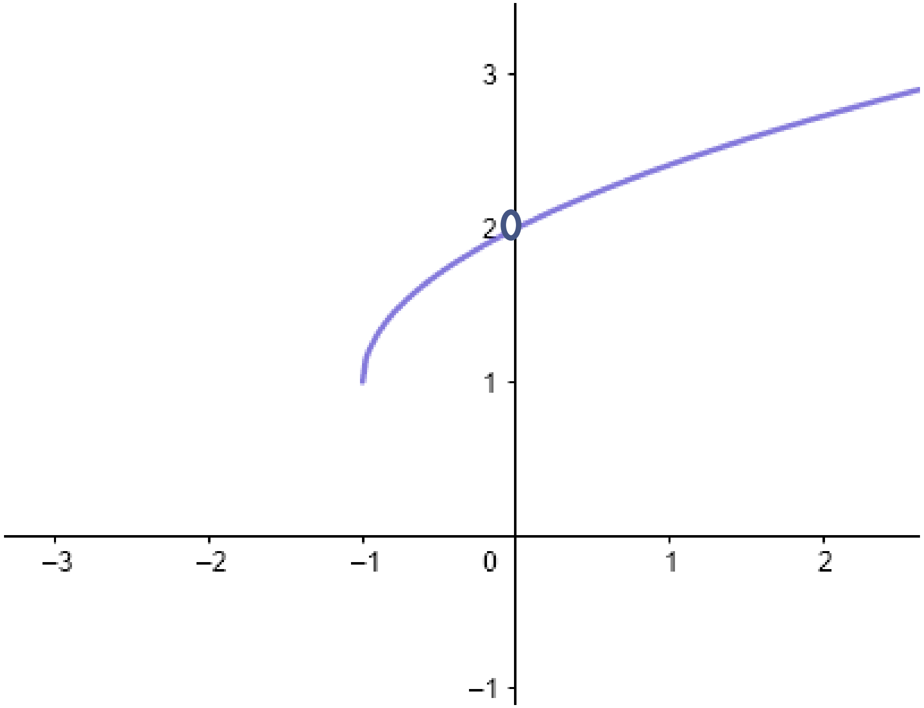
Si f es una función y si c y L son números reales

$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \begin{cases} \lim\limits_{x \to c^-} f(x) = L \\ \lim\limits_{x \to c^+} f(x) = L \end{cases}$$

EJEMPLO

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$$

$$\text{Dom } f(x) = [-1,0) \cup (0,+\infty)$$



$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sqrt{x+1}-1} = 2$$

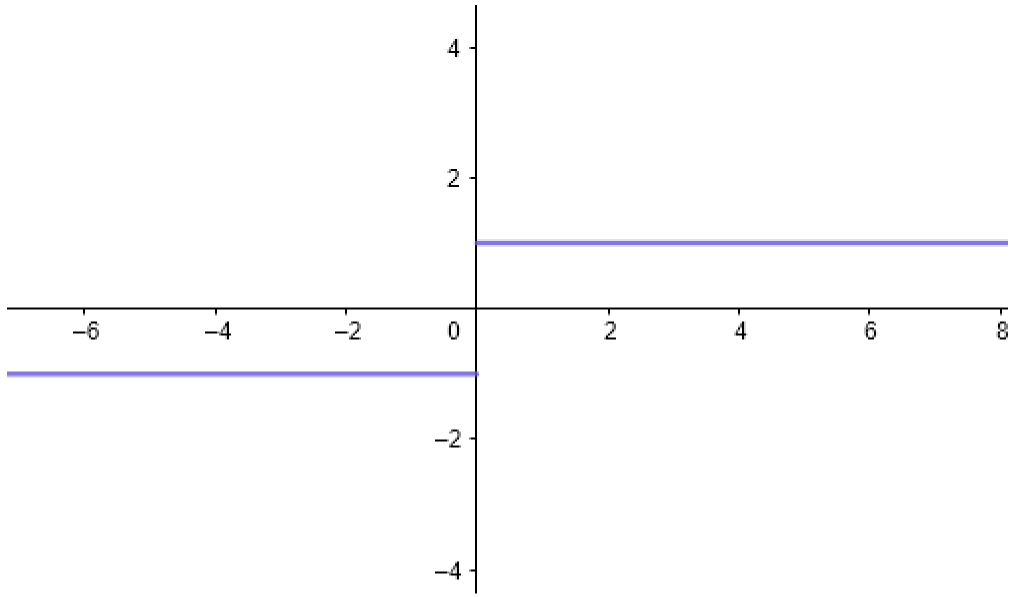
El límite de una función en un punto NO depende del valor de la función en dicho punto

EJEMPLO

$$\lim_{x \to 0} \frac{x}{|x|}$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1$$



No existe el límite

LÍMITES INFINITOS

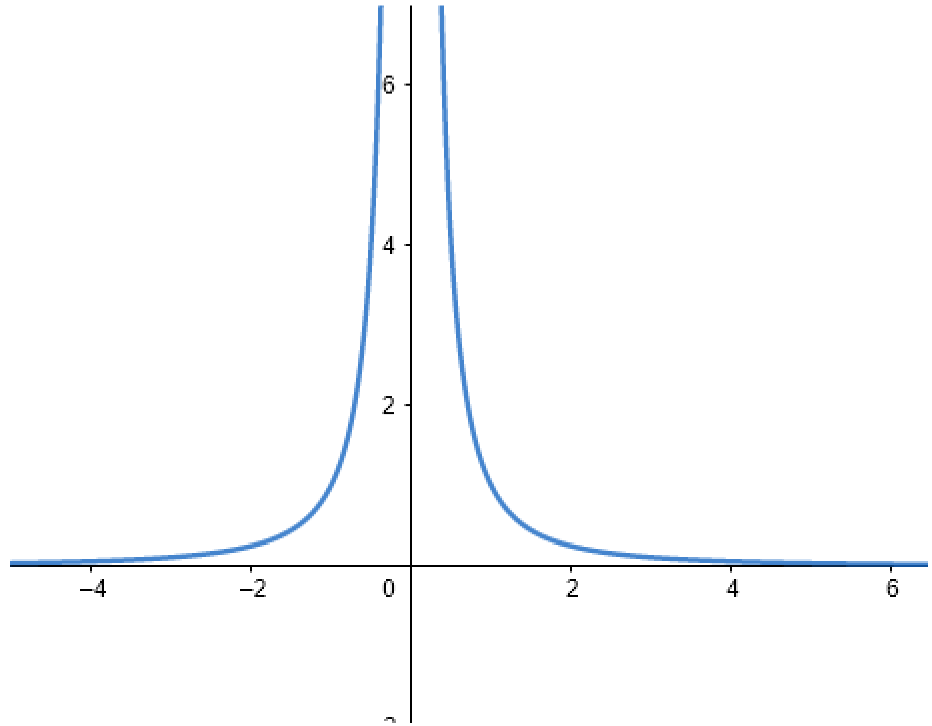
- La afirmación
$$\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$$
significa que $f(x)$ crece sin tope cuando x tiende a c

- La afirmación
$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$
significa que $f(x)$ decrece sin tope cuando x tiende a c

EJEMPLO

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

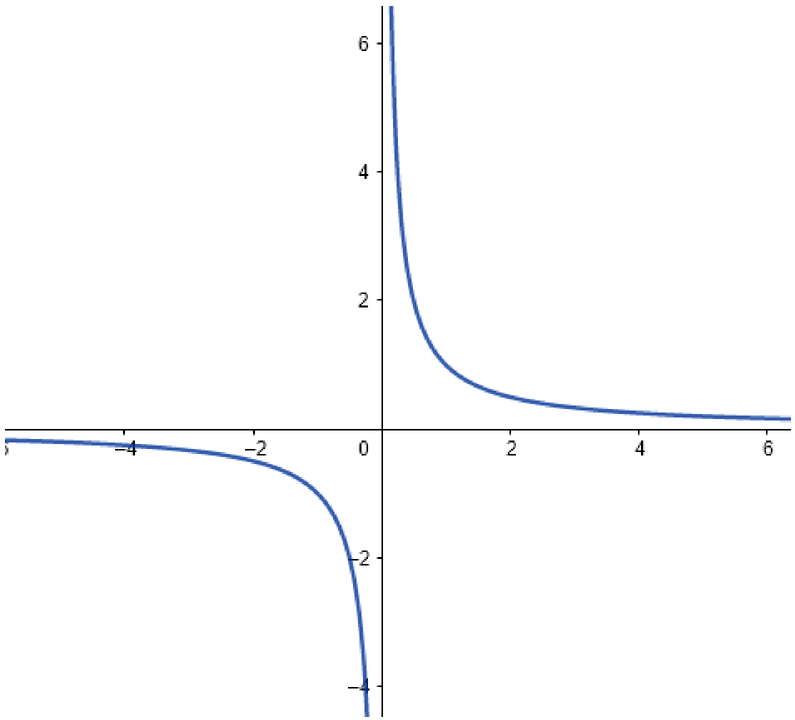
La función crece sin tope cuando x se aproxima a 0

$x = 0$ es una asíntota vertical de la curva

EJEMPLO

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

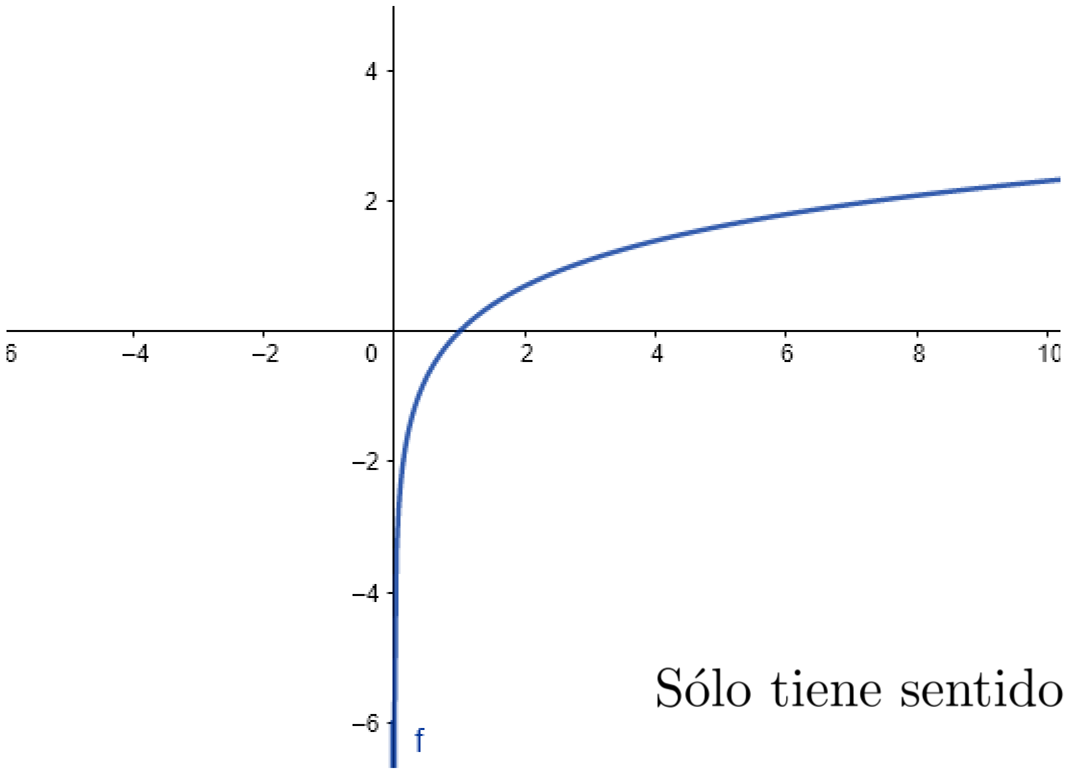
No existe el límite

$x = 0$ es una asíntota vertical de la curva

EJEMPLO

$$\lim_{x \to 0} \ln x$$

$$\text{Dom } f(x) = (0, +\infty)$$



$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

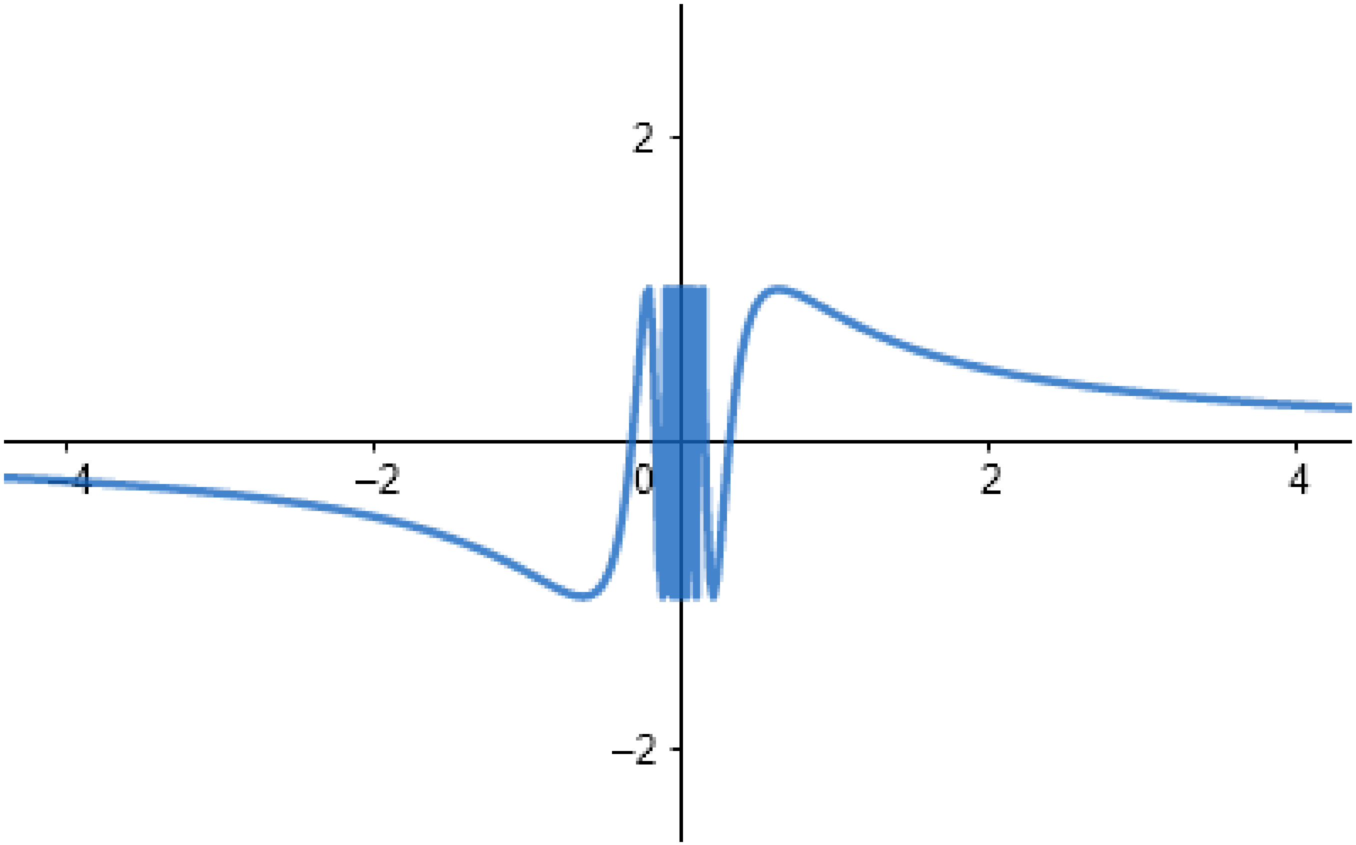
Sólo tiene sentido el límite por la derecha

$x = 0$ es una asíntota vertical de la curva

EJEMPLO

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

No existe el límite



LÍMITES EN EL INFINITO

- La afirmación

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

significa que cuando x decrece sin tope $f(x)$ se aproxima a L

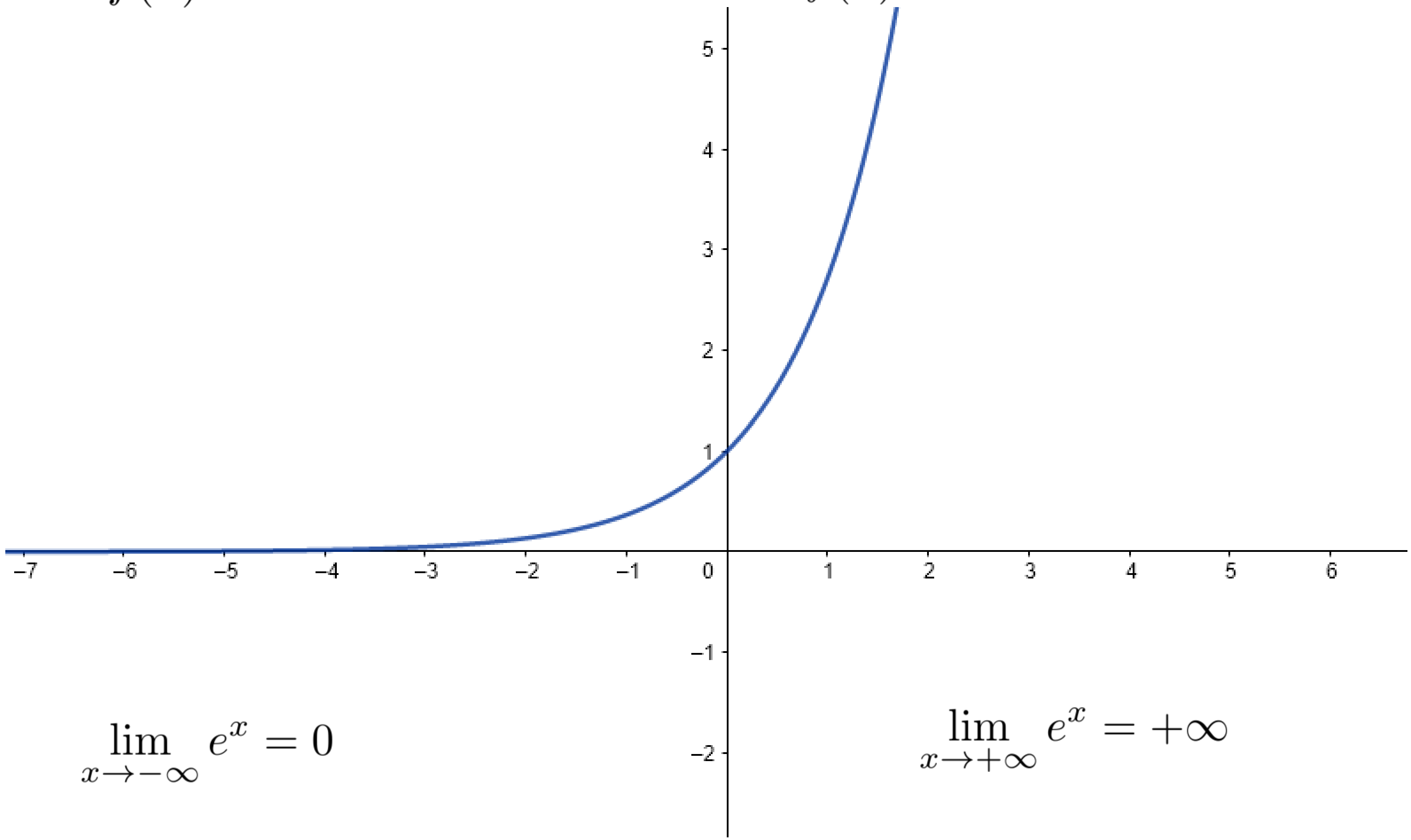
- La afirmación

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$$

significa que cuando x crece sin tope $f(x)$ se aproxima a L

EJEMPLO

$$f(x) = e^x \qquad \mathrm{Dom}\ f(x) = \mathbb{R}$$



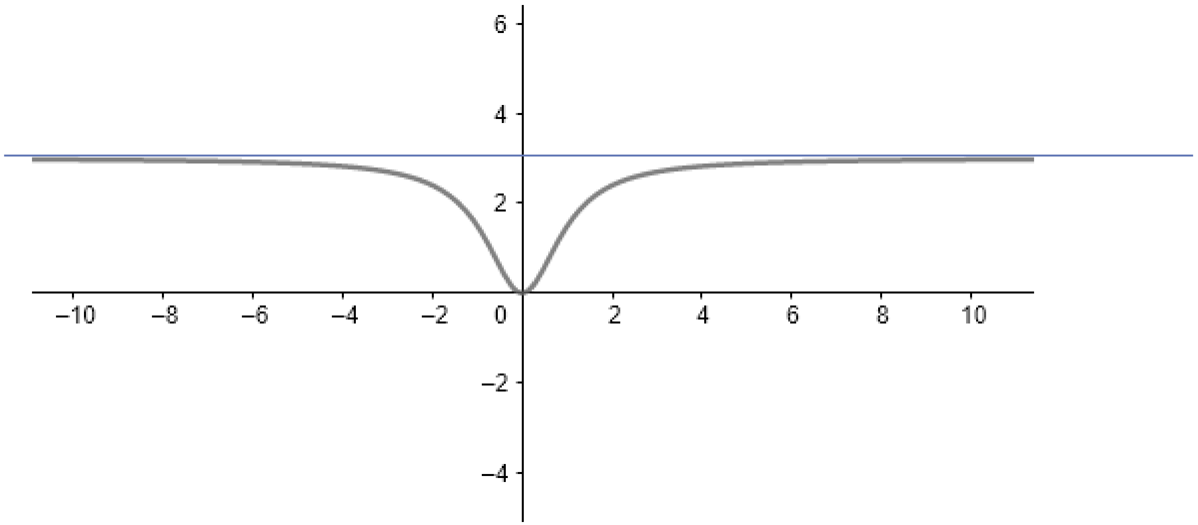
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$y = 0$ es una asíntota horizontal de la curva

EJEMPLO

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2+1}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$



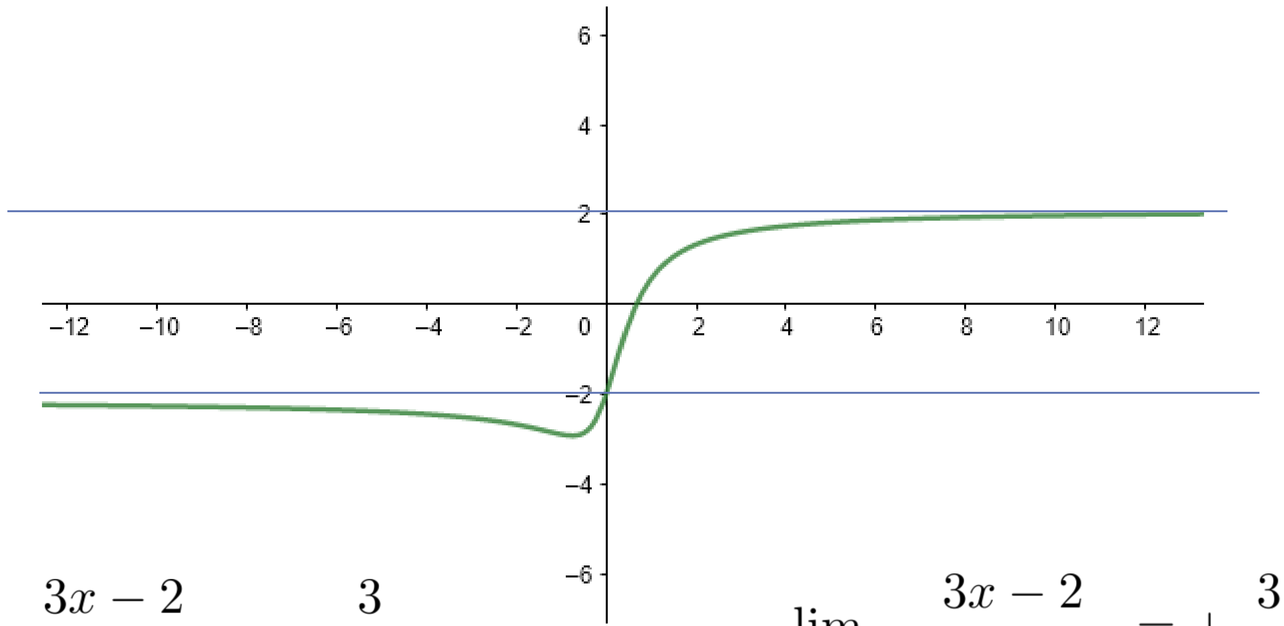
$$\lim_{x \to -\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = 3$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x^2}{x^2+1} = 3$$

$y = 3$ es una asíntota horizontal de la curva

EJEMPLO

$$f(x)=\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}} \qquad \text{Dom } f(x)=\mathbb{R}$$



$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=-\frac{3}{\sqrt{2}} \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-2}{\sqrt{2x^2+1}}=+\frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$y=-\frac{3}{\sqrt{2}},\ y=-\frac{3}{\sqrt{2}} \text{ son asíntotas horizontales de la curva}$$

PROPIEDADES

Si b y c son números reales, n es un número entero y f y g funciones que tienen límite cuando $x \to c$, se verifica:

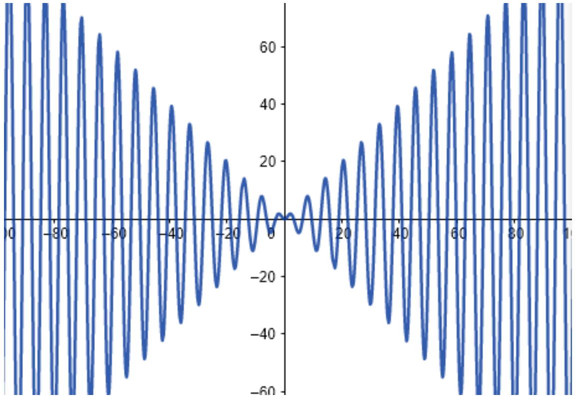
- Múltiplo escalar: $\lim\limits_{x\to c} bf(x) = b\lim\limits_{x\to c} f(x)$
- Suma o diferencia: $\lim\limits_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x)$
- Producto: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \lim\limits_{x\to c} g(x)$
- Cociente: $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to c} f(x)}{\lim\limits_{x\to c} g(x)} \qquad (\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0)$
- Potencia: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to c} f(x)]^n$

CÁLCULO DE LÍMITES

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \cos x$ No existe

- $\lim\limits_{x \to +\infty} x \operatorname{sen} x$ No existe

$f(x) = x\operatorname{sen}\ x$

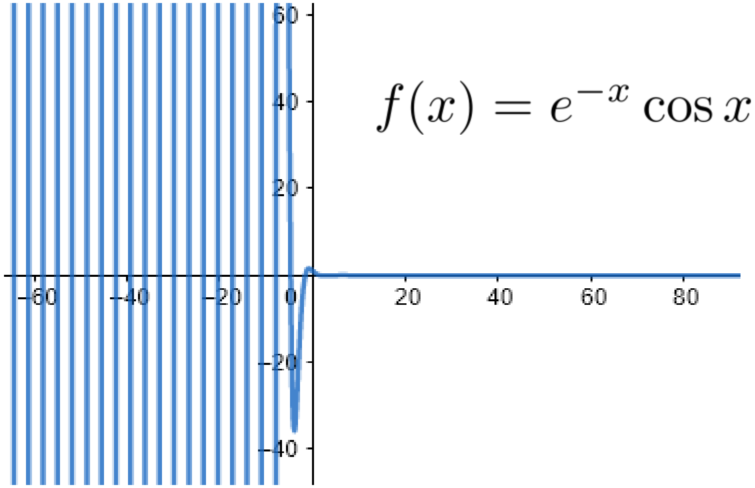


- $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} \cos x$ No existe

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} \cos x = 0$

0·Acotado

- $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} (\cos x + 2\operatorname{sen}^2 x - 1) = 0$



FORMAS INDETERMINADAS

A veces, la sustitución directa en el cálculo de un límite conduce a la forma

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}, \quad \infty - \infty, \quad 0 \cdot \infty, \quad 1^{\infty}, \quad \infty^{0}, \quad 0^{0}$$

En este caso se dice que el límite es indeterminado porque no somos capaces (a la vista de esa forma sólo) de determinar el límite.

En el caso de indeterminaciones de la forma

$$\frac{0}{0}, \quad \frac{\infty}{\infty}$$

veremos, más adelante, una herramienta (Regla de L'Hopital) que nos permitirá de forma sencilla determinar el límite en cuestión

También se pueden usar técnicas algebráicas para reescribir la expresiones de otra forma

EJEMPLOS (usando técnicas algebráicas)

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4+1}{x^2-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}} = +\infty$$ Grado mayor en el numerador

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3+1}{3x-2x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{x^3}}{\frac{3}{x^2}-2} = -1$$ Igual grado numerador y denominador

- $$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$ Grado mayor en el denominador

- $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1}-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{x+1}-x)(\sqrt{x+1}+x)}{\sqrt{x+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}+x} = 0$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-\sqrt{x^4+1}}{x+2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x^2-\sqrt{x^4+1})(x^2+\sqrt{x^4+1})}{(x+2)(x^2+\sqrt{x^4+1})}$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{(x+2)(x^2+\sqrt{x^4+1})} = 0$$

EJEMPLOS

- $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$
- $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen} x - \cos x}{1 - \tan x} \longrightarrow \frac{0}{0}$
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{\sqrt{x}} \longrightarrow \frac{\infty}{\infty}$
- $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x} \right) \longrightarrow \infty - \infty$
- $\lim_{x \to 0} x^{\operatorname{sen} x} \longrightarrow 0^0$
- $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} \right)^x \longrightarrow \infty^0$
- $\lim_{x \to +\infty} (x^2 + 2x + 2)e^{-x} \longrightarrow \infty \cdot 0$
- $\lim_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} \longrightarrow 1^\infty \longleftarrow$
- $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^x$

Los resolvemos más adelante con la Regla de L'Hopital (necesitamos las derivadas)

Continuidad en un punto: Una función f es continua en c si se verifican las condiciones:

- $f(c)$ está definido
- $\lim_{x \to c} f(x)$ existe
- $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$

Continuidad en un intervalo abierto: Una función f es continua en (a, b) si lo es en todos los puntos del intervalo

Continuidad en un intervalo cerrado: Una función f es continua en $[a, b]$ si es continua en el intevalo abierto (a, b) y

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \qquad \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$$

Las discontinuidades se dividen en dos categorías: evitables y no evitables. Una discontinuidad en $x = c$ es evitable si f puede hacerse continua redefiniéndose en $x = c$

EJEMPLOS

- $f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad \mathrm{Dom} f(x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad f$ es continua en todo su dominio

- $g(x) = \dfrac{\text{sen } x}{x}$ $\quad \mathrm{Dom} f(x) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad f$ es continua en todo su dominio

- $h(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen } x}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ $\quad \mathrm{Dom} f(x) = \mathbb{R}$

  f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen} x}{x} = 1 \text{ (lo veremos)}$$

- $l(x) = \begin{cases} \dfrac{\text{sen } x}{x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$ $\quad \mathrm{Dom} f(x) = \mathbb{R}$

  f es continua en todo $\mathbb{R}$

PROPIEDADES

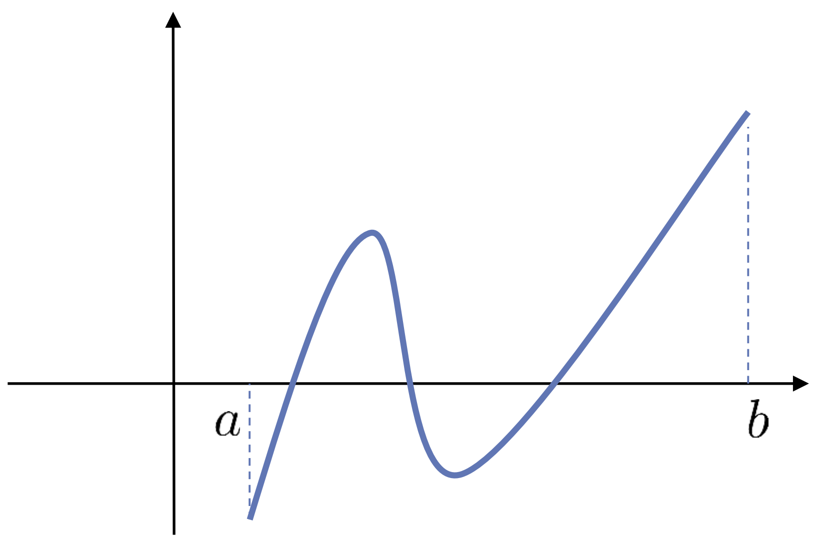
Si b es un número real y f y g funciones continuas en $x = c$, también son continuas las funciones:

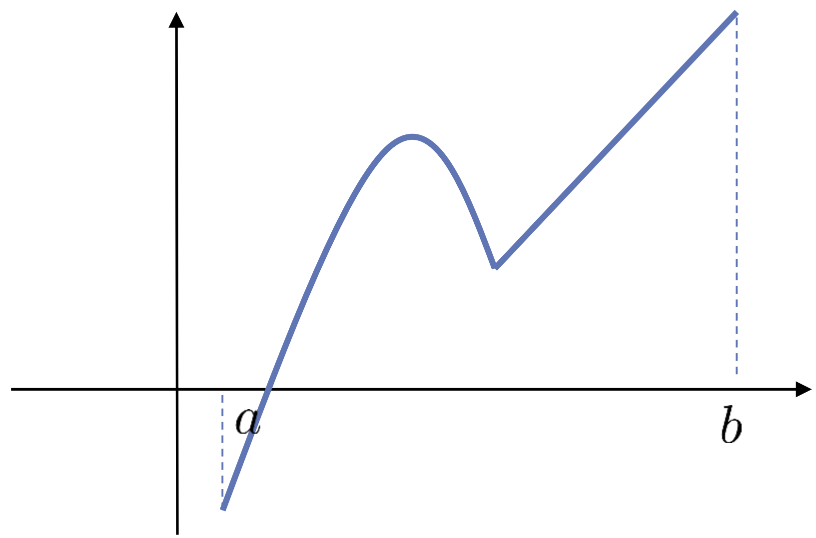
- Múltiplo escalar: bf
- Suma o diferencia: $f \pm g$
- Producto: fg
- Cociente: $\dfrac{f}{g} \qquad (g(c) \neq 0)$

- Función compuesta: Si g es continua en c y f lo es en $g(c)$, la función compuesta $f \circ g = f(g(x))$ es continua en c

Teorema de BOLZANO

$$\left.\begin{array}{c}\text{Si } f \text{ es continua en } [a,b] \\ \\ f(a)f(b)<0\end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c}\text{Existe al menos un } c \in (a,b) \text{ tal que} \\ f(c)=0\end{array}$$

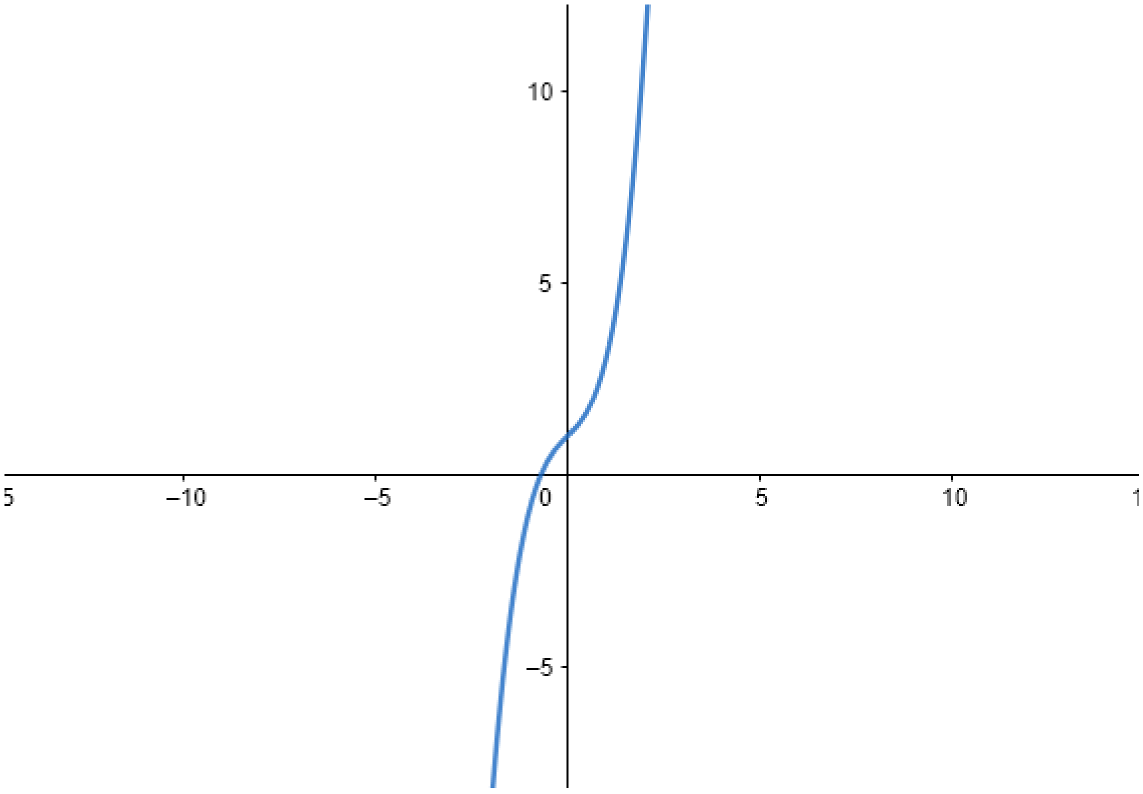




EJEMPLO

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f \text{ es continua en } [-2,0] \\[2em] \qquad f(-2)f(0) < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \begin{array}{c} \text{Existe al menos un } c \in (-2,0) \text{ tal que} \\ f(c) = 0 \end{array}$$



DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Sea f una función definida en un intervalo abierto I y $c \in I$

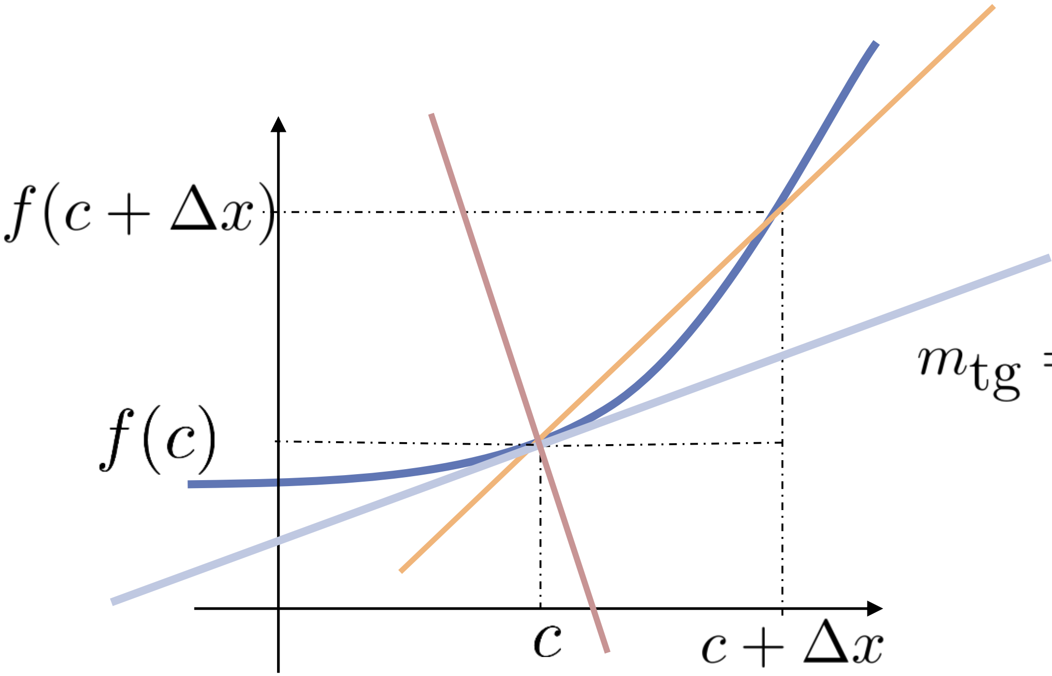
Se dice que f es derivable en c si existe

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

En ese caso, dicho número se denomina derivada de f en c y se denota por $f'(c)$

Otra forma alternativa de escribir la definición de derivada de una función en un punto es

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$



$$m_{\text{sec}} = \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Pendiente de la recta secante

$$m_{\text{tg}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$$

Pendiente de la recta tangente

Recta tangente

$$y - f(c) = f'(c)(x-c)$$

Recta normal

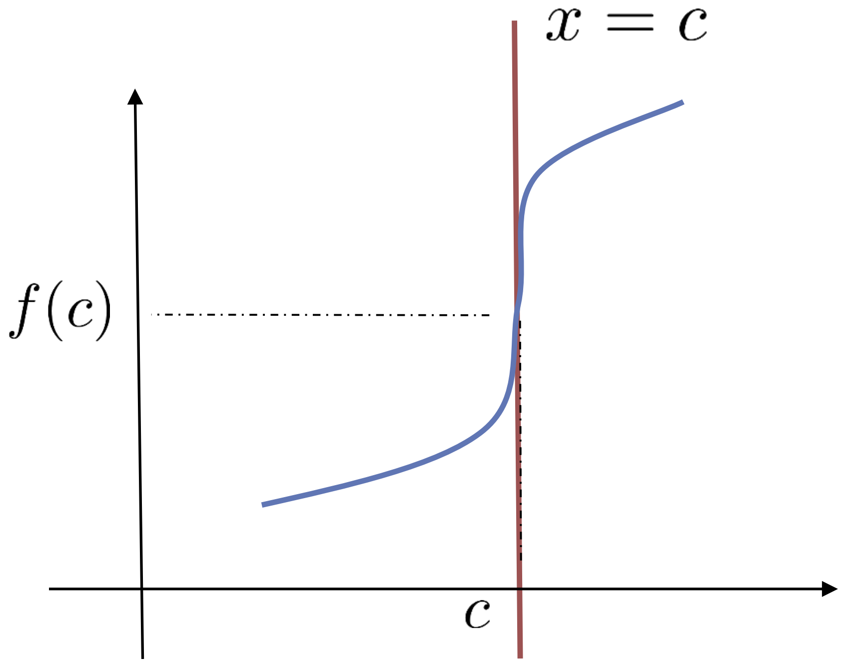
$$y - f(c) = \frac{-1}{f'(c)}(x-c) \text{ si } f'(c) \neq 0$$

TANGENTE VERTICAL

Sea f una función definida en un intervalo abierto I y $c \in I$

Si $\displaystyle\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ es $-\infty$ o $+\infty$,

la función no es derivable en c pero $x = c$ es la recta tangente a la gráfica en $(c, f(c))$



DIFERENCIAL

Si f es una función derivable en c

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(c)}{\Delta x}$$

Para valores de Δx, no nulos y suficientemente pequeños

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \approx f'(c)$$

$$f(x + \Delta x) - f(c) \approx f'(c)\Delta x$$

$$\text{incremento de } f \approx \text{diferencial de } f$$

Δx se denota por dx y se llama diferencial de x

$f'(c)dx$ se denota por dy y se llama diferencial de y en $x = c$

REGLAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN

- $\dfrac{d}{dx}[f \pm g] = f' \pm g'$

- $\dfrac{d}{dx}[fg] = f'g + fg'$

- $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{f}{g}\right] = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

- Regla de la cadena:
  Si $y = f(u)$, $u = g(x)$ son derivables, entonces $y = f(g(x))$ es derivable con

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}, \qquad \text{ó} \qquad \frac{d}{dx}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

REGLAS BÁSICAS DE DERIVACIÓN

$y = f(x)$	c	x	$x^n,\ n \neq 0$	$\log_a x$	$\ln x$	a^x	e^x	$\operatorname{sen} x$	$\cos x$
$y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$	0	1	nx^{n-1}	$\dfrac{1}{x}\log_a e$	$\dfrac{1}{x}$	$a^x \ln a$	e^x	$\cos x$	$-\operatorname{sen} x$

$y = f(x)$	$\operatorname{tg} x$	$\sec x$	$\operatorname{cosec} x$	$\operatorname{cotg} x$
$y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$	$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}$	$\dfrac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}$	$\dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 x}$

$y = f(x)$	$\operatorname{arcsen} x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arccosec} x$	$\operatorname{arcsec} x$	$\operatorname{arccotg} x$
$y' = f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\dfrac{1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2-1}}$	$\dfrac{-1}{1+x^2}$

REGLA DE LA CADENA

y	$f(x)^n,\ n \neq 0$	$\log_a f(x)$	$\ln f(x)$	$a^{f(x)}$	$e^{f(x)}$	$\operatorname{sen} f(x)$	$\cos f(x)$
y'	$n f(x)^{n-1} f'(x)$	$\dfrac{1}{f(x)} f'(x) \log_a e$	$\dfrac{1}{f(x)} f'(x)$	$a^{f(x)} f'(x) \ln a$	$e^{f(x)} f'(x)$	$(\cos\ f(x)) f'(x)$	$(-\operatorname{sen} f(x)) f'(x)$

y	$\operatorname{tg} f(x)$	$\sec f(x)$	$\operatorname{cosec} f(x)$	$\operatorname{cotg} f(x)$
y'	$\dfrac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x)$	$\dfrac{\operatorname{sen} f(x)}{\cos^2 f(x)} f'(x)$	$\dfrac{-\cos f(x)}{\operatorname{sen}^2 f(x)} f'(x)$	$\dfrac{-1}{\operatorname{sen}^2 f(x)} f'(x)$

y	$\operatorname{arcsen} f(x)$	$\arccos f(x)$	$\operatorname{arctg} f(x)$	$\operatorname{arccosec} f(x)$	$\operatorname{arcsec} f(x)$	$\operatorname{arccotg} f(x)$
y'	$\dfrac{1}{\sqrt{1 - f(x)^2}} f'(x)$	$\dfrac{-1}{\sqrt{1 - f(x)^2}} f'(x)$	$\dfrac{1}{1 + f(x)^2} f'(x)$	$\dfrac{-1}{\lvert f(x)\rvert \sqrt{f(x)^2 - 1}} f'(x)$	$\dfrac{1}{\lvert f(x)\rvert \sqrt{f(x)^2 - 1}} f'(x)$	$\dfrac{-1}{1 + f(x)^2} f'(x)$

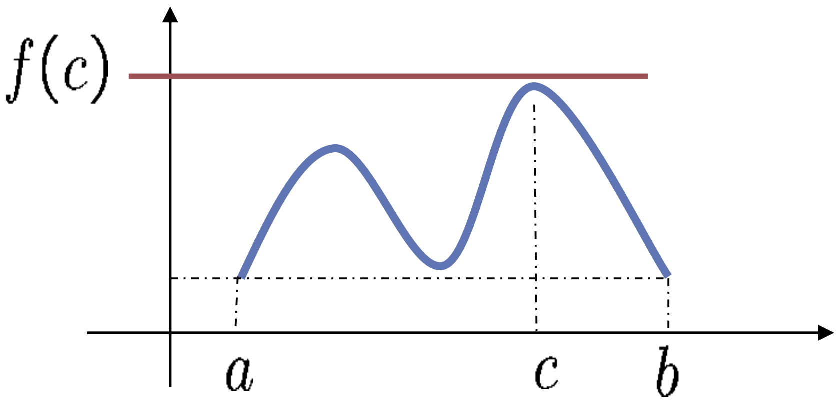
Teorema

Si f es derivable en $c \implies f$ es continua en c

El recíproco NO es cierto: $f(x) = |x|$ es continua en $x = 0$ y no es derivable en $x = 0$

Teorema de ROLLE

$$\left.\begin{array}{c} \text{Si } f \text{ es continua en } [a,b] \\ f \text{ es derivable en } (a,b) \\ f(a) = f(b) \end{array}\right\} \implies \begin{array}{c} \text{Existe al menos un } c \in (a,b) \text{ tal que} \\ f'(c) = 0 \end{array}$$



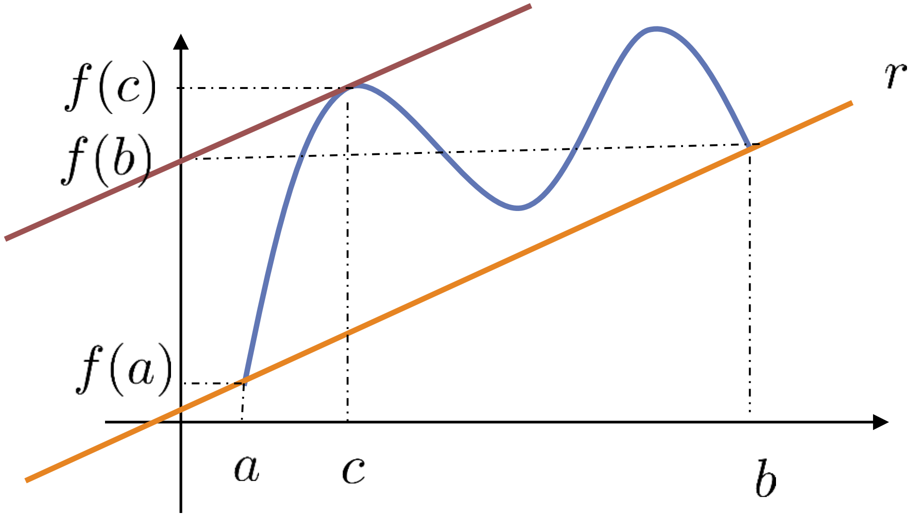
En $(c, f(c))$, la recta tangente
$y = f(c)$
es horizontal

Teorema del VALOR MEDIO

$$\left.\begin{array}{l} \text{Si } f \text{ es continua en } [a,b] \\ \\ f \text{ es derivable en } (a,b) \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

Existe al menos un $c \in (a,b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



En $(c, f(c))$, la recta tangente tiene la misma pendiente que la recta secante r

REGLAS DE L'HOPITAL

Sean f y g funciones derivables en un intervalo abierto (a, b) que contiene a c, excepto quizás en el propio c.

Si el límite de $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ cuando x tiende a c produce una de las formas indeterminadas $\dfrac{0}{0}$ o $\dfrac{\infty}{\infty}$, entonces

$$\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

supuesto que exista el límite de la derecha (o que sea infinito)

La conclusión de la Regla de L'Hopital anterior sigue siendo siendo válida si se consideran los siguientes límites:

$$\lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}, \quad \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

con los reajustes apropiados en las hipótesis en cada caso

El cálculo de algunos límites requiere aplicar la regla de L´Hopital más de una vez

EJEMPLOS

Regla de L'Hôpital

- $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen}x}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x}{1} = 1$

- $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\text{sen}x - \cos x}{1 - \tan x} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\cos x + \text{sen}x}{-\frac{1}{\cos^2 x}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{\text{sen}x} \right) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\text{sen } x - x}{x\text{sen } x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{\text{sen } x + x \cos x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{-\text{sen } x}{\cos x + \cos x - x\text{sen } x} = 0$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x^2 + 2x + 2)e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2 + 2x + 2}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x + 2}{e^x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^x} = 0$

EJEMPLOS

- $$\lim_{x\to 0} x^{\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0} e^{\ln(x^{\operatorname{sen}x})} = \lim_{x\to 0} e^{\operatorname{sen}x \ln x} = e^{\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}x \ln x} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}^2 x}} = \lim_{x\to 0} \frac{-\operatorname{sen}^2 x}{x \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{-2\operatorname{sen} x \cos x}{\cos x - x\operatorname{sen} x} = 0$$

- $$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to 0} x \ln\left(\frac{1}{\operatorname{sen}x}\right)} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{-\ln(\operatorname{sen}x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-\cos x}{\operatorname{sen}x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \cos x}{\operatorname{sen}x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cos x - x^2 \operatorname{sen}x}{\cos x} = 0$$

EJEMPLOS

- $$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x}} = e^{\frac{-1}{2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\operatorname{sen}^2 x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\operatorname{sen}\ x}{\cos x}}{2\operatorname{sen} x\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{-1}{2\cos^2 x} = \frac{-1}{2}$$

- $$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\ln(x+1)-\ln(x-1)\right)} = e^2$$

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\ln(x+1)-\ln(x-1)\right) = \lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x+1)-\ln(x-1)}{\frac{1}{x}} =$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty}\frac{2x^2}{x^2-1} = 2$$

Derivación implícita

Una función está definida en forma implícita, cuando no aparece despejada la variable y, sino que la relación entre x e y viene dada por una ecuación de dos incógnitas

- Función explícita $y = f(x)$ $\qquad y = \sqrt{x}$

- Función implícita $f(x, y) = 0$ $\qquad -x + y^2 = 0$

No siempre es sencillo, o incluso no es posible, despejar la y para poner la función en forma explícita

$$y^2x^2 - 2y + 3x = 5$$

$$y = \ln x - \operatorname{sen}(2y - x)$$

$$x^2y - xy^2 + y^2 = 7$$

$$x^2\operatorname{sen}(x + y) - 5ye^x = 3$$

Para hallar la derivada en forma implícita no es necesario despejar y. Basta derivar tanto el miembro derecho como el izquierdo de la igualdad con respecto a la misma variable, utilizando las reglas de derivación y teniendo en cuenta que:

$$\frac{d}{dx}x = x' = 1$$

$$\frac{dy}{dx} = y'$$

$$\frac{d}{dx}f(y(x))) = f'(y(x))y'(x)$$

Regla de la cadena

EJEMPLO

Sea $y = f(x)$ tal que $yx^2 + y = 1$

Derivamos directamente en la expresión anterior

$$\frac{d}{dx}\left[yx^2 + y\right] = \frac{d}{dx}[1]$$

$$y'x^2 + 2xy + y' = 0$$

Agrupamos términos

$$y'(x^2 + 1) + 2xy = 0$$

Despejamos

$$y' = \frac{-2xy}{(x^2 + 1)}$$

Observar que la derivada viene dada en función de x e y

EJEMPLO

Sea $y = f(x)$ tal que $x^2 - 2y^3 + 4y = 2$

Derivamos directamente en la expresión anterior

$$\frac{d}{dx}\left[x^2 - 2y^3 + 4y\right] = \frac{d}{dx}[2]$$

$$2x - 6y^2y' + 4y' = 0$$

Agrupamos términos

$$(4 - 6y^2)y' = -2x$$

Despejamos

$$y' = \frac{-2x}{(4 - 6y^2)}$$

Observar que la derivada viene dada en función de x e y

EJEMPLO

Obtener la recta tangente a la curva $(x+y)^3 = x^3 + y^3$ en el punto $(-1,1)$

Comprobamos que el punto está en la curva definida implicítamente $(-1+1)^3 = (-1)^3 + 1^3$

Para obtener la recta tangente, necesitamos la derivada. Derivamos directamente en la ecuación implícita anterior

$$\frac{d}{dx}\left[(x+y)^3\right] = \frac{d}{dx}\left[x^3+y^3\right] \Longrightarrow 3(x+y)^2(1+y') = 3x^2 + 3y^2 y'$$

Agrupamos términos $\quad 3(x+y)^2 + \left[3(x+y)^2 - 3y^2\right] y' = 3x^2$

Despejamos $\quad 3(x^2+2xy)y' = 3x^2 - 3(x+y)^2$

$$y' = \frac{-(y^2+2xy)}{x^2+2xy}$$

Como solo necesitábamos la derivada en un punto podríamos haber evaluado directamente en esta expresión

Finalmente, evaluamos y' en dicho punto $\left. y'\right|_{(-1,1)} = \dfrac{-(1-2)}{1-2} = -1$

Y escribimos la recta tangente en $(-1,1)$

$$y - 1 = -(x+1)$$

EJEMPLO

Calcular la derivada de la función dada por $x^2\mathrm{sen}^2 y + \cos(xy) = 1$ en el punto $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$

Derivamos implícitamente

$$2x\mathrm{sen}^2 y + x^2(2\mathrm{sen}y\cos y)y' + (-\mathrm{sen}(xy))(y + xy') = 0$$

Evaluamos la expresión en el punto $\left(1, \dfrac{\pi}{2}\right)$

$$2 - \left(\frac{\pi}{2} - y'\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y'|_{(1,\frac{\pi}{2})} = 2 - \frac{\pi}{2}$$

Si hubiéramos necesitado la derivada en cualquier punto, agrupamos términos en la expresión derivada

$$[2x^2\mathrm{sen}y\cos y - x\mathrm{sen}(xy)]y' = -2x\mathrm{sen}^2 y + y\mathrm{sen}(xy))$$

Despejamos

$$y' = \frac{-2x\mathrm{sen}^2 y + y\mathrm{sen}(xy)}{2x^2\mathrm{sen}y\cos y - x\mathrm{sen}(xy)}$$

Crecimiento

Concavidad

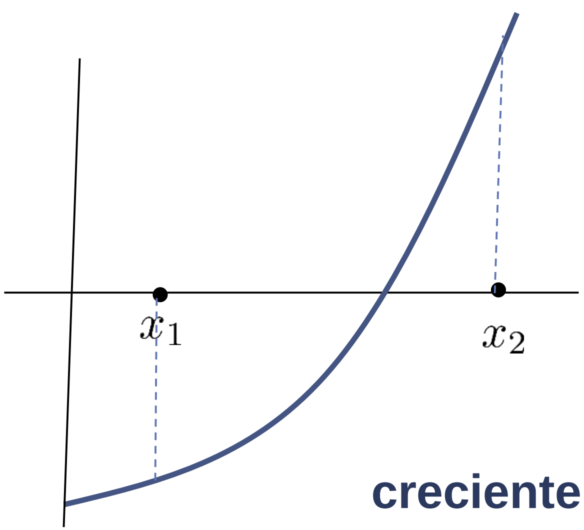
Sea f definida en un intervalo $[a, b]$

- f es creciente en $[a, b]$ si para todo $x_1, x_2 \in [a, b]$

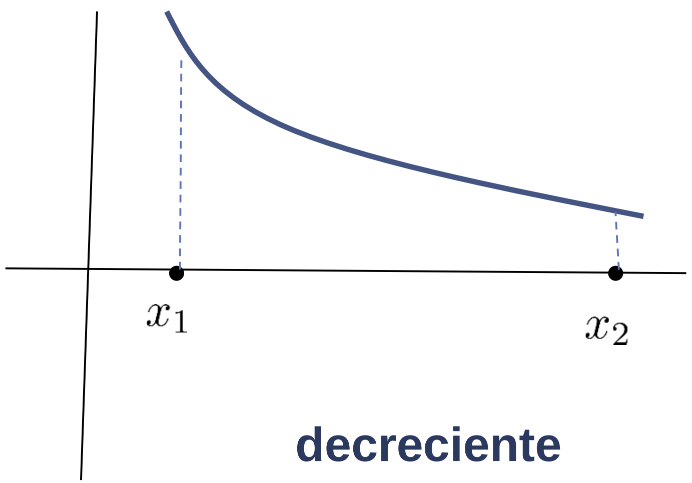
$$x_1 < x_2 \text{ implica } f(x_1) < f(x_2)$$

- f es decreciente en $[a, b]$ para todo $x_1, x_2 \in [a, b]$

$$x_1 < x_2 \text{ implica } f(x_1) > f(x_2)$$



creciente



decreciente

CRITERIO DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

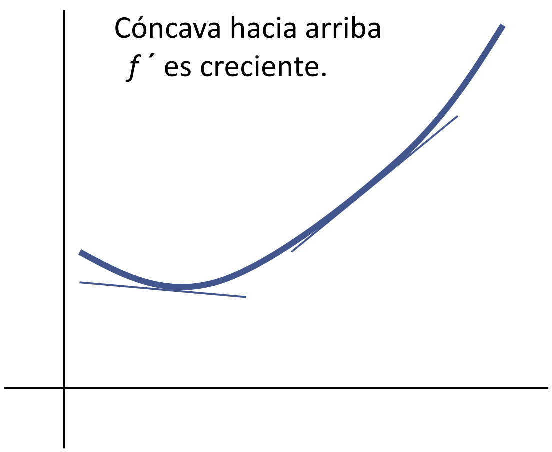
Sea f continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b)

- Si $f'(x) > 0, \forall x \in (a, b) \implies f$ es creciente en (a, b)
- Si $f'(x) < 0, \forall x \in (a, b) \implies f$ es decreciente en (a, b)
- Si $f'(x) = 0, \forall x \in (a, b) \implies f(x) = k$, para todo $x \in (a, b)$

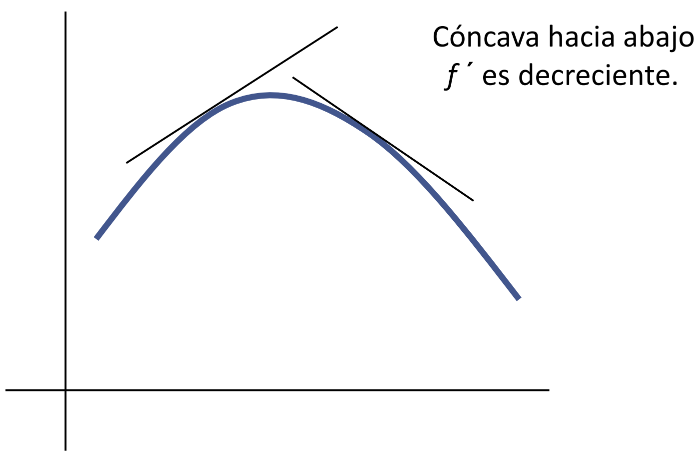
Los números críticos de f son los números c del dominio de f donde f' no está definida en c o $f'(c) = 0$

Sea f es derivable en (a, b)

- f es cóncava hacia arriba en (a, b) si f' es creciente en (a, b)
- f es cóncava hacia abajo en (a, b) si f' es decreciente en (a, b)



La gráfica de *f* queda por encima de la recta tangente.

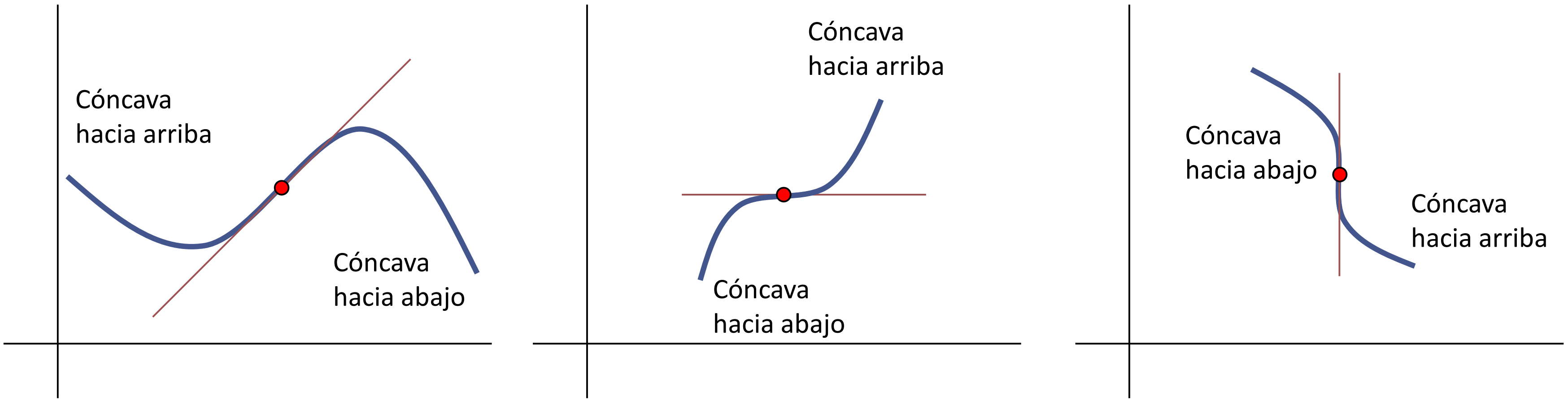


La gráfica de *f* queda por debajo de la recta tangente.

Sea f una función derivable en $x = c$ o con tangente vertical

Se dice que el punto $(c, f(c))$ es punto de inflexión cuando

la concavidad cambia en c



CRITERIO DE CONCAVIDAD

Sea f tal que existe f'' en un intervalo abierto (a, b)

- Si $f''(x) > 0,\ \forall x \in I \implies f$ es cóncava hacia arriba en (a, b)
- Si $f''(x) < 0,\ \forall x \in I \implies f$ es cóncava hacia abajo en (a, b)

Si $(c, f(c))$ es punto de inflexión $\Longrightarrow$

$f''(c) = 0$

o

f'' no está definida en c

EJEMPLO

Determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento y estudiar la concavidad de la función

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \qquad \text{Dom } f(x) = (0,1) \cup (1,+\infty)$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \qquad \text{Dom } f'(x) = (0,1) \cup (1,+\infty)$$

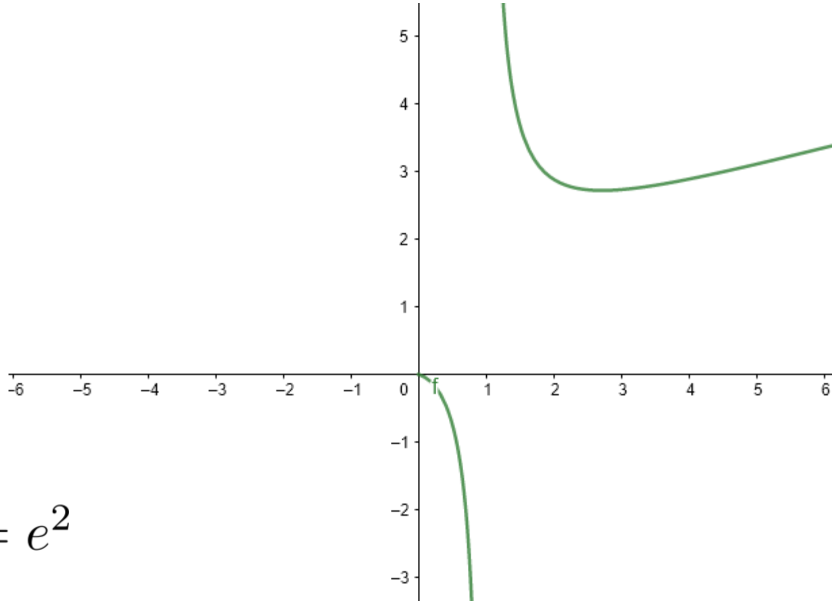
Aplicamos el criterio de crecimiento

$(0,1)$	$(1,e)$	$(e,+\infty)$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$$f''(x) = \frac{-\ln x + 2}{x \ln^3 x}$$

Aplicamos el criterio de concavidad

$(0,1)$	$(1,e^2)$	$(e^2,+\infty)$
$\frown$	$\smile$	$\frown$



f tiene un punto de inflexión para $x = e^2$

EJEMPLO

Determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento y estudiar la concavidad de la función

$$f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si } x \in [-3,3] \\ x^2 - 9 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-3,3] \end{cases}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \in (-3,3) \\ 2x & \text{si } x \in (-\infty,-3) \cup (3,+\infty) \end{cases}$$

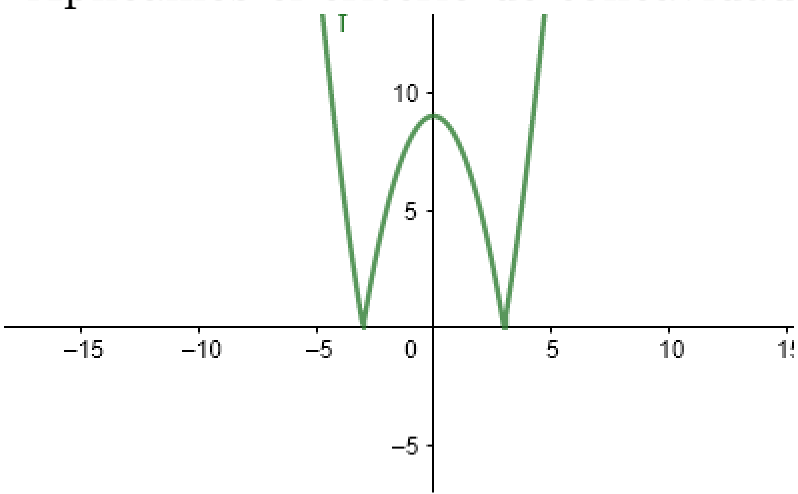
$$\text{Dom } f'(x) = \mathbb{R} \setminus \{-3,3\}$$

Aplicamos el criterio de crecimiento

$(-\infty,-3)$	$(3,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

Aplicamos el criterio de concavidad

$(-\infty,-3)$	$(-3,3)$	$(3,+\infty)$
$\smile$	$\frown$	$\smile$



En $(-3,0)$ y $(3,0)$ no hay punto de inflexión, ya que la función no es derivable en -3 y 3 ni tiene tangente vertical

EJEMPLO

Determinar los intervalos de crecimiento o decrecimiento y estudiar la concavidad de la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$$

$$\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{2-3x}{3\sqrt[3]{x(1-x)^2}}$$

$$\text{Dom } f'(x) = \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$$

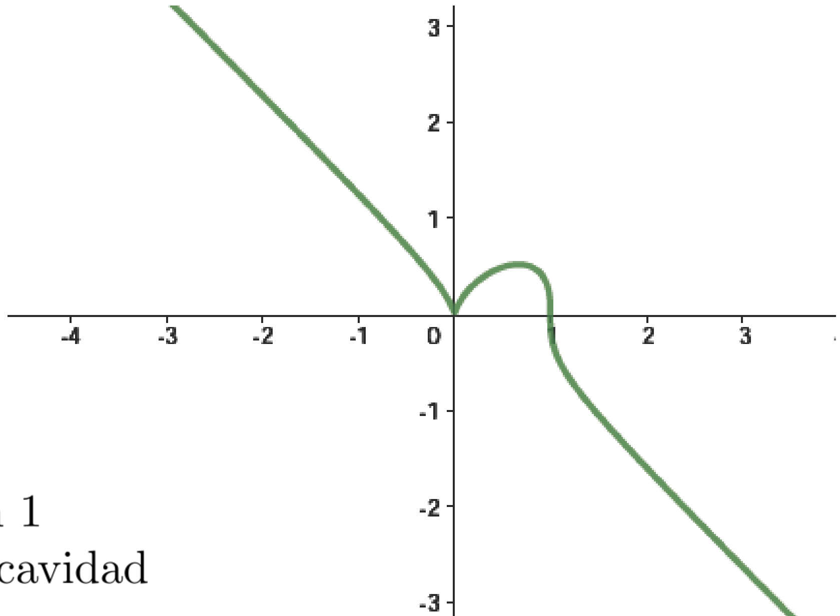
Aplicamos el criterio de crecimiento

$(-\infty, 0)$	$(0, \frac{2}{3})$	$(\frac{2}{3}, 1)$	$(1, +\infty)$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

$$f''(x) = \frac{-2}{9\sqrt[3]{x^4(1-x)^5}}$$

Aplicamos el criterio de concavidad

$(-\infty, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$\frown$	$\frown$	$\smile$

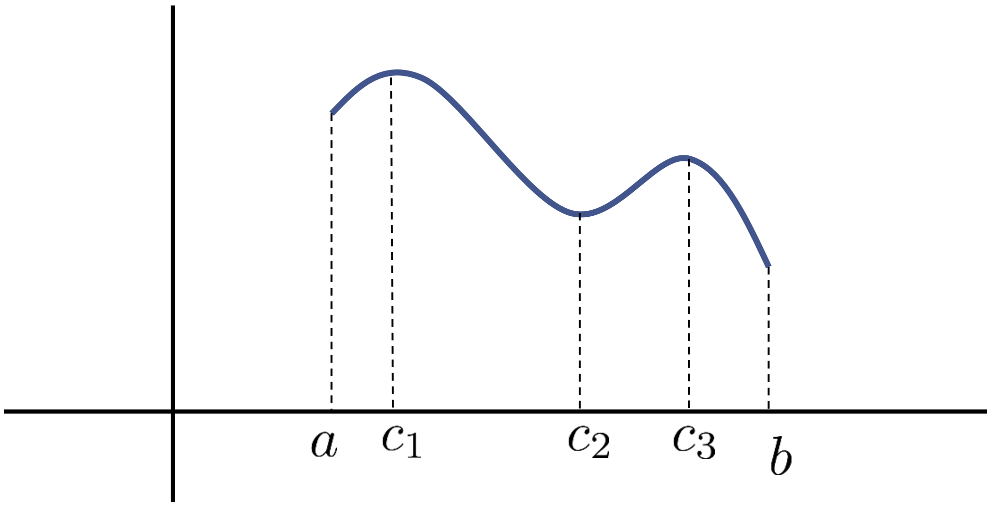


En $(1, 0)$ hay punto de inflexión,
ya que aunque la función no es derivable en 1
tiene una tangente vertical y cambia la concavidad

Extremos absolutos y relativos

Sea f definida en un intervalo I tal que $c \in I$

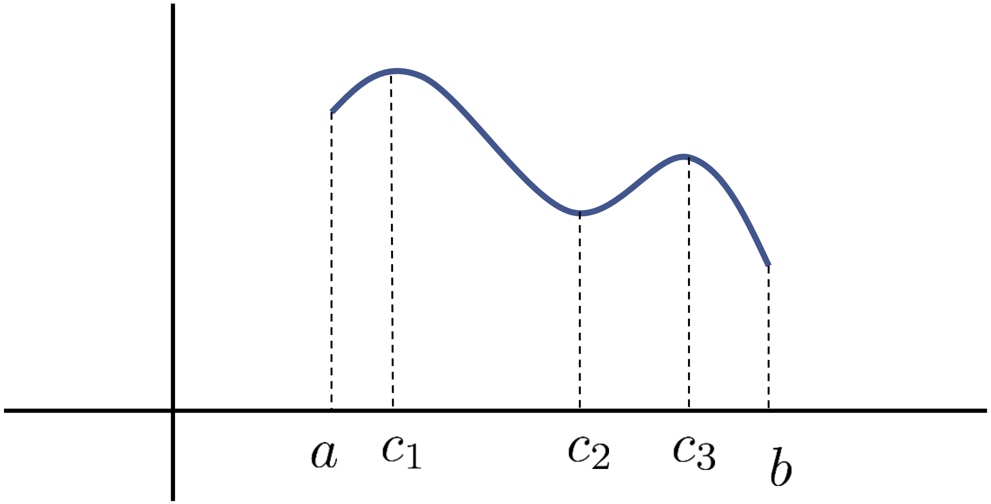
- $f(c)$ es el mínimo (absoluto) de f en I cuando $f(c) \leq f(x)$, para todo $x \in I$
- $f(c)$ es el máximo (absoluto) de f en I cuando $f(c) \geq f(x)$, para todo $x \in I$



$f(b)$ es el mínimo de f en I

$f(c_1)$ es el máximo de f en I

- $f(c)$ es un mínimo relativo de f si existe algún intervalo abierto I tal que $c \in I$ y en el que $f(c)$ es el mínimo de f en I
- $f(c)$ es un máximo relativo de f si existe algún intervalo abierto I tal que $c \in I$ y en el que $f(c)$ es el máximo de f en I



$f(c_1)$ es máximo relativo de f

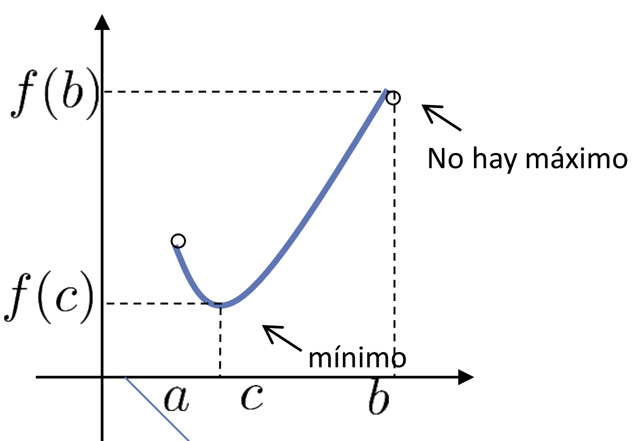
$f(c_2)$ es mínimo relativo de f

$f(c_3)$ es máximo relativo de f

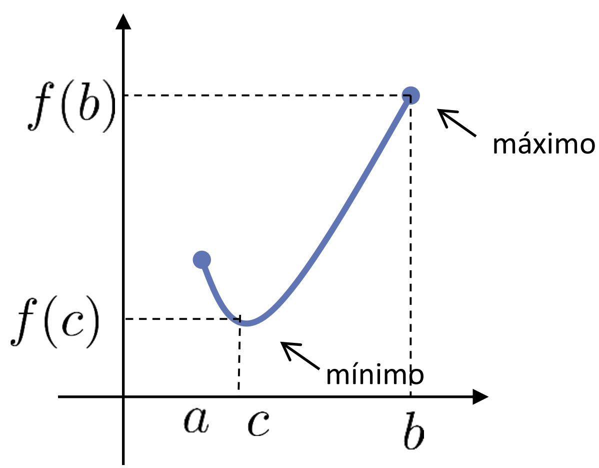
Teorema de WEIERSTRASS

Si f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$,

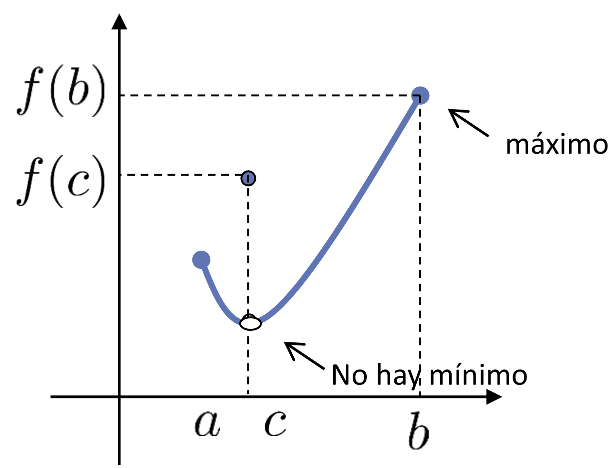
entonces f tiene un máximo y un mínimo en $[a, b]$



f continua en (a, b)



f continua en $[a, b]$

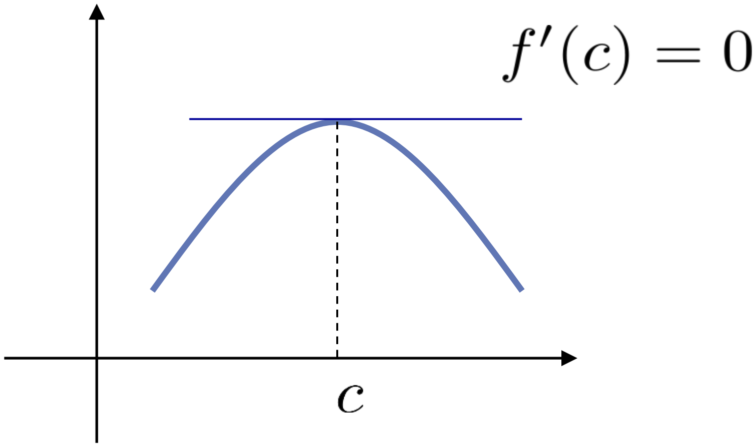


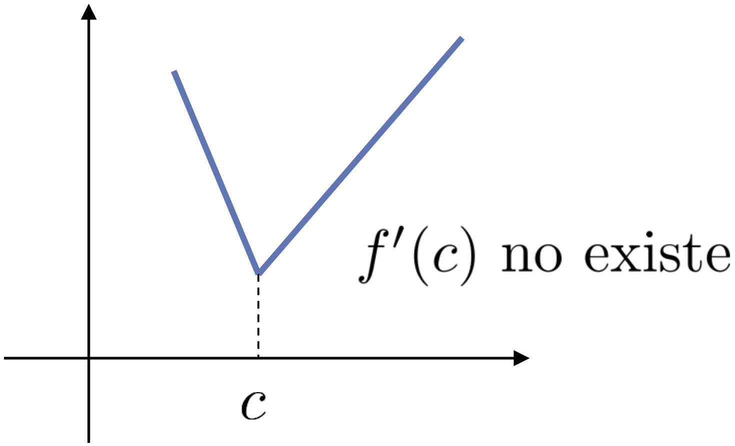
f no continua en $[a, b]$

PROPOSICIÓN

Si f tiene un extremo relativo en c,

entonces f' no está definida en c o $f'(c) = 0$





Si f tiene un extremo relativo en c, entonces c es un número crítico de f

Cálculo de EXTREMOS (absolutos) de f en $[a, b]$

cuando f es continua en $[a, b]$

1) Hallar los números críticos de f en (a, b)

2) Evaluar f en los números críticos, en a, y en b

3) a) El menor valor obtenido en 2) es el mínimo de f en $[a, b]$

b) El mayor valor obtenido en 2) es el máximo de f en $[a, b]$

EJEMPLO

Determinar los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado:

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 \qquad \text{en } [-1, 2]$$

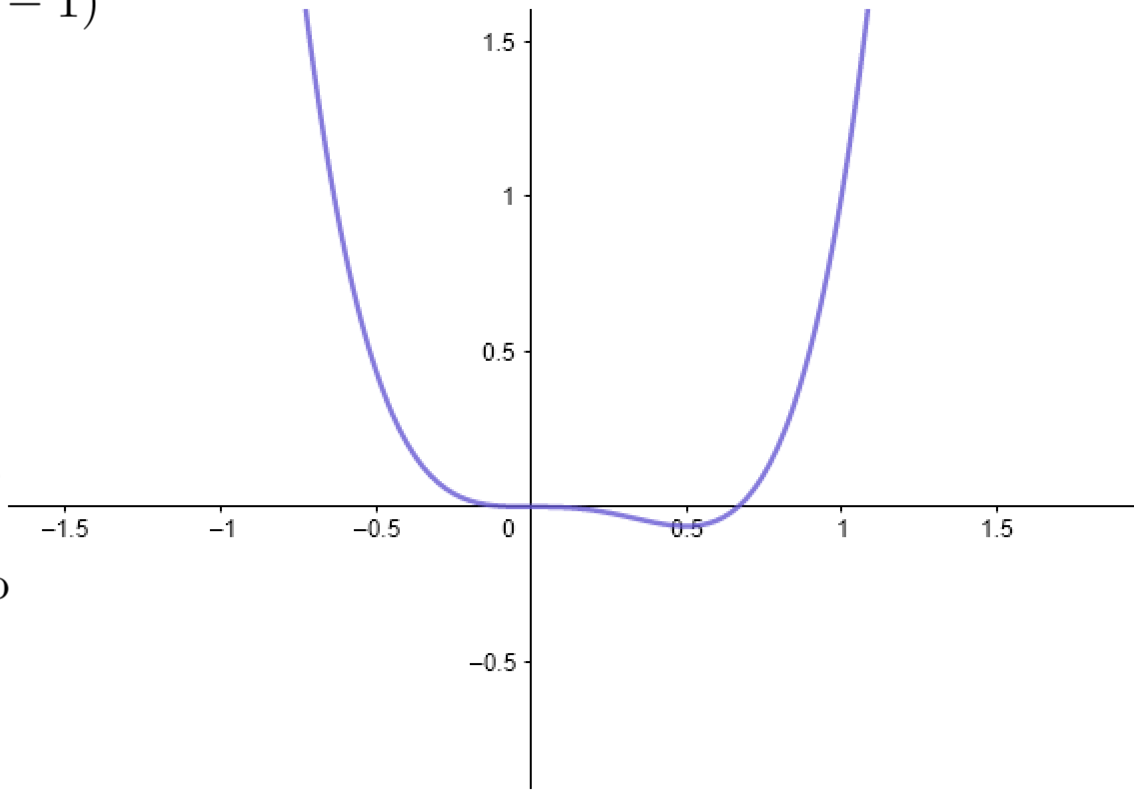
$$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 = 12x^2(x-1)$$

$f(-1) = 7$

$f(0) = 0$

$f(1) = -1\sqrt[3]{4}$ Mínimo absoluto

$f(2) = 16$ Máximo absoluto



EJEMPLO

Determinar los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado:

$$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2} \qquad \text{en } [-1, 3]$$

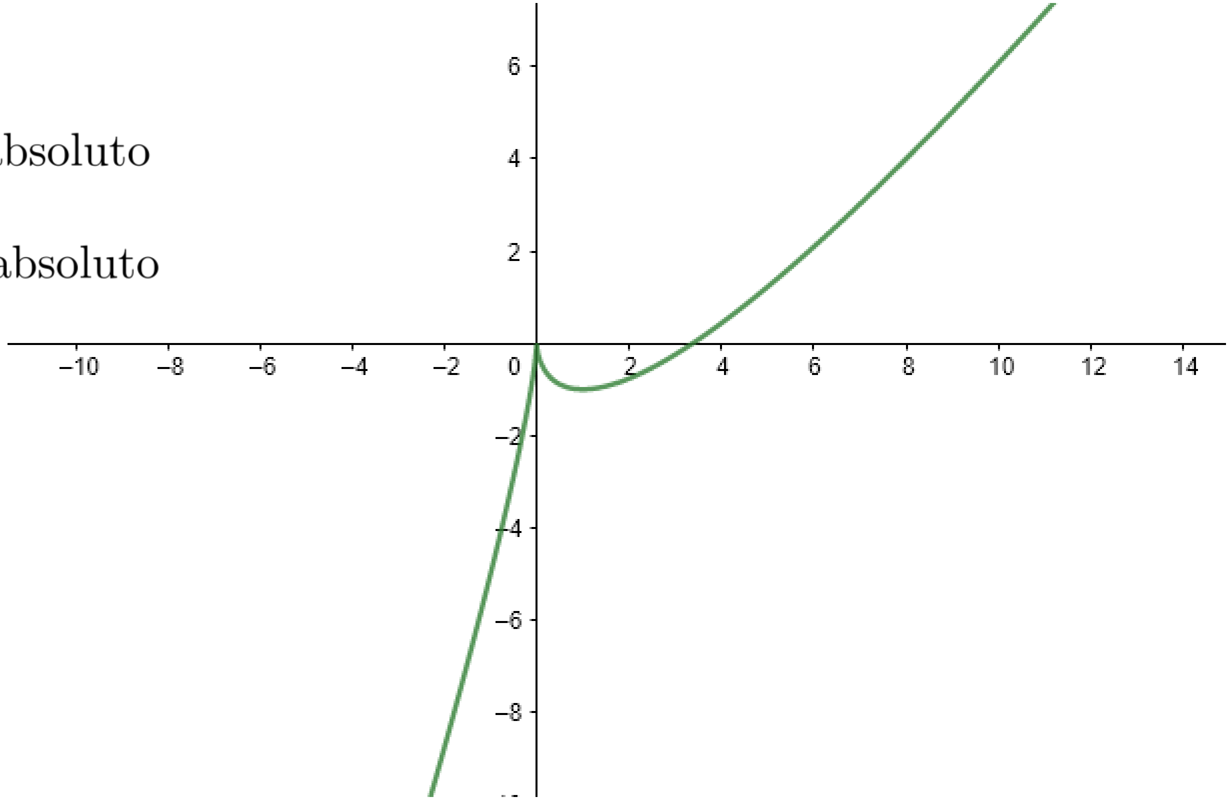
$$f'(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

$f(-1) = -5$ Mínimo absoluto

$f(0) = 0$ Máximo absoluto

$f(1) = -1\sqrt[3]{4}$

$f(3) = -0.24$



EJEMPLO

Determinar los extremos absolutos de la función dada en el intervalo indicado:

$$f(x) = (9 - x)\sqrt[3]{(x-4)^2} \qquad \text{en } [3, 8]$$

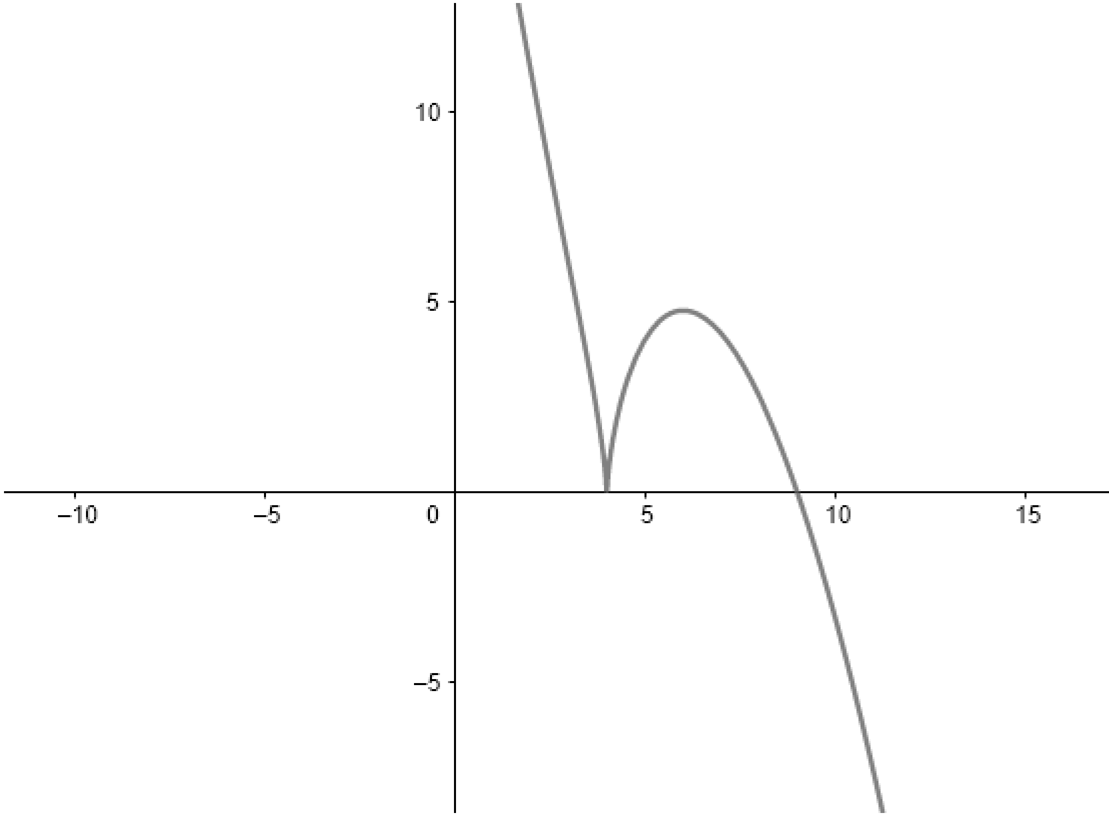
$$f'(x) = \frac{-5x + 30}{3\sqrt[3]{x-4}}$$

$f(3) = 6$ Máximo absoluto

$f(4) = 0$ Mínimo absoluto

$f(6) = 3\sqrt[3]{4}$

$f(8) = 2\sqrt[3]{2}$



No existe $f'(4)$ $\qquad f'(6) = 0$

CRITERIO DE LA DERIVADA PRIMERA

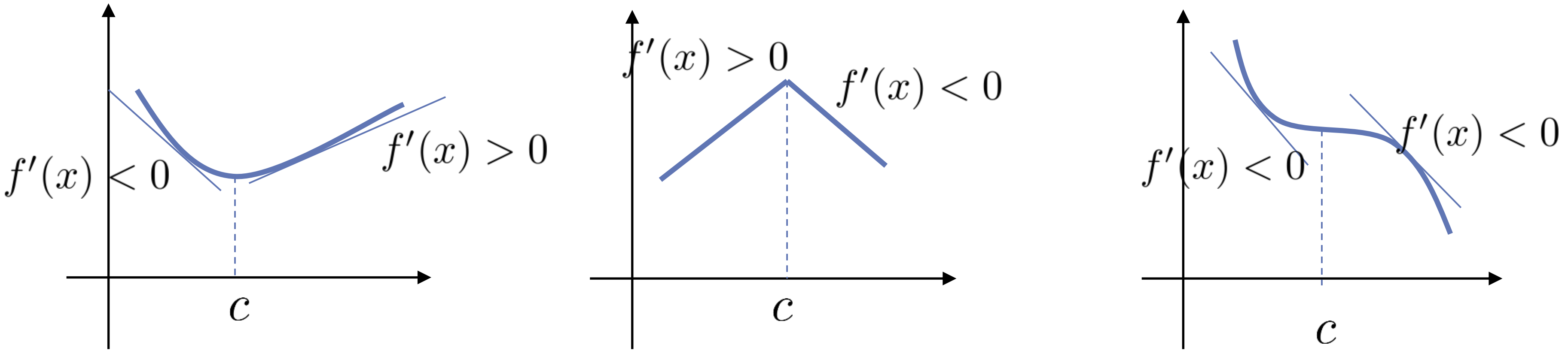
Sea c un número crítico de f.

f continua en un intervalo abierto I, $c \in I$. f derivable en I salvo, quizás, en c.

1) Si $f'(x)$ cambia en c de negativa a positiva, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de f

2) Si $f'(x)$ cambia en c de positiva a negativa, entonces $f(c)$ es un máximo relativo de f

3) Si $f'(x)$ no cambia de signo en c, entonces $f(c)$ no es un extremo relativo



CRITERIO DE LA DERIVADA SEGUNDA

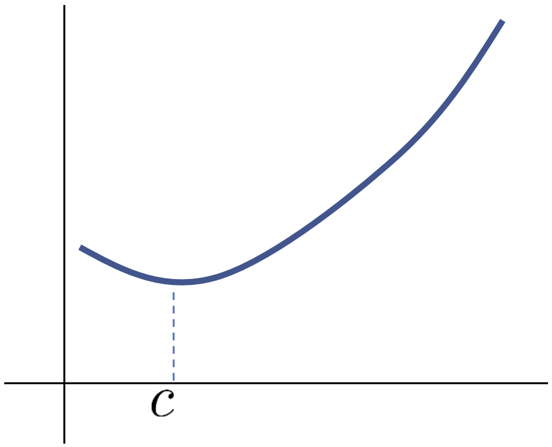
Sea f tal que $f'(c) = 0$

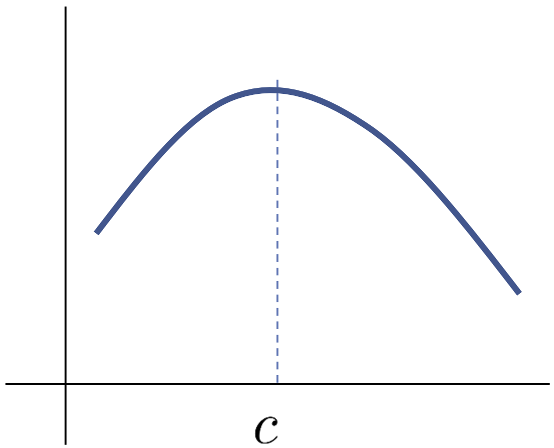
f'' existe en un intervalo abierto I, $c \in I$

1) Si $f''(c) > 0 \implies f(c)$ es un mínimo relativo

2) Si $f''(c) < 0 \implies f(c)$ es un máximo relativo

3) Si $f''(c) = 0 \implies f(c)$ el criterio no decide





EJEMPLO

Determinar los extremos relativos de la función

$$f(x) = xe^x \qquad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

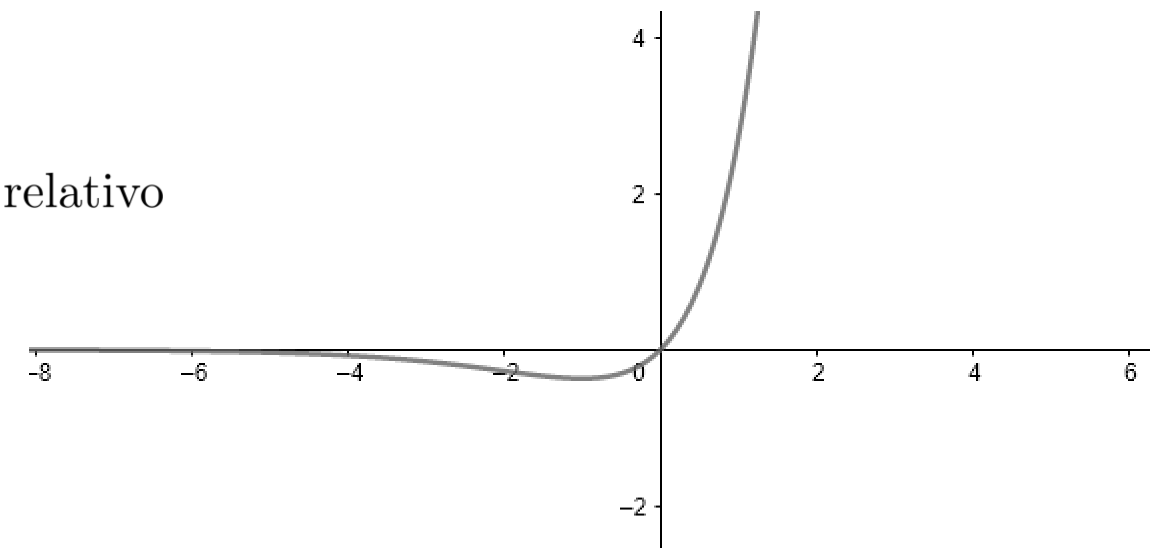
$$f'(x) = e^x(1+x) \qquad \text{Dom } f'(x) = \mathbb{R}$$

Número crítico: $x = -1$

Aplicamos el criterio de la derivada primera

$(-\infty, -1)$	$(-1, +\infty)$
$\searrow$	$\nearrow$

$$f(-1) = \frac{-1}{e}$$ Mínimo relativo



EJEMPLO

Determinar los extremos relativos de la función

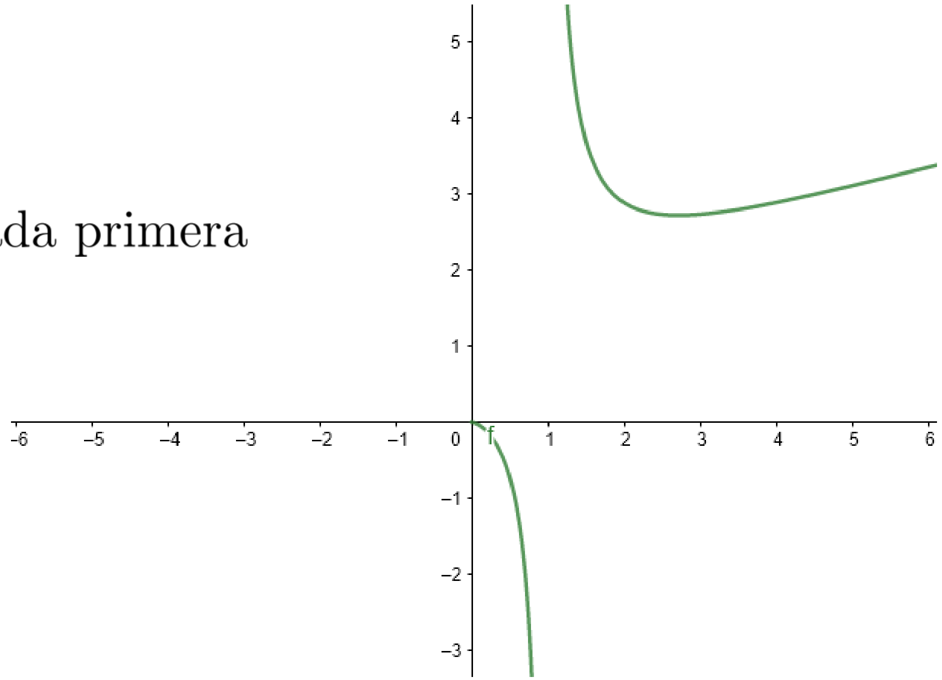
$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \qquad \text{Dom } f(x) = (0,1) \cup (1,+\infty)$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \qquad \text{Dom } f'(x) = (0,1) \cup (1,+\infty)$$

Número crítico: $x = e$

Aplicamos el criterio de la derivada primera

$(0,1)$	$(1,e)$	$(e,+\infty)$
$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$



$f(e) = e$ es un mínimo relativo

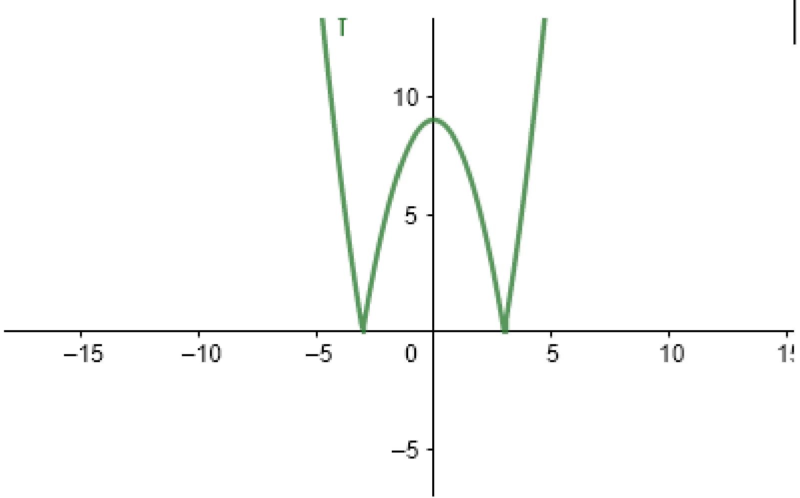
EJEMPLO

Determinar los extremos relativos de la función

$$f(x) = |x^2 - 9| = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si } x \in [-3,3] \\ x^2 - 9 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-3,3] \end{cases} \qquad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{si } x \in (-3,3) \\ 2x & \text{si } x \in (-\infty,-3) \cup (3,+\infty) \end{cases} \qquad \text{Dom } f'(x) = \mathbb{R} \setminus \{-3,3\}$$

Números críticos: $x = 0, \quad x = -3 \quad x = 3$



$(-\infty,-3)$	$(3,0)$	$(0,3)$	$(3,+\infty)$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(-3) = 0$ Mínimo relativo

$f(0) = 9$ Máximo relativo

$f(3) = 0$ Mínimo relativo

EJEMPLO

Determinar los extremos relativos de la función

$$f(x) = x + |x^2 - 1| = \begin{cases} x - x^2 + 1 & \text{si } x \in [-1,1] \\ x + x^2 - 1 & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1] \end{cases} \qquad \text{Dom } f(x) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 1 - 2x & \text{si } x \in (-1,1) \\ 1 + 2x & \text{si } x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty) \end{cases} \qquad \text{Dom } f'(x) = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\}$$

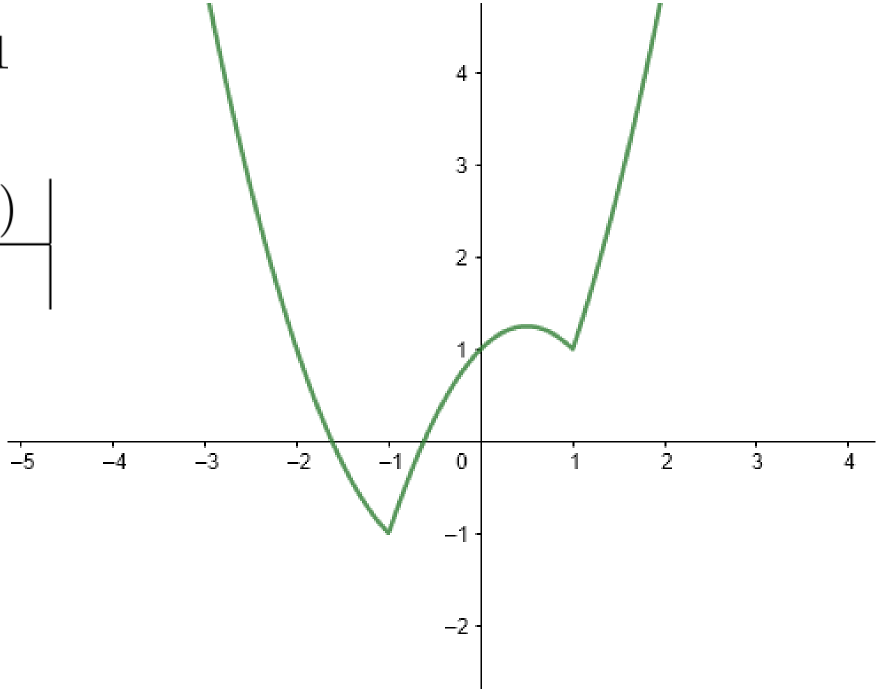
Números críticos: $x = -1, \quad x = \frac{1}{2}, \quad x = 1$

$(-\infty,-1)$	$(-1,\frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2},1)$	$(1,+\infty)$
$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

$f(-1) = -1$ Mínimo relativo

$f(\frac{1}{2}) = 1.25$ Máximo relativo

$f(1) = 1$ Mínimo relativo



Resolución numérica de ecuaciones: Bisección y Newton

Buscamos resolver la ecuación $f(x) = 0$

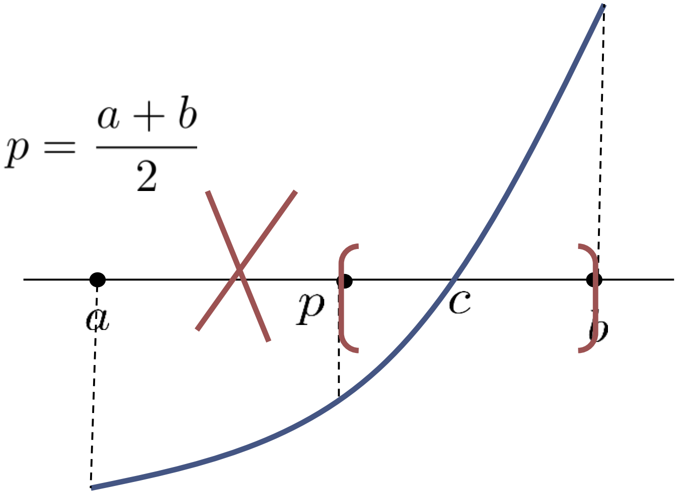
- Identificamos un intervalo inicial $[a, b]$ que contenga una raíz de f

Inspección de la gráfica de la función (si se tiene)

Uso del teorema de Bolzano

- Calculamos el punto medio del intervalo $[a, b]$ $\quad p = \dfrac{a+b}{2}$

- Evaluamos $f(p)$



- Si $f(a)f(p) < 0$, entonces f se anula al menos en un punto del intervalo (a, p)
  El nuevo intervalo a considerar en la siguiente iteración es $[a, p]$

- Si $f(p)f(b) < 0$, entonces f se anula al menos en un punto del intervalo (p, b)
  El nuevo intervalo a considerar en la siguiente iteración es $[p, b]$

- Si $f(p) = 0$, entonces $c = p$

- Si consideramos el intervalo del paso anterior en el que la función cambia de signo en los extremos, y repetimos los pasos anteriores, se consigue obtener una sucesión de intervalos de longitud cada vez menor donde se encuentra una raíz de f. Por lo tanto, se consigue un número próximo a c

$$[a,b] \supseteq [a_1,b_1] \supseteq [a_2,b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n,b_n] \supseteq \dots$$

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}), \qquad c \in [a_n, b_n]$$

- La convergencia está asegurada, pero es lenta

$$|p_n - c| \leq \frac{1}{2^n}(b-a) \qquad\qquad p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$$

- El método de bisección se suele utilizar para determinar un intervalo pequeño en el que se encuentre la raíz. Posteriormente, se aplica otro método que conduzca más rápido a la raíz

EJEMPLO

Hallar uno de los ceros de la función $f(x) = x^3 + x - 3$ mediante el método de bisección

$f(x)$ continua para todo $x \in \mathbb{R}$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

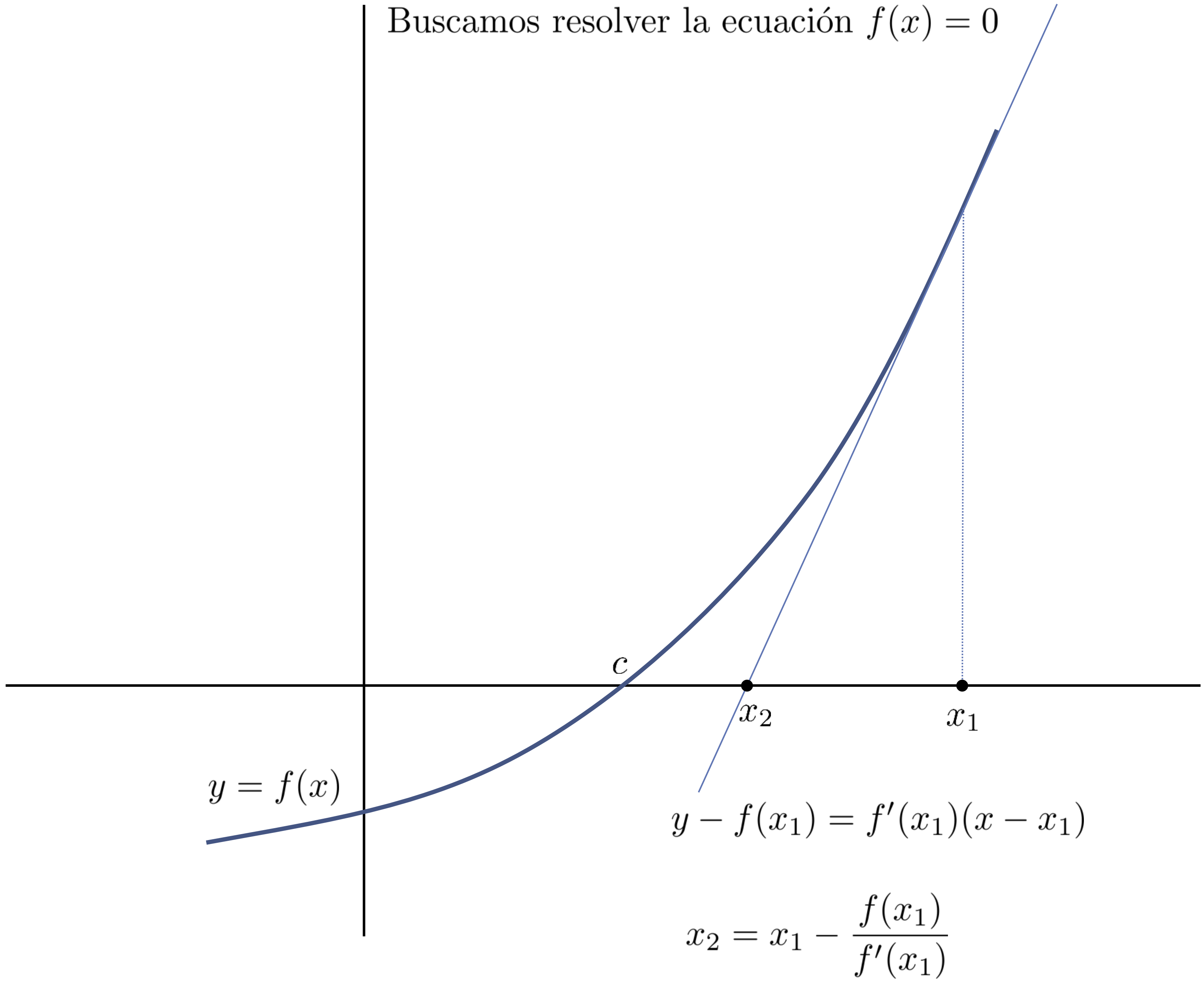
$f'(x) = 3x^2 + 1$ es estrictamente creciente para todo $x \in \mathbb{R}$

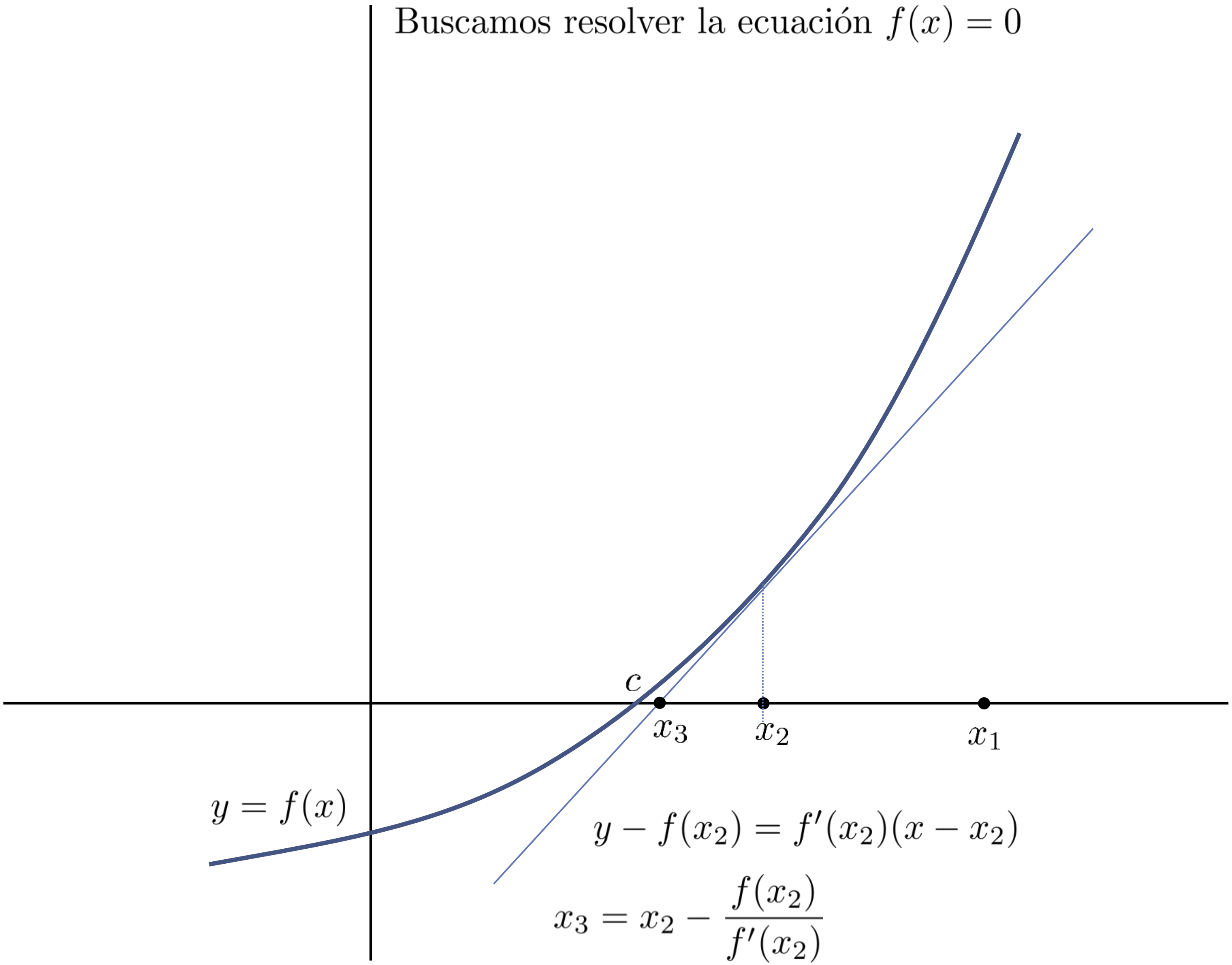
$\Longrightarrow$ Existe un único $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$

Como $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, la raíz está dentro del intervalo $[1, 2]$

n	a_n	b_n	$p_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	$f(p_n)$	$error = \dfrac{b_n - a_n}{2}$
1	1	2	1.5	1.875	0.5
2	1	1.5	1.25	0.203125	0.25
3	1	1.25	1.125	-0.451172	0.125
4	1.125	1.25	1.1875	-0.137939	0.0625
5	1.875	1.25	1.21875	0.02902	0.03125
6	1.875	1.21875	1.203125	-0.05534	0.015625
7	1.203135	1.21875	1.210937	-0.01338	0.0078125
8	1.210937	1.21875	1.214843	0.00776	0.0039065

$$c \approx 1.213411663\ldots$$


Buscamos resolver la ecuación $f(x) = 0$
c
x_2
x_1
$y = f(x)$
$y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$
$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$


Buscamos resolver la ecuación $f(x) = 0$
c
x_3
x_2
x_1
$y = f(x)$
$y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$
$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

El método de Newton da lugar a una sucesión de aproximaciones

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ ,\ x_n,\ \ldots$$

Si la sucesión converge a c entonces c es un cero de la función f

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c$$

Para aproximar c:

- Hacemos una estimación x_1 próxima a c
- Determinamos una nueva estimación $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
- Si $|x_{n+1} - x_n| < \epsilon$, siendo ϵ la precisión deseada,
  tomamos $c = x_{n+1}$, en caso contrario determinamos una nueva iteración

Ventaja del método de Newton-Raphson:

- velocidad de convergencia: $|x_{n+1} - c| \leqslant K|x_n - c|^2$

EJEMPLO

Hallar el punto de corte de las gráficas de las funciones $g(x) = e^{-x}$ y $h(x) = \ln x$.

$$e^{-x} = \ln x \quad \longleftrightarrow \quad e^{-x} - \ln x = 0$$

Luego estamos buscando ceros de la función $f(x) = e^{-x} - \ln x$

Veamos que la función f solamente tiene un cero:

$$f'(x) = -e^{-x} - \frac{1}{x} < 0 \quad \text{para todo } x > 0$$

Luego existe un único $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c) = 0$

EJEMPLO

Hallar el punto de corte de las gráficas de las funciones $g(x) = e^{-x}$ y $h(x) = \ln x$.

$f(x) = e^{-x} - \ln x$ $\qquad x_1 = 1$

n	x_n	$e^{-x_n} - \ln x_n$	$-e^{-x_n} - \dfrac{1}{x_n}$	x_{n+1}
1	1	$0,367879$	$-1,367879$	$1,268941$
2	$1,268941$	$0,042946$	$-1,069187$	$1,309108$
3	$1,309108$	0,000714	$-1,033939$	$1,309799$

$$c = 1,30979958\ldots$$

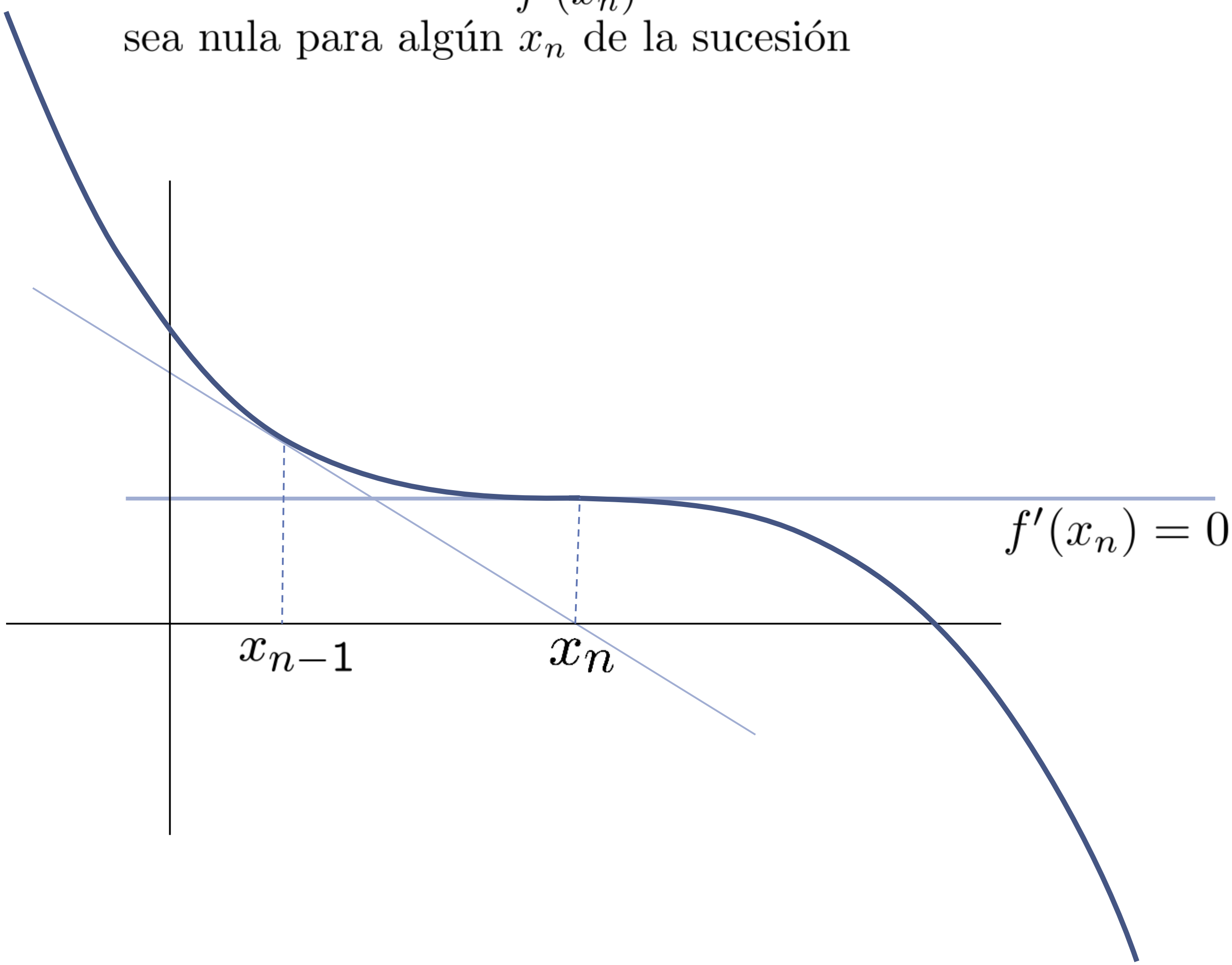
Ventaja del método de Newton-Raphson:

- velocidad de convergencia: $|x_{n+1} - c| \leqslant K|x_n - c|^2$

Desventajas del método de Newton-Raphson:

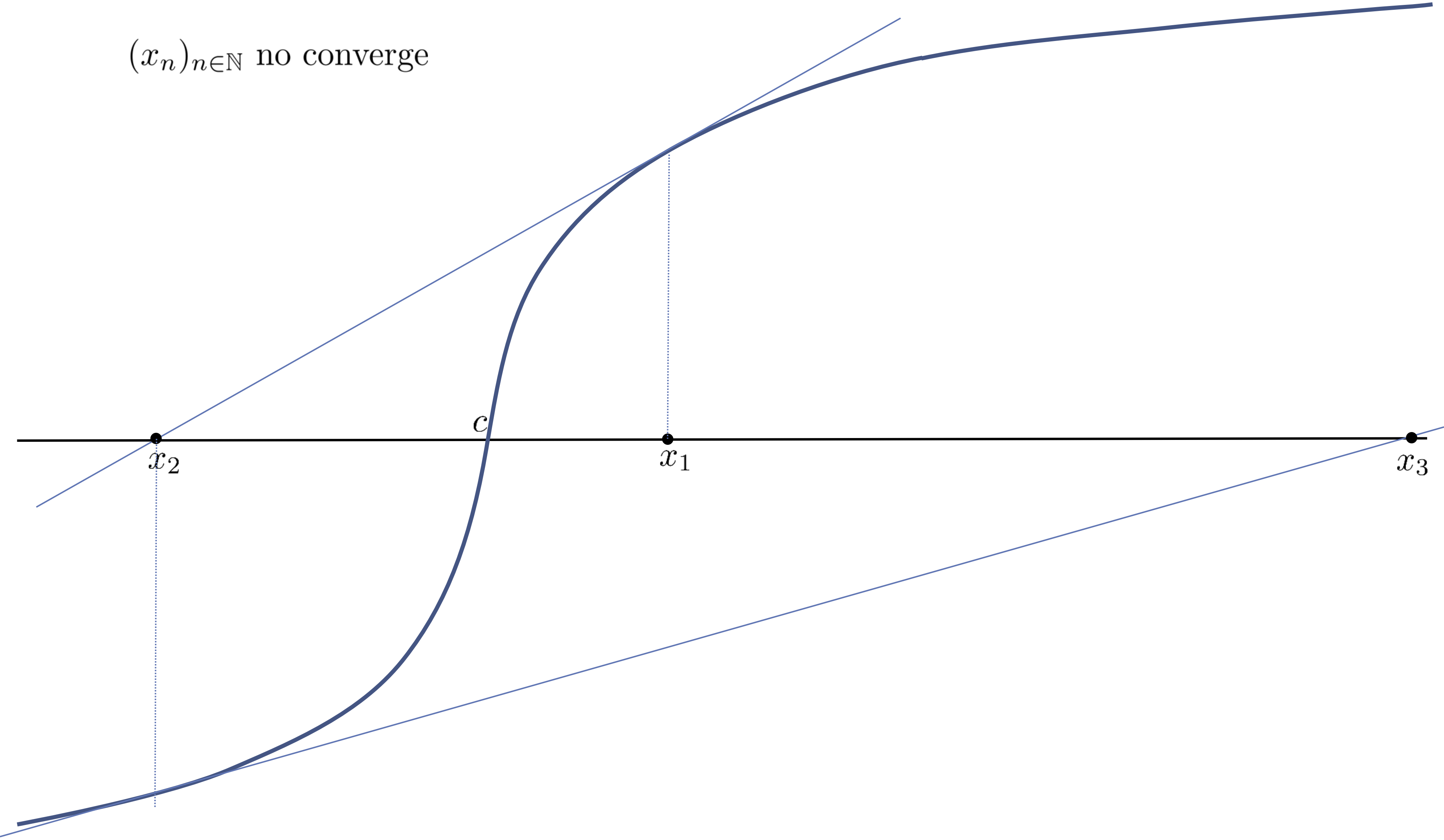
- La función f debe ser derivable
- Si la derivada se anula en algún x_n el método se "para"
- En algunos casos la sucesión construida no converge o no converge a la raíz buscada

Como $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ el método fallará cuando la derivada $f'(x_n)$ sea nula para algún x_n de la sucesión



Este problema puede solucionarse cambiando el x_1 inicial

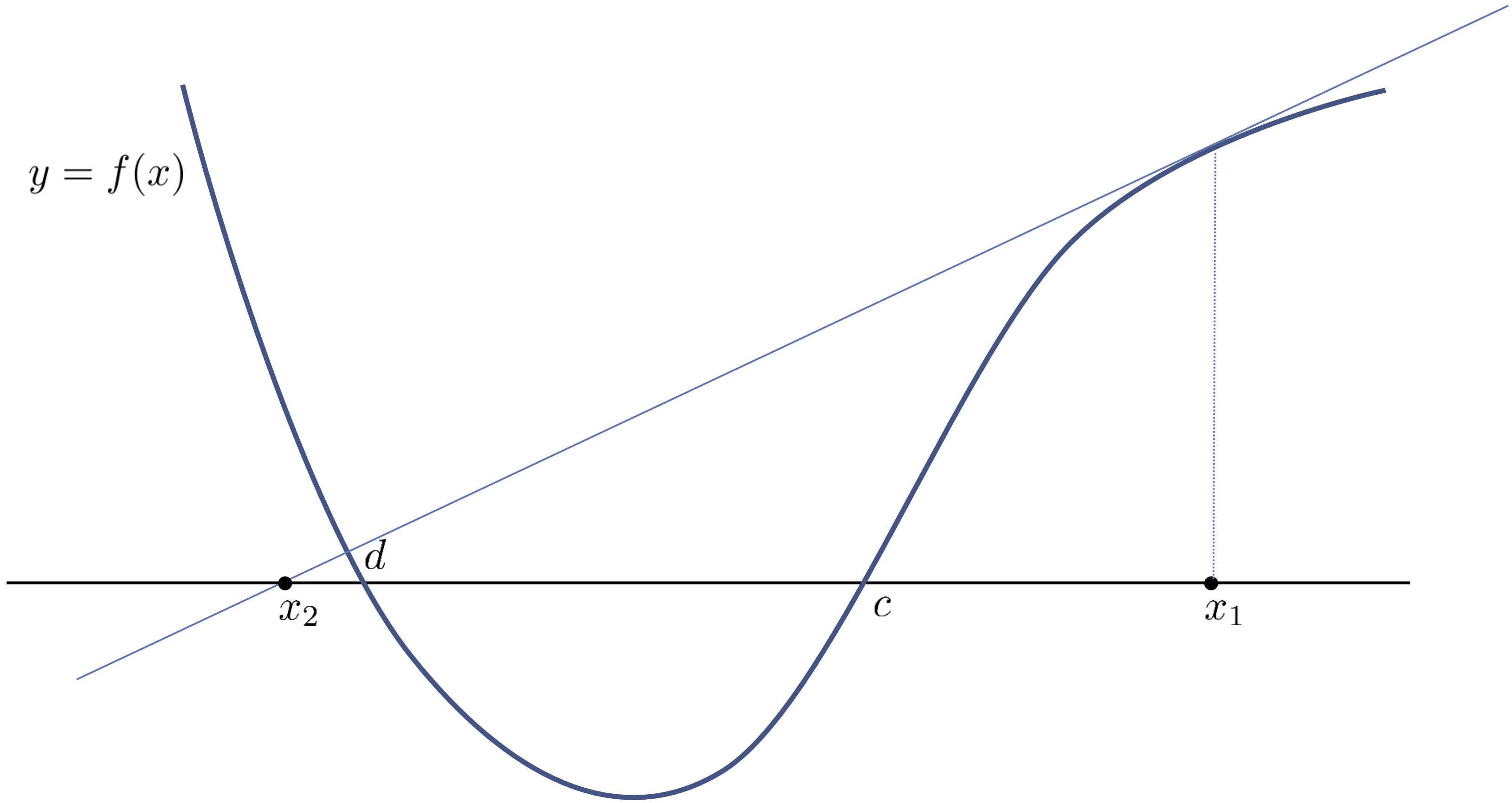
$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ no converge



EJEMPLO

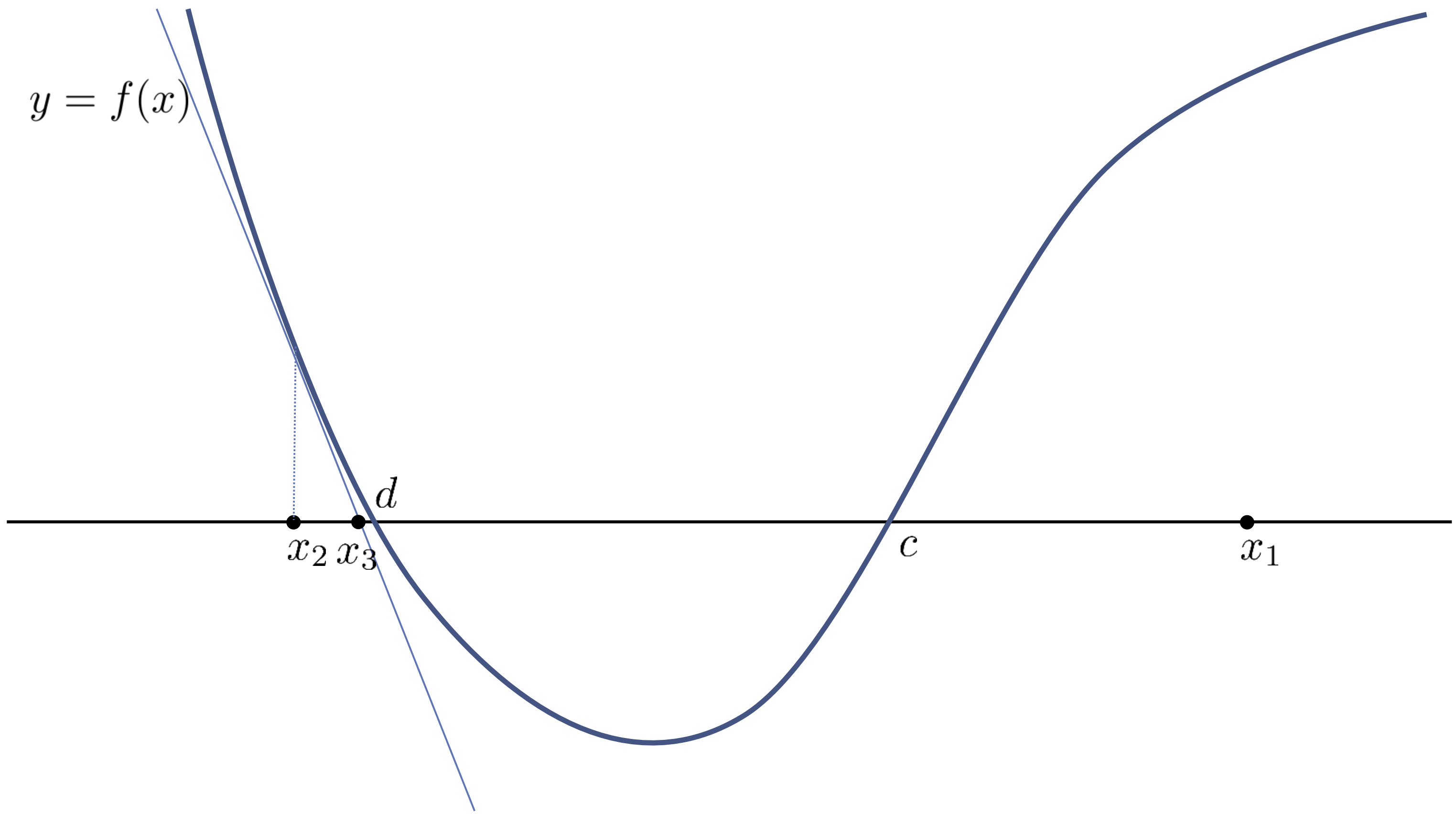
Tomando $x_1 = 0.1$, comprobar que el método de Newton no converge para $f(x) = \sqrt[3]{x}$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	0.10000	0.46416	1.54720	0.30000	-0.20000
2	-0.20000	-0.58480	0.97467	-0.60000	0.40000
3	0.40000	0.73681	0.61401	1.20000	-0.80000
4	-0.80000	-0.92832	0.38680	-2.40000	1.60000



$y = f(x)$
d
x_2
c
x_1

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a d



Teorema de convergencia del método de NEWTON-RAPHSON

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que

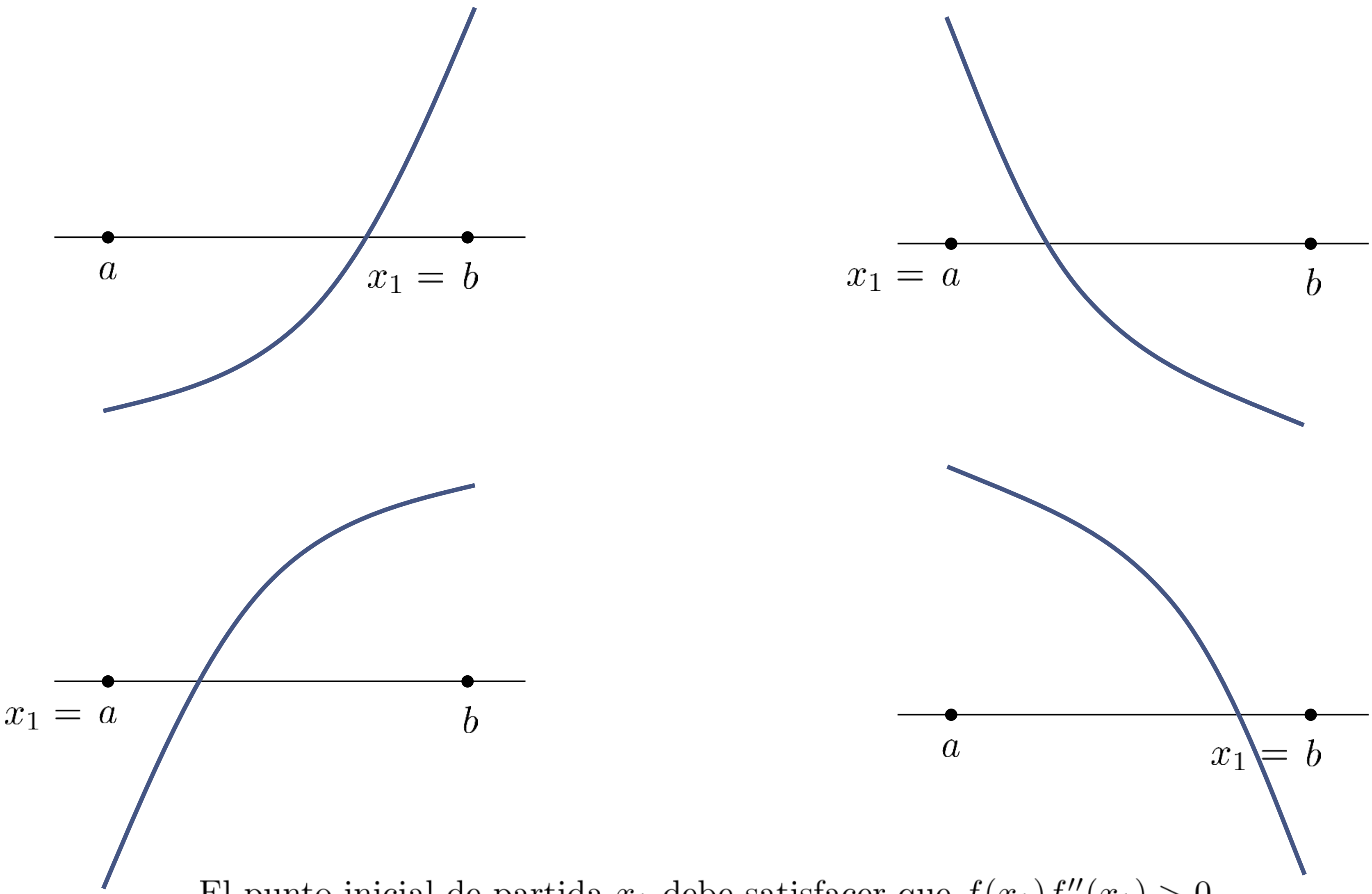
- f es dos veces derivable en $[a,b]$ y f'' es continua en $[a,b]$
- $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$
- $f''(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$

Entonces, si x_1 es el punto extremo del intervalo $[a,b]$ que satisface $f(x_1) \cdot f''(x_1) > 0$, la sucesión definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

converge al único $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$

Teorema de convergencia del método de Newton-Raphson



El punto inicial de partida x_1 debe satisfacer que $f(x_1)f''(x_1) > 0$

EJEMPLO

Determinar si la función $f(x) = e^x + x - 2$ satisface en el intervalo $[0, 1]$ las condiciones del Teorema de convergencia del método de Newton-Raphson. Indicar un punto inicial x_1 tal que la sucesión dada por el método de Newton-Raphson para f y dicho valor inicial converja al único cero de f en el intervalo $[0, 1]$.

- f es infinitas veces derivable en $[0, 1]$
- $f'(x) = e^x + 1 > 0 \quad$ para todo $x \in [0, 1]$
- $f''(x) = e^x > 0 \quad$ para todo $x \in [0, 1]$
- $f(0) = -1 < 0, \quad f(1) = e - 1 > 0$

Por el Teorema de convergencia de Newton-Raphson, si se toma $x_1 = 1$, la sucesión dada por dicho método converge al único cero de f en $[0, 1]$.

EJEMPLO

Determinar si la función $f(x) = e^x + x - 2$ satisface en el intervalo $[0, 1]$ las condiciones del Teorema de convergencia del método de Newton-Raphson. Indicar un punto inicial x_1 tal que la sucesión dada por el método de Newton-Raphson para f y dicho valor inicial converja al único cero de f en el intervalo $[0, 1]$.

n	x_n	$e^{x_n} + x_n - 2$	$e^{x_n} + 1$	x_{n+1}
1	1	$1,718281$	$3,718281$	$0,537882$
2	$0,537882$	$0,250258$	$2,712376$	$0,445616$
3	$0,445616$	0,007067	$2,561451$	$0,442856$
4	$0,442856$	$0,000004$	$2,557148$	$0,442854$

$$c = 0,44285440\ldots$$

EJEMPLO

Determinar si la función $f(x) = \ln x - \dfrac{5}{x}$ satisface en el intervalo $[e, e^2]$ las condiciones del Teorema de convergencia del método de Newton-Raphson. Indicar un punto inicial x_1 tal que la sucesión dada por el método de Newton-Raphson para f y dicho valor inicial converja al único cero de f en el intervalo $[e, e^2]$.

- f es infinitas veces derivable en $[e, e^2]$
- $f'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{x^2} > 0 \quad$ para todo $x \in [e, e^2]$
- $f''(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{10}{x^3} < 0 \quad$ para todo $x \in [e, e^2]$
- $f(e) = 1 - \dfrac{5}{e} < 0, \quad f(e^2) = 2 - \dfrac{5}{e^2} > 0$

Por el Teorema de convergencia de Newton-Raphson, si se toma $x_1 = e$, la sucesión dada por dicho método converge al único cero de f en $[e, e^2]$.

EJEMPLO

Determinar si la función $f(x) = \ln x - \dfrac{5}{x}$ satisface en el intervalo $[e, e^2]$ las condiciones del Teorema de convergencia del método de Newton-Raphson. Indicar un punto inicial x_1 tal que la sucesión dada por el método de Newton-Raphson para f y dicho valor inicial converja al único cero de f en el intervalo $[e, e^2]$.

n	x_n	$e^{x_n} + x_n - 2$	$e^{x_n} + 1$	x_{n+1}
1	e	$-0,839397$	$1,044555$	$3,521874$
2	$3,521874$	$-0,160705$	$0,687048$	$3,755780$
3	$3,755780$	$-0,007985$	$0,620718$	$3,768644$
4	$3,768644$	$-0,000021$	$0,617393$	$3,768679$

$$c = 3,76867946\ldots$$

EJEMPLO

Sea $f(x) = \ln x - 2x + 4$. Para cada uno de los ceros de f, proporcione un valor inicial tal que la sucesión definida por el método de Newton-Raphson para f y dicho valor inicial converja a dicho cero.

$$f'(x) = \frac{1}{x} - 2$$

$(0, \frac{1}{2})$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
$\nearrow$	$\searrow$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}$$

$$f(e^{-4}) = -2e^{-4}$$

$$f(e^{-1}) = 3 - \frac{2}{e}$$

Para hallar el cero de f en el intervalo $[e^{-4}, e^{-1}]$ podemos tomar $x_1 = e^{-4}$

$$f(1) = 2$$

$$f(e) = 5 - 2e$$

Para hallar el cero de f en el intervalo $[1, e]$ podemos tomar $x_1 = e$

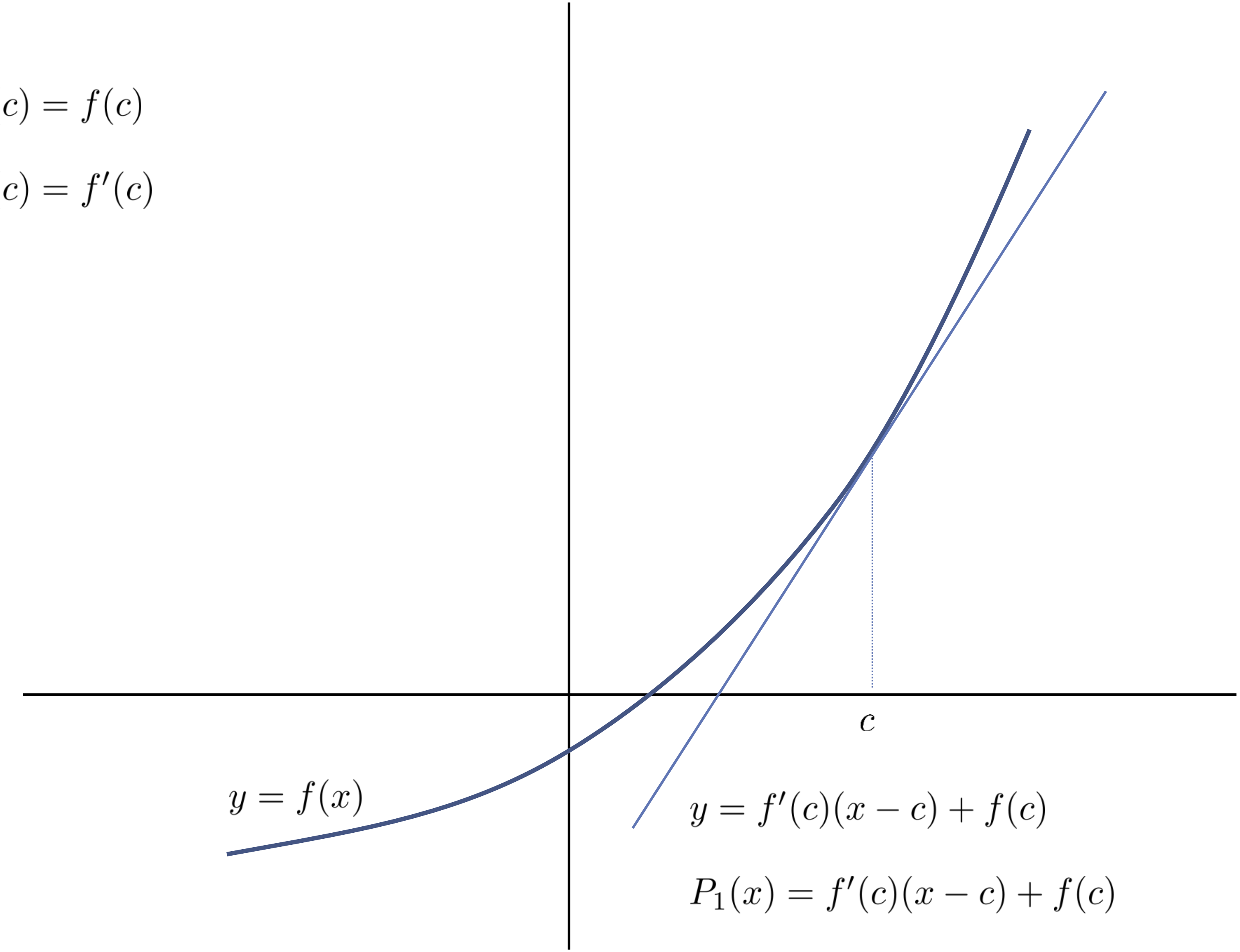
Polinomios

de

TAYLOR

$$P_1(c) = f(c)$$

$$P_1'(c) = f'(c)$$



¿Y si buscamos P_2 verificando las siguientes condiciones?

$$P_1(c) = f(c) \qquad\qquad P_2(c) = f(c)$$

$$P_1'(c) = f'(c) \qquad\qquad P_2'(c) = f'(c)$$

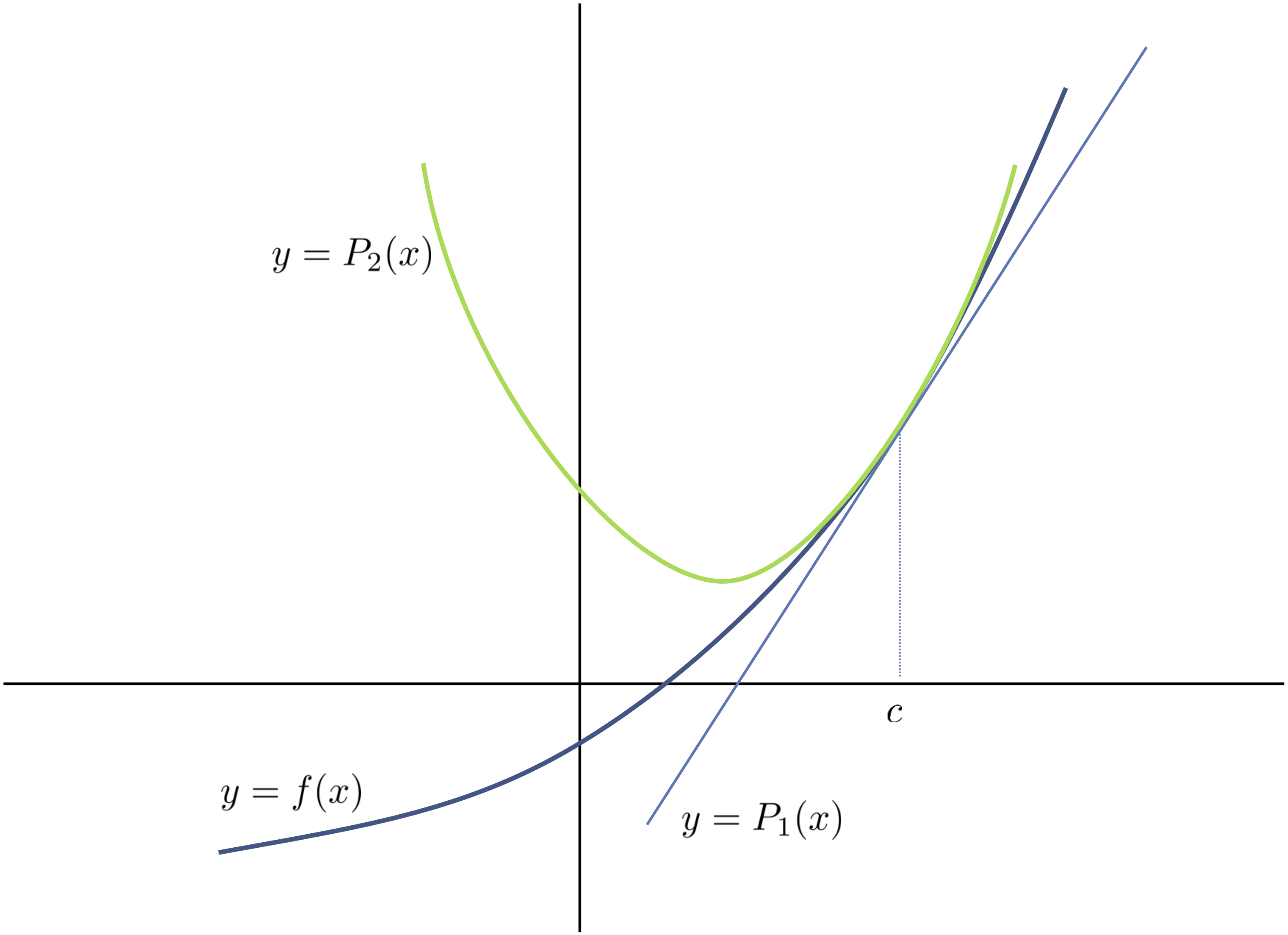
$$P_2''(c) = f''(c)$$

Consideremos el siguiendo polinomio:

$$P_2(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2}(x-c)^2 \qquad\qquad P_2(c) = f(c)$$

$$P_2'(x) = f'(c) + f''(c)(x-c) \qquad\qquad P_2'(c) = f'(c)$$

$$P_2''(x) = f''(c) \qquad\qquad P_2''(c) = f''(c)$$



P_2 se aproxima a f, localmente cerca de c, "más" que P_1

¿Se puede extender la idea anterior para derivadas de orden mayor?

$$P_n(c) = f(c)$$

$$P_n'(c) = f'(c)$$

$$P_n''(c) = f''(c)$$

$$P_n'''(c) = f'''(c)$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$$

Recordatorio:

Si $n \in \mathbb{N}$ se define el factorial de n como

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Observad que

$$\frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

Sean $c, a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \in \mathbb{R}$. Consideramos el polinomio

$$Q(x) = a_0 + a_1(x-c) + \frac{a_2}{2!}(x-c)^2 + \frac{a_3}{3!}(x-c)^3 + \frac{a_4}{4!}(x-c)^4 + \frac{a_5}{5!}(x-c)^5 \qquad Q(c) = a_0$$

$$Q'(x) = a_1 + a_2(x-c) + \frac{a_3}{2!}(x-c)^2 + \frac{a_4}{3!}(x-c)^3 + \frac{a_5}{4!}(x-c)^4 \qquad Q'(c) = a_1$$

$$Q''(x) = a_2 + a_3(x-c) + \frac{a_4}{2!}(x-c)^2 + \frac{a_5}{3!}(x-c)^3 \qquad Q''(c) = a_2$$

$$Q'''(x) = a_3 + a_4(x-c) + \frac{a_5}{2!}(x-c)^2 \qquad Q'''(c) = a_3$$

$$Q^{(4)}(x) = a_4 + a_5(x-c) \qquad Q^{(4)}(c) = a_4$$

$$Q^{(5)}(x) = a_5 \qquad Q^{(5)}(c) = a_5$$

Supongamos que f es una función 5 veces derivable en un intervalo y que c es un punto de dicho intervalo. Buscamos un polinomio P_5 de grado menor o igual que 5 que verifique:

$$P_5(c) = f(c)$$

$$P_5'(c) = f'(c)$$

$$P_5''(c) = f''(c)$$

$$P_5'''(c) = f'''(c)$$

$$P_5^{(4)}(c) = f^{(4)}(c)$$

$$P_5^{(5)}(c) = f^{(5)}(c)$$

$$P_5(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \frac{f'''(c)}{3!}(x-c)^3 + \frac{f^{(4)}(c)}{4!}(x-c)^4 + \frac{f^{(5)}(c)}{5!}(x-c)^5$$

Supongamos que f es una función n veces derivable en un intervalo y que c es un punto de dicho intervalo. Buscamos un polinomio P_n de grado menor o igual que n que verifique:

$$P_n(c) = f(c)$$

$$P_n'(c) = f'(c)$$

$$P_n''(c) = f''(c)$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$$

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

Polinomio de Taylor de orden n de f en c

Si $c = 0$

Supongamos que f es una función n veces derivable en un intervalo y que 0 es un punto de dicho intervalo. Buscamos un polinomio P_n de grado menor o igual que n que verifique:

$$P_n(0) = f(0)$$

$$P_n'(0) = f'(0)$$

$$P_n''(0) = f''(0)$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(0) = f^{(n)}(0)$$

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Polinomio de Maclaurin de orden n de f

Calcular el polinomio de Taylor de orden 4 de $f(x) = \ln x$ en 1

$$f(x) = \ln x \qquad f(1) = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = 1$$

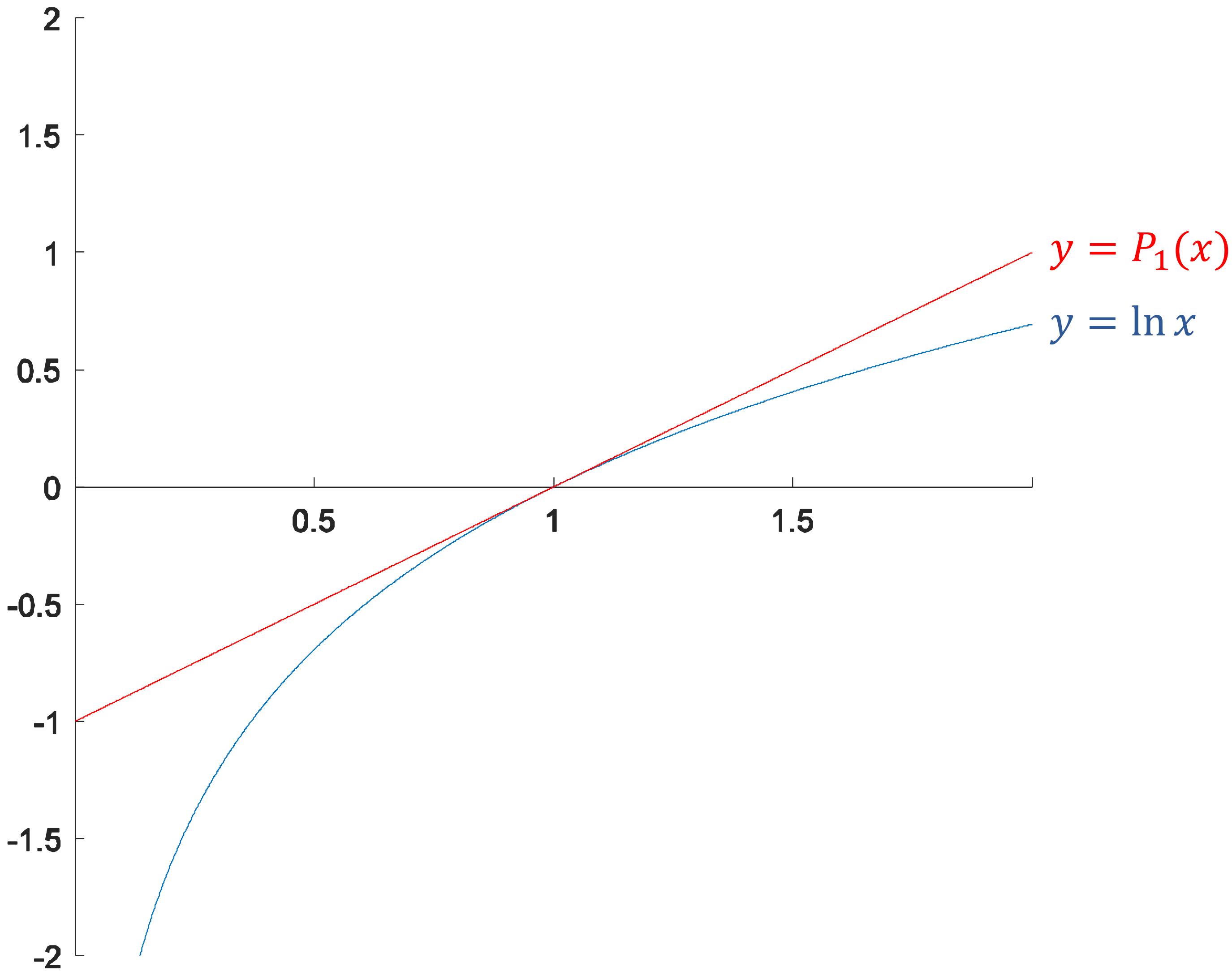
$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -1$$

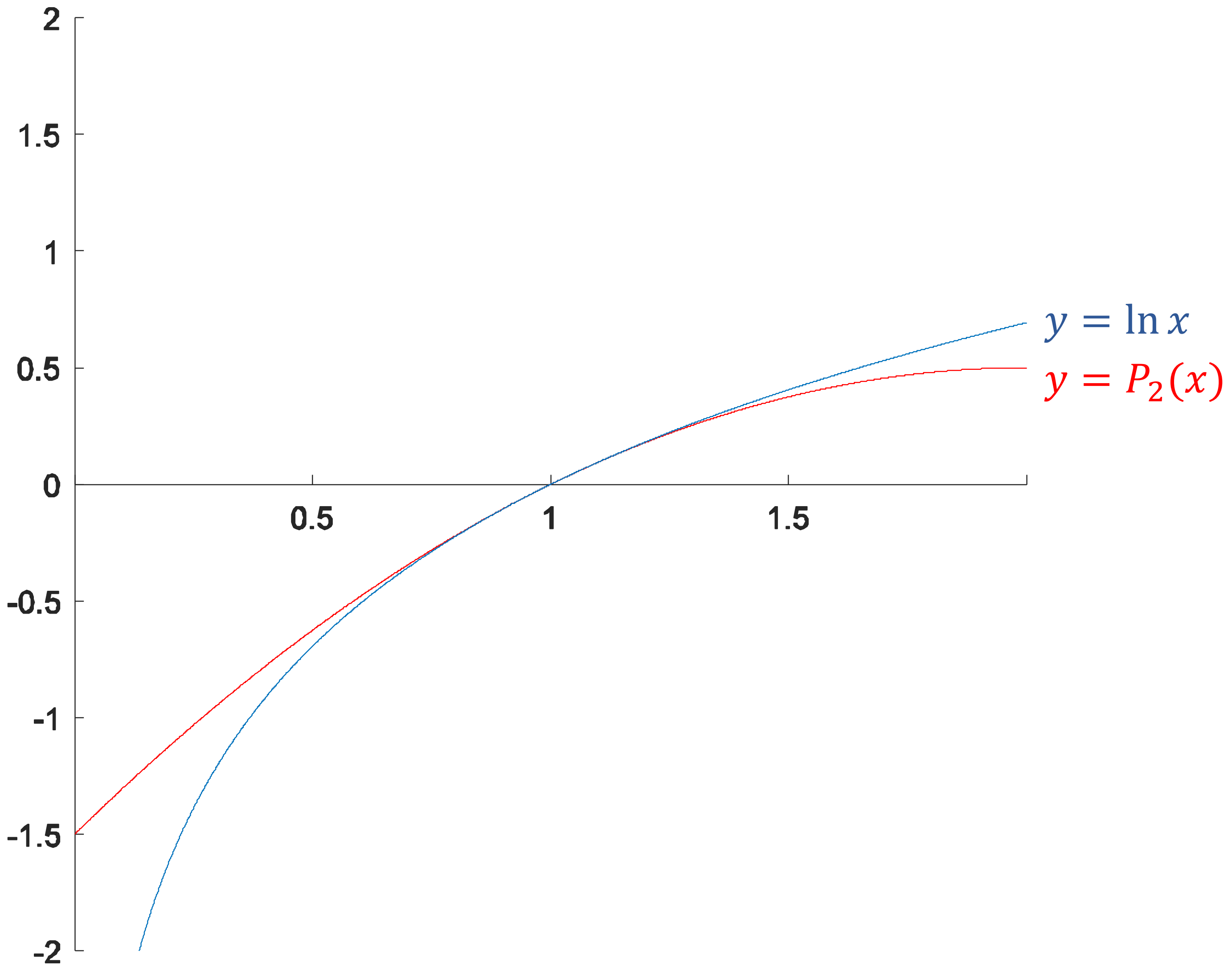
$$f'''(x) = \frac{2}{x^3} \qquad f'''(1) = 2$$

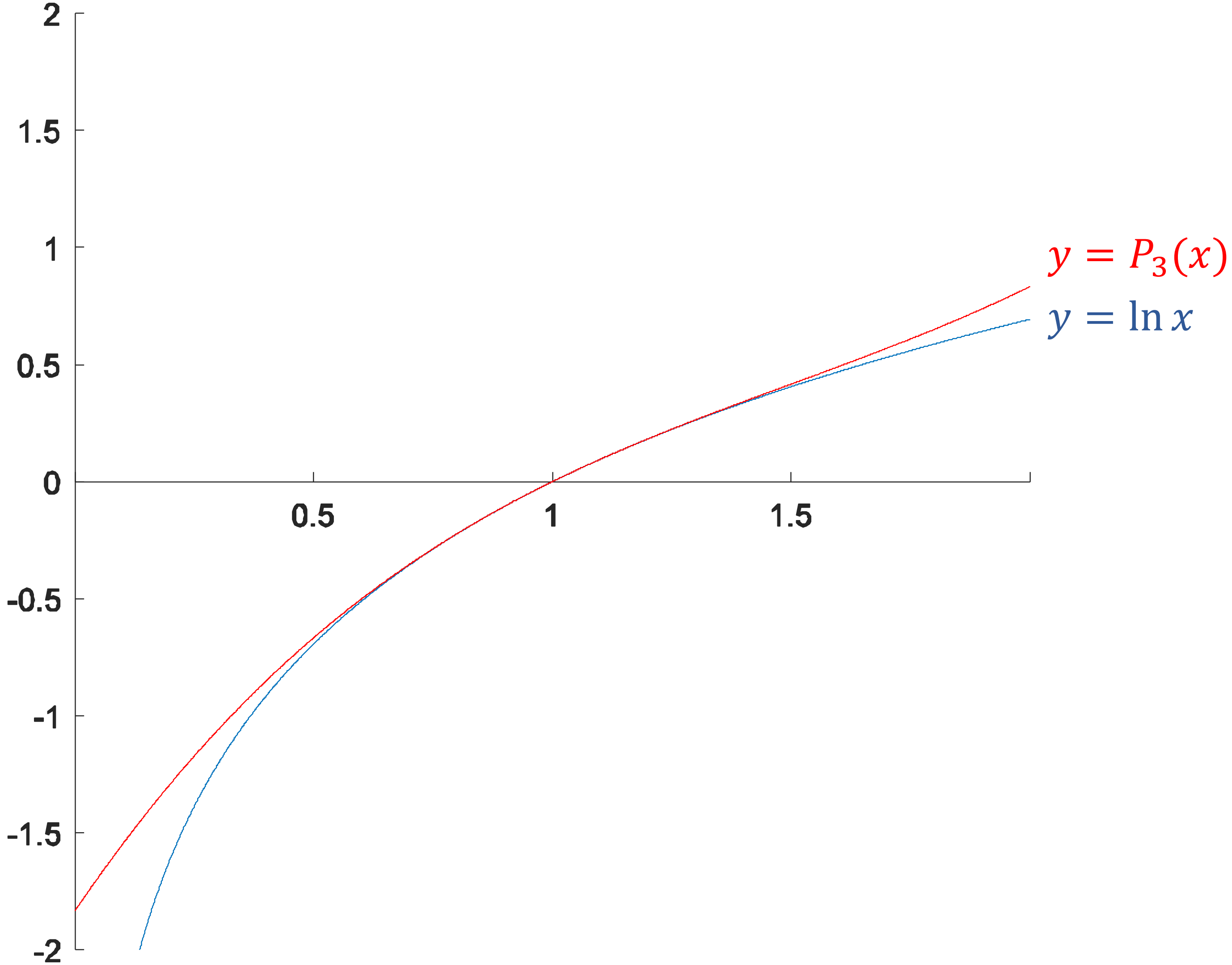
$$f^{(4)}(x) = -\frac{6}{x^4} \qquad f^{(4)}(1) = -6$$

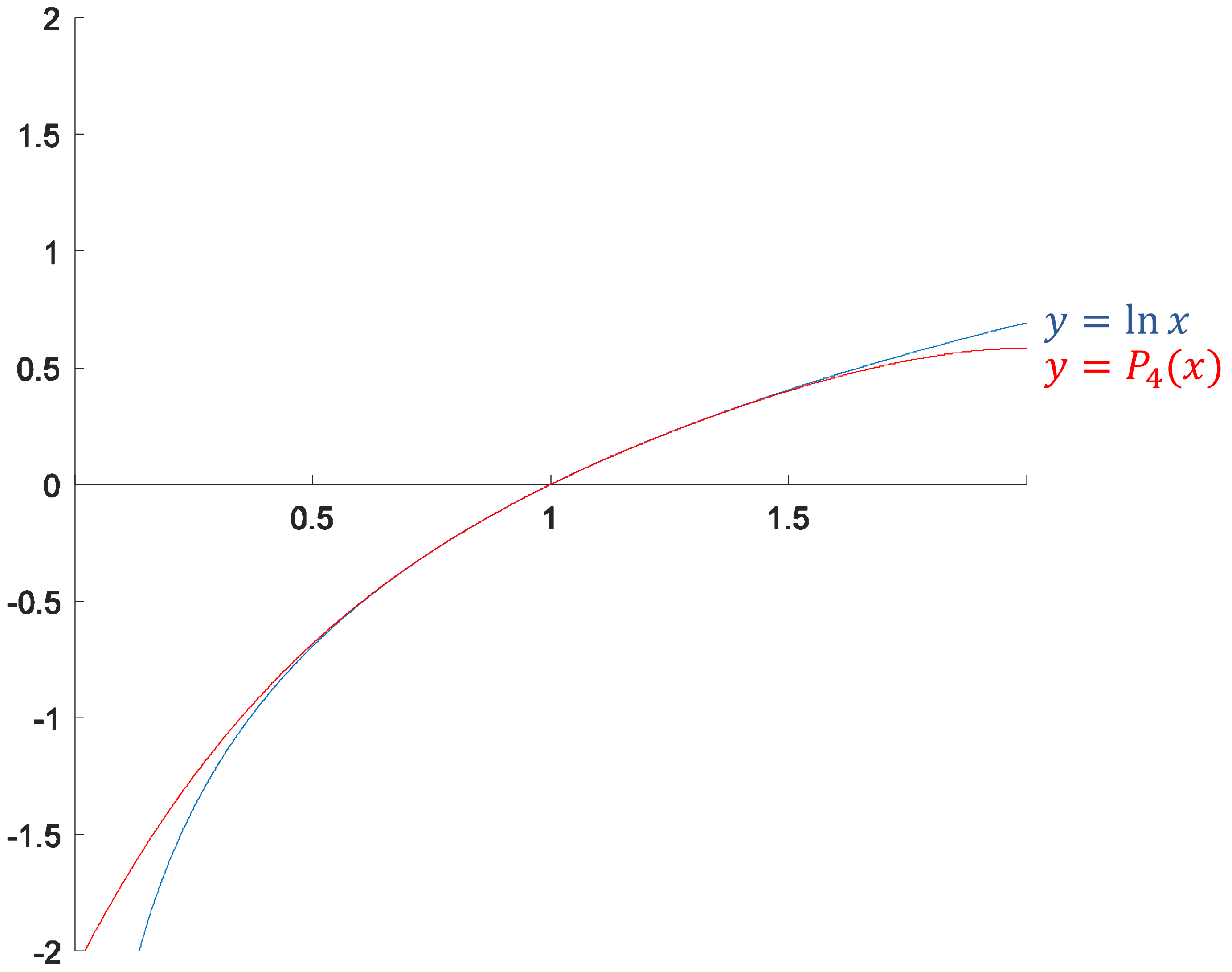
$$P_4(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

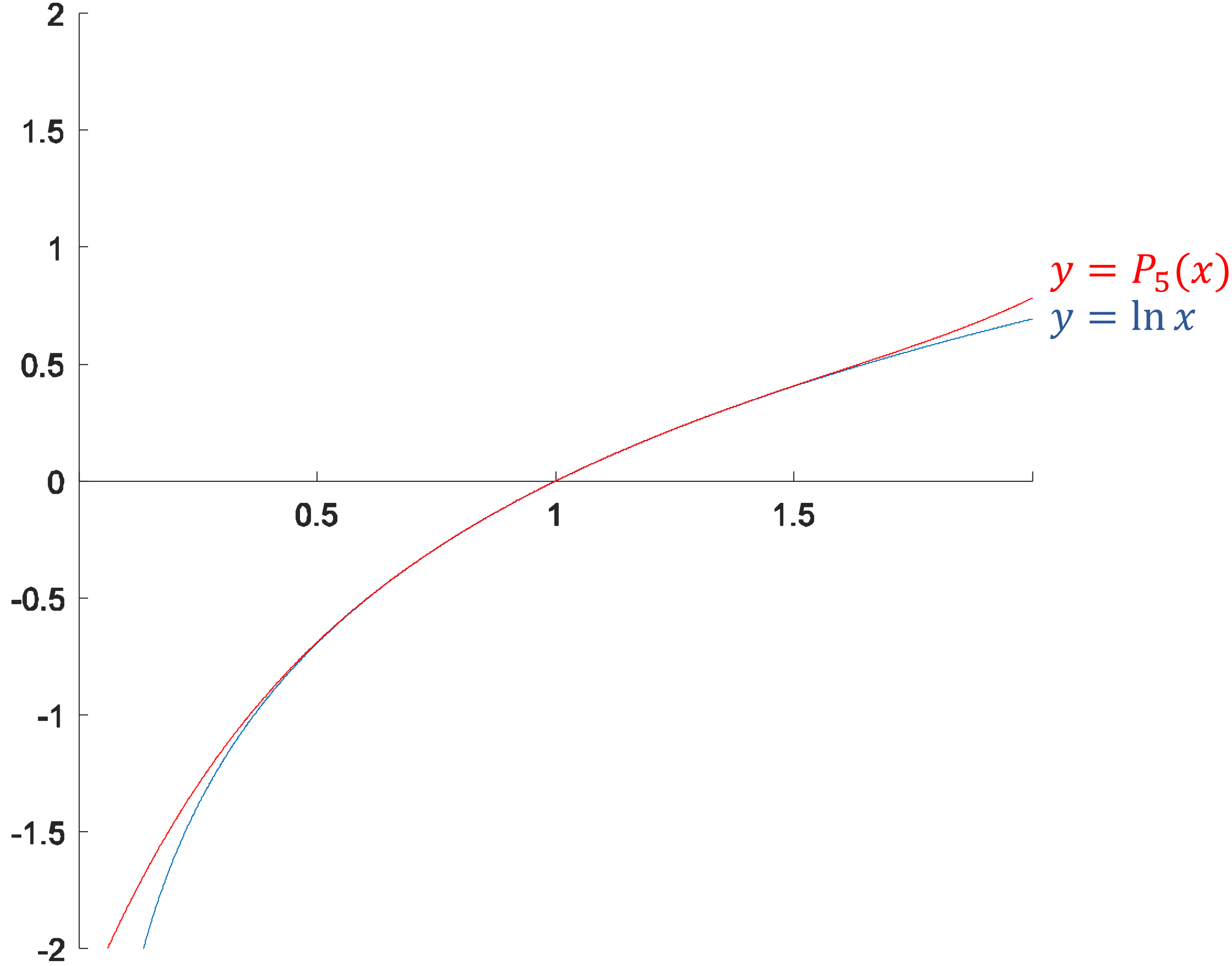
$$= (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4$$

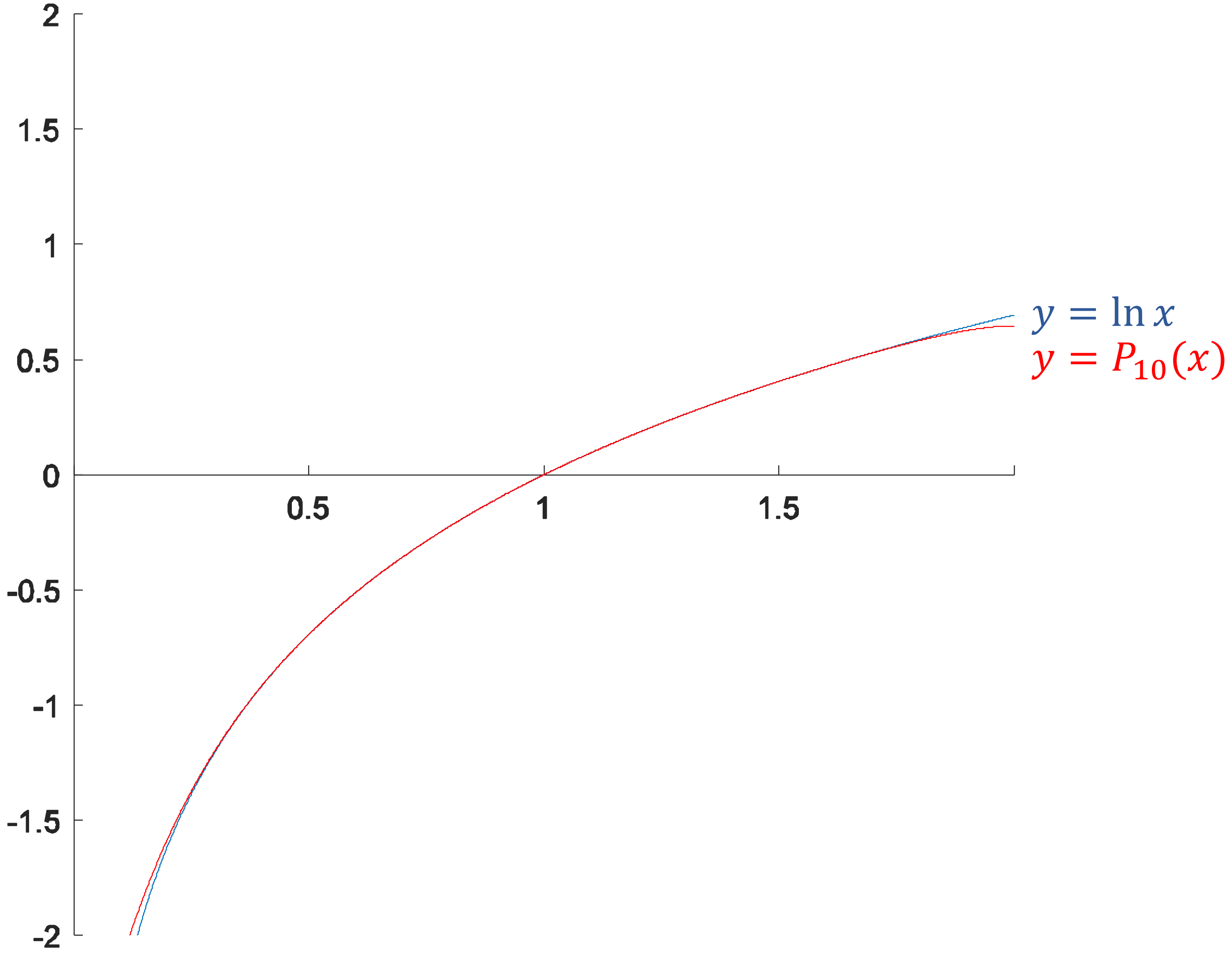

2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0.5
1
1.5
$y = P_1(x)$
$y = \ln x$

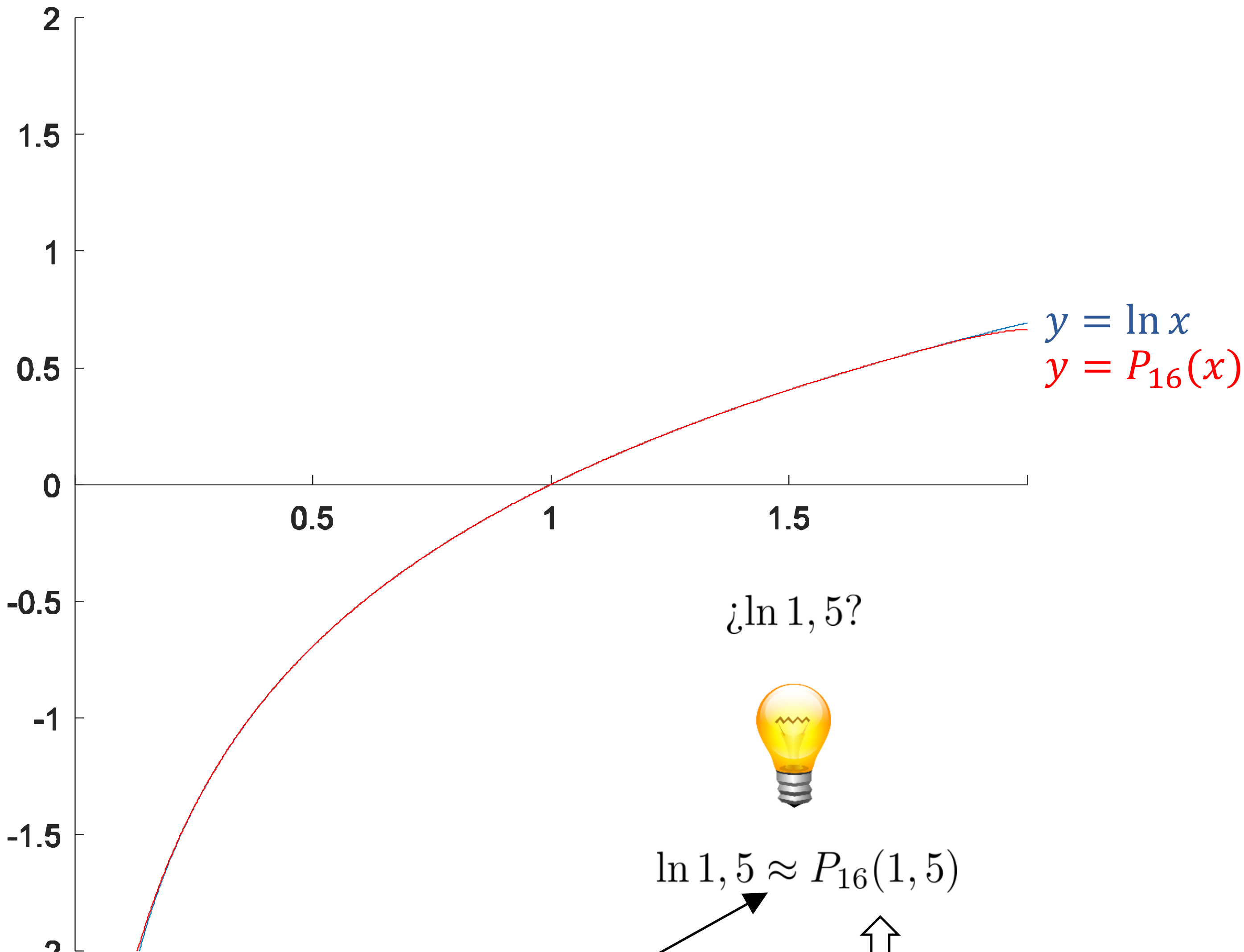

2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0.5
1
1.5
$y = \ln x$
$y = P_2(x)$


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0.5
1
1.5
$y = P_3(x)$
$y = \ln x$


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0.5
1
1.5
$y = \ln x$
$y = P_4(x)$


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0.5
1
1.5
$y = P_5(x)$
$y = \ln x$


2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
0.5
1
1.5
$y = \ln x$
$y = P_{10}(x)$



¿$\ln 1,5$?

$$\ln 1,5 \approx P_{16}(1,5)$$

pero, ¿cómo de buena es la aproximación?

más fácil de calcular

Teorema (forma de Lagrange del resto)

Sea $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que f es $n+1$ veces derivable en I. Sea $c \in I$ y P_n el polinomio de Taylor de orden n de f en c. Entonces, para cada $x \in I$ existe θ entre c y x tal que

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

EJEMPLO

Utiliza el polinomio de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = e^x$ para calcular de forma aproximada $\sqrt[3]{e}$ y dar una cota del error cometido con dicha aproximación.

$$P_5(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

Aproximamos $\sqrt[3]{e} = f\left(\frac{1}{3}\right)$ por $P_5\left(\frac{1}{3}\right)$

$$P_5\left(\tfrac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2 \cdot 2} + \frac{1}{3^3 \cdot 6} + \frac{1}{3^4 \cdot 24} + \frac{1}{3^5 \cdot 120} = \frac{5087}{3645} = 1,395610\cdots$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ tal que

$$\sqrt[3]{e} - P_5\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{f^{(6)}(\theta)}{6!} \cdot \frac{1}{3^6}$$

EJEMPLO

Utiliza el polinomio de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = e^x$ para calcular de forma aproximada $\sqrt[3]{e}$ y dar una cota del error cometido con dicha aproximación.

$$P_5(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

Aproximamos $\sqrt[3]{e} = f\left(\frac{1}{3}\right)$ por $P_5\left(\frac{1}{3}\right)$

$$P_5\left(\tfrac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2 \cdot 2} + \frac{1}{3^3 \cdot 6} + \frac{1}{3^4 \cdot 24} + \frac{1}{3^5 \cdot 120} = \frac{5087}{3645} = 1,395610\cdots$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ tal que

$$\left|\sqrt[3]{e} - P_5\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{f^{(6)}(\theta)}{6!} \cdot \frac{1}{3^6}\right|$$

EJEMPLO

Utiliza el polinomio de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = e^x$ para calcular de forma aproximada $\sqrt[3]{e}$ y dar una cota del error cometido con dicha aproximación.

$$P_5(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

Aproximamos $\sqrt[3]{e} = f\left(\frac{1}{3}\right)$ por $P_5\left(\frac{1}{3}\right)$

$$P_5\left(\tfrac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2 \cdot 2} + \frac{1}{3^3 \cdot 6} + \frac{1}{3^4 \cdot 24} + \frac{1}{3^5 \cdot 120} = \frac{5087}{3645} = 1,395610\cdots$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ tal que

$$\left|\sqrt[3]{e} - P_5\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{f^{(6)}(\theta)}{6!} \cdot \frac{1}{3^6}\right| = \frac{e^\theta}{6! \cdot 3^6}$$

EJEMPLO

Utiliza el polinomio de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = e^x$ para calcular de forma aproximada $\sqrt[3]{e}$ y dar una cota del error cometido con dicha aproximación.

$$P_5(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$
$$= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$$

Aproximamos $\sqrt[3]{e} = f\left(\frac{1}{3}\right)$ por $P_5\left(\frac{1}{3}\right)$

$$P_5\left(\tfrac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2 \cdot 2} + \frac{1}{3^3 \cdot 6} + \frac{1}{3^4 \cdot 24} + \frac{1}{3^5 \cdot 120} = \frac{5087}{3645} = 1,395610\cdots$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ tal que

$$\left|\sqrt[3]{e} - P_5\left(\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{f^{(6)}(\theta)}{6!} \cdot \frac{1}{3^6}\right| = \frac{e^\theta}{6! \cdot 3^6} < \frac{e^{\frac{1}{3}}}{6! \cdot 3^6}$$

EJEMPLO

Utiliza el polinomio de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = e^x$ para calcular de forma aproximada $\sqrt[3]{e}$ y dar una cota del error cometido con dicha aproximación.

$$\begin{aligned} P_5(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} \end{aligned}$$

Aproximamos $\sqrt[3]{e} = f\left(\frac{1}{3}\right)$ por $P_5\left(\frac{1}{3}\right)$

$$P_5\left(\tfrac{1}{3}\right) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2 \cdot 2} + \frac{1}{3^3 \cdot 6} + \frac{1}{3^4 \cdot 24} + \frac{1}{3^5 \cdot 120} = \frac{5087}{3645} = 1,395610\cdots$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in \left(0, \frac{1}{3}\right)$ tal que

$$\left| \sqrt[3]{e} - P_5\left(\frac{1}{3}\right) \right| = \left| \frac{f^{(6)}(\theta)}{6!} \cdot \frac{1}{3^6} \right| = \frac{e^\theta}{6! \cdot 3^6} < \frac{e^{\frac{1}{3}}}{6! \cdot 3^6} < \frac{2}{6! \cdot 3^6} = 0,0000038\ldots$$

En muchas ocasiones podemos usar el polinomio de Taylor de una función en un punto c para aproximar el valor de dicha función en un punto "lejano" a c. Bastará tomar un orden n suficientemente grande.

EJEMPLO

Sea $f(x) = e^x$ y P_n el polinomio de Maclaurin de orden n de f. Vamos a calcular n para que al aproximar e^{20} por $P_n(20)$ el error cometido sea menor que 10^{-10}.

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \\ &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

Aproximamos $e^{20} = f\,(20)$ por $P_n\,(20)$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in (0, 20)$ tal que

$$\left|e^{20} - P_n\,(20)\right| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \cdot 20^{n+1}\right| = \frac{e^{\theta} \cdot 20^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^{20} \cdot 20^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-10}$$

si $n \geqslant 86$

EJEMPLO

Por tanto, si $n \geqslant 86$

$$\left| e^{20} - \left(1 + 20 + \frac{20^2}{2!} + \frac{20^3}{3!} + \ldots + \frac{20^n}{n!} \right) \right| < 10^{-10}$$

Se puede probar que se verifica que

$$e^{20} = 1 + 20 + \frac{20^2}{2!} + \frac{20^3}{3!} + \frac{20^4}{4!} + \frac{20^5}{5!} + \frac{20^6}{6!} \cdots$$

Y, en general,

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} \cdots \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}$$

$$\left| e^{20} - P_n(20) \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!} \cdot 20^{n+1} \right| = \frac{e^{\theta} \cdot 20^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^{20} \cdot 20^{n+1}}{(n+1)!} < 10^{-10}$$

si $n \geqslant 86$

EJEMPLO

Utiliza el polinomio de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = \sqrt{x+9}$ para calcular de forma aproximada $\sqrt{10}$ y dar una cota del error cometido con dicha aproximación.

$$P_5(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$$

$$f(x) = \sqrt{x+9} \qquad f(0) = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+9)^{-\frac{1}{2}} \qquad f'(0) = \frac{1}{6}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(x+9)^{-\frac{3}{2}} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4\cdot 3^3}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(x+9)^{-\frac{5}{2}} \qquad f'''(0) = \frac{1}{8\cdot 3^4}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(x+9)^{-\frac{7}{2}} \qquad f^{(4)}(0) = -\frac{5}{16\cdot 3^6}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{105}{32}(x+9)^{-\frac{9}{2}} \qquad f^{(5)}(0) = -\frac{35}{32\cdot 3^8}$$

EJEMPLO

Utiliza el polinomio de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = \sqrt{x+9}$ para calcular de forma aproximada $\sqrt{10}$ y dar una cota del error cometido con dicha aproximación.

$$P_5(x) = 3 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{4 \cdot 3^3 \cdot 2!} + \frac{x^3}{8 \cdot 3^4 \cdot 3!} - \frac{5x^4}{16 \cdot 3^6 \cdot 4!} + \frac{35x^5}{32 \cdot 3^8 \cdot 5!}$$

$$f(x) = \sqrt{x+9} \qquad f(0) = 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(x+9)^{-\frac{1}{2}} \qquad f'(0) = \frac{1}{6}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(x+9)^{-\frac{3}{2}} \qquad f''(0) = -\frac{1}{4 \cdot 3^3}$$

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(x+9)^{-\frac{5}{2}} \qquad f'''(0) = \frac{1}{8 \cdot 3^4}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(x+9)^{-\frac{7}{2}} \qquad f^{(4)}(0) = -\frac{5}{16 \cdot 3^6}$$

$$f^{(5)}(x) = \frac{105}{32}(x+9)^{-\frac{9}{2}} \qquad f^{(5)}(0) = -\frac{35}{32 \cdot 3^8}$$

EJEMPLO

Utiliza el polinomio de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = \sqrt{x+9}$ para calcular de forma aproximada $\sqrt{10}$ y dar una cota del error cometido con dicha aproximación.

$$P_5(x) = 3 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{4 \cdot 3^3 \cdot 2!} + \frac{x^3}{8 \cdot 3^4 \cdot 3!} - \frac{5x^4}{16 \cdot 3^6 \cdot 4!} + \frac{35x^5}{32 \cdot 3^8 \cdot 5!}$$

$$\sqrt{10} = f(1) \approx P_5(1) = 3,16227776\ldots$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\sqrt{10} - P_5(1) = \frac{f^{(6)}(\theta)}{6!} \cdot 1^6$$

EJEMPLO

Utiliza el polinomio de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = \sqrt{x+9}$ para calcular de forma aproximada $\sqrt{10}$ y dar una cota del error cometido con dicha aproximación.

$$P_5(x) = 3 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{4 \cdot 3^3 \cdot 2!} + \frac{x^3}{8 \cdot 3^4 \cdot 3!} - \frac{5x^4}{16 \cdot 3^6 \cdot 4!} + \frac{35x^5}{32 \cdot 3^8 \cdot 5!}$$

$$\sqrt{10} = f(1) \approx P_5(1) = 3,16227776\ldots$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\left|\sqrt{10} - P_5\left(1\right)\right| = \left|\frac{f^{(6)}(\theta)}{6!} \cdot 1^6\right|$$

EJEMPLO

Utiliza el polinomio de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = \sqrt{x+9}$ para calcular de forma aproximada $\sqrt{10}$ y dar una cota del error cometido con dicha aproximación.

$$P_5(x) = 3 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{4 \cdot 3^3 \cdot 2!} + \frac{x^3}{8 \cdot 3^4 \cdot 3!} - \frac{5x^4}{16 \cdot 3^6 \cdot 4!} + \frac{35x^5}{32 \cdot 3^8 \cdot 5!}$$

$$\sqrt{10} = f(1) \approx P_5(1) = 3,16227776\ldots$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\left|\sqrt{10} - P_5(1)\right| = \left|\frac{f^{(6)}(\theta)}{6!} \cdot 1^6\right| = \frac{945}{64 \cdot 6!}(\theta + 9)^{-\frac{11}{2}}$$

EJEMPLO

Utiliza el polinomio de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = \sqrt{x+9}$ para calcular de forma aproximada $\sqrt{10}$ y dar una cota del error cometido con dicha aproximación.

$$P_5(x) = 3 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{4 \cdot 3^3 \cdot 2!} + \frac{x^3}{8 \cdot 3^4 \cdot 3!} - \frac{5x^4}{16 \cdot 3^6 \cdot 4!} + \frac{35x^5}{32 \cdot 3^8 \cdot 5!}$$

$$\sqrt{10} = f(1) \approx P_5(1) = 3{,}16227776\ldots$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\left|\sqrt{10} - P_5(1)\right| = \left|\frac{f^{(6)}(\theta)}{6!} \cdot 1^6\right| = \frac{945}{64 \cdot 6!}(\theta+9)^{-\frac{11}{2}}$$

$$\leqslant \frac{945}{64 \cdot 6!} \max\left\{(t+9)^{-\frac{11}{2}} : t \in [0,1]\right\}$$

EJEMPLO

Utiliza el polinomio de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = \sqrt{x+9}$ para calcular de forma aproximada $\sqrt{10}$ y dar una cota del error cometido con dicha aproximación.

$$P_5(x) = 3 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{4 \cdot 3^3 \cdot 2!} + \frac{x^3}{8 \cdot 3^4 \cdot 3!} - \frac{5x^4}{16 \cdot 3^6 \cdot 4!} + \frac{35x^5}{32 \cdot 3^8 \cdot 5!}$$

$$\sqrt{10} = f(1) \approx P_5(1) = 3,16227776\ldots$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\left|\sqrt{10} - P_5(1)\right| = \left|\frac{f^{(6)}(\theta)}{6!} \cdot 1^6\right| = \frac{945}{64 \cdot 6!}(\theta+9)^{-\frac{11}{2}}$$

$$\leqslant \frac{945}{64 \cdot 6!} \boxed{\max\left\{(t+9)^{-\frac{11}{2}} : t \in [0,1]\right\}}$$

Problema de cálculo de extremos absolutos

EJEMPLO

Utiliza el polinomio de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = \sqrt{x+9}$ para calcular de forma aproximada $\sqrt{10}$ y dar una cota del error cometido con dicha aproximación.

$$P_5(x) = 3 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{4 \cdot 3^3 \cdot 2!} + \frac{x^3}{8 \cdot 3^4 \cdot 3!} - \frac{5x^4}{16 \cdot 3^6 \cdot 4!} + \frac{35x^5}{32 \cdot 3^8 \cdot 5!}$$

$$\sqrt{10} = f(1) \approx P_5(1) = 3,16227776\ldots$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\left|\sqrt{10} - P_5(1)\right| = \left|\frac{f^{(6)}(\theta)}{6!} \cdot 1^6\right| = \frac{945}{64 \cdot 6!}(\theta+9)^{-\frac{11}{2}}$$

$$\leqslant \frac{945}{64 \cdot 6!} \max\left\{(t+9)^{-\frac{11}{2}} : t \in [0,1]\right\}$$

$$= \frac{945}{64 \cdot 6!} \cdot 9^{-\frac{11}{2}}$$

EJEMPLO

Utiliza el polinomio de Maclaurin de orden 5 de $f(x) = \sqrt{x+9}$ para calcular de forma aproximada $\sqrt{10}$ y dar una cota del error cometido con dicha aproximación.

$$P_5(x) = 3 + \frac{x}{6} - \frac{x^2}{4 \cdot 3^3 \cdot 2!} + \frac{x^3}{8 \cdot 3^4 \cdot 3!} - \frac{5x^4}{16 \cdot 3^6 \cdot 4!} + \frac{35x^5}{32 \cdot 3^8 \cdot 5!}$$

$$\sqrt{10} = f(1) \approx P_5(1) = 3{,}16227776\ldots$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\left|\sqrt{10} - P_5(1)\right| = \left|\frac{f^{(6)}(\theta)}{6!} \cdot 1^6\right| = \frac{945}{64 \cdot 6!}(\theta+9)^{-\frac{11}{2}}$$

$$\leqslant \frac{945}{64 \cdot 6!} \max\left\{(t+9)^{-\frac{11}{2}} : t \in [0,1]\right\}$$

$$= \frac{945}{64 \cdot 6!} \cdot 9^{-\frac{11}{2}} = \frac{945}{64 \cdot 6! \cdot 3^{11}} = 0{,}0000001157\ldots$$

EJEMPLO

Sea $f(x) = \ln(x+1)$. Determinar n para que al usar el el polinomio de Maclaurin de orden n de f para aproximar $\ln(1,2)$ el error cometido sea menor que 10^{-6}.

$$\ln(1,2) = f(0,2) \approx P_n(0,2)$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in (0,\ 0,2)$ tal que

Necesitamos la expresión de la derivada n-ésima de f

$$f(0,2) - P_n(0,2) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(0,2)^{n+1}$$

EJEMPLO

$$f(x) = \ln(x+1)$$

$$f'(x) = (x+1)^{-1}$$

$$f''(x) = -(x+1)^{-2}$$

$$f'''(x) = 2(x+1)^{-3}$$

$$f^{(4)}(x) = -2 \cdot 3(x+1)^{-4}$$

$$f^{(5)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4(x+1)^{-5}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n}$$

EJEMPLO

Sea $f(x) = \ln(x+1)$. Determinar n para que al usar el el polinomio de Maclaurin de orden n de f para aproximar $\ln(1,2)$ el error cometido sea menor que 10^{-6}.

$$\ln(1,2) = f(0,2) \approx P_n(0,2)$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in (0,\ 0,2)$ tal que

Necesitamos la expresión de la derivada n-ésima de f

$$f(0,2) - P_n(0,2) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(0,2)^{n+1}$$

EJEMPLO

Sea $f(x) = \ln(x+1)$. Determinar n para que al usar el el polinomio de Maclaurin de orden n de f para aproximar $\ln(1,2)$ el error cometido sea menor que 10^{-6}.

$$\ln(1,2) = f(0,2) \approx P_n(0,2)$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in (0,\ 0,2)$ tal que

$$f(0,2) - P_n(0,2) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(0,2)^{n+1}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n} n!(x+1)^{-n-1}$$

EJEMPLO

Sea $f(x) = \ln(x+1)$. Determinar n para que al usar el el polinomio de Maclaurin de orden n de f para aproximar $\ln(1,2)$ el error cometido sea menor que 10^{-6}.

$$\ln(1,2) = f(0,2) \approx P_n(0,2)$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in (0,\ 0,2)$ tal que

$$f(0,2) - P_n(0,2) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(0,2)^{n+1} = \frac{(-1)^n n!(\theta+1)^{-n-1}}{(n+1)!}(0,2)^{n+1}$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n-1)!(x+1)^{-n}$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^n n!(x+1)^{-n-1}$$

EJEMPLO

Sea $f(x) = \ln(x+1)$. Determinar n para que al usar el el polinomio de Maclaurin de orden n de f para aproximar $\ln(1,2)$ el error cometido sea menor que 10^{-6}.

$$\ln(1,2) = f(0,2) \approx P_n(0,2)$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in (0,\ 0,2)$ tal que

$$f(0,2) - P_n(0,2) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(0,2)^{n+1} = \frac{(-1)^n n!(\theta+1)^{-n-1}}{(n+1)!}(0,2)^{n+1}$$

$$= \frac{(-1)^n(\theta+1)^{-n-1}}{n+1}(0,2)^{n+1}$$

$$|\ln(1,2) - P_n(0,2)| = \frac{(\theta+1)^{-n-1}}{n+1}(0,2)^{n+1} \leqslant \frac{(0,2)^{n+1}}{n+1}\max\left\{(t+1)^{-n-1} : t \in [0,\ 0,2]\right\}$$

$$= \frac{(0,2)^{n+1}}{n+1} < 10^{-6} \qquad \text{si } n \geqslant 7$$

EJEMPLO

$$P_7(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5 + \frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6 + \frac{f^{(7)}(0)}{7!}x^7$$

$$f(x) = \ln(x+1) \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = (x+1)^{-1} \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -(x+1)^{-2} \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = 2(x+1)^{-3} \qquad f'''(0) = 2$$

$$f^{(4)}(x) = -2\cdot 3(x+1)^{-4} \qquad f^{(4)}(0) = -2\cdot 3$$

$$f^{(5)}(x) = 2\cdot 3\cdot 4(x+1)^{-5} \qquad f^{(5)}(0) = 2\cdot 3\cdot 4$$

$$f^{(6)}(x) = -2\cdot 3\cdot 4\cdot 5(x+1)^{-6} \qquad f^{(6)}(0) = -2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$$

$$f^{(7)}(x) = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6(x+1)^{-7} \qquad f^{(7)}(0) = 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6$$

EJEMPLO

$$P_7(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7$$

$f(x) = \ln(x+1)$	$f(0) = 0$
$f'(x) = (x+1)^{-1}$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -(x+1)^{-2}$	$f''(0) = -1$
$f'''(x) = 2(x+1)^{-3}$	$f'''(0) = 2$
$f^{(4)}(x) = -2 \cdot 3(x+1)^{-4}$	$f^{(4)}(0) = -2 \cdot 3$
$f^{(5)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4(x+1)^{-5}$	$f^{(5)}(0) = 2 \cdot 3 \cdot 4$
$f^{(6)}(x) = -2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5(x+1)^{-6}$	$f^{(6)}(0) = -2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$
$f^{(7)}(x) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6(x+1)^{-7}$	$f^{(7)}(0) = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$

EJEMPLO

$$P_7(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{7}x^7$$

$$P_7(0,2) = 0,2 - \frac{1}{2}(0,2)^2 + \frac{1}{3}(0,2)^3 - \frac{1}{4}(0,2)^4 + \frac{1}{5}(0,2)^5 - \frac{1}{6}(0,2)^6 + \frac{1}{7}(0,2)^7 = \; 0,18232182\ldots$$

$$\ln(1,2) = 0,18232155\ldots$$

EJEMPLO

Sea $f(x) = \operatorname{sen} x$. Determinar n para que al usar el el polinomio de Maclaurin de orden n de f para aproximar $\operatorname{sen}(1)$ el error cometido sea menor que 10^{-6}.

$$\operatorname{sen}(1) = f(1) \approx P_n(1)$$

Según la forma de Lagrange del resto se tiene que existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$f(1) - P_n(1) = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}(1)^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}$$

$$|\operatorname{sen}(1) - P_n(1)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!} < 10^{-6} \quad \text{si} \quad n \geqslant 9$$

Observar que al derivar sucesivamente $\operatorname{sen} x$ siempre obtenemos una de las siguientes funciones:

$$\cos x$$

$$-\operatorname{sen} x$$

$$-\cos x$$

$$\operatorname{sen} x$$

EJEMPLO

$$P_9(x) = f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4+\frac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5+\frac{f^{(6)}(0)}{6!}x^6+\frac{f^{(7)}(0)}{7!}x^7+\frac{f^{(8)}(0)}{8!}x^8+\frac{f^{(9)}(0)}{9!}x^9$$

$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$f'(0) = 1$
$f''(x) = -\operatorname{sen} x$	$f''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$f'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x$	$f^{(4)}(0) = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos x$	$f^{(5)}(0) = 1$
$f^{(6)}(x) = -\operatorname{sen} x$	$f^{(6)}(0) = 0$
$f^{(7)}(x) = -\cos x$	$f^{(7)}(0) = -1$
$f^{(8)}(x) = \operatorname{sen} x$	$f^{(8)}(0) = 0$
$f^{(9)}(x) = \cos x$	$f^{(9)}(0) = 1$

EJEMPLO

$$P_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

$$f(x) = \operatorname{sen} x \qquad f(0) = 0$$

$$f'(x) = \cos x \qquad f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$$

$$f^{(4)}(x) = \operatorname{sen} x \qquad f^{(4)}(0) = 0$$

$$f^{(5)}(x) = \cos x \qquad f^{(5)}(0) = 1$$

$$f^{(6)}(x) = -\operatorname{sen} x \qquad f^{(6)}(0) = 0$$

$$f^{(7)}(x) = -\cos x \qquad f^{(7)}(0) = -1$$

$$f^{(8)}(x) = \operatorname{sen} x \qquad f^{(8)}(0) = 0$$

$$f^{(9)}(x) = \cos x \qquad f^{(9)}(0) = 1$$

EJEMPLO

$$P_9(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!}$$

$$P_9(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} = 0,84147100\ldots$$

$$\operatorname{sen}(1) = 0,84147098\ldots$$