Estimación de errores con la diferencial

Matemáticas I EPS

Mat Aplicada II

Curso 2024-2025

Objetivo

Contexto

Muchas veces los valores con los que trabajamos y después introducimos en funciones no son exactos, sino que tienen ciertos márgenes de error.

Esto en el laboratorio puede ocurrir por la precisión del aparato o por errores humanos entre otros motivos, luego nos interesa ser capaz de estimar los errores en las mediciones y ver como se propagan al realizar operaciones con ellos.

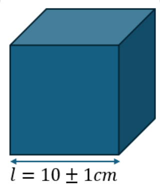
Un ejemplo

Propagación del error en el cálculo del volumen

Consideramos un cubo, del cual hemos medido que el lado mide $10cm$, con un margen de error de $1cm$. A priori el volumen del cubo sería $10^3 = 1000cm^3$.

Pero al tener dicho margen podría oscilar entre $9^3 = 729\text{cm}^3$ y $11^3 = 1331\text{cm}^3$, en este caso el error puede ser de hasta 331cm^3 (nada despreciable por cierto, un error del 10 % me puede llevar a uno del 33 % en el volumen.

Aquí podemos hacer la cuenta, pero en otras ocasiones será más fácil dar una aproximación del error, que es donde entrará en juego la diferencial.



¿Cómo estimamos el error?

A través de la recta tangente

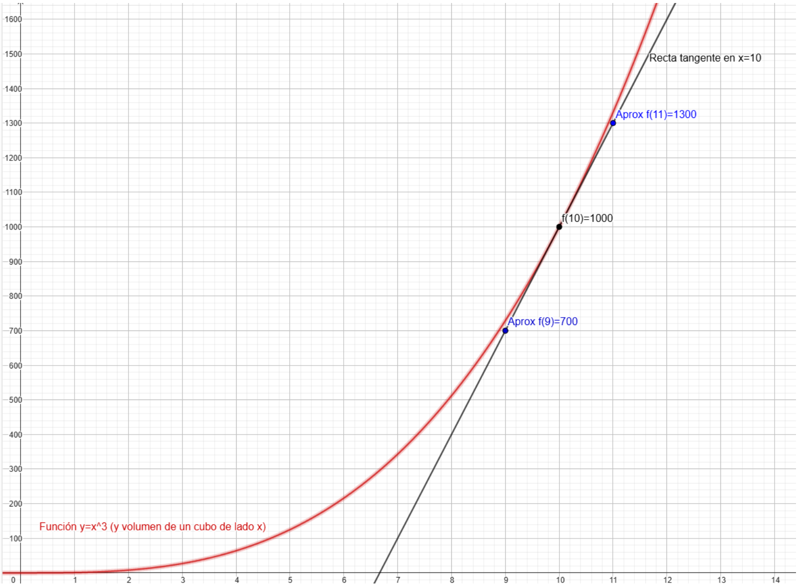
Dada una función x, buscamos aproximar $f(x \pm \Delta x)$, en el ejemplo anterior nuestra función era el volumen $V(x) = x^3$, siendo x la longitud del lado y Δx el margen de error. Luego buscaríamos aproximar $V(10 \pm 1)$.

Para ello vamos a considerar la recta tangente en el punto x y aproximaremos $f(x + \Delta x)$ por lo que vale la recta tangente a la función en x, en el punto $x \pm \Delta x$.

Dicho valor vendrá dado por $f(x) + f'(x)\Delta x$, luego estamos realizando la siguiente aproximación $f(x \pm \Delta x) \approx f(x) \pm f'(x)\Delta x$

Es normal si en abstracto te cuesta más verlo, en la siguiente diapositiva tienes gráficamente lo que estamos haciendo y luego volveremos a lo analítico, además de hacer otro ejemplo :)

Representación gráfica



Vamos a desgranar la gráfica

Explicación de la gráfica anterior

Hemos calculado la recta tangente a la función $y = x^3$ en $x = 10$, y visto cuanto vale dicha recta en $x = 9$, valiendo 700 y en $x = 11$, valiendo 1300, siendo estas respectivamente las aproximaciones de $f(9)$ y $f(11)$.

La aproximación del margen de error en el volumen será por tanto $300cm^3$, pues he obtenido un volumen de $1000 \pm 300cm^3$. (La diferencia en valor absoluto de la aproximación del volumen en $x = 9$ y $x = 11$, con respecto al de $x = 10$).

Vamos a realizarlo analíticamente

Ahora que ya lo entendemos gráficamente, volvamos a la fórmula.
Tenemos que $f(x \pm \Delta x) \approx f(x) \pm f'(x)\Delta x$. Sustituyendo en nuestro caso $x = 10$cm y $\Delta x = 1$cm llegamos a que:

$$f(10 \pm 1) \approx f(10) \pm f'(10) \cdot 1cm^3$$

$f'(x) = 3x^2$ luego $f'(10) = 300$ y sustituyendo llegamos a:

$$f(10 \pm 1) \approx f(10) \pm 300cm^3$$

Luego la estimación del margen de error es $300cm^3$ (La diferencia en valor absoluto entre el volumen para $x = 10$cm y $x = 10 \pm 1$cm).

Errores relativos y porcentuales

Nos interesa el error relativo y porcentual, no solo el absoluto

Hasta ahora hemos estado viendo el error absoluto, pero en muchas ocasiones es más últil analizar el error relativo.

El error relativo es el error absoluto dividido entre el valor sin considerar el margen de error. Y si lo multiplicamos por 100 obtenemos el error percentual.

En el ejemplo anterior el error absoluto era $300cm^3$ mientras que el error relativo sería $\frac{300}{1000} = 0{,}3$ y el percentual por tanto un $30\,\%$.

Expresiones del error relativo y porcentual

Considerando que estamos haciendo la aproximación $f(x \pm \Delta x) \approx f(x) \pm f'(x)\Delta x$, podemos obtener la estimación de los distintos errores de las siguientes formas:

$$\text{Error absoluto } E_{abs} = |f'(x)\Delta x|$$

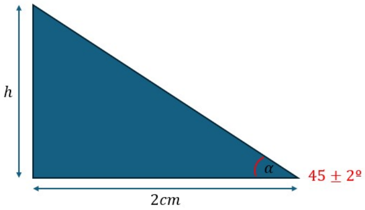
$$\text{Error relativo: } E_{rel} = \frac{E_{abs}}{f(x)}$$

$$\text{Error percentual: } E_{\%} = 100\frac{E_{abs}}{f(x)}$$

Otro ejemplo

El problema

Consideremos un triángulo rectángulo, el cual tiene el cateto opuesto de longitud $2cm$, y un ángulo de 45 ± 2 grados. Vamos a emplear la diferencial para dar una estimación del error en el cálculo de la altura.



Tenemos que $tg(\alpha) = \dfrac{h}{2}$, luego $h = 2tg(\alpha)$. La función con la que trabajaremos será $h(\alpha) = 2tg(\alpha)$.

Cálculo de los errores

Vamos a pasar los datos a radianes. Tenemos que $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ y $\Delta\alpha = \dfrac{\pi}{90}$ (Estamos manteniendo la notación del problema pero podríamos haber puesto x y Δx).

La derivada de la función es $\dfrac{1}{\cos^2(\alpha)}$ luego $h'(\dfrac{\pi}{4}) = 2$. Entonces tendremos la aproximación $f(\dfrac{\pi}{4} \pm \dfrac{\pi}{90}) \approx f(\dfrac{\pi}{4}) \pm 2\dfrac{\pi}{90}$.

Luego el error absoluto (diferencia en el posible valor de la altura h) será $\dfrac{2\pi}{90} = \dfrac{\pi}{45}$cm.

Error relativo y porcentual

También podríamos haber obtenido el error absoluto como
$E_{abs} = |h'(\alpha)\Delta\alpha| \implies E_{abs} = |h'(\frac{\pi}{4})\frac{\pi}{90}| \implies E_{abs} = \frac{\pi}{45}$cm.

El error relativo será por tanto $\dfrac{E_{abs}}{h(\alpha)} = \dfrac{\frac{\pi}{45}}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi\sqrt{2}}{90} \approx 0{,}049$.

Y el error porcentual sería $100E_{rel} \approx 4{,}9\,\%$.

Ejercicios para practicar y bibliografía

Tenéis subido en el Boletín de Ejercicios de Diferencial varios ejercicios para practicar. En algún caso nos piden hacer este proceso al revés, a partir del error absoluto/relativo/percentual, determinar cual es el error que se puede cometer en la medición.

De bibliografía disponéis también de este proceso explicado en el Cálculo I de Larson, con algunos ejemplos resueltos y muchos ejercicios para practicar si necesitaséis más.

Y por supuesto siempre nos tenéis disponible a los profesores de la asignatura para aclarar cualquier duda o resolver cualquier problema (matemático) que se os atranque.