APÉNDICE: NÚMEROS COMPLEJOS

1.1 Números complejos. Generalidades.

El número complejo.

Llamaremos **número complejo** a toda expresión de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales; i es la unidad imaginaria, definida por $i = \sqrt{-1}$ o $i^2 = -1$.

a se denomina **parte real** del número complejo.

b se denomina **parte imaginaria** del número complejo.

El **conjugado** del número complejo $z = a + bi$ es otro número complejo que se define como

$\bar{z} = a - bi$.

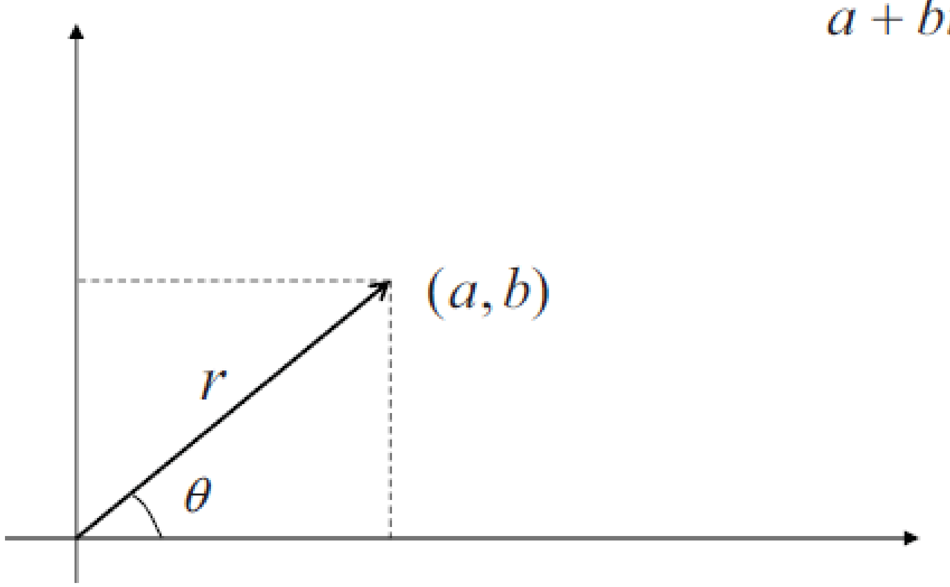
Un número se dice **imaginario puro** cuando su parte real es nula: $z = bi$.

Si $z = 0$, entonces $a = 0$ y $b = 0$.

Cuestión: Si un número complejo tiene parte imaginaria nula, ¿sigue siendo un número complejo?

1.1 Números complejos. Generalidades.

Representación gráfica de los números complejos.



$$a + bi \leftrightarrow (a,b)$$

(r,θ)

r módulo

θ argumento

Forma trigonométrica

$$a + bi = r(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)$$

$$z = a + bi \qquad r = |z| = |a + bi|$$

$$a = r\cos\theta$$

$$b = r\ \text{sen}\ \theta$$

$$r^2 = a^2 + b^2 \qquad \text{tg}\ \theta = \frac{b}{a}$$

1.1 Números complejos. Generalidades.

Formas de expresión de los números complejos.

Forma trigonométrica

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)$$

Forma polar

$$\boxed{z = r_\theta}$$

Todo número real puede escribirse en forma trigonométrica

$$a = |a|(\cos 0 + i\ \text{sen}\ 0),\ \text{si}\ a > 0$$
$$a = |a|(\cos \pi + i\ \text{sen}\ \pi),\ \text{si}\ a < 0$$

El cero se escribiría del siguiente modo

$$0 = |0|(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta), \qquad |0| = 0.$$

1.2. Operaciones con números complejos.

Operaciones básicas con números complejos.

Suma $(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$

Producto por un número real $\lambda (a + bi) = \lambda a + \lambda bi$

Producto $(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (b_1 a_2 + a_1 b_2) i$

División $$\frac{a_1 + b_1 i}{a_2 + b_2 i} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} i$$

Cuestión: ¿Cuánto valen $z - \bar{z}$, $z \cdot \bar{z}$ y $z/\bar{z}$?

1.2. Operaciones con números complejos.

Operaciones básicas con números complejos (forma trigonométrica).

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i \text{ sen } \theta_1) \qquad z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i \text{ sen } \theta_2)$$

Producto $z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \text{ sen}(\theta_1 + \theta_2)\right]$

División $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \text{ sen}(\theta_1 - \theta_2)\right]$

Cuestión: ¿operaciones en forma polar?

1.2. Operaciones con números complejos.

Propiedades

1) Propiedad conmutativa: $z + w = w + z, \quad zw = wz$

2) Propiedad asociativa: $(z + w) + v = z + (w + v), \quad (zw)v = z(wv)$

3) Propiedad distributiva: $z(w + v) = zw + zv$

4) $|z| = 0$ si y solo si $z = 0$

5) $|zw| = |z||w|$

6) $\mathrm{Re(z)} \leq |z|$ y $\mathrm{Im(z)} \leq |z|$

7) $z\bar{z} = |z|^2$

8) Desigualdad triangular: $|z + w| \leq |z| + |w|$

Cuestión: Demuestra la propiedad 7.

1.3. Potencia y raíz de números complejos.

Potencia. Fórmula de Moivre.

Sea $z = a + bi = r(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)$ y $n \in \mathbb{N}$, se verifica:

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\ \text{sen}\ n\theta)$$

Nota: Si $r = 1$, $\quad (\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)^n = \cos\ n\theta + i\ \text{sen}\ n\theta$

Si $n = 3$,

$$(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)^3 = \cos\ 3\theta + i\ \text{sen}\ 3\theta$$

$$(\cos\theta + i\ \text{sen}\ \theta)^3 = \cos^3\theta + i\ 3\cos^2\theta\,\text{sen}\ \theta - 3\cos\theta\ \text{sen}^2\theta - i\ \text{sen}^3\theta$$

$$= \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\ \text{sen}^2\theta\right) + i\ \left(3\cos^2\theta\,\text{sen}\ \theta - \text{sen}^3\theta\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos\ 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\ \text{sen}^2\theta \\ \text{sen}\ 3\theta &= 3\cos^2\theta\,\text{sen}\ \theta - \text{sen}^3\theta \end{aligned}}$$

1.3. Potencia y raíz de números complejos.

Raiz.

Sea $z = a + bi = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$, una raíz $n - sima$ de z es un número complejo $\sqrt[n]{z} = \rho(\cos\varphi + i \text{ sen } \varphi)$ tal que

$$\rho^n(\cos n\varphi + i \text{ sen } n\varphi) = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$$

$$\rho^n = r, \ n\varphi = \theta + 2k\pi$$

$$\boxed{\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n} \quad \text{donde } k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

1.4. Función exponencial y forma exponencial

Exponencial compleja.

Sea $z = x + yi$. Si x e y son variables reales, z es una variable compleja. Se define la exponencial compleja como sigue:

$$w = e^{z} = e^{x+yi} = e^{x}(\cos y + i \text{ sen } y)$$

Propiedades Si z_1 y z_2 son números complejos, se verifica:

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_2} e^{z_2}$.

2) $e^{z_1-z_2} = e^{z_2} / e^{z_2}$.

3) Si m es un número entero, $\left(e^{z}\right)^{m} = e^{mz}$.

4) $e^{z+2\pi i} = e^{z}(\cos 2\pi + i \text{ sen } 2\pi) = e^{z}$.

Cuestión: ¿qué es la exponencial compleja?

1.4. Función exponencial y forma exponencial

Fórmula de Euler.

Sea $e^{x+yi} = e^{x}(\cos y + i \text{ sen } y)$, si hacemos $x = 0$, se obtiene:

$$\boxed{e^{yi} = \cos y + i \text{ sen } y} \qquad (1)$$

expresión conocida como fórmula de Euler.

Si se cambia y por $-y$ se obtiene: $e^{-yi} = \cos(-y) + i \text{ sen}(-y)$

$$e^{-yi} = \cos y - i \text{ sen } y \qquad (2)$$

A partir de (1) y (2): $\cos y = \dfrac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}$, $\quad \text{sen } y = \dfrac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}$

1.4. Función exponencial y forma exponencial

Forma exponencial

Sea $z = a + bi = r(\cos\theta + i \text{ sen } \theta)$, a partir de la fórmula de Euler se verifica: $e^{i\theta} = \cos\theta + i \text{ sen } \theta \Longrightarrow \boxed{z = re^{i\theta}}$

Nota : Dados $z = re^{i\theta}$, $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$, se verifica:

a) $z_1 \cdot z_2 = r_1 e^{i\theta_1} \; r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

b) $z_1 \cdot / \, z_2 = \dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} \; e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$

c) $z^n = r^n \mathrm{e}^{in}\theta$ siendo n entero positivo.

d) $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \; e^{i\varphi_k}, \quad \varphi_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$

donde $k = 0, 1, \ldots, n-1$

1.4. Función exponencial y forma exponencial

Fórmula de Euler.

Nota : En forma polar, $z = r_\theta$, $z_1 = (r_1)_{\theta_1}$ y $z_2 = (r_2)_{\theta_2}$

a) $z_1 \cdot z_2 = (r_1)_{\theta_1} (r_2)_{\theta_2} = (r_1 r_2)_{\theta_1 + \theta_2}$

b) $z_1 \cdot / z_2 = \dfrac{(r_1)_{\theta_1}}{(r_2)_{\theta_2}} = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)_{\theta_1 + \theta_2}$

c) $z^n = (r^n)_{n\theta}$ siendo n entero positivo.

d) $\sqrt[n]{z} = \left(\sqrt[n]{r}\right)_{\varphi_k}$, $\varphi_k = \dfrac{\theta + 2k\pi}{n}$ donde $k = 0, 1, \ldots, n-1$

1.5. Raíces de un polinomio complejo

Teorema fundamental del Álgebra

Todo polinomio con coeficientes complejos

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0,\ n \geq 1,$$

tiene n raíces complejas (contando su multiplicidad).

Es decir, dado cualquier polinomio con coeficientes complejos con la forma $P(z)$, existen n números complejos tales que $P(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_n)$. Además, se verifica:

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}, \quad z_1 z_2 \cdots z_n = (-1)^n \frac{a_0}{a_n}.$$

1.5. Raíces de un polinomio complejo

Polinomios con coeficientes reales

Si el polinomio $P(z)$ tiene coeficientes reales

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n, \quad a_n \neq 0,\ n \geq 1,$$

Sabemos que tiene n raíces complejas (contando su multiplicidad), y además:

- Las raíces complejas no reales aparecen por pares conjugados.

- Como consecuencia, si n es impar, tendrá al menos una raíz real.

Cuestión: ¿Cuántas raíces reales puede tener el polinomio $P(z) = az^n + b$, donde a y b son números reales? ¿y si los coeficientes son números complejos?