Tema 5. Curvas en forma cartesiana.

5.1.- Límites, continuidad y derivada.
5.2.- Diferencial de una función.
5.3.- Derivación implícita.
5.4.- Crecimiento y concavidad.
5.5.- Extremos relativos y absolutos de funciones de una variable.
5.6.- Resolución numérica de ecuaciones: Métodos de bisección y de Newton.
5.7.- Polinomios de Taylor.

BIBLIOGRAFÍA: Cálculo I, de Larson, Hostetler y Edwards.

5.1.- Límites, continuidad y derivada.

DEFINICION (Concepto de limite de una funcion en un punto)

Si $f(x)$ se hace arbitrariamente próximo a un único número L cuando x se aproxima a c por ambos lados, decimos que el límite de $f(x)$ cuando x tiende a c es L, y escribimos: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$

PROPOSICION

Si b y c son números reales, n un número entero y f y g funciones que tienen límite cuando $x \to$ c, entonces:

1) $\lim\limits_{x\to c}[bf(x)] = b[\lim\limits_{x\to c} f(x)]$

2) $\lim\limits_{x\to c}[f(x) \pm g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x) \pm \lim\limits_{x\to c} g(x)$

3) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\bullet g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x)\bullet\lim\limits_{x\to c} g(x)$

4) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)]^n = [\lim\limits_{x\to c} f(x)]^n$

5) $\lim\limits_{x\to c}[f(x)/g(x)] = \lim\limits_{x\to c} f(x)/\lim\limits_{x\to c} g(x), \quad (\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0)$

6) $\lim\limits_{x\to c} g(x) = L$ y $\lim\limits_{x\to L} f(x) = f(L)$, entonces $\lim\limits_{x\to c} f(g(x)) = f(L)$

7) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{x\to c^-} f(x) = \lim\limits_{x\to c^+} f(x) = L$

DEFINICIONES

1) $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \infty$ indica que el límite no existe y que $f(x)$ tiene un comportamiento no acotado cuando x tiende c.

2) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = L$ indica que cuando x crece/decrece "sin tope" la función $f(x)$ se aproxima a L.

5.1.- Límites, continuidad y derivada.

DEFINICIONES (Continuidad)

a) Una función f es continua en un punto c cuando $\lim_{x\to c} f(x) = f(c)$.

b) Una función f es continua en el intervalo (a,b) si lo es en todos los puntos del intervalo.

c) Una función f es continua en el intervalo $[a,b]$ si es continua en el intervalo (a,b) y además $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$ y $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$.

PROPOSICION

a) Si b es un número real y f y g son continuas en $x=c$, tambien son continuas en c las funciones:

1) bf 2) $f \pm g$ 3) $f \bullet g$ 4) f/g si $g(c) \neq 0$.

b) Si g es continua en c y f lo es en $g(c)$, la función compuesta dada por $f \circ g$ es continua en $x=c$: $\lim_{x\to c} f(g(x)) = f(g(c))$.

Nota :

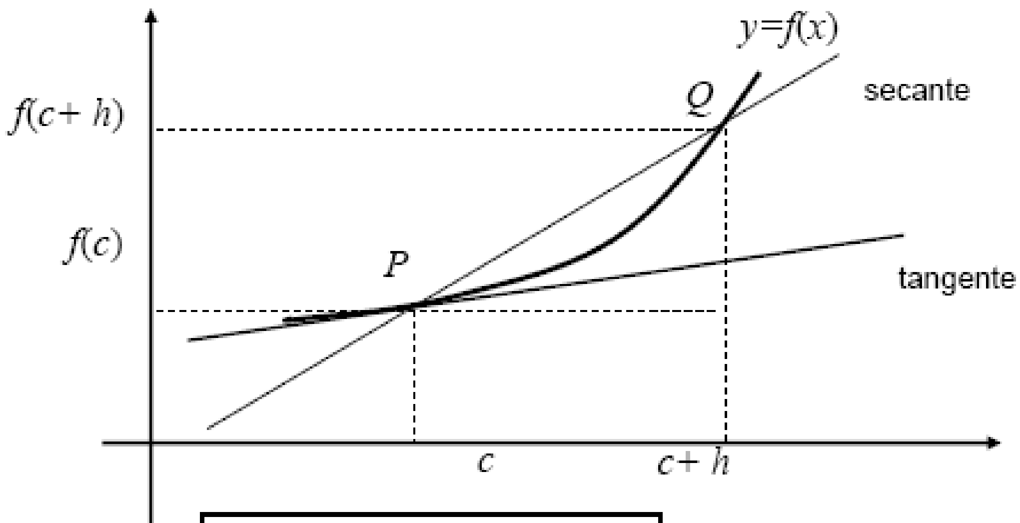
Las discontinuidades se dividen en dos categorias: evitables y no evitables.

Una discontinuidad en $x=c$ es evitable si f puede hacerse continua redefiniéndose en $x=c$.

5.1.- Límites, continuidad y derivada.

Definición

La derivada de f en c es $f'(c) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(c+h) - f(c)}{h}$, supuesto que este límite exista. En este caso, de dice que f es derivable en $x = c$.



Ecuacion recta tangente: $\boxed{y - f(c) = f'(c)(x - c)}$

$f'(c)$ es la pendiente de la recta tangente a la grafica de $y = f(x)$ en el punto $(c, f(c))$.

5.1.- Límites, continuidad y derivada.

Nota: Si $\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}=\pm\infty,$ siendo $f(x)$ continua en $c,$ entonces la recta tangente a la grafica de $y=f(x)$ en el punto $(c,f(c))$ es $\boxed{x=c.}$

<u>Derivadas laterales</u>

$$f'(c^{+})=\lim_{h\to 0^{+}}\frac{f(c+h)-f(c)}{h},\ \text{derivada lateral por la derecha en } x=c.$$

$$f'(c^{-})=\lim_{h\to 0^{-}}\frac{f(c+h)-f(c)}{h},\ \text{derivada lateral por la izquierda en } x=c.$$

Proposición

Una función f es derivable en $x=c$ si y sólo si existen y coinciden en dicho punto las derivadas laterales de f. Es decir, $f'(c^{+})=f'(c^{-})$.

Proposición

Si f es derivable en $x=c,$ entonces f es continua en $x=c.$

5.1.- Límites, continuidad y derivada.

Función derivada y derivadas sucesivas

Definición

Dada una función f, se llama función derivada f' a la función que asigna a cada valor de x su derivada:

$$x \mapsto f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

siendo su dominio el conjunto de puntos en los que f es derivable.

Observaciones

1.- El dominio de f' es un subconjunto del dominio de f : $\mathrm{Dom}(f') \subseteq \mathrm{Dom}(f)$.

2.- Dada una función $y = f(x)$, la función derivada puede expresarse de varias

formas equivalentes: $\quad y',\ f'(x),\ \dfrac{df(x)}{dx},\ \dfrac{dy}{dx},\ \ldots$

3.- Una vez definida la función derivada $f'(x)$, podemos considerar su derivada

$\dfrac{df'(x)}{dx}$, y la denotaremos como: $f''(x),\ y'',\ \dfrac{d^2 f(x)}{dx^2},\ \dfrac{d^2 y}{dx^2},\ \ldots$

5.1.- Límites, continuidad y derivada.

Función compuesta y regla de la cadena

Definición

Sean f y g dos funciones. La función h dada por $h(x) = (f \circ g)(x) = f(g(x))$ se llama función compuesta de f con g.

Observación : El dominio de h es el conjunto de todos los valores de x del dominio de g tales que $g(x)$ pertenece al dominio de f.

Teorema (Regla de la cadena)

Sean f y g dos funciones de variable real. Si f es derivable en $g(x)$ y g es derivable en x, entonces la función compuesta $h = f \circ g$ es derivable en x y se verifica:

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Observación : Si llamamos $u = g(x)$, $y = f(u)$, se tiene $h'(x) = f'(u)u'$ y la forma equivalente $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, donde $\frac{dy}{du}$ se evalúa en $u = g(x)$.

5.1.- Límites, continuidad y derivada.

Reglas básicas de derivación

Sean $u = u(x)$ y $v = v(x)$ derivables.

$$\frac{d}{dx}(cu) = cu' \qquad \frac{d}{dx}(u \pm v) = u' \pm v' \qquad \frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv' \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}(c) = 0 \qquad \frac{d}{dx}(x) = 1$$

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}u' \qquad \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}u' \qquad \frac{d}{dx}(\log_a u) = \frac{1}{(\ln a)u}u'$$

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u u' \qquad \frac{d}{dx}(a^u) = (\ln a)a^u u'$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = (\cos u)u' \qquad \frac{d}{dx}(\cos u) = (-\operatorname{sen} u)u' \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{tg} u) = \frac{1}{\cos^2 u}u'$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{arcsen} u) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u' \qquad \frac{d}{dx}(\arccos u) = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}}u' \qquad \frac{d}{dx}(\operatorname{arctg} u) = \frac{1}{1+u^2}u'$$

5.1.- Límites, continuidad y derivada.

REGLA DE L´HOPITAL

Sean f y g funciones derivables en un intervalo (a,b), excepto posiblemente en un punto $c \in (a,b)$.
Sea $g'(x) \neq 0$ en (a,b) excepto posiblemente en $x = c$.

Supongamos ademas que $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ tiene la forma indeterminada $\frac{0}{0}$ o la forma $\frac{\infty}{\infty}$, y que $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$=L o bien $\lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty\ (-\infty)$. Entonces:

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

OTRAS REGLAS DE L´HOPITAL

La conclusion de la Regla de L´Hopital anterior sigue siendo siendo valida si se cambia $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ por cualquiera de los siguientes limites:

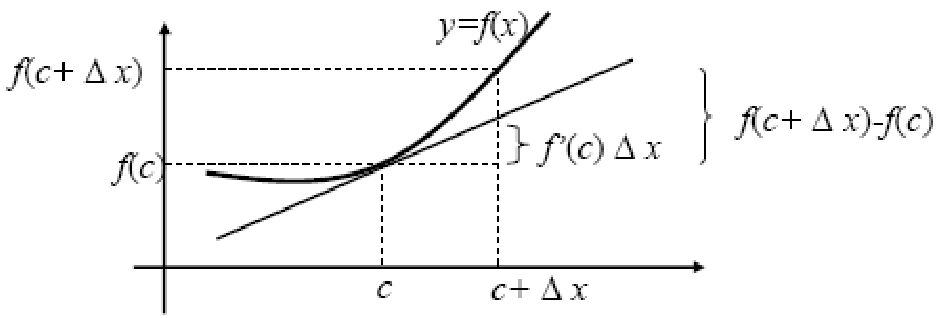
$$\lim_{x\to c^+}\frac{f(x)}{g(x)}\ ,\ \lim_{x\to c^-}\frac{f(x)}{g(x)}\ ,\ \lim_{x\to \infty}\frac{f(x)}{g(x)}\ ,\ \lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$$

con los reajustes apropiados en las hipotesis en cada caso.

- El cálculo de algunos límites requiere aplicar la regla de L´Hôpital más de una vez.

5.2.- Diferencial de una función.

Sea f una función derivable en un intervalo abierto I, y sea $c \in I$.



- Si $y = f(x)$ es una funcion derivable en c, se verifica:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$$

Entonces, para valores de Δx , no nulos y suficientemente pequeños, se tiene

$$\frac{f(c+\Delta x) - f(c)}{\Delta x} \approx f'(c) \quad \Rightarrow \underbrace{f(c+\Delta x) - f(c)}_{\Delta f} \approx \underbrace{f'(c)\Delta x}_{df}$$

incremento de f $\approx$ diferencial de f

DEFINICIONES.- Δx se denota por dx y se llama *diferencial de* x.
$f'(c)dx$ se denota por dy y se llama *diferencial de* y en $x = c$.

DEFINICION

Sea f una función derivable en un intervalo abierto I, $x \in I$. La diferencial de x es cualquier número real no nulo. La diferencial de y es $dy = f'(x)dx$.

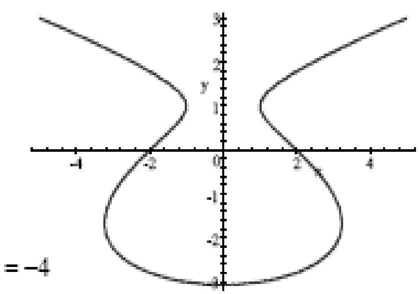
5.3.- Derivación implícita.

Dada una ecuación que contiene a las variables x e y, y supuesto que y es una función derivable de x, se puede hallar dy/dx como sigue:

1.- Derivamos ambos lados respecto de x, considerando $y = y(x)$ y aplicamos la regla de la cadena.

2.- Agrupamos todos los términos que contengan dy/dx a la izquierda de la ecuación y todos los demás a la derecha.

3.- Despejamos dy/dx.



$y^3 + y^2 - 5y - x^2 = -4$

5.3.- Derivación implícita.

Ejemplo

Sea $y = f(x)$ tal que $yx^2 + y = 1$.

En este caso, la variable y no está escrita explícitamente como función de la variable x.

$$¿\ \frac{dy}{dx}\ ?$$

En principio, dos posibilidades

Se despeja, escribiendo y como función explícita de x

$$y = \frac{1}{x^2+1} = (x^2+1)^{-1}$$

Derivando, se obtiene

$$\frac{dy}{dx} = (-1)(x^2+1)^{-2}2x = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

Se deriva directamente en la expresión anterior.

$$\frac{d}{dx}\left[yx^2 + y\right] = \frac{d}{dx}[1] \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx}x^2 + 2xy + \frac{dy}{dx} = 0$$

Agrupando términos y despejando:

$$\frac{dy}{dx}(x^2+1) + 2xy = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{(x^2+1)}$$

Nota: Puede observarse que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2xy}{(x^2+1)} = \frac{-2x\left(1/(x^2+1)\right)}{(x^2+1)} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

5.3.- Derivación implícita.

Ejemplo

Sea $y = f(x)$ tal que $x^2 - 2y^3 + 4y = 2$. ¿$\dfrac{dy}{dx}$?

Se puede proceder de la siguiente forma:

1) Se deriva ambos lados de la ecuación respecto de x utilizándose la regla de la cadena cuando aparezca una función de la variable y. Aquí,

$$y^3 = (f(x))^3 \longrightarrow \frac{d}{dx}[y^3] = 3y^2\frac{dy}{dx}$$

Por tanto, derivando, se tiene que

$$x^2 - 2y^3 + 4y = 2 \longrightarrow 2x - 6y^2\frac{dy}{dx} + 4\frac{dy}{dx} = 0$$

2) Se agrupa: $(4 - 6y^2)\dfrac{dy}{dx} = -2x$

3) Se despeja: $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-2x}{(4 - 6y^2)}$.

5.3.- Derivación implícita.

Comprobar que el punto $(-1,1)$ está en la curva definida por la ecuación

$$(x+y)^3 = x^3 + y^3$$

y hallar $\frac{dy}{dx}$ en $(-1,1)$.

El punto $(-1,1)$ está en la curva definida por $(x+y)^3 = x^3 + y^3$ ya que, sustituyendo en la ecuación, se tiene

$$(-1+1)^3 = 0 \quad \text{y} \quad (-1)^3 + 1^3 = 0$$

Para determinar $\frac{dy}{dx}$,

$$3(x+y)^2(1+\frac{dy}{dx}) = 3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx}$$

$$3(x+y)^2 + \left[3(x+y)^2 - 3y^2\right]\frac{dy}{dx} = 3x^2$$

$$3(x^2+2xy)\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3(x+y)^2$$

$$3(x^2+2xy)\frac{dy}{dx} = -3(y^2+2xy) \quad \longrightarrow \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-(y^2+2xy)}{x^2+2xy}$$

Finalmente, para calcular $\frac{dy}{dx}$ en $(-1,1)$, se evalua $\frac{dy}{dx}$ en dicho punto

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{(-1,1)} = \frac{-(1-2)}{1-2} = -1$$

5.4.- Crecimiento y concavidad.

Definición

Sea una función f definida en un intervalo I

a) f es creciente en I si

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \text{ para todo par de números } x_1, x_2 \in I.$$

b) f es decreciente en I si

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \text{ para todo par de números } x_1, x_2 \in I.$$

Criterio de crecimiento y decrecimiento

Sea f continua en el intervalo $[a,b]$ y derivable en (a,b), entonces:

a) $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b) \Rightarrow f$ es creciente en $[a,b]$.

b) $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b) \Rightarrow f$ es decreciente en $[a,b]$.

c) $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b) \Rightarrow f$ es constante en $[a,b]$.

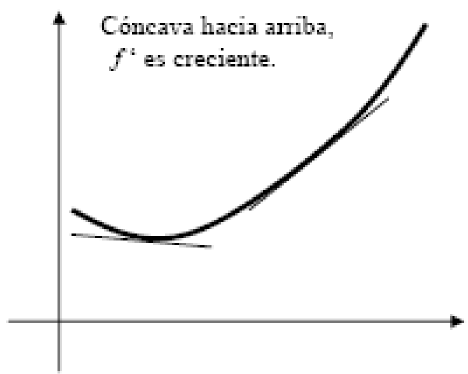
5.4.- Crecimiento y concavidad.

<u>Definición</u>

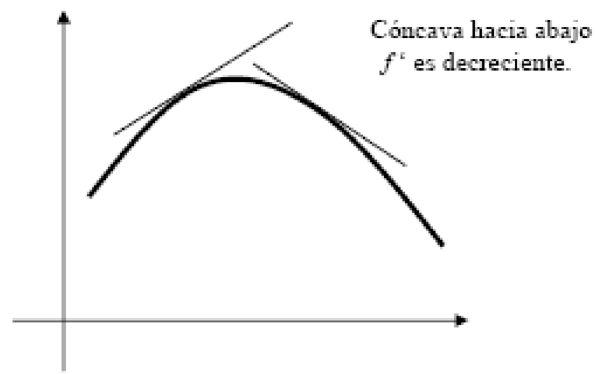
Sea f derivable en un intervalo abierto (a,b).

a) Se dice que f es cóncava hacia arriba en (a,b) cuando $f\,'$ es creciente en (a,b).

b) Se dice que f es cóncava hacia abajo en (a,b) cuando $f\,'$ es decreciente en (a,b).



La gráfica de f queda por encima de la recta tangente.



La gráfica de f queda por debajo de la recta tangente.

Criterio de concavidad

Sea f tal que existe $f\,''$ en un intervalo abierto (a,b).

a) Si $f\,''(x) > 0$ para todo $x \in (a,b) \Rightarrow f$ es cóncava hacia arriba en (a,b).

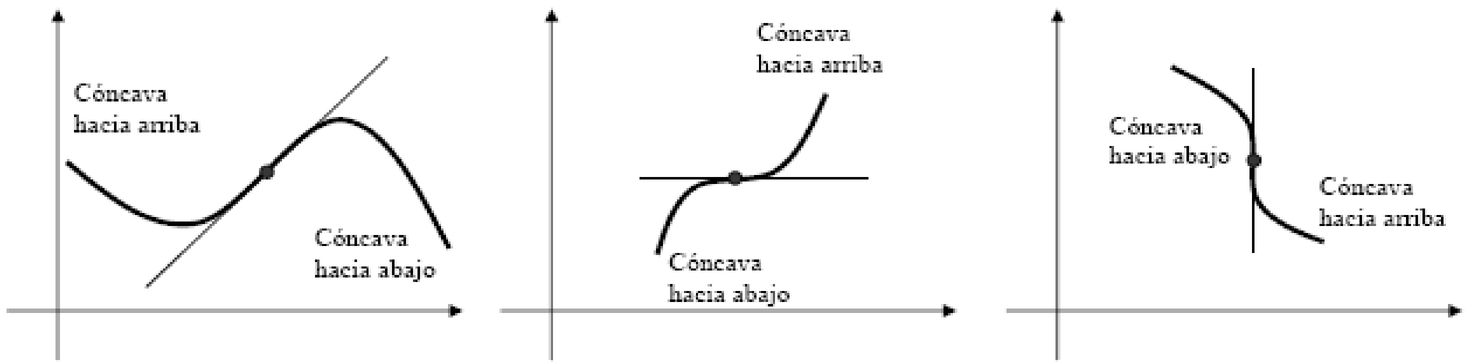
b) Si $f\,''(x) < 0$ para todo $x \in (a,b) \Rightarrow f$ es cóncava hacia abajo en (a,b).

5.4.- Crecimiento y concavidad.

Definición

Sea f una función derivable en $x = c$, o con tangente vertical.

Se dice que $(c, f(c))$ es un punto de inflexión cuando la concavidad cambia en dicho punto.



Puntos de inflexión

Si f tiene un punto de inflexión en $(c, f(c))$, entonces $f''(c) = 0$ o bien f'' no está definida en $x = c$.

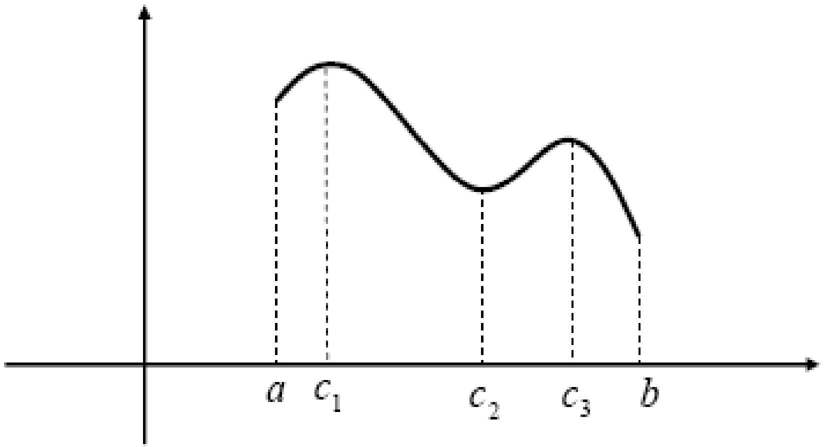
5.5.- Extremos relativos y absolutos de funciones de una variable.

<u>Definición - EXTREMOS ABSOLUTOS -</u>

Sea f una función definida en un intervalo I tal que $c \in I$.

a) $f(c)$ es el *mínimo absoluto* de f en I cuando $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$.

b) $f(c)$ es el *máximo absoluto* de f en I cuando $f(c) \geq f(x)$ para todo $x \in I$.



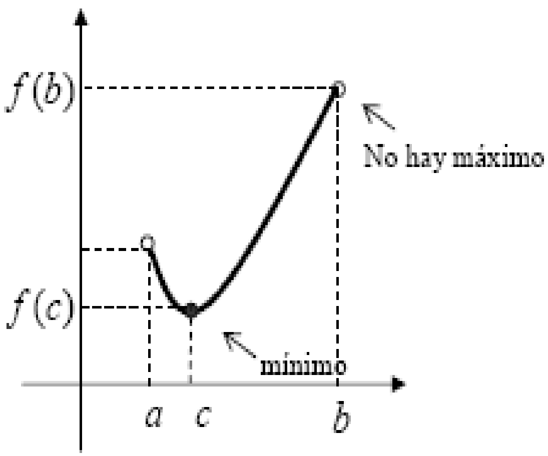
$f(c_1)$ máximo absoluto de f en $[a,b]$.

$f(b)$ mínimo absoluto de f en $[a,b]$.

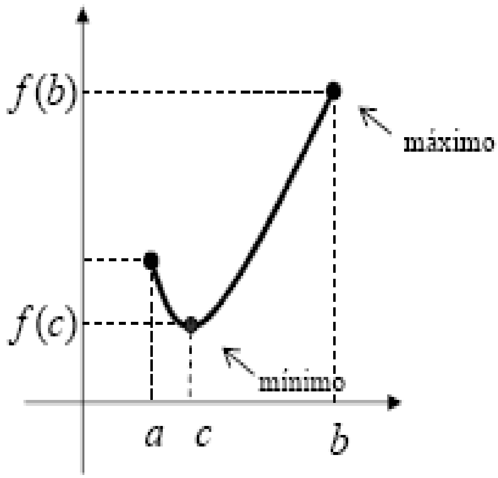
5.5.- Extremos relativos y absolutos de funciones de una variable.

Teorema

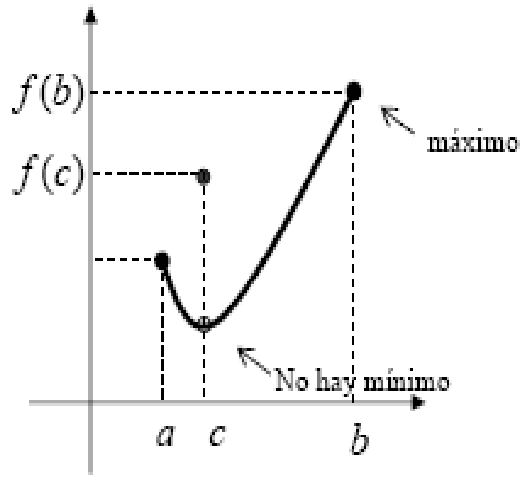
Si f es continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$, entonces f tiene un máximo y un mínimo absolutos en $[a,b]$.



f continua en (a,b)



f continua en $[a,b]$



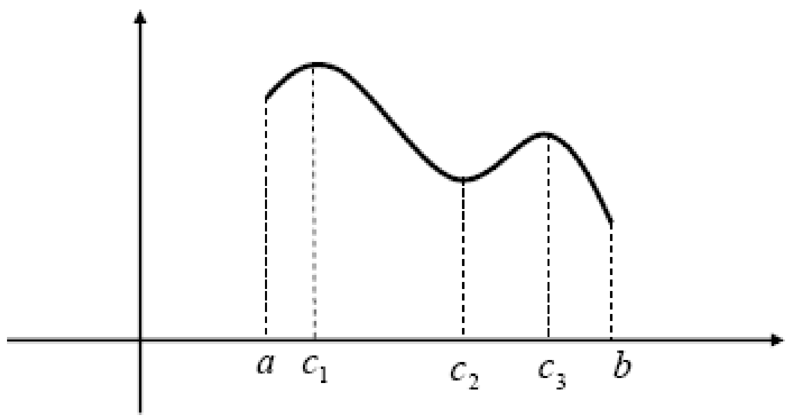
f no es continua en $x = c$

5.5.- Extremos relativos y absolutos de funciones de una variable.

Definición - EXTREMOS RELATIVOS -

a) $f(c)$ es un *mínimo relativo* de f si existe algún intervalo abierto I tal que $c \in I$ y en el que $f(c)$ es el mínimo absoluto de f en I.

b) $f(c)$ es un *máximo relativo* de f si existe algún intervalo abierto I tal que $c \in I$ y en el que $f(c)$ es el máximo absoluto de f en I



$f(c_1)$ máximo relativo de f.

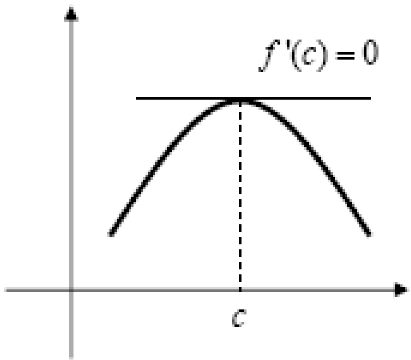
$f(c_2)$ mínimo relativo de f.

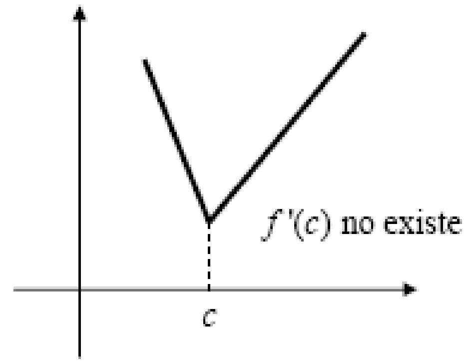
$f(c_3)$ máximo relativo de f.

5.5.- Extremos relativos y absolutos de funciones de una variable.

Proposición

Si f tiene un extremo relativo en $x = c$, entonces $f'(c)$ no existe o bien $f'(c) = 0$.





Definición

Sea f definida en $x = c$. Diremos que c es un punto crítico de f, cuando no exista $f'(c)$ o bien $f'(c) = 0$.

5.5.- Extremos relativos y absolutos de funciones de una variable.

Cálculo de los extremos absolutos de f continua en $[a,b]$

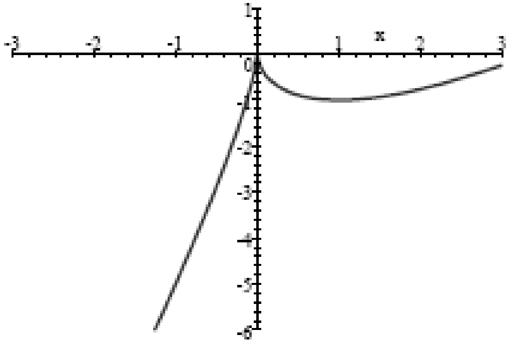
1) Se hallan los puntos críticos de f en (a,b).
2) Se evalúa f en dichos puntos críticos y se calculan $f(a)$ y $f(b)$.
3) El mayor de los valores obtenidos en 2) es el máximo absoluto y el menor es el mínimo absoluto.

Ejemplo 10 : Hallar los extremos absolutos de

$f(x) = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}$ en $[-1,3]$.

$$f'(x) = 2 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$$

Puntos críticos: $x = 0$ y $x = 1$.



x	-1	0	1	3
$f(x)$	-5	0	-1	0.24

máximo absoluto en x = 0,
mínimo absoluto en x = -1.

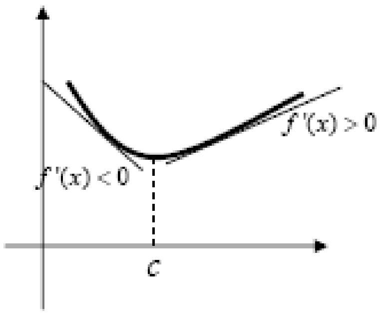
5.5.- Extremos relativos y absolutos de funciones de una variable.

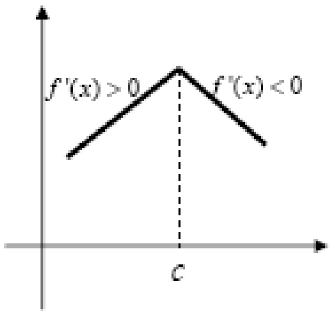
Determinación de los extremos relativos
Criterio de la derivada primera

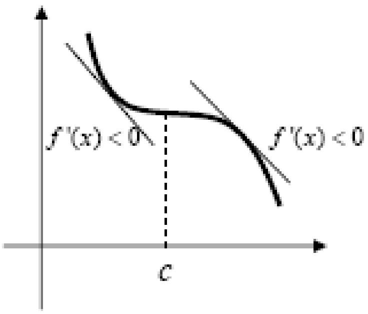
Sea c un punto crítico de una función f continua en un intervalo abierto I que contiene a c. Si f es derivable en I, excepto quizás en c, entonces:

a) Si $f'(x)$ cambia de signo en c pasando de negativa a positiva, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo de f.

b) Si $f'(x)$ cambia de signo en c pasando de positiva a negativa, entonces $f(c)$ es un máximo relativo de f.







5.5.- Extremos relativos y absolutos de funciones de una variable.

Determinación de los extremos relativos
Criterio de la derivada segunda

Sea c un punto crítico de f tal que $f'(c)=0$, y existe f'' en un intervalo abierto I, $c \in I$.

a) Si $f''(c) > 0$, entonces $f(c)$ es un mínimo relativo.

b) Si $f''(c) < 0$, entonces $f(c)$ es un máximo relativo.

Teorema

Sea f es continua en un intervalo I y supongamos que f tiene exactamente un extremo relativo en el interior de I, digamos en $x = c$, entonces se verifca:

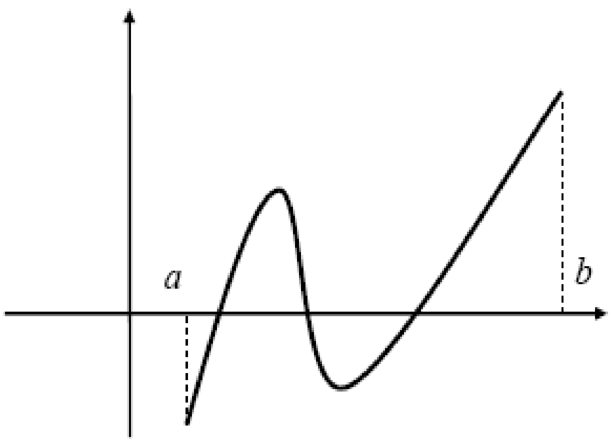
a) si $f(c)$ es un maximo relativo, entonces $f(c)$ es el maximo absoluto de f en I.

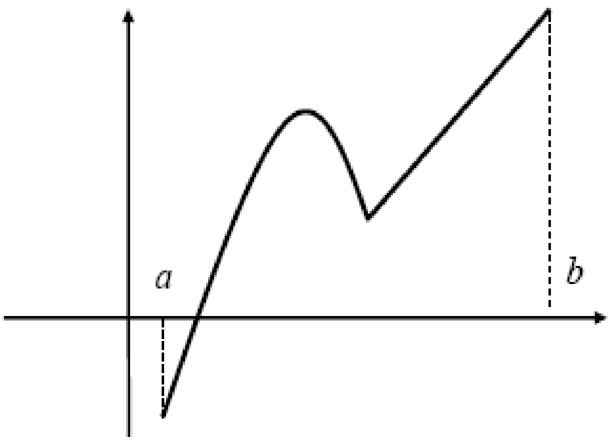
b) si $f(c)$ es un minimo relativo, entonces $f(c)$ es el minimo absoluto de f en I.

5.6.- Resolución numérica de ecuaciones: Métodos de bisección y de Newton.

TEOREMA DE BOLZANO

Si f es continua en el intervalo $[a,b]$ y $f(a)f(b)<0$, entonces existe al menos un $c\in(a,b)$ tal que $f(c)=0$.





EJEMPLO

La funcion $f(x)=x^3+x+1$ tiene al menos una raiz en el intervalo $[-2,0]$ pues es una funcion continua en dicho intervalo y $f(-2)f(0)<0$.

5.6.- Resolución numérica de ecuaciones: Métodos de bisección y de Newton.

METODO DE BISECCION

Si f es una funcion continua en $[a,b]$ y verifica $f(a)f(b)<0$, entonces, segun el teorema de Bolzano, f se anula en al menos un punto $c \in (a,b)$.

Un procedimiento para aproximar el valor de c es el siguiente:

1) Se calcula el punto medio del intervalo $[a,b]$, $p = \dfrac{a+b}{2}$, y se evalua f en dicho punto.

2) Si $f(a)f(p)<0$, entonces f se anula al menos en un punto del intervalo (a,p).

Si $f(p)f(b)<0$, entonces f se anula al menos en un punto del intervalo (p,b).

3) Considerando el intervalo del paso 2) en el que la funcion cambia de signo en los extremos, y repitiendo los pasos anteriores, se consigue obtener una sucesion de intervalos de longitud cada vez menor donde se encuentra un cero de f. Por tanto, se consigue un numero proximo a c.

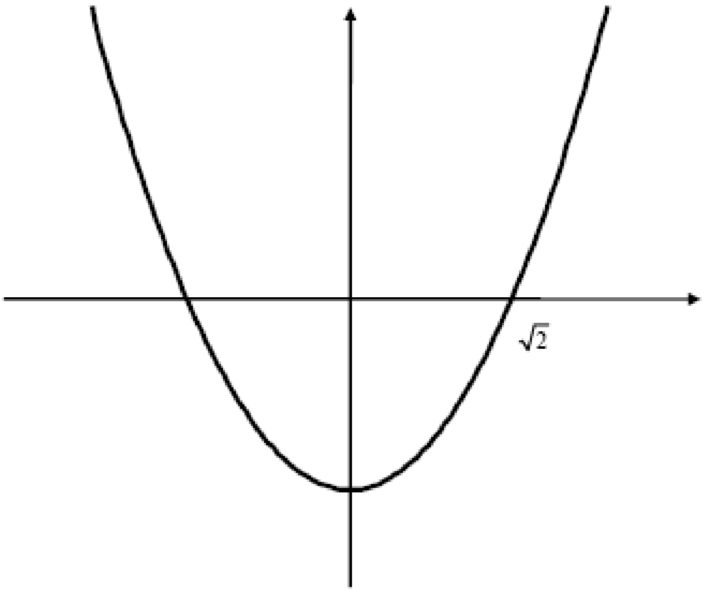
Obviamente, si en algun paso se tiene $f(p)=0$, entonces $c=p$.

- **El metodo de biseccion se suele utilizar para determinar un intervalo "pequeño" en el que se encuentre la raiz. Posteriormente, se aplica otro metodo que conduzca a la raiz mas rapidamente.**

5.6.- Resolución numérica de ecuaciones: Métodos de bisección y de Newton.

EJEMPLO : Para calcular con cuatro cifras decimales exactas el valor de $\sqrt{2}$, aplicando el metodo de biseccion, consideramos la funcion $f(x) = x^2 - 2$ y el intervalo $[1, 2]$.
El proceso se muestra en la siguiente tabla.

n	p	$f(p)$	a	b	$\varepsilon = \lvert b - a \rvert$
1	1.5000	0.2500	1.0000	1.5000	0.5000
2	1.2500	-0.4375	1.2500	1.5000	0.2500
3	1.3750	-0.1094	1.3750	1.5000	0.1250
4	1.4375	0.0664	1.3750	1.4375	0.0625
5	1.4063	-0.0225	1.4063	1.4375	0.0313
6	1.4219	0.0217	1.4063	1.4219	0.0156
7	1.4141	-0.0004	1.4141	1.4219	0.0078
8	1.4180	0.0106	1.4141	1.4180	0.0039
9	1.4160	0.0051	1.4141	1.4160	0.0020
10	1.4150	0.0023	1.4141	1.4150	0.0010
11	1.4146	0.0010	1.4141	1.4146	0.0005
12	1.4143	0.0003	1.4141	1.4143	0.0002
13	1.4142	-0.0001	1.4142	1.4143	0.0001
14	1.4142	0.0001	1.4142	1.4142	0.000061



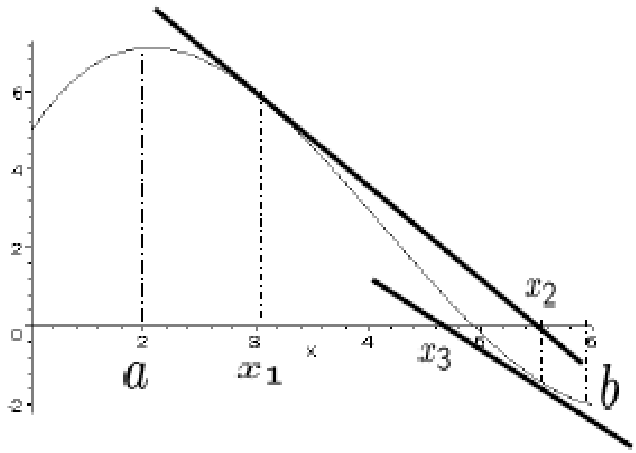
$\varepsilon = 0.000061 < 0.0001$ termina el proceso y la solución aproximada es $p = 1.4142$.

5.6.- Resolución numérica de ecuaciones: Métodos de bisección y de Newton.

MÉTODO DE NEWTON

Técnica que se usa para aproximar los ceros de una función f.
Es decir, se usa para estimar los x donde $f(x) = 0$.

Funcionamiento del método: f continua en $[a, b]$, derivable en (a, b), $f(a)$ y $f(b)$ tienen signos opuestos.



- Primera estimación: $x = x_1$
- Recta tangente en $(x_1, f(x_1))$: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$
- Intersección con eje de abscisas: $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$

- Segunda estimación: $x = x_2$
- Recta tangente en $(x_2, f(x_2))$: $y - f(x_2) = f'(x_2)(x - x_2)$
- Intersección con eje de abscisas: $x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)}{f'(x_2)}$

Utiliza las rectas tangentes para aproximar la gráfica de la función cerca de sus intersecciones con el eje OX.

5.6.- Resolución numérica de ecuaciones: Métodos de bisección y de Newton.

Método de Newton

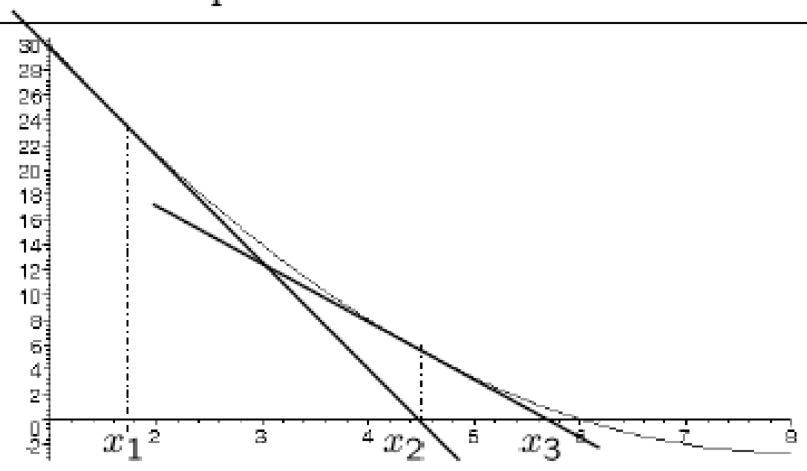
Sea $f(c) = 0$, donde f es derivable en un intervalo abierto que contiene a c.

Para aproximar c seguimos los siguientes pasos:

1.- Hacemos una estimación x_1 próxima a c.

2.- Determinamos una nueva estimación $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

3.- Si $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$, siendo ε la precisión deseada, tomamos $c \simeq x_{n+1}$, en caso contrario volvemos al paso 2.



5.6.- Resolución numérica de ecuaciones: Métodos de bisección y de Newton.

MÉTODO DE NEWTON

El método de Newton da lugar a una sucesión de aproximaciones

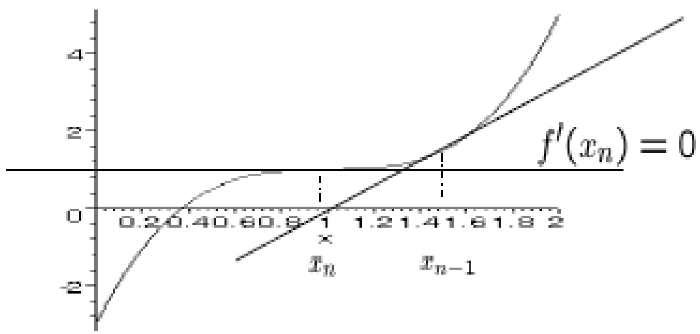
$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots\ ,\ x_n,\ \ldots$$

Si la sucesión converge: $\lim_{n\to\infty} x_n = c$, se puede demostrar que c es necesariamente un cero de la función f.

Ahora bien:

El método de Newton no siempre da una sucesión convergente.

- Como $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ es claro que el método fallará cuando la derivada $f'(x_n)$ sea nula para algún x_n de la sucesión.



Este problema puede soslayarse cambiando el x_1 inicial.

- Puede fallar también por no converger la sucesin obtenida.

5.6.- Resolución numérica de ecuaciones: Métodos de bisección y de Newton.

EJEMPLO . Usar el método de Newton para aproximar los ceros de

$$f(x) = 2x^3 + x^2 - x + 1$$

Continuar las iteraciones hasta que dos aproximaciones sucesivas difieran en menos de 0.0001.

Como $f(-1.2) = 0.184 > 0$ y $f(-2) = -9 < 0$, tomamos $x_1 = -1.2$ como primera aproximación. En este caso

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{2x_n^3 + x_n^2 - x_n + 1}{6x_n^2 + 2x_n - 1}$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	-1.20000	0.18400	5.24000	0.03511	-1.23511
2	-1.23511	0.00771	5.68276	0.00136	-1.23375
3	-1.23375	0.00001	5.66533	0.00000	-1.23375
4	-1.23375				

5.6.- Resolución numérica de ecuaciones: Métodos de bisección y de Newton.

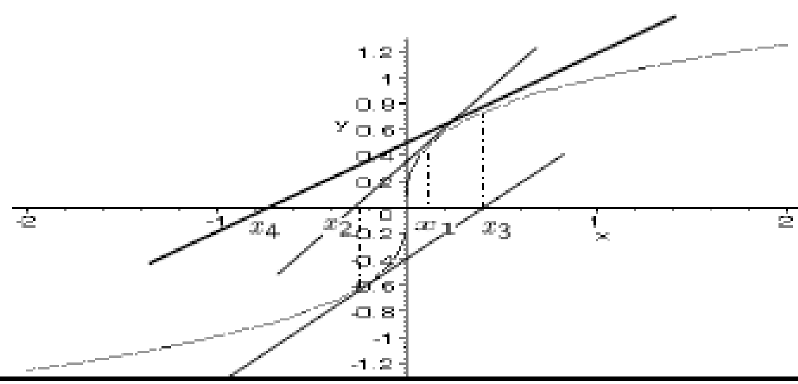
EJEMPLO. Tomando $x_1 = 0.1$, probar que el método de Newton no converge para $f(x) = \sqrt[3]{x}$.

Como $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$, la fórmula de iteración es

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^{1/3}}{\frac{1}{3}x_n^{-2/3}} = x_n - 3x_n = -2x_n$$

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$	$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$
1	0.10000	0.46416	1.54720	0.30000	-0.20000
2	-0.20000	-0.58480	0.97467	-0.60000	0.40000
3	0.40000	0.73681	0.61401	1.20000	-0.80000
4	-0.80000	-0.92832	0.38680	-2.40000	1.60000

El límite de la sucesión no existe.



5.6.- Resolución numérica de ecuaciones: Métodos de bisección y de Newton.

TEOREMA (Convergencia del método de Newton)

Sea f una función continua y dos veces derivable en un conjunto que contenga al intervalo $[a, b]$.

Si se verifica, además, que

i) $f(a)f(b) < 0$,

ii) $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in [a, b]$,

iii) $f''(x)$ no cambia de signo en $[a, b]$,

entonces, si $x_1 \in [a, b]$ es un punto cualquiera en el que $f(x_1)f''(x_1) > 0$, la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 1, 2, \ldots$$

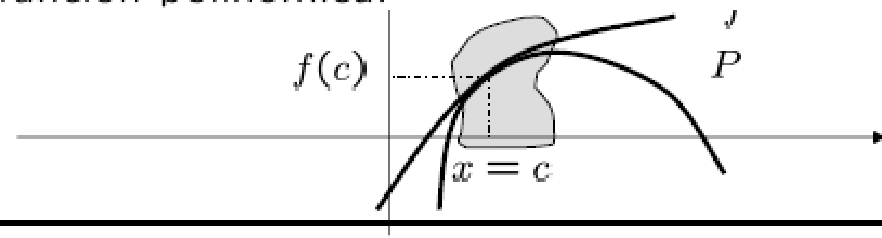
converge al único punto $c \in (a, b)$ donde $f(c) = 0$.

Nota: Las condiciones establecidas en el teorema son condiciones suficientes.

5.7.- Polinomios de Taylor.

POLINOMIOS DE TAYLOR

Tienen como objetivo aproximar, localmente, una función f mediante una función polinómica.



$f : R \longrightarrow R$, f tiene n derivadas en $x = c$.

El polinomio

$$P_n(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \cdots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n$$

se denomina **polinomio de Taylor de grado** n **de** f **en** c.

Se cumple que

$$P_n(c) = f(c), \quad P_n'(c) = f'(c), \ \ldots \ P_n^{(n)}(c) = f^{(n)}(c)$$

Si $c = 0$, $P_n(x)$ se denomina polinomio de Maclaurin de grado n de f.

5.7.- Polinomios de Taylor.

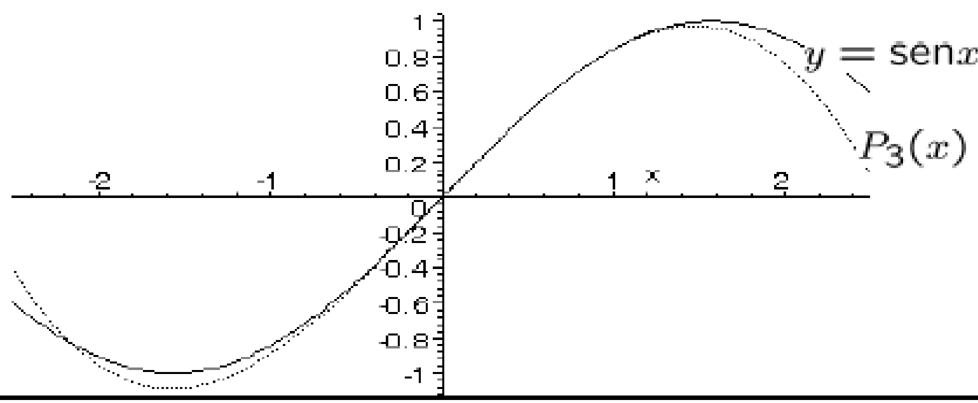
EJEMPLO. Determinar el polinomio de Taylor de grado 3 para $f(x) = \operatorname{sen} x$ centrado en $c = \pi/6$.

$$P_3(x) = f(\frac{\pi}{6}) + f'(\frac{\pi}{6})(x - \frac{\pi}{6}) + \frac{f^{(2)}(\frac{\pi}{6})}{2!}(x - \frac{\pi}{6})^2 + \frac{f^{(3)}(\frac{\pi}{6})}{3!}(x - \frac{\pi}{6})^3$$

$$\begin{array}{lcl} f(x) = \operatorname{sen} x & \longrightarrow & f(\pi/6) = 1/2 \\ f'(x) = \cos x & \longrightarrow & f'(\pi/6) = \sqrt{3}/2 \\ f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x & \longrightarrow & f^{(2)}(\pi/6) = -1/2 \\ f^{(3)}(x) = -\cos x & \longrightarrow & f^{(3)}(\pi/6) = -\sqrt{3}/2 \end{array}$$

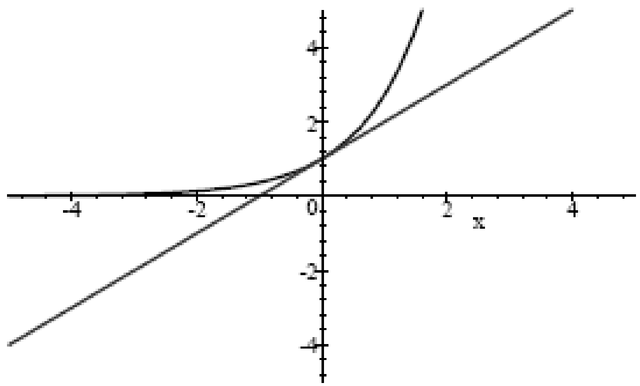
Por tanto:

$$P_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}(x - \frac{\pi}{6}) - \frac{1}{4}(x - \frac{\pi}{6})^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}(x - \frac{\pi}{6})^3$$

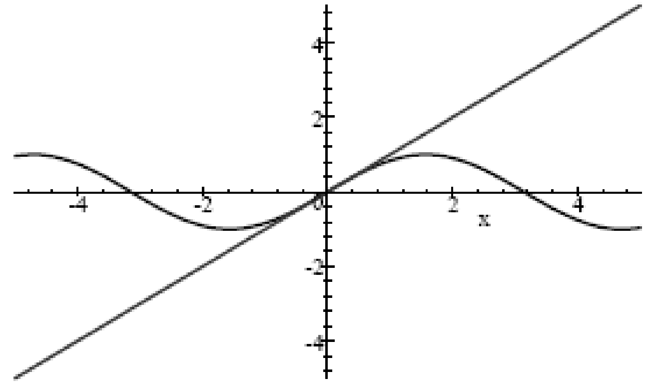


5.7.- Polinomios de Taylor.

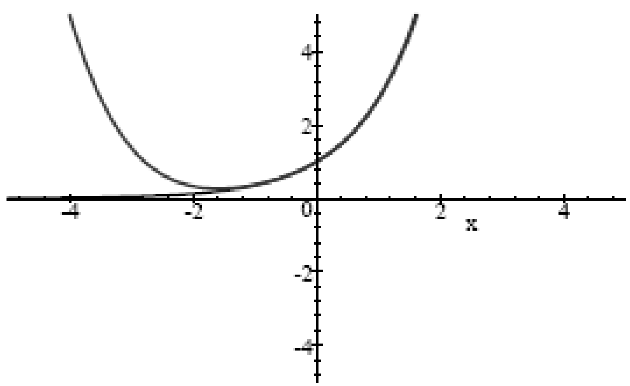
- La aproximación suele ser mejor en valores de x cercanos a c que en valores alejados de c.
- La aproximación suele ser mejor cuanto más alto sea el grado del polinomio de Taylor.



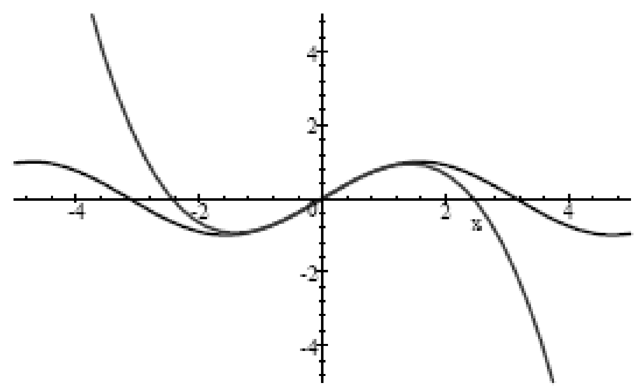
$f(x) = e^x \qquad P_1(x) = 1 + x$



$f(x) = \operatorname{sen}(x) \qquad P_1(x) = x$



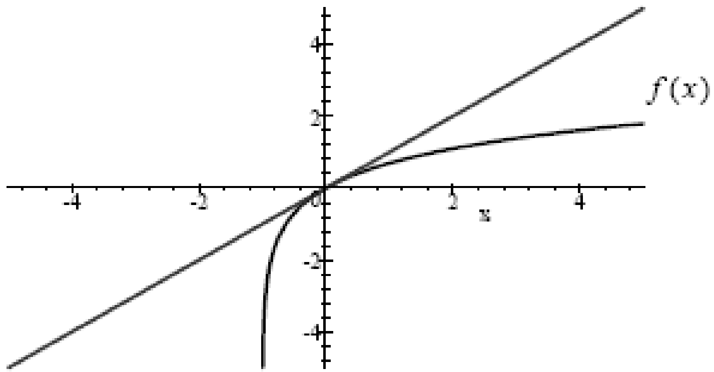
$f(x) = e^x \qquad P_4(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^4}{24}$



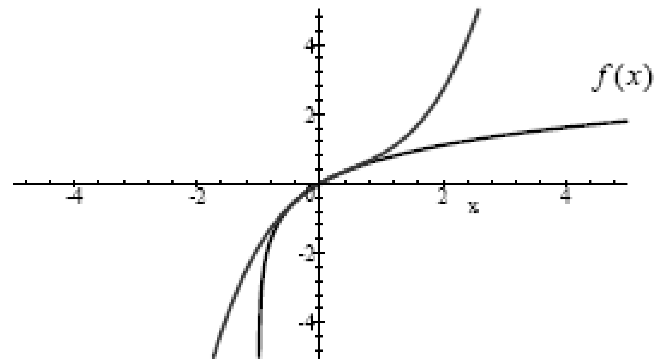
$f(x) = \operatorname{sen}(x) \qquad P_3(x) = x - \dfrac{x^3}{3}$

5.7.- Polinomios de Taylor.

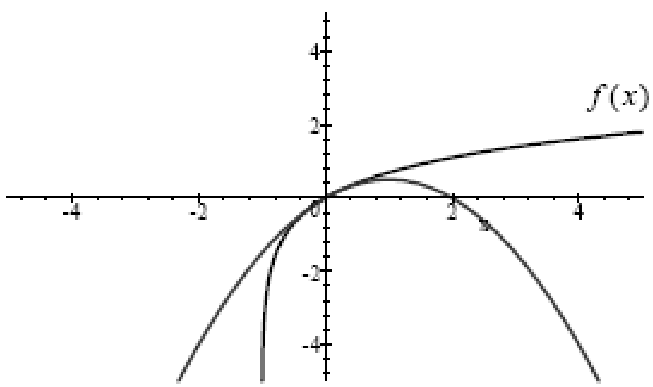
- La aproximación suele ser mejor en valores de x cercanos a c que en valores alejados de c.
- La aproximación suele ser mejor cuanto más alto sea el grado del polinomio de Taylor.



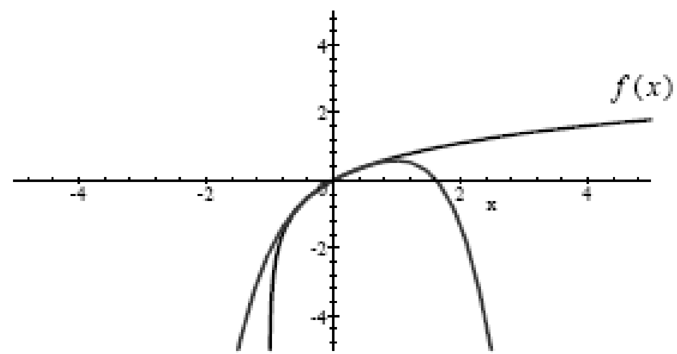
$f(x) = \ln(1+x)$ $\qquad$ $P_1(x) = x$



$f(x) = \ln(1+x)$ $\qquad$ $P_3(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$



$f(x) = \ln(1+x)$ $\qquad$ $P_2(x) = x - \frac{1}{2}x^2$



$f(x) = \ln(1+x)$ $\qquad$ $P_4(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$

5.7.- Polinomios de Taylor.

Para medir la aproximación del valor de una función $f(x)$ por el polinomio de Taylor $P_n(x)$, se utiliza el resto $R_n(x)$

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

El valor absoluto de $R_n(x)$ se llama: error asociado a la aproximación

$$\text{Error} = |R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)|.$$

El siguiente teorema da la Forma de Lagrange para $R_n(x)$.

TEOREMA DE TAYLOR

Sea f una función derivable hasta orden $n+1$ en un intervalo I que contiene a c. Sea $P_n(x)$ el polinomio de Taylor de f de grado n centrado en $x = c$. En estas condiciones, para cada x en I, existe un z entre x y c tal que

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x), \text{ donde } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

5.7.- Polinomios de Taylor.

EJEMPLO. Para la función $f(x) = \operatorname{sen} x$, el tercer polinomio de Maclaurin es

$$P_3(x) = x - \frac{x^3}{3!}$$

Aproximar $\operatorname{sen} 0.1$ por $P_3(0.1)$. Usar el teorema de Taylor para investigar el error cometido en la aproximación.

$$\operatorname{sen} x \approx x - \frac{x^3}{3!} \longrightarrow \operatorname{sen} 0.1 \approx 0.1 - \frac{0.1^3}{3!} = 0.09983$$

Por el teorema de Taylor: $\operatorname{sen} x = x - \dfrac{x^3}{3!} + R_3(x)$.

Es decir,

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + R_3(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{f^{(4)}(z)}{4!}x^4, \qquad \text{con } z \text{ entre } x \text{ y } 0.$$

Luego,

$$R_3(0.1) = \frac{f^{(4)}(z)}{4!}0.1^4, \qquad \text{con } 0 < z < 0.1$$

Como $f^{(4)}(z) = \operatorname{sen} z$, entonces

$$\text{Error} = |R_3(0.1)| = \frac{|\operatorname{sen}(z)|}{4!}0.1^4 < \frac{1}{4!}0.1^4 = \frac{1}{240000} \approx 4 \cdot 10^{-6}.$$

5.7.- Polinomios de Taylor.

EJEMPLO. Determinar de qué grado ha de tomarse el polinomio de Taylor $P_n(x)$ centrado en $c = 1$ para obtener con él una aproximación de $\ln 1.2$ con error menor que 0.001.

Por el teorema de Taylor: $\ln x = P_n(x) + R_n(x)$, siendo

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}, \qquad \text{con } z \text{ entre } x \text{ y } 1.$$

Entonces, $$\text{Error} = |R_n(1.2)| = \frac{|f^{(n+1)}(z)|}{(n+1)!}0.2^{n+1}, \qquad 1 < z < 1.2$$

Como, en este caso, $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}$ se tiene que

$$\text{Error} = |R_n(1.2)| = \frac{n!}{z^{n+1}(n+1)!}0.2^{n+1} = \frac{0.2^{n+1}}{z^{n+1}(n+1)} < \frac{0.2^{n+1}}{(n+1)}$$

ya que $1 < z < 1.2$ y, por tanto, $1 > \frac{1}{z} > \frac{1}{1.2}$

Para que Error$=|R_n(1.2)|$ sea menor que 0.001, es suficiente que $\frac{0.2^{n+1}}{(n+1)} < 0.001$

Ensayando se comprueba que el valor de n más pequeño que satisface esa condición es $n = 3$:

n	0.2^{n+1}	$0.2^{n+1}/(n+1)$
1	0.04	0.02
2	0.008	0.0026
3	0.0016	0.0004