ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
Grado en Ingeniería del Diseño Industrial y Desarrollo del Producto
Doble Grado en Ing. del Diseño Industrial y Desarrollo del Producto e Ing. Mecánica
Grado en Ingeniería Química Industrial

MATEMÁTICAS I **EJERCICIOS DEL TEMA 2**

1.- Determinar cuáles de los siguientes conjuntos son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

a) Todos los vectores de la forma $(a, 0, 0)$.
b) Todos los vectores de la forma $(a, 1, 1)$.
c) Todos los vectores de la forma (a, b, c), donde $b = a + c$.
d) Todos los vectores de la forma (a, b, c), donde $b = a + c + 1$.

Solución: Son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$ los conjuntos de vectores de los apartados a) y c). Sin embargo, los conjuntos de vectores de b) y d) no son subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$.

2.- Determinar si el espacio solución del sistema $Ax = 0$ es una recta que pasa por el origen, un plano que pasa por el origen o sólo el origen. Si es un plano, encontrar su ecuación; si es una recta, encontrar sus ecuaciones paramétricas.

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 2 & -4 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -6 & 2 \\ 3 & -9 & 3 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) El espacio solución del sistema $Ax = 0$ es una recta y unas ecuaciones paramétricas son $\left\{\begin{array}{l} x_1 = \alpha \\ x_2 = 3\alpha \\ x_3 = -2\alpha \end{array}\right.$

b) El espacio solución del sistema $Ax = 0$ es el origen.

c) El espacio solución del sistema $Ax = 0$ es un plano de ecuación $x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$.

3.- ¿Cuáles de los siguientes vectores son combinación lineal de $u = (0, -2, 2)$ y $v = (1, 3, -1)$?

$$a = (2, 2, 2)\,, \quad b = (3, 1, 5)\,, \quad c = (0, 4, 5)\,, \quad d = (0, 0, 0)\,.$$

Solución: Los vectores a, b y d son combinaciones lineales de u y v mientras que el vector c no lo es.

4.- Expresar cada uno de los siguientes vectores como combinación lineal de $u = (2, 1, 4)$, $v = (1, -1, 3)$ y $w = (3, 2, 5)$.

$$a = (-9, -7, -15)\,, \quad b = (6, 11, 6)\,, \quad c = (7, 8, 9)\,, \quad d = (0, 0, 0)\,.$$

Solución: $a = -2u + v - 2w$, $b = 4u - 5v + w$, $c = 0u - 2v + 3w$, $d = 0u + 0v + 0w$

5.- En cada apartado, escribir, si es posible, cada vector de $\mathbb{R}^3$ como combinación lineal de los vectores dados:

a) $v_1 = (2, 2, 2)$, $v_2 = (0, 0, 3)$ y $v_3 = (0, 1, 1)$.
b) $v_1 = (2, -1, 3)$, $v_2 = (4, 1, 2)$ y $v_3 = (8, -1, 8)$.
c) $v_1 = (1, 2, 6)$, $v_2 = (3, 4, 1)$, $v_3 = (4, 3, 1)$ y $v_4 = (3, 3, 1)$.

¿Cuál de los conjuntos de vectores dados es un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$?

Solución: Los conjuntos de vectores de los apartados a) y c) sí generan $\mathbb{R}^3$. Sin embargo, los vectores del apartado b) no constituyen un sistema generador de $\mathbb{R}^3$.

6.- Explicar, por inspección, por qué los siguientes conjuntos de vectores son linealmente dependientes

a) $v_1 = (-1, 2, 4)$, y $v_2 = (5, -10, -20)$.

b) $v_1 = (3, -1)$, $v_2 = (4, 5)$ y $v_3 = (-4, 17)$.

Solución:

a) $v_2 = -5v_1$. Son proporcionales.

b) Tres vectores de $\mathbb{R}^2$ son siempre linealmente dependientes.

7.- ¿Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores en $\mathbb{R}^4$ son linealmente independientes?

a) $(3, 8, 7, -3), (1, 5, 3, -1), (2, -1, 2, 6), (1, 4, 0, 3)$.

b) $(0, 0, 2, 2), (3, 3, 0, 0), (1, 1, 0, -1)$.

Solución: Ambos conjuntos de vectores son linealmente independientes.

8.- Determinar si los vectores $(-1, 2, 3), (2, -4, 6), (-3, 6, 0)$ pertenecen a un mismo subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión menor que tres. ¿El vector $(1, 1, 0)$ está en el mismo subespacio?

Solución: Averiguamos si los tres vectores son linealmente independientes. Si lo fuesen, serían una base de $\mathbb{R}^3$ y no podrían pertenecer a un subespacio de $\mathbb{R}^3$, entendidos éstos como rectas o planos.

Resolvemos, por tanto, el sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & -4 & 6 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -9 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -9/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Tiene infinitas soluciones, luego los tres vectores son linealmente dependientes. De aquí que $H = \operatorname{lin}\{(-1, 2, 3), (2, -4, 6), (-3, 6, 0)\} = \operatorname{lin}\{(-1, 2, 3), (2, -4, 6)\}$, luego los tres vectores pertenecen a este subespacio vectorial de dimensión dos.

El vector $(1, 1, 0)$ estará en el mismo subespacio si el sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$ tiene solución:

$$\left(\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & 6 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 12 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right).$$ El sistema no tiene solución. Por tanto, $(1, 1, 0) \notin H$.

9.- ¿Para qué valores de λ los vectores $(\lambda, -1/2, -1/2), (-1/2, \lambda, -1/2)\,(-1/2, -1/2, \lambda)$ forman un conjunto linealmente dependiente en $\mathbb{R}^3$?

Solución: Debemos conocer el número de soluciones del sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{rrr|r} \lambda & -1/2 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & \lambda & -1/2 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & \lambda & 0 \end{array}\right)$. Como aquí la matriz de coeficientes A es cuadrada y su determinante es $\det(A) = \frac{1}{4}(1 + 2\lambda)^2 (\lambda - 1)$, podemos afirmar que:

- Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq -1/2$ (es decir $\det(A) \neq 0$), entonces el sistema sólo tiene la solución trivial y por ello los vectores son l. i.
- Si $\lambda = 1$ o $\lambda = -1/2$ (es decir $\det(A) = 0$), entonces el sistema tiene infinitas soluciones y por ello los vectores serían linealmente dependientes.

a) Expresar $(4a, a-b, a+2b)$ como una combinación lineal de $(4,1,1)$ y $(0,-1,2)$.
b) Expresar $(3a+b+3c, -a+4b-c, 2a+b+2c)$ como una combinación lineal de $(3,-1,2)$ y $(1,4,1)$.
c) Expresar $(1,1)$ como una combinación lineal de $(1,-1), (3,0)$ y $(2,1)$ de dos formas diferentes.

Solución:

a) $(4a, a-b, a+2b) = a\,(4,1,1) + b\,(0,-1,2)$

b) $(3a+b+3c, -a+4b-c, 2a+b+2c) = (a+c)\,(3,-1,2) + b\,(1,4,1)$

c) $(1,1) = -1(1,-1) + \frac{2}{3}(3,0) + 0\,(2,1)\,, \qquad (1,1) = 0(1,-1) - \frac{1}{3}(3,0) + 1(2,1)$

11.- Explicar, por inspección, por qué los siguientes conjuntos de vectores no son bases en los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

a) $v_1 = (3,-1)$, $v_2 = (4,5)$ y $v_3 = (-4,17)$.
b) $v_1 = (3,-1,9)$ y $v_2 = (4,5,0)$.

Solución:

a) Son linealmente dependientes.

b) No son un conjunto generador de $\mathbb{R}^3$.

12.- ¿ Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para $\mathbb{R}^2$?

a) $(2,1)\,,(3,0)$ *b*) $(3,9)\,,(-4,-12)$ *c*) $(0,0)\,,(1,3)$

Solución: a) Si, b) No, c) No.

13.- ¿ Cuáles de los siguientes conjuntos de vectores son bases para $\mathbb{R}^3$?

a) $(1,0,0)\,,(2,2,0)\,,(3,3,3)$ *b*) $(3,1,-4)\,,(2,5,6)\,,(1,4,8)$ *c*) $(1,6,4)\,,(2,4,-1)\,,(-1,2,5)$

Solución: a) Si, b) Si, c) No

14.- En los siguientes apartados, determinar la dimensión y una base para el espacio solución del sistema

$$a)\ \left\{\begin{aligned} x_1+x_2-x_3&=0\\ -2x_1-x_2+2x_3&=0\\ -x_1+x_3&=0\end{aligned}\right. \qquad b)\ \left\{\begin{aligned} 3x_1+x_2+x_3+x_4&=0\\ 5x_1-x_2+x_3-x_4&=0\end{aligned}\right. \qquad c)\ \left\{\begin{aligned} x+y+z&=0\\ 3x+2y-2z&=0\\ 4x+3y-z&=0\\ 6x+5y+z&=0\end{aligned}\right.$$

Solución:

a) El conjunto de todas las soluciones de un sistema lineal homogéneo es un subespacio vectorial. Para determinar la dimensión calculamos, previamente, una base de dicho subespacio. Para ello, debemos resolver dicho sistema.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0\\ -2 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

El sistema tiene infinitas soluciones dependiendo de un parámetro. Las soluciones son $\left\{\begin{aligned} x_1&=t\\ x_2&=0\\ x_3&=t\end{aligned}\right.$ Si llamamos H al espacio solución (o espacio nulo de la matriz de los coeficientes) tenemos que $x \in H$

si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Por tanto, $H = \text{lin}\{(1,0,1)\}$. Luego, una base de H es $\{(1,0,1)\}$ y $\dim(H) = 1$.

b) $H = \text{lin}\{(1,1,-4,0), (0,-1,0,1)\}$.

c) $H = \text{lin}\{(4,-5,1)\}$

15.- Determinar bases para los siguientes subespacios de $\mathbb{R}^3$.

a) El plano $3x - 2y + 5z = 0$

b) El plano $x - y = 0$.

c) La recta $x = 2t, y = -t, z = 4t$.

d) Todos los vectores de la forma (a,b,c) donde $b = a + c$.

Solución:

a) Llamemos H al subespacio que tiene de ecuación $3x - 2y + 5z = 0$. Realmente H es el espacio nulo de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Para encontrar una base de H debemos resolver el sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right)$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 5 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2/3 & 5/3 & 0 \end{array}\right)$. Sistema con infinitas soluciones dependiendo de dos parámetros. Las soluciones son $\begin{cases} x = 2t - 5s \\ y = 3t \\ z = 3s \end{cases}$ o, lo que es lo mismo, $(x,y,z) \in H$ si y sólo si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. De aquí deducimos que $H = \text{lin}\{(2,3,0), (-5,0,3)\}$. Al ser los vectores $(2,3,0), (-5,0,3)$ independientes, constituyen una base de H.

b) $H = \text{lin}\{(1,1,0), (0,0,1)\}$.

c) Si llamamos W al conjunto de todos los puntos de la recta tenemos que $(x,y,z) \in W$ si y sólo si $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$. Luego, $W = \text{lin}\{(2,-1,4)\}$ y una base de W es $\{(2,-1,4)\}$.

d) $H = \text{lin}\{(1,1,0), (-1,0,1)\}$.

16.- Expresar Ax como una combinación lineal de los vectores columnas de A.

$$a) \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad b) \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad c) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 6 & 3 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Solución:

a) $Ax = 1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, b) $Ax = -2 \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$,

c) $Ax = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \end{pmatrix}$

17.- En cada apartado, determinar si b está en el espacio columna de A y, en caso afirmativo, expresar b como una combinación lineal de las columnas de A. (El subespacio vectorial generado por las columnas de una matriz A se denota por $R(A)$.

$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$c)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $b \in R(A) : \begin{pmatrix} -2 \\ 10 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

b) $b \notin R(A)$.

c) $b \in R(A)$ sii $b = x_1a_1 + x_2a_2 + x_3a_3$, donde a_1, a_2, a_3 son las columnas de A. Es decir, tenemos que averiguar si el sistema cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ tiene solución.

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como este sistema tiene solución, el vector $b \in R(A)$. Además, $b = a_1 + (-1+\alpha)\, a_2 + \alpha a_3$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

18.- En cada apartado, encontrar una base para el espacio nulo de A.

$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $c)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

a) $N(A) = \text{lin}\,\{(-3, 4, 1)\}$.

b) $N(A) = \text{lin}\,\{(-1, -1, 1)\}$.

c) $N(A) = \text{lin}\,\{(1, 0, 2)\,, (0, 1, 0)\}$.

19.- En cada apartado, encontrar el rango de la matriz y la dimensión de su subespacio nulo

$a)\ A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 5 & -4 & -4 \\ 7 & -6 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $b)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $c)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Solución: El rango de la matriz A es la dimensión del espacio $R(A)$.

$a)$ $\dim R\,(A) = 2$, $\dim N(A) = 1$

$b)$ $\dim R\,(A) = 2$, $\dim N(A) = 2$

$c)$ $\dim R\,(A) = 1$, $\dim N(A) = 2$.

20.- ¿Qué condiciones deben satisfacer b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 para que el sistema lineal $\left\{\begin{array}{l} x_1 - 3x_2 = b_1 \\ x_1 - 2x_2 = b_2 \\ x_1 + x_2 = b_3 \\ x_1 - 4x_2 = b_4 \\ x_1 + 5x_2 = b_5 \end{array}\right.$ tenga solución?

Solución:

Resolvemos el sistema $\left(\begin{array}{rr|l} 1 & -3 & b_1 \\ 1 & -2 & b_2 \\ 1 & 1 & b_3 \\ 1 & -4 & b_4 \\ 1 & 5 & b_5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|l} 1 & -3 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2-b_1 \\ 0 & 4 & b_3-b_1 \\ 0 & -1 & b_4-b_1 \\ 0 & 8 & b_5-b_1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{rr|c} 1 & -3 & b_1 \\ 0 & 1 & b_2-b_1 \\ 0 & 0 & b_3-4b_2+3b_1 \\ 0 & 0 & b_4+b_2-2b_1 \\ 0 & 0 & b_5-8b_2+7b_1 \end{array}\right)$, que tendrá solución si se verifica $\left\{\begin{array}{r} b_3-4b_2+3b_1=0 \\ b_4+b_2-2b_1=0 \\ b_5-8b_2+7b_1=0 \end{array}\right.$. Éstas son las condiciones que tiene que cumplir b para que el sistema tenga solución.

21.- Analizar cómo la dimensión de $R(A)$ varía con t.

$$a)\ A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ A=\begin{pmatrix} t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & 2 \\ -1 & -3 & t \end{pmatrix}$$

Solución:

a)Debemos estudiar la dependencia e independencia lineal de los vectores columnas de la matriz A. Para ello, debemos conocer el número de soluciones del sistema de ecuaciones cuya matriz ampliada es $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & t & 0 \\ 1 & t & 1 & 0 \\ t & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$.

Ahora bien, como la matriz de coeficientes es cuadrada y su determinante vale $\det(A)=-t^3+3t-2=-(t-1)^2(t+2)$, se presentan las siguientes posibilidades:

- $t\neq 1$ y $t\neq -2$. En este caso, $\det(A)\neq 0$ y por tanto, la única solución es la solución trivial. Los tres vectores columnas de la matriz son l.i. y, por tanto, $\dim R(A)=3$.
- $t=1$. En este caso, tenemos que $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y evidentemente, $\dim R(A)=1$.
- $t=-2$. En este caso, tenemos que la matriz ampliada del sistema es $\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$. Si aplicamos transformaciones elementales obtenemos la matriz escalonada $\left(\begin{array}{rrr|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$. En este caso, $\dim R(A)=2$.

b) Si $t\neq 1$ y $t\neq -1/2$, entonces $\dim R(A)=3$. Si $t=1$ o $t=-1/2$, entonces $\dim R(A)=2$.

22.- ¿Para qué valores de s el espacio solución de $\left\{\begin{array}{l} x+y+sz=0 \\ x+sy+z=0 \\ sx+y+z=0 \end{array}\right.$ es sólo el origen, un subespacio de dimensión uno o un subespacio de dimensión dos?

Solución:

Si observamos la matriz ampliada de este sistema $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & s & 0 \\ 1 & s & 1 & 0 \\ s & 1 & 1 & 0 \end{array}\right)$ es la misma que la matriz que hemos estudiado en el ejercicio 21.

Por tanto, tenemos las siguientes posibilidades:

- Si $s \neq 1$ y $s \neq -2$, entonces el sistema tiene sólo la solución trivial $(0,0,0)$.
- Si $s = 1$ obtenemos que el sistema es equivalente a $x + y + z = 0$. Tiene infinitas soluciones dependiendo de dos parámetros $\left\{ \begin{array}{l} x = -t - s \\ y = t \\ z = s \end{array} \right.$
- Si $s = -2$, obtenemos que el sistema es equivalente a $\left\{ \begin{array}{l} x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right.$. Tiene infinitas soluciones dependiendo de un parámetro: $\left\{ \begin{array}{l} x = t \\ y = t \\ z = t \end{array} \right.$