ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
Grado en Ingeniería del Diseño Industrial y Desarrollo del Producto
Doble Grado en Ing. del Diseño Industrial y Desarrollo del Producto e Ing. Mecánica
Grado en Ingeniería Química Industrial

MATEMÁTICAS I **EJERCICIOS DEL TEMA 1**

1.- Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 8 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 4 & -7 & 6 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 1 & 7 & 4 \\ 3 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad a = 4.$$

Comprobar que se verifican las siguientes igualdades:

a) $(AB)C = A(BC)$	b) $A(B-C) = AB - AC$	c) $\left(A^T\right)^T = A$
d) $(A+B)^T = A^T + B^T$	e) $(aC)^T = aC^T$	f) $(AB)^T = B^T A^T$

Solución:

a) $(AB)C = A(BC) = \begin{pmatrix} -10 & -222 & 26 \\ 83 & -67 & 278 \\ 87 & 33 & 240 \end{pmatrix}$

b) $A(B-C) = AB - AC = \begin{pmatrix} 20 & -32 & -23 \\ 1 & -84 & -23 \\ -13 & -52 & 2 \end{pmatrix}$

d) $(A+B)^T = A^T + B^T = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & -6 \\ -2 & 7 & 10 \end{pmatrix}$

e) $(aC)^T = aC^T = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 12 \\ -8 & 28 & 20 \\ 12 & 16 & 36 \end{pmatrix}$

f) $(AB)^T = B^T A^T = \begin{pmatrix} 28 & 20 & 0 \\ -28 & -31 & -21 \\ 6 & 38 & 36 \end{pmatrix}$

2.- Considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \; E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcular, cuando sea posible: a) $D - E$, b) $2E^T - 3D^T$, c) $A(BC)$, d) $(DA)^T$, e) $\left(C^T B\right) A^T$, f) $(-AC)^T + 5D^T$.

Solución:

a) $\begin{pmatrix} -5 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 9 & 1 & -1 \\ -13 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 3 & 45 & 9 \\ 11 & -11 & 17 \\ 7 & 17 & 13 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 0 & -2 & 11 \\ 12 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 12 & 6 & 9 \\ 48 & -20 & 14 \\ 24 & 8 & 16 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} 2 & -10 & 11 \\ 13 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & 13 \end{pmatrix}$

3.- Considerar las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix}$. Calcular, sin realizar el producto de las dos matrices completamente, la segunda columna de AB, la primera columna de BA, la tercera columna de AA.

Solución:

$$2^a \text{ Columna de } AB = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 21 \\ 67 \end{pmatrix}$$

$$1^a \text{ Columna de } BA = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 7 & 7 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 63 \end{pmatrix}$$

$$3^a \text{ Columna de } AA = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 6 & 5 & 4 \\ 0 & 4 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 76 \\ 98 \\ 97 \end{pmatrix}$$

4.- Encontrar todos los valores de a, b y c para los que la matriz A es simétrica

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a-2b+2c & 2a+b+c \\ 3 & -5 & a+c \\ 0 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución: $a = 11$, $b = -9$, $c = -13$

5.- Sea A una matriz simétrica.

a) Demostrar que A^2 es simétrica.

b) Demostrar que $2A^2 - 3A + I$ es simétrica.

Solución:

La matriz A es simétrica, esto es, $A^T = A$.

a) $\left(A^2\right)^T = (A \cdot A)^T = A^T \cdot A^T = A \cdot A = A^2$

b) $\left(2A^2 - 3A + I\right)^T = \left(2A^2\right)^T - (3A)^T + I^T = 2\left(A^2\right)^T - 3(A)^T + I = 2A^2 - 3A + I.$

6.- Resolver los siguientes sistemas por el método de Gauss-Jordan y por el método de Gauss.

a) $\left\{ \begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 - 7x_2 + 4x_3 &= 10 \end{aligned} \right.$ b) $\left\{ \begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 &= -1 \end{aligned} \right.$ c) $\left\{ \begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x - 3w &= -3 \end{aligned} \right.$

d) $\left\{ \begin{aligned} -2b + 3c &= 1 \\ 3a + 6b - 3c &= -2 \\ 6a + 6b + 3c &= 5 \end{aligned} \right.$ e) $\left\{ \begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 &= 1 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned} \right.$ f) $\left\{ \begin{aligned} 4x_1 - 8x_2 &= 12 \\ 3x_1 - 6x_2 &= 9 \\ -2x_1 + 4x_2 &= -6 \end{aligned} \right.$

g) $\left\{ \begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 + 6x_3 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \end{aligned} \right.$ h) $\left\{ \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -2x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 1 \end{aligned} \right.$

Solución:

a) S. C. D.: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

b) S. C. I.: $x_1 = -\frac{1}{7} - \frac{3}{7}\alpha$, $x_2 = \frac{1}{7} - \frac{4}{7}\alpha$, $x_3 = \alpha$.

c) $\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{21}(-2),F_{31}(1),F_{41}(-3)]{} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2(1/3)]{}$

$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -6 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{32}(-1),F_{42}(-3)]{} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{\mathbf{G}} \xrightarrow[F_{12}(1)]{} \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)_{\mathbf{G-J}}.$

S. C. I. : $x_1 = -1 + \beta$, $x_2 = 2\alpha$, $x_3 = \alpha$, $x_4 = \beta$.

d) $\left(\begin{array}{rrr|r} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[P_{12}]{} \left(\begin{array}{rrr|r} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1(1/3)]{} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{31}(-6)]{}$

$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2(-1/2)]{} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{32}(6)]{} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -1 & -2/3 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)_{\mathbf{G}}.$

S. Incompatible.

e) S. Incompatible.

f) S. C. I. : $x_1 = 3 + 2\alpha$, $x_2 = \alpha$

g) S. C. I. : $x_1 = 2 - 12\alpha$, $x_2 = 5 - 27\alpha$, $x_3 = \alpha$.

h) S. Incompatible.

7.- Sin usar lápiz y papel, determinar cuáles de los siguientes sistemas homogéneos tienen soluciones no triviales.

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{r} 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 = 0 \\ 7x_1 + x_2 - 8x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 8x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{array} \right. \qquad \text{b)} \left\{ \begin{array}{r} x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 - 8x_3 = 0 \\ 4x_3 = 0 \end{array} \right. \qquad \text{c)} \left\{ \begin{array}{r} 3x - 2y = 0 \\ 6x - 4y = 0 \end{array} \right.$$

Solución:

a) Existen soluciones no triviales ya que el sistema tiene más incógnitas que ecuaciones.

b) La solución trivial es la única solución.

c) Existen soluciones no triviales ya que las dos ecuaciones son proporcionales.

8.- Resolver, por cualquier método, los siguientes sistemas homogéneos

$$\text{a)} \left\{ \begin{array}{r} 2x - y - 3z = 0 \\ -x + 2y - 3z = 0 \\ x + y + 4z = 0 \end{array} \right. \qquad \text{b)} \left\{ \begin{array}{r} v + 3w - 2x = 0 \\ 2u + v - 4w + 3x = 0 \\ 2u + 3v + 2w - x = 0 \\ -4u - 3v + 5w - 4x = 0 \end{array} \right.$$

Solución:

a) $\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[P_{13}]{} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 2 & -1 & -3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{21}(1),F_{31}(-2)]{} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -11 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow$

$\xrightarrow[F_{32}(1)]{} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -10 & 0 \end{array}\right)$. S. C. D: Solución trivial, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

b) S. C. Indeterminado: $u = \frac{7}{2}\alpha - \frac{5}{2}\beta$, $v = -3\alpha + 2\beta$, $w = \alpha$, $x = \beta$.

9.- i) Resolver los siguientes sistemas, donde a, b y c son constantes

$$\text{a)}\left\{\begin{array}{r} 2x+y=a \\ 3x+6y=b \end{array}\right. \qquad \text{b)}\left\{\begin{array}{r} x_1+x_2+x_3=a \\ 2x_1+2x_3=b \\ 3x_2+3x_3=c \end{array}\right.$$

ii) ¿Para qué valores de a el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x+2y-3z=4 \\ 3x-y+5z=2 \\ 4x+y+(a^2-1)z=a+2 \end{array}\right.$$

no tiene solución, tiene exactamente una solución o infinitas soluciones?

<u>Solución</u>:

i) a) S.C.D. $\left\{\begin{array}{l} x=\frac{2}{3}a-\frac{1}{9}b \\ y=-\frac{1}{3}a+\frac{2}{9}b \end{array}\right.$ b) S.C.D.: $\left\{\begin{array}{l} x_1=-\frac{1}{3}c+a \\ x_2=a-\frac{1}{2}b \\ x_3=\frac{1}{3}c-a+\frac{1}{2}b \end{array}\right.$

$$\text{ii)}\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & a^2-1 & a+2 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{21}(-3),F_{31}(-4)]{} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & -7 & a^2+11 & a-14 \end{array}\right) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow[F_{32}(1)]{} \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & a^2-3 & a-4 \end{array}\right)$$

Si $a=-\sqrt{3}$ ó $a=-\sqrt{3}$ el sistema no tiene solución. En otro caso el sistema es compatible determinado, tiene sólo una solución.

10.- ¿Para qué valores de a el sistema

$$\left\{\begin{array}{l} (a-3)x+y=0 \\ x+(a-3)y=0 \end{array}\right.$$

tiene soluciones no triviales?

<u>Solución</u>:

$$\left(\begin{array}{rr|r} a-3 & 1 & 0 \\ 1 & a-3 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[P_{12}]{} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & a-3 & 0 \\ a-3 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{21}(3-a)]{} \left(\begin{array}{rr|r} 1 & a-3 & 0 \\ 0 & -a^2+6a-8 & 0 \end{array}\right)$$

Si $a=4$ ó $a=2$, el sistema tiene soluciones no triviales.

11.- En cada apartado, determinar las matrices A, x y b que expresen el sistema de ecuaciones dados como una ecuación matricial $Ax=b$.

$$\text{a)}\left\{\begin{array}{rr} x_1+x_2+2x_3= & 8 \\ -x_1-2x_2+3x_3= & 1 \\ 3x_1-7x_2+4x_3= & 10 \end{array}\right. \qquad \text{b)}\left\{\begin{array}{rr} x-y+2z-w= & -1 \\ 2x+y-2z-2w= & -2 \\ -x+2y-4z+w= & 1 \\ 3x-3w= & -3 \end{array}\right.$$

<u>Solución</u>:

$$\text{a)}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & -7 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

12.- En cada apartado, expresar la ecuación matricial como un sistema de ecuaciones lineales

$$\text{a)}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 7 \\ -2 & 5 & 1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>:

$$\text{a)}\left\{\begin{array}{rr} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = & 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = & -1 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = & 4 \end{array}\right. \qquad \text{b)}\left\{\begin{array}{rr} 3w - 2x + z = & 0 \\ 5w + 2y - 2z = & 0 \\ 3w + x + 4y + 7z = & 0 \\ -2w + 5x + y + 6z = & 0 \end{array}\right.$$

13.- En cada apartado encontrar la forma escalonada y escalonada reducida de la matriz de orden tres cuyos elementos son

$$\text{a) } a_{ij} = i + j \qquad \text{b) } a_{ij} = i^{j-1} \qquad \text{c) } a_{ij} = \left\{\begin{array}{rl} 1 & \text{si } |i-j| > 1 \\ -1 & \text{si } |i-j| \leq 1 \end{array}\right.$$

<u>Solución</u>:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_1(1/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \underset{F_{21}(-3),F_{31}(-4)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & -1/2 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \underset{F_2(-2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\underset{F_{32}(1)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{E}} \underset{F_{12}(-3/2)}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{\mathbf{E-R}}.$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}; \qquad \text{F. E.: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{F.E. Reducida: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \qquad \text{F. E.: } \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{F.E.Reducida: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

14.- En cada apartado, usar la información para calcular A

$$\text{a) } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \text{b) } (7A)^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 7 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{c) } (I + 2A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 5/13 & 1/13 \\ -3/13 & 2/13 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } A = \begin{pmatrix} 2/7 & 1 \\ 1/7 & 3/7 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } (I + 2A)^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \Longrightarrow (I + 2A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \Longrightarrow$$

$$A = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}^{-1} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -9/13 & 1/13 \\ 2/13 & -6/13 \end{pmatrix} \qquad \text{ya que}$$

$$\left(\begin{array}{rr|rr} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1(-1)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_{21}(-4)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 13 & 4 & 1 \end{array}\right) \underset{F_2(1/13)}{\longrightarrow}$$

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4/13 & 1/13 \end{array}\right) \underset{F_{12}(2)}{\longrightarrow} \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -5/13 & 2/13 \\ 0 & 1 & 4/13 & 1/13 \end{array}\right).$$

15.- Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular A^3, A^{-3} y A^2-2A+I. ¿Se tiene que verificar que $A^2-2A+I=(A-I)^2$? ¿ Es cierto que $(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$ para cualesquiera matrices cuadradas A y B del mismo orden?

Solución:

$$A^3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 28 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-3} = \left(A^3\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ -7/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 8 & 0 & 1 & 0 \\ 28 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_1(1/8)]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/8 & 0 \\ 28 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{21}(-28)]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/8 & 0 \\ 0 & 1 & -7/2 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^2-2A+I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Siempre se verifica la igualdad $A^2-2A+I = (A-I)^2$ ya que $(A-I)^2 = (A-I)(A-I) = AA-IA-AI-II$ y cualquier matriz cuadrada A y la matriz identidad del mismo orden conmutan.

La segunda igualdad no es cierta en general ya que $(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = AA-BA-AB+BB$ y esto sólo es igual a $A^2-2AB+B^2$ en el caso de que las matrices A y B conmuten.

16.- Demostrar que si una matriz cuadrada invertible A cumple la ecuación $A^2-3A+I=0$, entonces $A^{-1} = 3I-A$.

Solución:

Si $A^2-3A+I=0$, entonces $3A-A^2=I$ o lo que es equivalente $A\,(3I-A)=I$. De aquí se deduce, por la unicidad de la matriz inversa, que $A^{-1}=3I-A$.

17.- Se denominan matrices elementales a las matrices que se obtienen cuando a una matriz identidad se le aplica una transformación elemental. Las matrices elementales son matrices cuadradas y las denotaremos con la misma notación que usamos para las transformaciones elementales correspondientes. Por ejemplo, la matriz elemental de orden 3 que denotamos por $F_3(-4)$ es la que se obtiene cuando a la matriz identidad de orden 3 se le aplica la tranformación elemental $F_3(-4)$.

Se pide: escribir las matrices elementales $F_3(-4)$ y $F_{23}(4)$, de orden 3, calcular sus inversas, y comprobar que los resultados son $F_3(\frac{-1}{4})$ y $F_{23}(-4)$.

18.- Calcular, en el caso de que exista, la inversa de cada una de las siguientes matrices

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix},\quad b)\ \begin{pmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{pmatrix},\quad c)\ \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix},\quad d)\ \begin{pmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{pmatrix},$$

$$e)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},\quad f)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{pmatrix},\quad g)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 9 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución:

a)$A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

b) No existe la inversa.

c) $$\left(A \mid I \right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & \\ 1 & 0 & 3 & I \\ 2 & 5 & -4 & \end{array}\right) \xrightarrow[P_{12}]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{21}(-3),F_{31}(-2)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[F_2(1/4)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & 1/4 & -3/4 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{32}(-5)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & 1/4 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 5/2 & -5/4 & 7/4 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3(2/5)]{}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5/2 & 1/4 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 7/10 & 2/5 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{13}(-3),F_{23}(5/2)]{} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3/2 & -11/10 & -6/5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 7/10 & 2/5 \end{array}\right) = \left(I \mid A^{-1} \right)$$

d) No existe la inversa.

e) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

f) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1/7 & 1/7 \end{pmatrix}$

g) No existe la inversa.

19.- En cada apartado encontrar las condiciones que deben satisfacer las b para que el sistema tenga solución

a) $\left\{ \begin{array}{l} 6x_1 - 4x_2 = b_1 \\ 3x_1 - 2x_2 = b_2 \end{array} \right.$ b) $\left\{ \begin{array}{r} x_1 - 2x_2 + 5x_3 = b_1 \\ 4x_1 - 5x_2 + 8x_3 = b_2 \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 = b_3 \end{array} \right.$ c) $\left\{ \begin{array}{r} x_1 - 2x_2 - x_3 = b_1 \\ -4x_1 + 5x_2 + 2x_3 = b_2 \\ -4x_1 + 7x_2 + 4x_3 = b_3 \end{array} \right.$

Solución:

a) Para que el sistema tenga solución debe ser $b_2 - b_1/2 = 0$

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 4 & -5 & 8 & b_2 \\ -3 & 3 & -3 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{21}(-4),F_{31}(3)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & 3 & -12 & b_2 - 4b_1 \\ 0 & -3 & 12 & b_3 + 3b_1 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{32}(1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 5 & b_1 \\ 0 & 3 & -12 & b_2 - 4b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - b_1 \end{array}\right)$

Por tanto, para que el sistema tenga solución debe ser $b_3 + b_2 - b_1 = 0$

c) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ -4 & 5 & 2 & b_2 \\ -4 & 7 & 4 & b_3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_{21}(4),F_{31}(4)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & -3 & -2 & b_2 + 4b_1 \\ 0 & -1 & 0 & b_3 + 4b_1 \end{array}\right) \xrightarrow[P_{21}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1 & 0 & b_3 + 4b_1 \\ 0 & -3 & -2 & b_2 + 4b_1 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[F_{32}(-3)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & b_1 \\ 0 & -1 & 0 & b_3 + 4b_1 \\ 0 & 0 & -2 & b_2 - 3b_3 - 8b_1 \end{array}\right)$

El sistema tiene solución para cualesquiera valores de b_1, b_2, b_3.

20.- Considerar las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

a) Demostrar que la ecuación $Ax = x$ se puede escribir como $(A - I)\,x = 0$ y usar este resultado para resolver $Ax = x$.

b) Resolver $Ax = 4x$.

Solución:

a)$Ax = x \Longleftrightarrow Ax = Ix \Longleftrightarrow Ax - Ix = 0 \Longleftrightarrow (A - I)\,x = 0$.

S.C. Determinado: Solución Trivial.

b) S. C. I.: $x_1 = \alpha$, $x_2 = 0$, $x_3 = \alpha$.

21.- Resolver la ecuación matricial para X

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 \\ 4 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 5 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

<u>Solución</u>:

$$X = \begin{pmatrix} 11 & 12 & -3 & 27 \\ -6 & -8 & 1 & -18 \\ -15 & -21 & 9 & -38 \end{pmatrix}$$

22.- Siendo A la matriz cuadrada de orden 3 que verifica

$$F_3(-4)AF_{23}(4) = F_{13}(2),$$

donde, en la expresión anterior, las otras matrices son matrices elementales (ver ejercicio 17), calcular la matriz A.

<u>Solución</u>:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1/4 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

23.- Siendo la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, obtener la matriz X sabiendo que $F_{23}(-4)\, F_2\left(\frac{-1}{4}\right) X = A$. (Nota: ver ejercicio 17)

<u>Solución</u>:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 0 & -80 & -16 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

24.- Encontrar todos los valores de a y b para los que las matrices A y B no son invertibles.

$$A = \begin{pmatrix} a+b-1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2a-3b+7 \end{pmatrix}.$$

<u>Solución</u>:

La matriz A no es invertible para todos los valores de a y b que verifiquen que $a+b-1=0$.
La matriz B no es invertible para todos los valores de a y b que verifiquen que $2a-3b+7=0$.

25.- Calcular el determinante de las siguientes matrices por diferentes procedimientos

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -2 \\ 2 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 5 \\ -4 & -7 & 2 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 & -2 \\ 2 & 8 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 5 \\ -4 & -7 & 0 & 11 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 1 \\ 0 & -7 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

26.- Contestar, razonando la respuesta, si son verdaderas o falsas cada una de las siguientes afirmaciones:

a) Si $\det(A) = 0$, entonces todo sistema de la forma $Ax = b$ es incompatible.

b) Si $A_{5\times 5}$ y $\det(A) = 3$, entonces $\det\left(3\left(A^{-1}\right)\right) = 1$.

c) Para cualesquiera matrices invertibles y del mismo orden se verifica $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

d) Todo sistema lineal homogéneo con más ecuaciones que incógnitas tiene infinitas soluciones.

<u>Solución</u>: Falsas. Poner un contraejemplo.

27.- Considérese el sistema de ecuaciones lineales dado por

$$\left\{\begin{array}{rcr} 2x-2ay+4z & = & 4 \\ -x-az & = & -2 \\ y-az & = & a+2 \end{array}\right. \quad , \ a \in \mathbb{R}.$$

Se pide: usando transformaciones elementales, estudiar en función del parámetro real a la compatibilidad del sistema. Resolverlo cuando sea compatible indeterminado.

<u>Solución</u>:

Escribiendo la matriz ampliada del sistema y realizando transformaciones se tiene:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -2a & 4 & 4 \\ -1 & 0 & -a & -2 \\ 0 & 1 & -a & a+2 \end{array}\right] \underset{F_1(1/2)}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -a & 2 & 2 \\ -1 & 0 & -a & -2 \\ 0 & 1 & -a & a+2 \end{array}\right] \underset{F_{21}(1)}{\longrightarrow}$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -a & 2 & 2 \\ 0 & -a & 2-a & 0 \\ 0 & 1 & -a & a+2 \end{array}\right] \underset{P_{23}}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -a & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -a & a+2 \\ 0 & -a & 2-a & 0 \end{array}\right] \underset{F_{32}(a)}{\longrightarrow}$$
$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -a & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -a & a+2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & a(a+2) \end{array}\right] \ (*)$$

Ahora, como $2-a-a^2=0$ si, y sólo si, $a=1$ ó $a=-2$, se presentan los siguientes casos.

Caso 1: Cuando a es distinto de 1 y de -2.

En este caso una vez obtenida la matriz $(*)$ se puede continuar así:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -a & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -a & a+2 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & a(a+2) \end{array}\right] \underset{F_3(1/(2-a-a^2))}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -a & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -a & a+2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a(a+2)}{(2-a-a^2)} \end{array}\right]$$

y de ahí que el sistema dado es compatible determinado (es decir, tiene una única solución). Observar en el enunciado que no se pide obtener sus soluciones.

Caso 2: Cuando $a=1$.

En este caso, sustituyendo en la matriz $(*)$, nos queda

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

y la última ecuación, que es $0x+0y+0z=3$, nos indica que el sistema es incompatible (es decir, carece de soluciones).

Caso 3: Cuando $a=-2$.

En este caso, sustituyendo en la matriz $(*)$, nos queda

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

y por ello el sistema es compatible indeterminado (es decir, tiene infinitas soluciones). Sus soluciones son los $(x,y,z)=(2+2\alpha,-2\alpha,\alpha)$ para todo número real α.