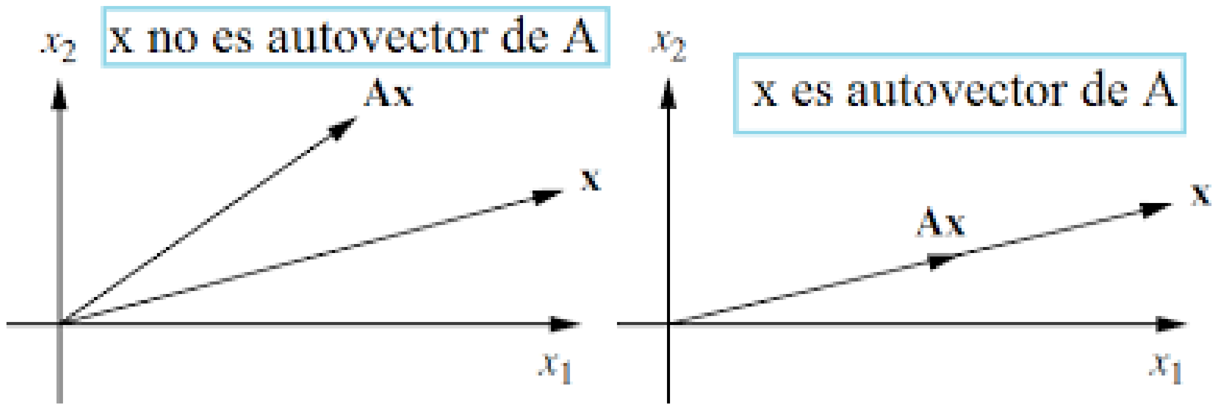
TEMA 4: DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES.

4.1. Autovalores y autovectores.

Definición, propiedades e interpretación geométrica.

Autovalor y autovector. Sea A una matriz cuadrada de orden n. Diremos que un escalar $\lambda \in \mathbb{C}$ es un *autovalor* de A si existe un vector $v \in \mathbb{C}^n$, $v \neq 0$ tal que $Av = \lambda v$, en cuyo caso se dice que v es un *autovector de A asociado al autovalor* λ. Por lo tanto, se satisface que

$$Nul\,(A - \lambda I) = \{0\} \cup \{\text{autovectores de } A \text{ asociados al autovalor } \lambda\}.$$



4.1. Autovalores y autovectores.

Notas

(1) Si tenemos un autovector v de A asociado a un autovalor λ, cualquier múltiplo no nulo de v también es un autovector de A asociado al mismo λ.

(2) Si tenemos dos autovectores v_1 y v_2 asociados a un mismo autovalor λ, cualquier combinación lineal no nula de dichos autovectores también es un autovector de A asociado al mismo autovalor λ.

(3) Al hacer transformaciones por filas o por columnas sobre una matriz A, los autovalores y autovectores de la matriz que se obtiene NO guardan relación (en general) con los autovalores y autovectores de la matriz original.

(4) En general NO se tiene que los autovalores de la matriz suma/resta/producto de dos matrices sean las suma/resta/producto de los autovalores de cada una de dichas matrices.

Cuestión: Demostrar los apartados (1) y (2).

4.1. Autovalores y autovectores.

Caracterizaciones

Caracterizaciones del concepto de autovalor. Dada una matriz cuadrada A y un número $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ son equivalentes:

(1) λ_0 es un autovalor de la matriz A.

(2) El sistema homogéneo $(A - \lambda_0 I)x = 0$ es un sistema compatible indeterminado.

(3) $\dim(Nul(A - \lambda_0 I)) \geq 1$, equivalentemente, $r(A - \lambda_0 I)$ no es máximo.

(4) La matriz $A - \lambda_0 I$ no tiene inversa.

(5) $\det(A - \lambda_0 I) = 0$.

Cuestión: Razonar el por qué de estas caracterizaciones.

4.2. Autovalores y autovectores.

Propiedades

Cuestión: Encuentra el error en las siguientes propiedades:

Propiedades de autovalores y autovectores. Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. Si λ es un autovalor de A y v un autovector asociado suyo, entonces:

(1) $\alpha\lambda$ es un autovector de αA y v es un autovector asociado suyo.

(2) $(\lambda - \mu)$ es un autovalor de $A - \mu I$ y v es un autovector asociado suyo.

(3) λ^k es un autovalor de A^k y v es un autovector asociado suyo.

(4) Si A tiene inversa, entonces $\lambda \neq 0$, λ^{-1} es un autovalor de A^{-1} y v es un autovector asociado suyo.

(5) λ es autovalor de A^T pero v NO es necesariamente autovector de A^T.

Independencia lineal de autovectores. El conjunto formado por autovectores de una matriz asociados a autovalores diferentes es linealmente independiente.

4.3. Polinomio característico.

Definición

Polinomio característico de una matriz. Sea $A = [a_{ij}]$ una matriz $n \times n$. Se denomina *polinomio característico de la matriz* A al polinomio de grado n

$$p(\lambda) \;=\; \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix}.$$

Los autovalores de A son las soluciones de la ecuación $p(\lambda) = 0$, llamada *ecuación característica* de la matriz A. Por tanto, la matriz A tiene n autovalores (no necesariamente diferentes entre sí) que pueden ser reales o complejos no-reales.

Además se verifica que si $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ son los autovalores de A entonces

(1) $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m = \det(A)$.

(2) $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = traza(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.

4.4. Diagonalización.

Matriz diagonalizable

Matriz diagonalizable. Se dice que una matriz A es *diagonalizable* si existe una matriz P invertible, llamada *matriz de paso*, y una matriz D diagonal tal que $AP = PD$. Cuando esto ocurra se obtiene la siguiente factorización

$$A = PDP^{-1}$$

denominada *diagonalización de la matriz A*.

4.4. Diagonalización.

Propiedades

Propiedades de las matrices diagonalizables. Sea A una matriz $n \times n$. Se verifica:

(1) A es diagonalizable si y sólo si tiene n autovectores linealmente independientes.

(2) A es diagonalizable si y sólo si existe una base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores de la matriz A asociados a sus autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, respectivamente. Las matrices

$$P = \left[\begin{array}{c|c|c|c} v_1 & v_2 & \ldots & v_n \end{array}\right] \text{ y } D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_m \end{bmatrix}$$

nos proporcionan una diagonalización de A.

4.4. Diagonalización.

Propiedades

(3) Si A es diagonalizable también lo es cualquier potencia A^k, $k = 1, 2, \ldots$ Más aún,

$$\text{si } A = PDP^{-1} \text{ entonces } A^k = PD^kP^{-1}.$$

(4) Si A es diagonalizable también lo es cualquier matriz de la forma $A - \mu I$. Más aún,

$$\text{si } A = PDP^{-1} \text{ entonces } A - \mu I = P\,(D - \mu I)\,P^{-1}.$$

(5) Si A tiene inversa, A es diagonalizable si y sólo si lo es su inversa A^{-1}. Más aún,

$$\text{si } A = PDP^{-1} \text{ entonces } A^{-1} = PD^{-1}P^{-1}.$$

(6) A es diagonalizable si y sólo si lo es A^T. Más aún,

$$\text{si } A = PDP^{-1} \text{ entonces } A^T = \left(P^T\right)^{-1} DP^T.$$

Cuestión: ¿Cuál es la inversa de una matriz diagonal?

4.4. Diagonalización.

Propiedades

Condición suficiente de diagonalizabilidad. Si todos los autovalores de A son simples (A tiene n autovalores distintos) entonces A es diagonalizable.

Multiplicidades de un autovalor. Sea A una matriz $n \times n$ y sea λ_0 un autovalor de A. Se denomina

(1) *Multiplicidad algebraica de* λ_0, y se denota por $m_a(\lambda_0)$, a la multiplicidad de λ_0 como raíz del polinomio característico $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ de A.

(2) *Multiplicidad geométrica de* λ_0, y se denota por $m_g(\lambda_0)$, es el número (máximo) de autovectores linealmente independientes asociados al autovalor λ_0, esto es, la dimensión del espacio $Nul(A - \lambda_0 I)$,

$$\dim(Nul(A - \lambda_0 I)) = n - r\,(A - \lambda_0 I)\,,$$

Si λ_0 un autovalor de una matriz A entonces $1 \leq m_g(\lambda_0) \leq m_a(\lambda_0)$.

Condición equivalente de diagonalizabilidad. A es diagonalizable si y sólo si para cada autovalor λ se verifica que $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$.

4.5. Diagonalización ortogonal.

Matrices simétricas reales

Autovalores y autovectores de una matriz simétrica real. Sea A una matriz simétrica real Entonces:

(1) Todos los autovalores son reales y, por tanto, todos los autovectores son reales.

(2) Si v_1 y v_2 son autovectores de A asociados a autovalores distintos λ_1 y λ_2, entonces v_1 y v_2 son ortogonales.

Teorema espectral para matrices simétricas. Sea A una matriz real $n \times n$. Son equivalentes:

(1) A es simétrica.

(2) A es diagonalizable mediante una matriz de paso ortogonal, es decir, existe una matriz ortogonal Q y una matriz diagonal D tal que $A = QDQ^T$. En este caso la matriz D recoge los autovalores de A y la matriz Q recoge, columna a columna, autovectores ortonormales de la matriz A.

4.6. Matrices no diagonalizables.

Autovectores generalizados

Si A una matriz de dimensión $n \times n$ no diagonalizable entonces existe, por lo menos un autovalor λ de A para el cual $m_g(\lambda) < m_a(\lambda)$ y, por tanto, el número de autovectores de A es menor que n y no pueden constituir una base de $\mathbb{C}^n$.

Autovectores generalizados. Sea A una matriz de dimensión $n \times n$ y sea λ un autovalor de A. Se dice que un vector $v \neq 0$ es un *autovector generalizado de A asociado a λ* si se verifica que $(A - \lambda I)^k v = 0$ para algún entero positivo k, esto es, si v pertenece al espacio $Nul\left((A - \lambda I)^k\right)$.

Si A no es diagonalizable entonces existe una base $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ formada por autovectores y autovectores generalizados de la matriz A asociados a sus autovalores $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, respectivamente.

4.6. Matrices no diagonalizables.

Autovectores generalizados

Búsqueda de autovectores generalizados. Sea A una matriz y sea λ un autovalor de A de multiplicidad algebraica $m_a(\lambda)$. Existe un valor $1 \leq r \leq m_a(\lambda)$ tal que

$$\begin{aligned} Nul(A-\lambda I) &\subsetneq Nul\left((A-\lambda I)^2\right) \subsetneq \ldots \subsetneq Nul\left((A-\lambda I)^r\right) = \\ &= Nul\left((A-\lambda I)^{r+1}\right) = \ldots = Nul\left((A-\lambda I)^{m_a(\lambda)}\right). \end{aligned}$$

Además se verifica

$$\dim\left[Nul\left((A-\lambda I)^{m_a(\lambda)}\right)\right] = m_a(\lambda).$$