Matemáticas I **Segunda convocatoria - PARTE 1** **2 de julio de 2024**

APELLIDOS: NOMBRE:
GRADO: GRUPO:

PROBLEMA 1 [**2 puntos**] Determinar de forma razonada y justificada si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. El conjunto $H = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | z - y - 1 = 0\}$ es un subespacio vectorial.
2. Si A es una matriz de tamaño 8×11 de rango 5, entonces el complemento ortogonal al espacio nulo de A tiene dimensión 6.
3. Si $B_1 = \{u_1, u_2\}$ es una base ortogonal de $\mathbb{R}^2$, $B_2 = \{v_1, v_2\}$ es otra base de $\mathbb{R}^2$ y $3I$ (3 por la matriz identidad I) es la matriz de cambio de base de B_2 a B_1, entonces B_2 también es una base ortogonal.
4. Si el sistema $Ax = b$ es incompatible entonces el vector b pertenece al espacio generado por las columnas de A.

PROBLEMA 2 [**4 puntos**] Sean la matriz A y el vector b los siguientes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 3(a+1) \\ 1 & -a-1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad b = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ 6-4a \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Discutir, utilizando el método de Gauss y el teorema de Rouché-Fröbenius, la compatibilidad del sistema $Ax = b$ según los valores de $a \in \mathbb{R}$ e indicar la dimensión de $N(A)$ en cada caso.

b) Para $a = -3$:

- b.1) Hallar una base ortogonal de $R(A)$.
- b.2) Obtener unas ecuaciones implícitas de $N(A^T)$.
- b.3) Encontrar la solución por mínimos cuadrados del sistema $A'x = b$, donde A' es la matriz formada por las dos primeras columnas de A.

PROBLEMA 3 [**2 puntos**] Sean $B_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $B_2 = \{w_1, w_2, w_3\}$ dos bases de $\mathbb{R}^3$. Sabiendo que se cumple:

$$\begin{cases} v_1 &= w_1 + w_2 \\ v_2 &= w_1 - w_2 \\ v_3 &= -w_3 \end{cases}$$

Determinar la matriz de cambio de base de B_1 a B_2 y las coordenadas respecto a B_2 del vector $u = (1, 1, 1)_{B_1}$.

PROBLEMA 4 [**2 puntos**] Si S es el subespacio generado por el vector $v = (1, -1, 2, 1)$ determinar λ sabiendo que el vector $u = (\lambda, \lambda, 1, -\lambda)$ pertenece al complemento ortogonal de S. Encontrar la proyección ortogonal del vector $w = v + e_1$ en el complemento ortogonal de S siendo $e_1 = (1, 0, 0, 0)$.

- **Todos los resultados deberán presentarse simplificados.**
- **Todas las respuestas deberán estar debidamente razonadas y justificadas.**
- **En la parte superior de todas las hojas deberán aparecer los apellidos y el nombre.**

Matemáticas I **Segunda convocatoria - PARTE 2** **2 de julio de 2024**

APELLIDOS: NOMBRE:
GRADO: GRUPO:

PROBLEMA 1 [**2 puntos**] Determinar de forma razonada y justificada si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

1. Toda matriz cuadrada de dimensión 2 diagonalizable es invertible.
2. Sea P_1 el polinomio de McLaurin de grado 1 de la función $f(x) = x^2$. Entonces $P_1(x) = x$.
3. Dado un número complejo w, siempre se cumple que $w\overline{w} \geq 0$.
4. Un espacio propio $V(\lambda)$ de dimensión 1, puede contener dos autovectores ortogonales.
5. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable y creciente. Entonces, f^{2025} también es creciente.

PROBLEMA 2

1. [**1.5 puntos**] Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$. Estudiar su diagonalizabilidad en función de los parámetros.
2. [**1.5 puntos**] Sea B la matriz simétrica cuyos autovalores son 7 y -2, verificando que $V(7) = \{(a + 4b, -2a + 2b, 5b), \forall a, b \in \mathbb{R}\}$. Expresar B como producto de tres matrices conocidas.

PROBLEMA 3

1. [**0.75 puntos**] Dado $z = \dfrac{2(i^4 - i^3)}{1 - i}$, expresarlo en forma binómica, calcular sus raíces cuartas, y representarlas gráficamente.
2. [**0.75 puntos**] Hallar dos números complejos tales que su producto es -8 y que uno de ellos es el cuadrado del otro.
3. [**0.5 puntos**] Hallar una ecuación de segundo grado que tenga como soluciones $1 + i$ y $1 - i$.

PROBLEMA 4

1. [**1.5 puntos**] Dadas las funciones $f(x) = \ln(x^3)$ y $g(x) = x$:
   a) Probar que se cortan en un único punto del intervalo $[1, e]$.
   b) Aplicar una iteración del método de Newton para hallar dicho punto de corte, partiendo del punto $x_0 = 1$. ¿Se puede asegurar la convergencia del método partiendo de este punto?
   c) Obtener el único punto crítico de la función $h(x) := f(x) - g(x)$. ¿Por qué no es posible realizar una iteración del método de Newton para $h(x)$ partiendo de este punto?
2. [**1.5 puntos**] Dada la función $f(x) = e^x \operatorname{sen}(x)$, determinar el polinomio de MacLaurin de grado 2 de la función y obtener una cota del error que se comete al aproximar $-e^{-\frac{\pi}{2}}$ mediante dicho polinomio.

▶ **Todos los resultados deberán presentarse simplificados.**

▶ **Todas las respuestas deberán estar debidamente razonadas y justificadas.**

▶ **En la parte superior de todas las hojas deberán aparecer los apellidos y el nombre.**