ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
Grado en Ingeniería Mecánica

MATEMATICAS I. **Tema 2: Ejercicios de Coordenadas.Cambio de Bases**

1.- Sea $\mathcal{B} = \{ v_1, v_2, v_3 \}$ una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$, siendo $v_1 = (1,0,1)$, $v_2 = (-1,1,0)$ y $v_3 = (1,1,1)$.

a) Considérese el vector $x = (2,-3,4) \in \mathbb{R}^3$. Calcular las coordenadas del vector x en la base $\mathcal{B}$: $[x]_{\mathcal{B}}$.

b) Determinar las componentes del vector $w \in \mathbb{R}^3$, sabiendo que $[w]_{\mathcal{B}} = (6,-3,2)$.

Solución: a) $[x]_{\mathcal{B}} = (9,2,-5)$, b) $w = (11,-1,8)$.

2.- Sean las bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{ u_1, u_2, u_3 \}, \quad \text{con } u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (0,1,1),\ u_3 = (0,0,1) \\ \mathcal{B}' &= \{ v_1, v_2, v_3 \}, \quad \text{con } v_1 = (1,0,-1),\ v_2 = (0,-1,0),\ v_3 = (-1,1,0) \end{aligned}$$

Determinar la ecuación matricial del cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$.

Solución: $[x]_{\mathcal{B}'} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & -1 \end{bmatrix} [x]_{\mathcal{B}}$.

3.- Considérense las siguientes bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{ u_1, u_2, u_3 \}, \quad \text{con } u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (1,1,2),\ u_3 = (1,2,3) \\ \mathcal{B}_2 &= \{ v_1, v_2, v_3 \}, \quad \text{con } v_1 = (2,1,-3),\ v_2 = (3,2,-5),\ v_3 = (1,-1,1) \end{aligned}$$

a) Sea el vector $x = (6,9,14) \in \mathbb{R}^3$. Calcular las coordenadas del vector x en la base $\mathcal{B}$: $[x]_{\mathcal{B}_1}$.

b) Determinar la ecuación matricial del cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. Utiliza la ecuación matricial para calcular las coordenadas del vector x en la base $\mathcal{B}_2$.

c) Determinar la ecuación matricial del cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

Solución: a) $[x]_{\mathcal{B}_1} = (1,2,3)$.

b)$[x]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -16 & -21 & -34 \\ 10 & 13 & 21 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix} [x]_{\mathcal{B}_1}$, $[x]_{\mathcal{B}_2} = (-160,99,29)$, c)$[x]_{\mathcal{B}_1} = \begin{bmatrix} 6 & 10 & -1 \\ -3 & -6 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} [x]_{\mathcal{B}_2}$

4.- Considérense las siguientes bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_1 &= \{ u_1, u_2 \}, \quad \text{con } u_1 = (1,0),\ u_2 = (1,1) \\ \mathcal{B}_2 &= \{ v_1, v_2 \}, \quad \text{con } v_1 = (0,1),\ v_2 = (-1,-1) \end{aligned}$$

a) Sea el vector $x = (3, 2) \in \mathbb{R}^2$. Calcular las coordenadas del vector x en la base $\mathcal{B}$: $[x]_{\mathcal{B}_1}$.

b) Calcular las coordenadas del vector x en la base $\mathcal{B}$: $[x]_{\mathcal{B}_2}$.

c) Determinar la ecuación matricial del cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$. Utiliza la ecuación matricial para calcular las coordenadas del vector x en la base $\mathcal{B}_2$.

d) Utilizando el apartado anterior c), comprobar que son ciertos los resultados del apartado b).

Solución: a) $[x]_{\mathcal{B}_1} = (1, 2)$, b) $[x]_{\mathcal{B}_2} = (-1, -3)$.

$$\text{c)}[x]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} [x]_{\mathcal{B}_1}$$

5.- Considérense las siguientes bases del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{aligned} &\mathcal{B}_1 = \{\, u_1,\, u_2,\, u_3 \,\}, \\ &\mathcal{B}_2 = \{\, v_1,\, v_2,\, v_3 \,\}, \quad \text{con } v_1 = (1, 0, 2),\ v_2 = (1, 1, 1,),\ v_3 = (0, 0, 3) \end{aligned}$$

a) Si la ecuación matricial del cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ es

$$[x]_{\mathcal{B}_2} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [x]_{\mathcal{B}_1},$$

calcular las componentes de los vectores u_1, u_2, u_3.

b) Si $[x]_{\mathcal{B}_2} = (1, -1, 2)$, calcular las coordenadas del vector x en la base $\mathcal{B}_\infty$: $[x]_{\mathcal{B}_1}$ ¿Cuáles son las componentes del vector $x \in \mathbb{R}^3$.

c) Si $[y]_{\mathcal{B}_1} = (1, -1, 1)$, calcular las coordenadas del vector y en la base $\mathcal{B}_\in$: $[y]_{\mathcal{B}_2}$ ¿Cuáles son las componentes del vector $y \in \mathbb{R}^3$.

Solución: a) $u_1 = (1, 0, 2)$, $u_2 = (2, 1, 3)$, $u_3 = (2, 1, 6)$; b) $[x]_{\mathcal{B}_1} = (2, -3, 2)$, $x = (0, -1, 7)$; c) $[x]_{\mathcal{B}_2} = (1, 0, 1)$, $x = (1, 0, 5)$.