TEMA 1: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES.

Índice.

TEMA 1: SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES Y MATRICES.

1.1. Introducción.

Sistemas de ecuaciones y matrices

¿Qué relación hay entre los sistemas de ecuaciones lineales y las matrices?

¿Cómo los resolvemos?

1.1. Introducción.

Compatibilidad de sistemas de ecuaciones.

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas en $\mathbb{R}$ es una expresión de la forma

$$(S):\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ \vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n=b_m\end{array}\right.$$

Los sistemas de ecuaciones lineales se pueden clasificar, atendiendo al número de soluciones que tienen, de la siguiente manera:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Sistemas compatibles}\left\{\begin{array}{l}\text{Sistemas compatibles determinados}\\ \text{Sistemas compatibles indeterminados}\end{array}\right.\\ \text{Sistemas incompatibles}\end{array}\right.$$

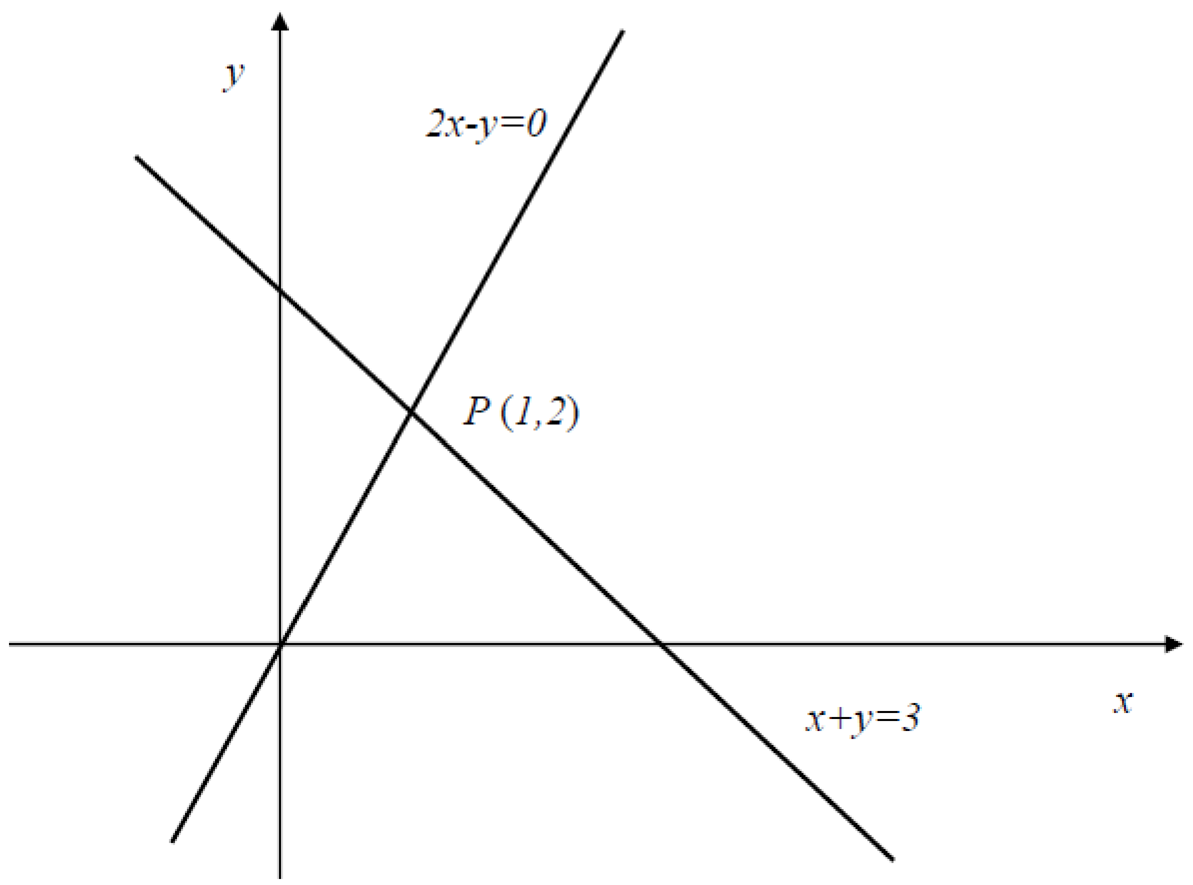
Los *sistemas compatibles* son los que tienen al menos una solución; los *compatibles determinados* tienen sólo una solución, y los *indeterminados* tienen más de una solución.

Los *sistemas incompatibles* son los que carecen de soluciones.

1.1. Introducción.

Ejemplo 1. *Cuestión: ¿Qué tipo de sistema es?*

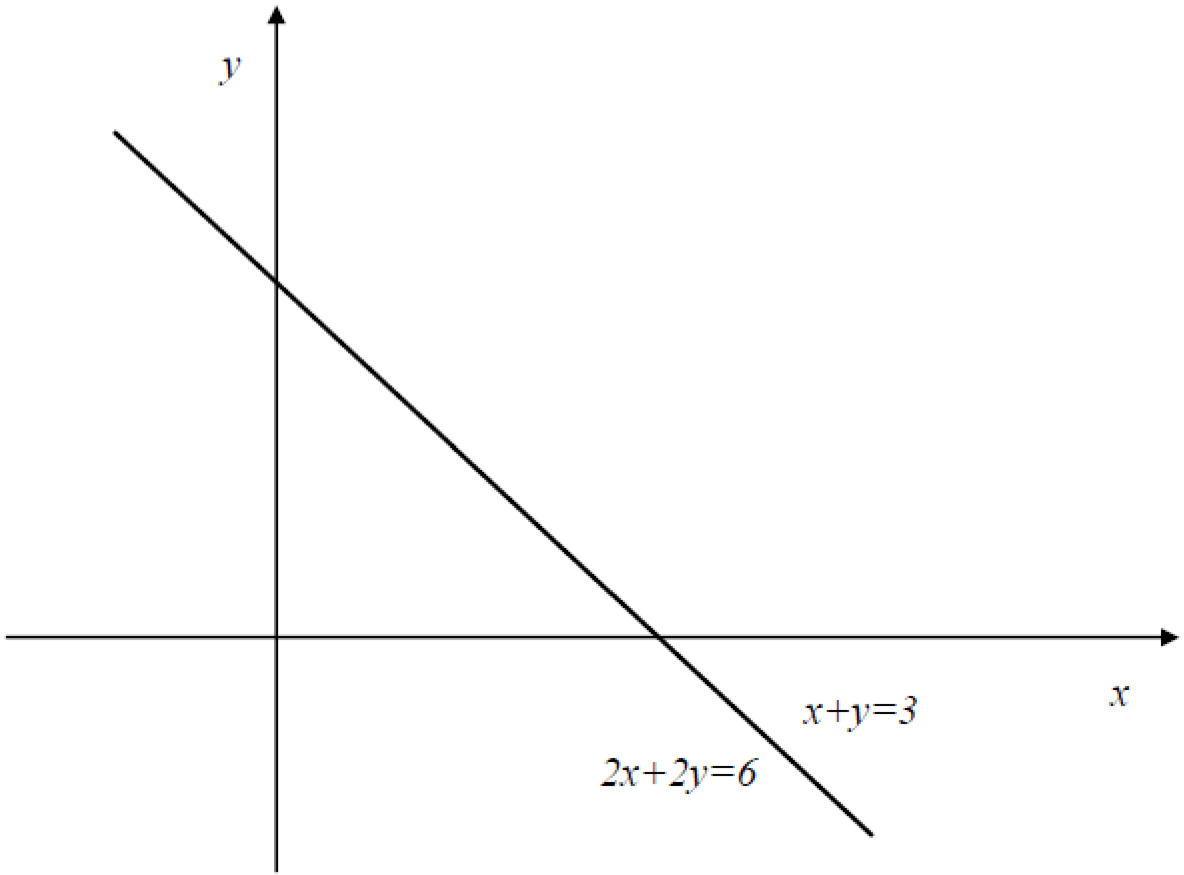
$$\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$$



1.1. Introducción.

Ejemplo 2. *Cuestión: ¿Qué tipo de sistema es?*

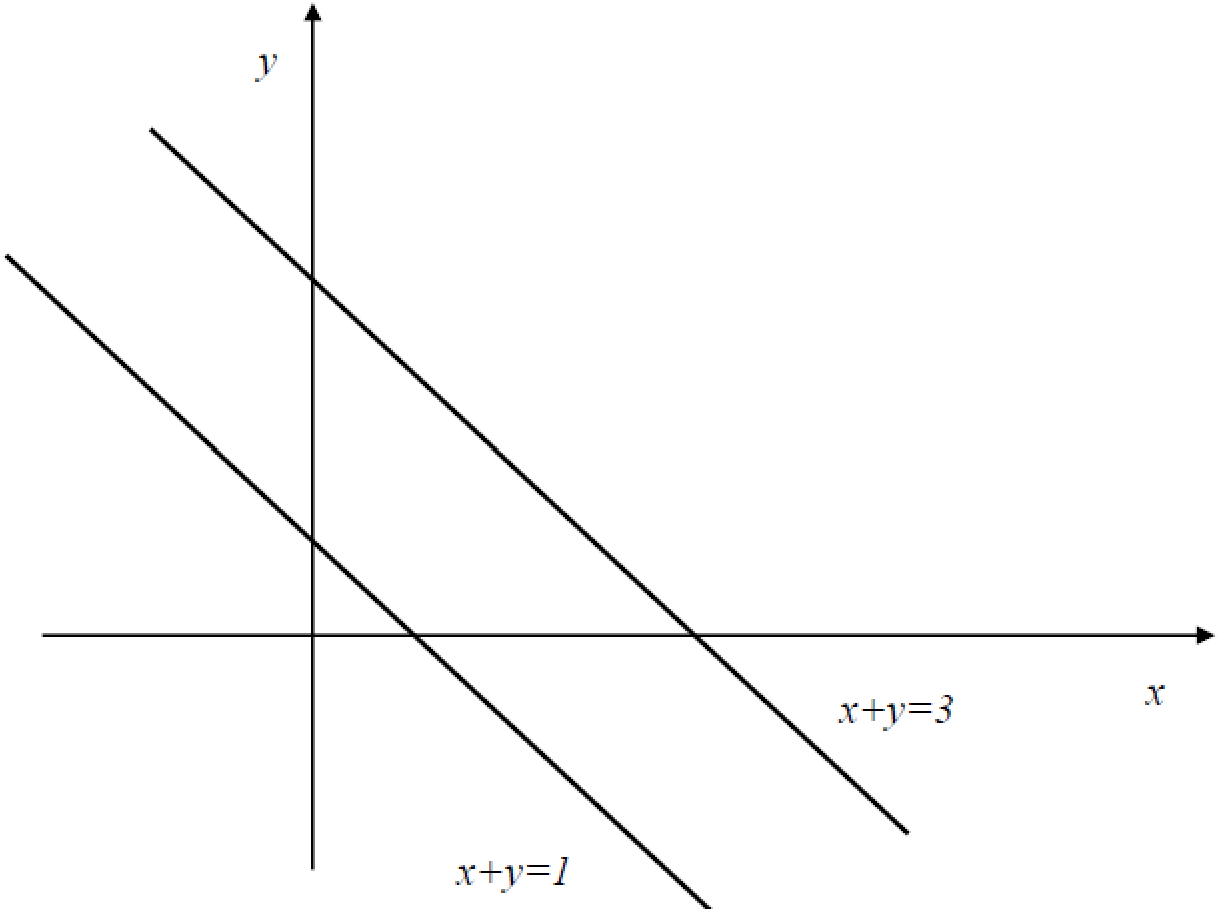
$$\begin{cases} 2x + 2y = 6 \\ x + y = 3 \end{cases}$$



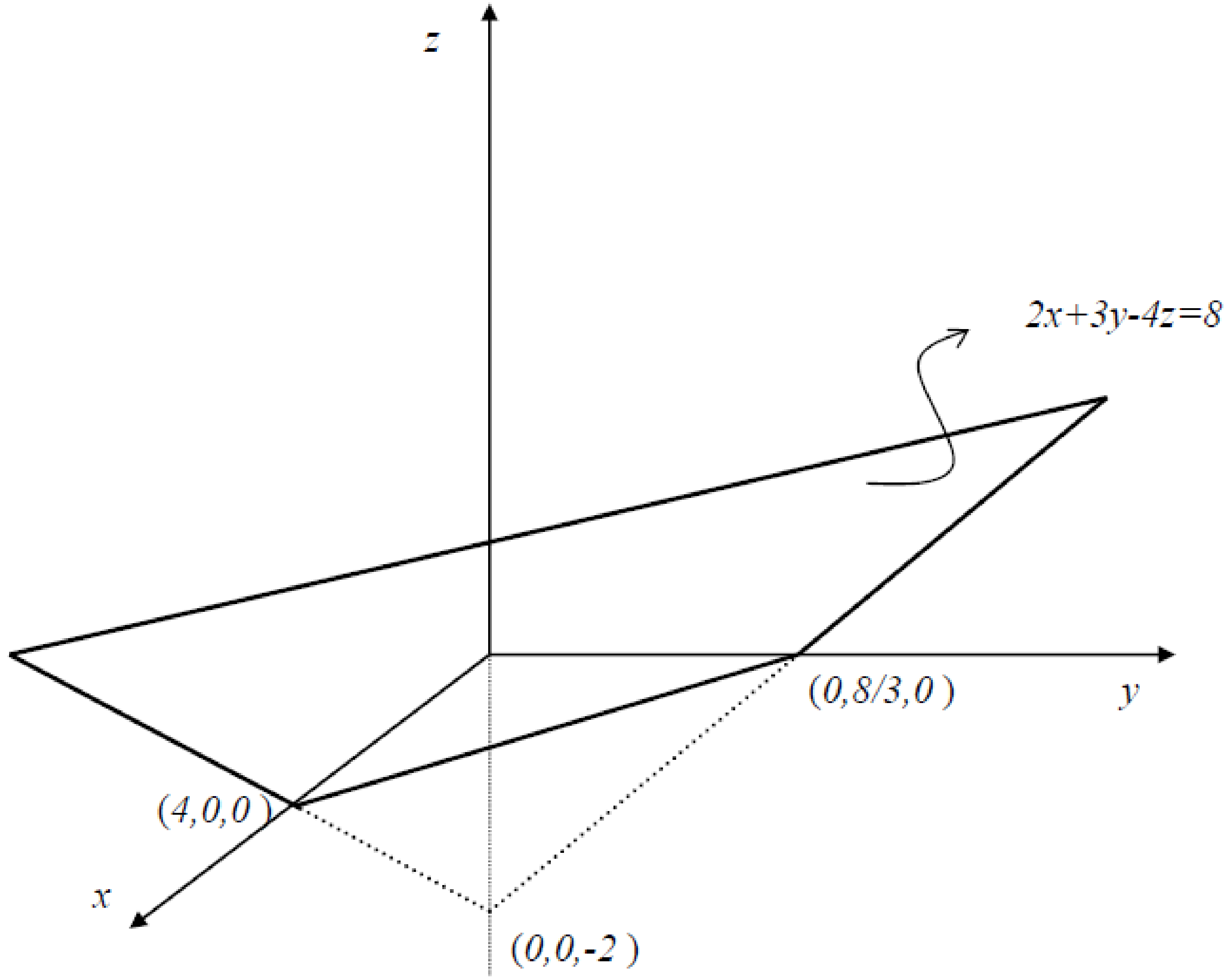
1.1. Introducción.

Ejemplo 3. *Cuestión: ¿Qué tipo de sistema es?*

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$$



1.1. Introducción.



1.2. Matrices.

Definiciones y ejemplos

Definición *Una matriz* $A = (a_{ij})$ *es un conjunto de números ordenados en filas y columnas.* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$

Si m *es el número de filas y* n *el de columnas diremos que* A *es una matriz de orden (tamaño o dimensión)* m *por* n *y escribiremos* $A_{m\times n}$ *ó* $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$*, donde* $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ *representa el conjunto de las matrices de orden* $m \times n$ *con con elementos o coeficientes reales.*

Cuestión: ¿Cómo se escribe una matriz con números complejos? ¿Qué nombre recibe el conjunto de ese tipo de matrices?

1.2. Matrices.

Algunos tipos de matrices son (*Cuestión: escribe un ejemplo de cada una de ellas*):

- Una matriz se dice que es *cuadrada* de orden n cuando tiene n filas y n columnas.
- Una matriz se dice que es una *matriz fila* cuando sólo tiene 1 fila.
- Una matriz se dice que es una *matriz columna* cuando sólo tiene 1 columna.
- Una matriz se dice que es *triangular superior* cuando sus elementos cumplen que $a_{ij} = 0$ si $i > j$.
- Una matriz se dice que es *triangular inferior* cuando sus elementos cumplen que $a_{ij} = 0$ si $i < j$.
- Una matriz se dice que es *triangular* cuando es triangular inferior o triangular superior.
- Una matriz se dice que es una matriz *diagonal* cuando es cuadrada y sus elementos cumplen que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
- Llamamos *matriz identidad* de orden n a la matriz diagonal cuya diagonal principal está formada por unos. Dicha matriz la denotamos por I_n.

1.2. Matrices.

Operaciones con matrices

- **Suma**: dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ del mismo orden, la suma $A + B$ es la matriz que se obtiene al sumar los elementos correspondientes de las dos matrices. Es decir, si $A, B \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, se define $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$.

- **Producto de un escalar por una matriz**: Si A es cualquier matriz y λ es cualquier número real, el producto λA es la matriz que se obtiene al multiplicar cada elemento de A por λ. Esto es, $\lambda A = (\lambda a_{ij})$.

- **Matriz traspuesta**: Sea $A_{m\times n}$, la traspuesta de A es la matriz que se obtiene al intercambiar las filas por las columnas, y se representa por A^T.

1.2. Matrices.

Operaciones con matrices

- **Producto de matrices:** Si $A_{m\times r}$ y $B_{r\times n}$, el producto AB es la matriz $C_{m\times n}$ definida del siguiente modo:

$$c_{ij} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{ir} \end{bmatrix}}_{\text{fila } i \text{ de } A} \underbrace{\begin{bmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{bmatrix}}_{\text{columna } j \text{ de } B} = a_{i1}b_{1j} + \cdots + a_{ir}b_{rj} = \sum_{k=1}^{r} a_{ik}b_{kj}$$

para $i = 1, ..., m; \quad j = 1, ..., n.$

Cuestión: Sean A y B dos matrices cuadradas, ¿se verifica que $(A+B)^2 = A^2 + B^2 + 2AB$*?*

1.2. Matrices.

Propiedades

Propiedades : Sean A, B y C matrices de órdenes convenientes.

1) $A + B = B + A$
2) $A + (B + C) = (A + B) + C$
3) $A(B + C) = AB + BC$
4) $(A + B)C = AC + BC$
5) $A(BC) = (AB)C$
6) $(A + B)^t = A^t + B^t$
7) $(A^t)^t = A$
8) $(AB)^t = B^t A^t$

El producto de matrices no es conmutativo

El producto de matrices no nulas puede dar una matriz nula.

1.2. Matrices.

Propiedades

Hagamos un breve paréntesis para recordar que el 0 y el 1 juegan un papel importante en las operaciones con números reales. Si $a, b, c \in \mathbb{R}$ se verifica:

1) $a + 0 = 0 + a = a$

2) $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

3) $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0$ ó $b = 0$

4) $a \cdot b = a \cdot c$ y $a \neq 0 \Rightarrow b = c$

5) $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

6) $a \neq 0 \Rightarrow a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

¿Qué matrices "juegan" el papel del 0 y el 1, y cuáles de estas reglas son válidas para matrices? Dichas matrices son la matriz nula y la matriz identidad, respectivamente, que se definen del siguiente modo:

- Matriz nula: $\mathbf{O}_{m\times n}=(\theta_{ij})$, siendo $\theta_{ij} = 0$ para todo i, j.
- Matriz identidad: $I_n = (\delta_{ij})$, siendo $\delta_{ii} = 1, \delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Es decir:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

1.2. Matrices.

Propiedades

Proposición *Sean* $A_{m\times n}$, *se verifica:*

1. $A_{m\times n} + \mathbf{O}_{m\times n} = \mathbf{O}_{m\times n} + A_{m\times n} = A_{m\times n}$
2. $A_{m\times n}\mathbf{O}_{n\times p} = \mathbf{O}_{m\times p}$
3. $A_{m\times n}I_n = A_{m\times n}$
4. $I_m A_{m\times n} = A_{m\times n}$

En general $AB = \mathbf{O} \not\Rightarrow A = \mathbf{O}$ ó $B = \mathbf{O}$, y $AB = AC \not\Rightarrow B = C$.

Cuestión: Busca tres matrices A, B y C que verifiquen: $AB = AC, \;\; B \neq C.$

1.2. Matrices.

Matriz inversa

Matriz inversa : Una matriz A cuadrada es invertible (o regular) si existe una matriz cuadrada B tal que $AB = BA = I$.

A la matriz B se le denomina *inversa* de A y se escribe $B = A^{-1}$.

Cuando una matriz no posee inversa se dice que es *singular*.

Propiedades :

1) La inversa de una matriz regular es única.

2) Si A y B son matrices regulares del mismo orden, entonces AB también es regular y $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

3) Si A posee inversa, se verifica: a) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$. b) $\left(A^{t}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{t}$.

1.2. Matrices.

Matriz simétrica

Matriz simétrica : Una matriz cuadrada es simétrica si $A = A^t$

Si A y B son matrices simétricas del mismo orden, se verifica:

- $A + B$ es simétrica.
- kA es simétrica para todo $k \in \mathbb{R}$.
- AB es simétrica si y sólo si A y B conmutan.

Si A es simétrica e invertible, entonces A^{-1} es simétrica.

Si es $A_{m\times n}$, entonces AA^t es simétrica de de orden m, $A^t A$ es simétrica de de orden n.

Si A es simétrica e invertible, entonces AA^t y $A^t A$ son invertibles.

1.2. Matrices.

Determinantes

Sea A una matriz cuadrada de orden n, denotamos por $A(i \mid j)$ a la submatriz que resulta de suprimir en A la fila i y la columna j.

Se define el *determinante* de A del siguiente modo:

Si $n = 1$, $\det A = a_{11}$

Si $n = 2$, $\det A = a_{11} \det A(1 \mid 1) - a_{21} \det A(2 \mid 1)$

y en general para $n > 1$, $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A(i \mid 1)$

Nota : Se verifica que para cualquier j, $\det A = \sum_{i=1} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i \mid j)$

es decir, podemos calcular $\det A$ desarrollando por cualquier columna.

1.2. Matrices.

Propiedades

1) Si A es una matriz triangular o diagonal: $\det A = a_{11} \cdots a_{nn}$.

2) Si A tiene una columna de ceros, $\det A = 0$.

3) Si B es una matriz que se obtiene de A multiplicando una columna de A por k, $\det B = k \det A$.

4) Si B es una matriz que se obtiene de A intercambiando dos columnas, $\det B = -\det A$.

5) Si B es una matriz que se obtiene de A sumando a una de sus columnas un múltiplo de otra, $\det B = \det A$.

6) Si A tiene dos columnas proporcionales, $\det A = 0$.

7) $\det A^t = \det A$. (esta propiedad permite trasladar a filas las propiedades enunciadas para columnas).

1.2. Matrices.

Otras propiedades

1) $\det kA = k^n \det A$

2) A es invertible $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

3) $\det AB = \det A \det B$

4) $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$

Cálculo de la inversa

En la expresión de $\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i \mid j)$, llamamos *cofactor* o *adjunto* al número $(-1)^{i+j} a_{ij} \det A(i \mid j)$, si lo representamos por A_{ij} se tiene: $\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$.

Llamamos adjunta de A a la matriz: $adj(A) = (A_{ij})^t = (A_{ji})$.

Para hallar la inversa de A se tiene, supuesto que $\det A \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj}(A)$$

1.3. Sistemas de ecuaciones.

Métodos de Gauss

Este método consiste en transformar el sistema de ecuaciones dado en otro *equivalente* (que tenga la misma solución) y cuya matriz de coeficientes sea *triangular*.

Solución de un sistema por el método de subida.

$$\left\{\begin{aligned} 2x + y + z &= 1 \\ y + 2z &= 4 \\ 4z &= 4 \end{aligned}\right. \uparrow \qquad \textit{La solución es } \boxed{\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 2 \\ z &= 1 \end{aligned}}$$

Solución de un sistema por el método de bajada

$$\left\{\begin{aligned} 2x \quad\quad\quad &= 2 \\ -x + y \quad &= 0 \\ 2x - 3y + 4z &= 3 \end{aligned}\right. \downarrow \qquad \textit{la solución es } \boxed{\begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 1 \\ z &= 1 \end{aligned}}$$

1.3. Sistemas de ecuaciones.

Transformaciones elementales en S.E.L.

Para transformar un sistema de ecuaciones en otro *equivalente* se pueden realizar las siguientes transformaciones que denominaremos *elementales*.

- $F_i(\alpha)$ Multiplicar la ecuación i por un escalar $\alpha \neq 0$.
- F_{ij} Permutar las ecuaciones i y j.
- $F_{ij}(\alpha)$ Sumar a la ecuación i la ecuación j multiplicada por un escalar α.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + \;\; x_2 - x_3 &=& 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &=& 2 \\ x_1 \qquad\quad + x_3 &=& 0 \end{array}\right. \underset{\substack{F_{21}(-3)\\ F_{31}(-1)}}{\sim} \left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 - x_3 &=& 2 \\ 4x_3 &=& -4 \\ -x_2 + 2x_3 &=& -2 \end{array}\right. \underset{F_{32}}{\sim} \left\{\begin{array}{rcr} x_1 + x_2 - x_3 &=& 2 \\ -x_2 + 2x_3 &=& -2 \\ 4x_3 &=& -4 \end{array}\right. \boxed{\begin{array}{rcr} x_1 &=& 1 \\ x_2 &=& 0 \\ x_3 &=& -1 \end{array}}$$

1.3. Sistemas de ecuaciones.

Definiciones

Definición *Dado un sistema (S) de m ecuaciones lineales con n incógnitas:*

$$(S):\left\{\begin{aligned} a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n &= b_1\\ &\vdots\\ a_{m1}x_1+\cdots+a_{mn}x_n &= b_m\end{aligned}\right.$$

la matriz $A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, recibe el nombre de matriz de coeficientes, el vector $b=(b_1,\ldots,b_m)\in\mathbb{R}^m$ se denomina término independiente y el vector $x=(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ se llama vector de incógnitas o vector incógnita.

Con esta notación el sistema (S) se escribe como $Ax=b$, y los vectores x y b se representan por columnas.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1} & \ldots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_m\end{bmatrix}$$

1.3. Sistemas de ecuaciones.

Definiciones

Definición *Dado el sistema $Ax = b$, a la matriz que se obtiene añadiéndole a A el vector b como última columna se le llama matriz ampliada del sistema y la denotamos por $(A|b)$. Si $b = \mathbf{0}$, el sistema se denomina homogéneo.*

$$(A|b)=\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{21}(-2)\\ F_{31}(1)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 2 & 8 \end{array}\right] \underset{F_{32}(3)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right]=(U|c)$$

Puesto que los sistemas $Ax = b$ y $Ux = c$ son equivalentes*, y hemos pasado de uno a otro sometiendo a la matriz $(A|b)$ a transformaciones elementales por filas, diremos que las matrices $(A|b)$ y $(U|c)$ son *equivalentes* y por tanto tienen el mismo *rango*.

1.3. Sistemas de ecuaciones.

Rango de una matriz

Definición *El rango de una matriz es el número máximo de filas no nulas una vez reducida la matriz a una forma escalonada.*

Nota *Puede probarse que el rango de una matriz A coincide con el de la matriz A^T.*

Observación

Para las matrices $(A|b)$ y $(U|c)$ precedentes se verifica:

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(U) = 3$, y $\mathrm{rg}(A|b) = \mathrm{rg}(U|c) = 3$

$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A|b) = 3 = n$ (nº de incógnitas), y el sistema $Ax = b$ es compatible determinado (C.D.)

1.3. Sistemas de ecuaciones.

Teorema de Rouché-Frobenius

Sea $Ax = b$ un sistema de ecuaciones lineales. Se verifica:

1) El sistema $Ax = b$ es compatible si, y sólo si, $rango(A) = rango(A\,|b)$.

2) Si $rango(A) = rango(A\,|b) = n\acute{u}mero\ de\ inc\acute{o}gnitas$, entonces el sistema $Ax = b$ es compatible determinado.

3) Si $rango(A) = rango(A\,|b) < n\acute{u}mero\ de\ inc\acute{o}gnitas$, entonces el sistema $Ax = b$ es compatible indeterminado.

Obviamente, los sistemas homogéneos siempre tienen al menos la solución trivial $x = 0$.

Cuestión: ¿Qué diferencia hay entre el rango de A y A ampliada en un sistema homogéneo?

1.3. Sistemas de ecuaciones.

Método de Gauss-Jordan

Es una variante del método de Gauss, cuyo objetivo es transformar la matriz de coeficientes en la matriz identidad. Consideremos el siguiente ejemplo:

$$(A|b)=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{21}(-3) \\ F_{31}(-1)}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{array}\right] \underset{F_{32}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right]=(U|c)$$

$$(U|c)=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right] \underset{\substack{F_{23}(-\frac{1}{2}) \\ F_{13}(\frac{1}{4})}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right] \underset{F_{11}(1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right]=(D|s)$$

1.3. Sistemas de ecuaciones.

Método de Gauss-Jordan

El sistema $Dx = s$ es equivalente al sistema dado:

$$(S):\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad = 1 \\ \quad -x_2 \qquad\quad = 0 \\ \qquad\qquad 4x_3 = -4 \end{cases} \qquad \textit{la solución es: } \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = -1 \end{array}$$

Si realizamos una etapa más, dividiendo por los pivotes (elementos diagonales) obtendremos un sistema equivalente cuya matriz de coeficientes es la matriz identidad.

$$(D|s)=\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{array}\right] \underset{\substack{F_2(-1) \\ F_3(\frac{1}{4})}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]=(I|t)$$

obsérvese que $x = t$ es la solución del sistema.

1.3. Sistemas de ecuaciones.

Cálculo de la matriz inversa mediante Gauss-Jordan

El interés del método de Gauss-Jordan radica fundamentalmente en que proporciona un algoritmo eficiente para calcular la inversa de una matriz. Dada una matriz A regular de orden n, escribimos la matriz $(A|I)$ donde I es la matriz identidad de orden n, y a continuación sometemos la matriz $(A|I)$ a una serie de transformaciones elementales por filas hasta obtener, si es posible, una matriz de la forma $(I|B)$.

Si $F_1, \ldots, F_t$ son las matrices elementales correspondientes a las transformaciones elementales por filas realizadas en el proceso de eliminación, se tendrá:

$$F_t \cdots F_1(A|I) = (I|B)$$

Si escribimos $F = F_t \cdots F_1$, resulta: $\left\{ \begin{array}{l} FA = I \\ FI = B \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A^{-1} = F \\ F = B \end{array} \right. \Longrightarrow \boxed{A^{-1} = B}$

Cuestión: ¿Cuándo no es posible realizar este procedimiento?

1.3. Sistemas de ecuaciones.

Cálculo de la matriz inversa mediante Gauss-Jordan

Proposición *a) Si A y B son matrices triangulares inferiores (superiores), su producto es una matriz del mismo tipo.*

b) Si A es una matriz triangular inferior (superior) con elementos no nulos en la diagonal, su inversa A^{-1} es una matriz del mismo tipo.

Corolario *a) Si A y B son matrices triangulares inferiores (superiores) con unos en la diagonal, su producto es una matriz del mismo tipo.*

b) Si A es una matriz triangular inferior (superior) con unos en la diagonal, su inversa A^{-1} es una matriz del mismo tipo.