ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
Grado en Ingeniería del Diseño Industrial y Desarrollo del Producto
Doble Grado en Ing. del Diseño Industrial y D. del P. e Ing. Mecánica
Grado en Ingeniería Química Industrial

<u>**MATEMÁTICAS I**</u> <u>**NÚMEROS COMPLEJOS**</u>

1 Números complejos. Generalidades

1.1 Definiciones

Llamaremos *número complejo* a toda expresión de la forma $a+bi$, donde a y b son números reales; i es la llamada *unidad imaginaria*, definida por

$$i = \sqrt{-1} \qquad \text{o} \qquad i^2 = -1.$$

En un número complejo $a+bi$, a a se le denomina *parte real* y b es la *parte imaginaria* del número complejo. Si $a = 0$, el número complejo $0 + bi$ es un *número imaginario puro*; si $b = 0$, se obtiene un número real $a + 0i = a$. El conjunto de números complejos se denota por $\mathbb{C}$.

Dos números complejos $a + bi$ y $c + di$ son iguales si y sólo si $a = c$ y $b = d$.

Dos números complejos $z = a + bi$ y $\overline{z} = a - bi$ que se diferencian sólo por el signo de su parte imaginaria se llaman *conjugados*.

1.2 Representación gráfica

Todo número complejo $a + bi$ puede ser representado en el plano XY mediante un punto de coordenadas (a, b). Recíprocamente, todo punto del plano de coordenadas (a, b) puede considerarse como la imagen geométrica del número complejo $a+bi$. Obsérvese que todos los números imaginarios puros se representan en el eje OY que llamaremos *eje imaginario*; igualmente los números reales se representan en el eje OX llamado *eje real.*

1.3 Forma trigonométrica de los números complejos

Si se designan por r $(r \geq 0)$ y θ las coordenadas polares del punto (a, b), se verifica que

$$a = r\cos\theta \qquad\qquad b = r\text{sen } \theta$$

y, por tanto, el número complejo puede ser representado en la forma:

$$a + bi = r\left(\cos\theta + i\text{sen } \theta\right)$$

A la expresión representada en el segundo miembro se le conoce como *forma trigonométrica del número complejo* $a + bi$. Obsérvese que

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \theta = \arctan \frac{b}{a}$$

El número r se llama *módulo* y θ es el *argumento* del número complejo $a+bi$. El argumento del número complejo es positivo cuando se toma a partir de la dirección positiva del eje OX en sentido contrario al movimiento de las agujas del reloj, y es negativo, cuando se calcula en dirección opuesta. Es evidente que el argumento θ no se determina de manera unívoca.

Nota: el número complejo $z = a + bi$ podemos escribirlo utilizando la llamada *forma polar*, escribiendo abreviadamente $z = r_\theta$.

2 Operaciones con números complejos

- Suma: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + i\,(b + d)$
- Producto:

  En forma binómica: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + i\,(bc + ad)$

  En forma trigonométrica:

  $$r_1 (\cos\theta_1 + i\text{sen } \theta_1) \cdot r_2 (\cos\theta_2 + i\text{sen } \theta_2) = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\text{sen } (\theta_1 + \theta_2))$$

- División:

  En forma binómica:

  $$\frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + i\frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

  En forma trigonométrica:

  $$\frac{r_1 (\cos\theta_1 + i\text{sen } \theta_1)}{r_2 (\cos\theta_2 + i\text{sen } \theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\text{sen } (\theta_1 - \theta_2))$$

- Potencia: Si $z = a + bi = r\,(\cos\theta + i\text{sen } \theta)$ y n es un número entero positivo, se verifica

  $$z^n = (a + bi)^n = r^n (\cos n\theta + i\text{sen } n\theta)$$

- Raíces: Si n es un entero positivo, el número complejo $z = r\,(\cos\theta + i\text{sen}\theta)$ tiene exactamente n raíces distintas, dadas por

  $$\sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\text{sen } \frac{\theta + 2\pi k}{n} \right)$$

  donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

3 Función exponencial y forma exponencial de un número complejo

Sea $z = x + yi$. Si x e y son variables reales, z es una variable compleja. Definimos la exponencial compleja como sigue:

$$w = e^z = e^{x+yi} = e^x (\cos y + i \text{ sen } y)$$

Propiedades:

1. $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$
2. $e^{z_1-z_2} = \dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$
3. $(e^z)^m = e^{mz} \qquad$ para $m \in \mathbb{Z}$.

- **Fórmula de Euler. Forma exponencial de un número complejo**

Si hacemos $x = 0$ en la fórmula correspondiente a la función exponencial de exponente complejo, se tiene que

$$e^{yi} = \cos y + i \text{ sen } y$$

Ésta es la fórmula de Euler y expresa la relación entre la función exponencial con exponente imaginario y las funciones trigonométricas. En efecto,

$$\left.\begin{array}{l} e^{yi} = \cos y + i \text{ sen } y \\ e^{-yi} = \cos y - i \text{ sen } y \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos y = \dfrac{e^{yi} + e^{-yi}}{2} \\ \\ \text{sen } y = \dfrac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i} \end{array}\right.$$

Teniendo en cuenta la expresión trigonométrica de un número complejo y la fórmula de Euler, resulta que cualquier número complejo puede representarse en forma exponencial

$$z = a + bi = r (\cos \theta + i \text{sen } \theta) = re^{\theta i}.$$

4 Bibliografía

Piskunov, N. *Cálculo Diferencial e Integral, Tomo 1.* Editorial Mir. Moscú.