ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR. UNIVERSIDAD DE SEVILLA

EJERCICIOS: MÉTODO DE NEWTON

1. Dada la función $f(x) = x \ln x - 2$. Demostrar que f tiene una única raíz α en el intervalo $[1, e]$. Obtener una aproximación a dicha raíz mediante el método de Newton, partiendo del punto $x_1 = e$ y realizando una iteración. ¿Se puede asegurar la convergencia del método partiendo de este valor inicial? Justifica la respuesta.

2. Estimar, aplicando el método de Newton, el punto de corte de las gráficas $y = e^x$ e $y = x^2 - 1$ con abscisa en el intervalo $[-2, 0]$. Tomar como punto inicial $x_1 = -1$ y realizar una iteración. ¿Se puede asegurar la convergencia del método tomando $x_1 = -2$?

3. Probar que la ecuación $x^4 + 32x + 4 = 0$ tiene una única solución en el intervalo $(-1, 0)$. Aproximar dicha solución aplicando el método de Newton, partiendo de $x_1 = 0$ y realizando una iteración.

4. Dada la ecuación $(x - 2)^2 - \ln x = 0$, demostrar que tiene una única solución en el intervalo $[1, 2]$. ¿Es cierto que, partiendo del valor inicial $x_1 = 1$, el método de Newton produce una sucesión convergente a dicha solución? Calcular x_2 para esa estimación inicial.

5. Sabiendo que la ecuación $\cos x = 2 - x$ tiene una solución en el intervalo $[0, \pi]$, obtener un valor aproximado usando el método de Newton. Hacer dos iteraciones partiendo del valor inicial $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$. ¿Se puede asegurar la convergencia del método partiendo de este valor inicial?

6. Se consideran las funciones $F(x) = \text{arctg } x$, $G(x) = 1 - x$. Demostrar que ambas funciones se cortan en un único punto con abscisa en el intervalo $[0, 1]$. Aproximar dicho punto de corte usando el método de Newton. Comenzar con $x_1 = 0$ y realizar dos iteraciones. ¿Se puede asegurar la convergencia del método partiendo de este valor inicial?

7. Demostrar que las curvas dadas por las funciones $f(x) = e^{-x}$ y $g(x) = x^3$ se cortan en un único punto en el intervalo $[0, 1]$. Aproximar, usando el método de Newton, la abscisa del punto corte. Tomar como punto inicial $x_1 = \dfrac{1}{2}$ y hacer una iteración.

8. Dada la ecuación $1 - x = \text{sen } x$, demostrar que tiene una única solución en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Partiendo del valor inicial $x_1 = 0$, utilizar el método de Newton para obtener un valor aproximado a dicha solución. Realizar sólo una iteración.

9. Dada la ecuación $1 - x^2 - 2\text{sen } x = 0$, demostrar que tiene una única solución en el intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$. Partiendo del valor inicial $x_1 = 0$, utilizar el método de Newton para obtener un valor aproximado a dicha solución. Realizar sólo una iteración.

10. Obtener los extremos absolutos de la función

$$g(x) = \frac{x^2}{2} - \text{sen } x$$

en el intervalo $[0, \pi]$. Si hay que aplicar el método de Newton a alguna función tomar como punto inicial $x_1 = \dfrac{\pi}{2}$ y hacer dos iteraciones.

11. Enunciar el teorema de convergencia de Newton. Estimar, aplicando el método de Newton, el punto de corte de las gráficas $y = e^{-x}$ e $y = x - 1$ con abscisa en el intervalo $[1, 2]$. Tomar como punto inicial $x_1 = 1$ y realizar una iteración.

12. Se consideran las funciones $F(x) = (1 - x)^3$ e $G(x) = \dfrac{1 + x}{2}$. Demostrar que sus gráficas se cortan en un único punto. Aproximar la abscisa de dicho punto de corte usando el método de Newton a partir de $x_1 = 0$. Realizar sólo una iteración. ¿Se puede asegurar la convergencia del método partiendo de este valor inicial? Justificar la respuesta.

13. Estimar la abscisa $x = c$ con $c > 0$ del punto de corte de las curvas $y =$sen$x$ e $y = \dfrac{x}{2}$. Hacer una iteración usando el método de Newton. ¿Se puede asegurar la convergencia del método tomando como valor inicial $x_1 = 2$?

14. Sea $f(x) = x \cos x$. Demostrar que $f(x)$ tiene exactamente un punto crítico c en el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .Utilizar el método de Newton para obtener una aproximación del punto crítico c. Tomar como punto inicial $x_1 = 1$ y hacer una iteración.

15. Justificar que las gráficas de las funciones $y = 2^{-x}$ e $y = x$ se cortan en un único punto con abscisa en el intervalo $[0, 1]$. Estimar, aplicando el método de Newton dicho punto de corte tomando como punto inicial $x_1 = 0$ y realizando dos iteraciones. ¿Se puede asegurar la convergencia del método tomando $x_1 = 0$?

16. Explicar por qué falla el método de Newton en la estimación de la raiz de la función $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x - 1$ tomando como estimación inicial $x_1 = 1$.

17. Probar que la recta $y = 2 - x$ corta en un único punto a la gráfica de la función $g(x) = 2 \ln x$. ¿Es cierto que partiendo del valor $x_1 = 1$ el método de Newton producirá una sucesión convergente a la abscisa del punto de corte? Calcular el valor de x_2 para esa estimación inicial.

18. Enunciar el teorema de convergencia de Newton. Estimar, tomando como punto inicial $x_1 = 1$ y realizado una iteración con el método de Newton, la abscisa del punto de corte de las gráficas de la función $y = e^{-x}$ y la recta $y = x - 1$.

ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR. UNIVERSIDAD DE SEVILLA

EJERCICIOS: POLINOMIOS DE TAYLOR

1. Obtener el polinomio de Taylor de segundo grado de $g(x) = \sqrt{3-2x}$ centrado en $c = 1$ y utilizar dicho polinomio para calcular el valor aproximado de $\sqrt{1{,}6}$. Dar una expresión del error cometido según la formula de Lagrange para el resto.
2. Calcular el polinomio de MacLaurin de grado 2 de la función
$$f(x) = 2x \operatorname{arctg}(2x) - \ln\sqrt{1+4x^2},$$
y utilizarlo para aproximar el valor de $f(1/4)$.
3. Calcular el polinomio de MacLaurin de grado 3 de la función $f(x) = x\cos x$ y utilizarlo para aproximar el valor de $f(0{,}1)$.
4. Hallar el polinomio de Maclaurin de grado 3 de la función $f(x) =$arctg$(2x)$.
5. Siendo $f(x) = xe^x +$ tg x, obtener el polinomio de MacLaurin de orden 2 de $f(x)$ y, usando este polinomio, calcular una aproximación del valor $f(0{,}1)$.
6. Siendo $f(x) = \ln(2x+3)$ y $P_3(x)$ el polinomio de Mclaurin de grado 3 de la función f, utilizar la fórmula de Lagrange para obtener una cota del error que se comete al aproximar el valor de $\ln(3{,}2)$ mediante el polinomio $P_3(x)$.
7. Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $c = 1$ de la función $f(x) = \ln x$. Aproximar el valor de $f(1{,}2)$ usando dicho polinomio y dar una cota del error cometido en esta aproximación.
8. Hallar el polinomio de Maclaurin de grado 2 de la función $f(x) = \ln(1-x)$. Aproximar el valor de $f(0{,}1)$ usando dicho polinomio y obtener una cota del error cometido mediante la fórmula del error de Lagrange.
9. Hallar el polinomio de Maclaurin de grado 2 de la función $f(x) = \ln(1-x)$. Aproximar el valor de $f(0{,}1)$ usando dicho polinomio y obtener una cota del error cometido mediante la fórmula del error de Lagrange.
10. Siendo $f(x) = xe^{2x} + \ln(1+x) - 3\cos 2x$, obtener el polinomio de MacLaurin de grado 3 de la función $f(x)$ y utilizarlo para aproximar el valor de $f(0{,}1)$.
11. Hallar el polinomio de Maclaurin de grado 3 de la función $f(x) = xe^{-x}$. Aproximar el valor de $f(0{,}1)$ usando dicho polinomio.
12. Dada la función $f(x) = \ln\sqrt{1+3x^2} + x\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, calcular el polinomio de MacLaurin de grado 2 de $f(x)$ y utilizarlo para aproximar el valor de $f(1/4)$.
13. Considerando la función $f(x) = x\ln(x) + (1-x)\ln(1-x)$, definida en el intervalo abierto $(0,1)$, calcular su polinomio de Taylor de grado 2 centrado en $c = \frac{1}{2}$.

14. Obtener el polinomio de Maclaurin de grado dos de la función $f(x)$ definida en el intervado $(-1,1)$ por

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Utilizar ese polinomio para aproximar el valor de $f(0{,}1)$ y expresar el error cometido en la forma de Lagrange.

15. Obtener el polinomio de Mclaurin de grado 3 de la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Utilizar dicho polinomio para obtener una aproximación del valor $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

16. Dada la función $g(x) = e^x \cos x$, calcular el polinomio de MacLaurin de grado 3. Escribir la expresión que proporciona la fórmula de Lagrange para determinar el error que se comete en el cálculo aproximado de $g(\pi/3)$ mediante el polinomio de MacLaurin obtenido.

17. Hallar el polinomio de Taylor de grado 2, centrado en $c = 1$, de la función $f(x) = x^2 \ln x$ y obtener una cota del error que se comete cuando el valor de $f(1{,}06)$ se aproxima utilizando dicho polinomio.

18. Calcular el polinomio de Maclaurin de grado 3 de la función

$$h(x) = \operatorname{sen}\frac{\pi}{2}x - \cos x$$