# Capítulo 4
# DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES

## 4.1. Autovalores y autovectores

Observemos que para una matriz cuadrada, por ejemplo $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, existen algunos vectores $x \in \mathbb{R}^2$ no nulos y números reales $\lambda$ tales que $Ax = \lambda x$.

Así, si $x_1 = (1, 1)$,

$$Ax_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \text{ es decir, } Ax_1 = 2x_1.$$

Para $x_2 = (1, -1)$ también se cumple que:

$$Ax_2 = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow Ax_2 = 4x_2.$$

Estos vectores y los escalares correspondientes son característicos de la matriz y reciben el nombre de *vectores propios* o *autovectores*, y *valores propios* o *autovalores*. Nuestro objetivo es aprender a calcularlos, y deducir consecuencias de su existencia, pues surgen en multitud de aplicaciones: estudio de vibraciones, sistemas eléctricos, reacciones químicas, etc.

**Definición 152** *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, el número real $\lambda$ es un autovalor de $A$ (o valor propio) si existe un vector $x \neq 0$, tal que $Ax = \lambda x$. Todo vector no nulo que satisfaga esta relación se denomina autovector de $A$ (o vector propio) asociado al autovalor $\lambda$.*

**Observaciones:**

a) La condición $x \neq 0$ se introduce para evitar el caso trivial: cualquier $\lambda$ verifica la condición $A \cdot \mathbf{0} = \lambda \cdot \mathbf{0}$.

b) Un autovector sólo está asociado a un autovalor: En efecto , si $x$ es un autovalor de $A$ asociado a $\lambda_1$ y $\lambda_2$, entonces: $Ax = \lambda_1 x = \lambda_2 x \underset{x \neq \mathbf{0}}{\Rightarrow} \lambda_1 = \lambda_2$.

c) Un autovalor tiene asociados infinitos autovectores.

Es decir, si $x$ es un autovector correspondiente a $\lambda$ también $\mu x$ es un autovector correspondiente a $\lambda$. De hecho todos los vectores del subespacio $N(A - \lambda I)$,excepto el vector nulo, son autovectores correspondientes a $\lambda$.

**Definición 153** *Si $\lambda$ es un autovalor de una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, el subespacio $N(A-\lambda I)$ se denomina subespacio propio de $A$ asociado al autovalor $\lambda$,y se denota por $V_A(\lambda)$ o $V(\lambda)$.*

**Cálculo de los autovalores de $A$**

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, para encontrar los autovalores de $A$ debemos encontrar escalares $\lambda$ tales que:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow Ax - \lambda x = \mathbf{0} \Rightarrow (A - \lambda I)x = \mathbf{0}$$

Para que el sistema $(A-\lambda I)x = \mathbf{0}$ tenga soluciones no triviales ha de verificarse que $\det(A - \lambda I) = 0$.

El polinomio $P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I)$ recibe el nombre de *polinomio característico* de $A$, y sus raíces son los autovalores de $A$. $P_A(\lambda)$ es un polinomio de grado $n$, y por tanto $A$ tiene a lo sumo $n$ autovalores distintos.

**Ejemplo 154** *Calcular los autovalores de la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+6\lambda^2-11\lambda+6 = 0-(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0 \Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

*de donde los autovalores de $A$ son:* $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$.

### Cálculo de los autovectores

Una vez obtenidos los autovalores de la matriz, para cada uno de ellos se obtienen los autovectores resolviendo el sistema $(A-\lambda I)x=0$, pues $V(\lambda)=N(A-\lambda I)=\{x\in\mathbb{R}^n:(A-\lambda I)x=\mathbf{0}\}$.

**Ejemplo 155** *Calcular los subespacios propios de la matriz* $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\\ 4 & -4 & 5\end{bmatrix}$.

*Como hemos visto anteriormente, los autovalores de A son:* $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3$.*Para cada uno de ellos vamos a calcular el correspondiente subespacio propio.*

$\boxed{\lambda_1=1}$ $\quad V(1)=N(A-I)=\{x\in\mathbb{R}^n:(A-I)x=\mathbf{0}\}$.

$$(A-I)x=\mathbf{0},\qquad \begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & -4 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 1\\ 4 & -4 & 4\end{bmatrix}\underset{F_{12}}{\sim}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 4 & -4 & 4\end{bmatrix}\underset{F_{31}(-4)}{\sim}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{aligned}x_1-x_2&=-x_3\\ 2x_2&=x_3\end{aligned}\right.\Rightarrow\left\{\begin{aligned}x_1&=-\frac{x_3}{2}\\ x_2&=\frac{x_3}{2}\end{aligned}\right.\Rightarrow\boxed{\begin{aligned}x_1&=-\frac{\alpha}{2}\\ x_2&=\frac{\alpha}{2}\\ x_3&=\alpha\end{aligned}}$$

*luego,* $V(1)=L\{(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},1)\}=L\{(-1,1,2)\}$.

$\boxed{\lambda_2=2}$ $\quad V(2)=N(A-2I)=\{x\in\mathbb{R}^n:(A-2I)x=\mathbf{0}\}$

$$(A-2I)x=\mathbf{0},\qquad \begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 4 & -4 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 1 & -2 & 1\\ 4 & -4 & 3\end{bmatrix}\underset{\substack{F_{21}(1)\\ F_{31}(-4)}}{\sim}\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & -1\end{bmatrix}\underset{F_{12}}{\sim}\begin{bmatrix}-1 & 2 & -1\\ 0 & 4 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{r} -x_1+2x_2=x_3 \\ 4x_2=x_3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x_1=-\dfrac{x_3}{2} \\ x_2=\dfrac{x_3}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1=-\dfrac{\alpha}{2} \\ x_2=\dfrac{\alpha}{4} \\ x_3=\alpha \end{array}}$$

*luego,* $V(2)=L\{(\frac{-1}{2},\frac{1}{4},1)\}=L\{(-2,1,4)\}$.

$\boxed{\lambda_3=3}$ $\quad V(3)=N(A-3I)=\{x\in\mathbb{R}^n:(A-3I)x=\mathbf{0}\}$

$$(A-3I)x=\mathbf{0}, \qquad \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21}(\frac{1}{2}) \\ F_{31}(2)}}{\sim} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{r} -2x_1+2x_2=x_3 \\ -2x_2=-\frac{1}{2}x_3 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{r} x_1=-\dfrac{x_3}{4} \\ x_2=\dfrac{x_3}{4} \end{array}\right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1=-\dfrac{\alpha}{4} \\ x_2=\dfrac{\alpha}{4} \\ x_3=\alpha \end{array}}$$

*luego,* $V(3)=L\{(\frac{-1}{4},\frac{1}{4},1)\}=L\{(-1,1,4)\}$.

### Multiplicidad algebraica y geométrica

**Definición 156** *a) Se llama multiplicidad algebraica de un autovalor $\lambda_0$ al número de veces que aparece $\lambda-\lambda_0$ como factor en el polinomio característico de $A$.*
*b) Se llama multiplicidad geométrica de un autovalor $\lambda_0$ a la dimensión del subespacio propio $V(\lambda_0)$.*

**Nota 157** *a) Recuérdese que* $\dim V(\lambda_0)=\dim N(A-\lambda_0 I)=n-\mathrm{rg}(A-\lambda_0 I)$.
*b) Para un autovalor $\lambda$, la multiplicidad algebraica se denota por $m$ ó $m_a(\lambda)$, y la geométrica se denota por $\mu$ ó $m_g(\lambda)$.*
*En el ejemplo 155 se verifica que $\mu=m=1$ para los tres autovalores.*

Para cada autovalor, el valor de la multiplicidad geométrica está acotado por el valor de la multiplicidad algebraica. Esta relación se incluye en el siguiente resultado que enunciamos sin demostración.

**Proposición 158** *Si $\lambda$ es un autovalor de $A$, entonces* $1\le m_g(\lambda)\le m_a(\lambda)$.

**Ejemplo 159** *Calcular los autovalores y autovectores de* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 3 & 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 15\lambda + 7 = 0$$

$$\lambda^3 - 9\lambda^2 + 15\lambda - 7 = (\lambda-7)(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{lll} \lambda_1 = 7 & m_1 = 1 & \mu_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 & m_2 = 2 & \end{array}}$$

$\boxed{\lambda_1 = 7}$ $\quad V(7) = N(A-7I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A-7I)x = \mathbf{0}\}$.

$$(A-I)x = \mathbf{0}, \qquad \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21}(\frac{2}{5}) \\ F_{31}(\frac{3}{5})}}{\sim} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{18}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & \frac{18}{5} & -\frac{12}{5} \end{bmatrix} \underset{F_{32}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} -5 & 1 & 1 \\ 0 & -\frac{18}{5} & \frac{12}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} -5x_1 + x_2 = -x_3 \\ -\frac{18}{5}x_2 = -\frac{12}{5}x_3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = \dfrac{x_3}{3} \\ x_2 = \dfrac{2x_3}{3} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\alpha}{3} \\ x_2 = \dfrac{2\alpha}{3} \\ x_3 = \alpha \end{array}}$$

*luego,* $V(7) = L\{(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1)\} = L\{(1,2,3)\}$.

$\boxed{\lambda_2 = 1}$ $\quad V(1) = N(A-I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A-I)x = \mathbf{0}\}$

$$(A-I)x = \mathbf{0}, \qquad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_{21}(-2) \\ F_{31}(-3)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -x_2 - x_3 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = -\alpha - \beta \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \alpha \end{array}}$$

*luego,* $V(1) = L\{(-1,1,0), (-1,0,1)\} \Rightarrow \mu_2 = 2$

*Para esta matriz coinciden las multiplicidades algebraicas y geométricas de los autovalores.*

$$\boxed{\begin{array}{lll} \lambda_1 = 7 & m_1 = 1 & \mu_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 & m_2 = 2 & \mu_2 = 2 \end{array}}$$

**Proposición 160** *Sea $\lambda$ autovalor de $A$ y $x \in V_A(\lambda), x \neq \mathbf{0}$.*

*a) $\alpha\lambda$ es un autovalor de $\alpha A$ y $x \in V_{\alpha A}(\alpha\lambda)$.*

*b) $\lambda^p$ es un autovalor de $A^p$ y $x \in V_{A^p}(\lambda^p)$.*

*c) $A$ es singular, si y sólo si $\lambda = 0$ es un autovalor de $A$.*

*d) Si $A$ es regular, entonces $\lambda \neq 0$ y $\lambda^{-1}$ es un autovalor de $A^{-1}$ y $x \in V_{A^{-1}}(\lambda^{-1})$.*

**Demostración:**

a) $\lambda$ autovalor de $A$ y $x \in V_A(\lambda), x \neq \mathbf{0}$, entonces

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \alpha Ax = \alpha\lambda x \Rightarrow (\alpha A)x = (\alpha\lambda)x$$

luego $\alpha\lambda$ es un autovalor de $\alpha A$ y $x \in V_{\alpha A}(\alpha\lambda)$.

b) Por inducción sobre $p$ :

- Se verifica para $p = 2$ :

  $$A^2x = AAx = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$$

  luego $\lambda^2$ es un autovalor de $A^2$ y $x \in V_{A^2}(\lambda^2)$.

- Se supone cierto para $p-1$, es decir $\lambda^{p-1}$ es un autovalor de $A^{p-1}$ y $x \in V_{A^{p-1}}(\lambda^{p-1})$.

- Veamos que se cumple para $p$.

  En efecto, $A^p x = AA^{p-1}x = A(\lambda^{p-1}x) = \lambda^{p-1}(Ax) = \lambda^{p-1}(\lambda x) = \lambda^p x$.

  luego $\lambda^p$ es un autovalor de $A^p$ y $x \in V_{A^p}(\lambda^p)$.

Por tanto, para todo $p$ se cumple: $\lambda^p$ es un autovalor de $A^p$ y $x \in V_{A^p}(\lambda^p)$.

c) $A$ es singular $\Leftrightarrow$ $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(A - 0I) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$ es un autovalor de $A$.

d) Si $A$ es regular, entonces sus autovalores son no nulos. Por tanto, si $\lambda$ es un autovalor cualquiera de $A$, se verifica:

$$Ax = \lambda x \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}\lambda x \Rightarrow x = \lambda A^{-1}x \Rightarrow A^{-1}x = \tfrac{1}{\lambda}x$$

Es decir, $\dfrac{1}{\lambda}$ es un autovalor de $A^{-1}$ y $x \in V_{A^{-1}}(\frac{1}{\lambda})$.

**Proposición 161** *Si $v_1, ..., v_k$ son autovectores correspondientes a autovalores distintos $\lambda_1, ..., \lambda_k$, de una matriz $A$ entonces $\{v_1, ..., v_k\}$ es un conjunto linealmente independiente.*

**Demostración:** Por reducción al absurdo.

Supongamos que $\{v_1, ..., v_k\}$ es un conjunto l.d., entonces existirá algún vector que es combinación lineal de los demás, por ejermplo $v_k$. También supongamos que el conjunto $\{v_1, ..., v_{k-1}\}$ es l.i., entonces:

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1} \quad (1)$$

$$Av_k = A(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1}) = \alpha_1 A v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} A v_{k-1}$$

$$\lambda_k v_k = \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_{k-1} v_{k-1} \quad (2)$$

Por otro parte, multiplicando en (1) por $\lambda_k$ resulta: $\lambda_k v_k = \lambda_k(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1})$

$$\lambda_k v_k = \alpha_1 \lambda_k v_1 + \cdots + \alpha_{k-1} \lambda_k v_{k-1} \quad (3)$$

restando (2) y (3), se obtiene: $(\lambda_1 - \lambda_k)\alpha_1 v_1 + \cdots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)\alpha_{k-1} v_{k-1} = 0$

y como $\{v_1, ..., v_{k-1}\}$ es l.i se tiene que: $(\lambda_1 - \lambda_k)\alpha_1 = \cdots = (\lambda_{k-1} - \lambda_k)\alpha_{k-1} = 0$

como $(\lambda_i - \lambda_k) \neq 0$, para $i = 1, ..., k-1$, resulta: $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{k-1} = 0$ y por tanto $v_k = 0$, lo cual no es posible por ser $v_k$ un vector propio. Por tanto, $\{v_1, ..., v_k\}$ debe ser l.i. $\square$

**Observación:**

Si $A$ tiene $n$ autovalores distintos podemos obtener una base de $\mathbb{R}^n$ formada por $n$ autovectores $\{v_1, ..., v_n\}$ tales que $v_i \in V(\lambda_i)$, $i = 1, ..., n$.

**Ejemplo 162** *Consideremos de nuevo la matriz del ejemplo 155, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$.*
*Sabemos que tiene tres autovalores distintos: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 3$, y que sus subespacios propios son:*

$$V(1) = L\{(-1, 1, 2)\}, V(2) = L\{(-2, 1, 4)\} \text{ y } V(3) = L\{(-1, 1, 4)\}.$$

*Para obtener una base $B$ de $\mathbb{R}^3$ formada por autovectores de $A$, basta unir las bases de los subespacios propios de $A$.*

$$B = \{(-1, 1, 2), (-2, 1, 4), (-1, 1, 4)\}.$$

## 4.2. Diagonalización

**Definición 163** *Dos matrices* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *son semejantes si existe una matriz* $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *regular tal que* $B = P^{-1}AP$.

**Proposición 164** *Si* $A$ *y* $B$ *son dos matrices semejantes, con* $B = P^{-1}AP$, *entonces:*

*a)* $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$.

*b)* $\det(A) = \det(B)$.

*c)* $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

*d) Si* $x \in V_A(\lambda), x \neq \mathbf{0}$, *entonces* $P^{-1}x \in V_B(\lambda)$.

**Demostración:**

a) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(P^{-1}P)\det(A - \lambda I) = \det(P^{-1})\det(A - \lambda I)\det(P)$

$$= \det(P^{-1}(A - \lambda I)P) = \det(P^{-1}AP - P^{-1}\lambda IP) = \det(B - \lambda I) = P_B(\lambda)$$

b) $\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(P^{-1}P)\det(A) = \det(A)$.

c) Aunque no se ha justificado anteriormente, la expresión del polinomio característico de las matrices $A$ y $B$ puede expresarse del siguiente modo:

$$P_A(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(A)\lambda^{n-1} + \cdots + \det(A)$$

$$P_B(\lambda) = (-1)^n\lambda^n + (-1)^{n-1}\operatorname{tr}(B)\lambda^{n-1} + \cdots + \det(B)$$

como $P_A(\lambda) = P_B(\lambda)$, se sigue que $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$.

d) $B(P^{-1}x) = (P^{-1}AP)(P^{-1}x) = P^{-1}Ax = P^{-1}\lambda x = \lambda(P^{-1}x) \Rightarrow P^{-1}x \in V_B(\lambda)$.

$\square$

**Ejemplo 165** *Sean** $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *y* $P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

*Hallar la inversa de* $P$ *y comprobar que las matrices* $A$ *y* $D$ *son semejantes y que tienen el mismo polinomio característico, la misma traza y el mismo determinante.*

*Mediante el méto de Gauss-Jordan es fácil comprobar que* $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

* $A$ es la matriz del ejemplo 155. Obsérvese que $D$ es una matriz diagonal formadapor los autovalores de $A$, y que $P$ es una matriz regular construida disponiendo en columnas los vectores de la base $B$ formada por autovectores de $A$.

*Para probar que $A$ y $D$ son semejantes, basta verificar que $D = P^{-1}AP$.*

$$D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -\frac{1}{2} \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

*El polinomio característico de $A$ es:*

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 4 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

*El polinomio característico de $D$ es:*

$$P_D(\lambda) = \det(D - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(3-\lambda) =$$
$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6$

*Los determinantes y trazas de $A$ y $D$ son:*

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{vmatrix} = (0+4+8)-(-4+10) = 6 \qquad \mathrm{tr}(A) = 1+0+5 = 6$$

$$\det(D) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 \qquad \mathrm{tr}(D) = 1+2+3 = 6$$

**Definición 166** *Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es diagonalizable si es semejante a una matriz diagonal.*

**Teorema 167** *Una matriz $A$ es diagonalizable sí y sólo si existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de $A$.*

**Demostración:**

Sea $B = \{v_1, ..., v_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$ formada por $n$ autovectores de $A$, con $v_i \in V(\lambda_i)$, siendo los autovalores $\lambda_i$ iguales o distintos. Se verifica:

$$AP = A[v_1|\cdots|v_n] = [Av_1|\cdots|Av_n] = [\lambda_1 v_1|\cdots|\lambda_n v_n] = [v_1|\cdots|v_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} = PD$$

En consecuencia $D = P^{-1}AP$, siendo $P = [v_1|\cdots|v_n]$ una matriz regular pues sus columnas son l.i.al ser $B$ una base.

El razonamiento recíproco es inmediato, pues si $D = P^{-1}AP$, entonces $B = \{v_1, ..., v_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de $A$. $\square$

**Ejemplo 168** *La matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$ *tiene tres autovalores distintos:* $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ *y* $\lambda_3 = 3$. *Los subespacios propios de* $A$ *son:*

$$V(1) = L\{(-1,1,2)\}, V(2) = L\{(-2,1,4)\} \text{ y } V(3) = L\{(-1,1,4)\}.$$

*Uniendo las bases de estos subespacios se tiene una base de* $\mathbb{R}^3$ *formada por autovectores:*

$$B = \{v_1, v_2, v_3\} \text{ siendo } v_1 = (-1,1,2), v_2 = (-2,1,4) \text{ y } v_3 = (-1,1,4).$$

*La matriz de paso* $P$ *se obtiene escribiendo por columnas los vectores de* $B$.

$$P = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \text{ y se verifica que } D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**Nota 169** *Las columnas de* $P$ *están determinadas según el orden en que escribamos los autovalores. Así, en el ejemplo anterior podríamos haber ordenado los autovalores de la siguiente manera:*

$\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 2$ *y* $\lambda_3 = 1$. *Para esta ordenación se tendría los siguientes subespacios:*

$V(\lambda_1) = V(3) = L\{(-1,1,4)\}$, $V(\lambda_2) = V(2) = L\{(-2,1,4)\}$ *y* $V(\lambda_3) = V(1) = L\{(-1,1,2)\}$.

*En consecuencia, la base* $B$ *formada por autovectores de* $A$, *y las matrices* $D$ *y* $P$ *serían las siguientes:*

$$B = \{(-1,1,4), (-2,1,4), (-1,1,2)\}, D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } P = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Ejemplo 170** *Dada la matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ *(ver ejemplo 159), sabemos que* $\det(A - \lambda I) = (\lambda - 7)(\lambda - 1)^2$ *y que las multiplicidades algebraicas y geométricas de los autovalroes son:*

$$\boxed{\begin{array}{lll} \lambda_1 = 7 & m_1 = 1 & \mu_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1 & m_2 = 2 & \mu_2 = 2 \end{array}}$$

*También hemos hallado los correspondientes subespacios propios:*

$V(7) = L\{(1,2,3)\}$.

$V(1) = L\{(-1,1,0),(-1,0,1)\}$.

*Uniendo las bases de estos subespacios se tiene una base de* $\mathbb{R}^3$ *formada por autovectores:*

$$B = \{v_1, v_2, v_3\} \textit{ siendo } v_1 = (1,2,3), v_2 = (-1,1,0) \textit{ y } v_3 = (-1,0,1).$$

$$P = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

*Se verifica que:*

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D$$

El siguiente teorema, que enunciaremos sin hacer la demostración, nos establece un criterio para la diagonalización de matrices.

**Teorema 171** *Una matriz* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *es diagonalizable si y sólo si posee* $n$ *autovalores (iguales o distintos) y sus multiplicidades verifican las siguientes condiciones:*

a) $m_1 + \cdots + m_p = n$.
b) $\mu_i = m_i$, para todo autovalor $\lambda_i$, $i = 1, ..., p$.

**Nota 172** *Una matriz* $A$ *con* $n$ *autovalores distintos siempre verifica las dos condiciones anteriores.*

**Diagonalización** Dada una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, el procedimiento para obtener una base formada por autovectores es el siguiente:

1) Se calculan los autovalores de $A$, y ha de verificarse que:

$m_1 + \cdots + m_p = n$. Es decir, ha de haber $n$ raíces de $P_A(\lambda)$.

$\mu_i = m_i$, para todo autovalor $\lambda_i$, $i = 1, ..., p$.

2) Para cada autovalor $\lambda_i$, $i = 1, ..., p.$, se determina una base de cada subespacio propio $V(\lambda_i)$.

3) Se obtiene la base $B = \{v_1, ..., v_n\}$ uniendo las bases de los subespacios propios de $A$.

Una vez obtenida la base $B$, disponiendo las componentes de sus vectores por columnas se obtiene la matriz de paso $P$. La matriz diagonal viene determinada por los autovalores, escritos en el mismo orden que los vectores correspondientes de la base $B$. Es decir,

$$P = [v_1| \cdots |v_n] \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 173** *Una matriz $A$ de orden dos verifica las siguientes condiciones:*

*a)* $A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.
*b)* $v = (2, -1)$ *es un autovector de $A$ asociado al autovalor $\lambda = -2$.*

*Hallar la matriz $A$ indicando si es diagonalizable o no. En caso afirmativo, diagonalizarla dando una matriz de paso.*

*Sabemos que* $A\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ *y* $A\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$

*por ser $\lambda = -2$ un autovalor asociado a $v = (2, -1)$.*

*Agrupandos ambos productos:* $A\left[\begin{array}{c|c} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{array}\right]$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -10 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

*Los autovalores de $A$ son:*

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -7-\lambda & -10 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 7\lambda + \lambda^2 + 10 = (\lambda + 5)(\lambda + 2) = 0$$

$\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -5$.

*$A$ tiene dos autovalores distintos y por tanto es diagonalizable.*

*Los subespacios propios de $A$ son:* $V(-2) = L\{(2, -1)\}$ *y* $V(-5) = N(A + 5I)$

$$(A + 5I)x = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -10 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -5x_2 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x_1 = -5\alpha \\ x_2 = \alpha \end{array} \right.$$

*de donde:* $V(-5) = L\{(-5,1)\}$

$B = \{(2,-1),(-5,1)\}$ *es una base formada por autovectores.*

$P = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ *es una matriz de paso, y* $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$ *es una matriz diagonal semejante a* $A$.

**Ejemplo 174** *¿Para qué valores de* $\alpha$ *y* $\beta$ *es diagonalizable la matriz* $A$*?*

$$A = \begin{bmatrix} 2\alpha-\beta & 0 & 2\alpha-2\beta \\ 1 & \alpha & 2 \\ -\alpha+\beta & 0 & -\alpha+2\beta \end{bmatrix}$$

$$P_A(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 2\alpha-\beta-\lambda & 0 & 2\alpha-2\beta \\ 1 & \alpha-\lambda & 2 \\ -\alpha+\beta & 0 & -\alpha+2\beta-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-\lambda)\begin{vmatrix} 2\alpha-\beta-\lambda & 2\alpha-2\beta \\ -\alpha+\beta & -\alpha+2\beta-\lambda \end{vmatrix} \underset{F_{21}(1)}{=} (\alpha-\lambda)\begin{vmatrix} 2\alpha-\beta-\lambda & 2\alpha-2\beta \\ \alpha-\lambda & \alpha-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (\alpha-\lambda)^2\begin{vmatrix} 2\alpha-\beta-\lambda & 2\alpha-2\beta \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (\alpha-\lambda)^2(\ \beta-\lambda).$$

*Así las raices de* $P_A(\lambda)$ *son:* $\lambda=\alpha$ *y* $\lambda=\beta$.

- *Si* $\alpha \neq \beta$, *los autovalores son:* $\lambda_1 = \alpha$ *y* $\lambda_2 = \beta$.

*La multiplicidad algebraica de* $\lambda_1 = \alpha$ *es* $m_1 = 2$ *y la geométrica viene dada por* $\dim V(\alpha)$.

$V(\alpha) = N(A-\alpha I)$

$$(A-\alpha I)x = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \alpha-\beta & 0 & 2\alpha-2\beta \\ 1 & 0 & 2 \\ -\alpha+\beta & 0 & -2\alpha+2\beta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-\alpha I) = \begin{bmatrix} \alpha-\beta & 0 & 2\alpha-2\beta \\ 1 & 0 & 2 \\ -\alpha+\beta & 0 & -2\alpha+2\beta \end{bmatrix} \underset{F_{12}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ \alpha-\beta & 0 & 2\alpha-2\beta \\ -\alpha+\beta & 0 & -2\alpha+2\beta \end{bmatrix}$$

$$\underset{\substack{F_{21}(-\alpha+\beta)\\F_{31}(\alpha-\beta)}}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(A-\alpha I) = 1 \Rightarrow \mu_1 = \dim V(\alpha) = 2$$

*Por otra parte, la multiplicidad geométrica de* $\lambda_2 = \beta$ *es* $\mu_2 = \dim V(\beta) = 1$ *pues* $m_2 = 1$.

*En resumen, si* $\alpha \neq \beta$

$$\boxed{\begin{array}{lll} \lambda_1 = \alpha & m_1 = 2 & \mu_1 = 2 \\ \lambda_2 = \beta & m_2 = 1 & \mu_2 = 1 \end{array}}$$

*y A sí es diagonalizable.*

- *Si* $\alpha = \beta$, *tenemos un único autovalor* $\lambda = \alpha$ *con multiplicidad algebraica* $m = 3$. *La multiplicidad geométrica viene dada por* $\dim V(\alpha)$.

$V(\alpha) = N(A - \alpha I)$

$(A - \alpha I)x = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathrm{rg}(A - \alpha I) = 1 \Rightarrow \mu = \dim V(\alpha) = 2$

*En este caso,* $m = 3 \neq \mu = 2$, *y A no es diagonalizable.*

**Ejemplo 175** *Diagonaliza, si es posible, la matriz* $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

*Como A es triangular inferior, sus autovalores son* $\lambda_1 = 1$ *con* $m_1 = 1$ *y* $\lambda_2 = 2$ *con* $m_1 = 2$.*Sabemos que la multiplicidad geométrica satisface la desigualdad*

$1 \leqslant \mu_1 \leqslant m_1$. *Puesto que* $m_1 = 1$, *deducimos que* $\mu_1 = m_1 = 1$, *es decir las multiplicidades algebráicas y geométricas del primer autovalor coinciden.*

*Para calcular la multiplicidad geométrica del segundo autovalor* $\lambda_2 = 2$ *hemos de calcular* $\dim V(2)$.

$$V(2) = N(A - 2I) = \{x \in \mathbb{R}^3 : (A - 2I)x = 0\}$$

*se verifica que:* $A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

*como* $\mathrm{rg}(A - 2I) = 2 \Rightarrow \mu_2 = \dim V(2) = 3 - \mathrm{rg}(A - 2I) = 3 - 2 = 1$.

*En consecuencia,* $\mu_2 = 1 \neq 2 = m_2$ *y la matriz A no es diagonalizable.*

## 4.3. Diagonalización ortogonal

**Definición 176** *Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es ortogonalmente diagonalizable si existe una matriz $Q$ ortogonal, tal que $D = Q^t AQ$ es una matriz diagonal.*

Conforme a la Definición anterior y al Teorema 167, diagonalizar ortogonalmente una matriz $A$ equivale a encontrar una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores.

Las matrices reales simétricas son matrices, que tienen todos los autovalores reales, y que se pueden diagonalizar ortogonalmente. Además sus autovalores y autovectores tiene propiedades particulares que se enuncian a continuación:

**Proposición 177** *Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz simétrica, entonces los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.*

**Demostración:**

Dados $x, y \in \mathbb{R}^n$, se verifica: $(Ax)\cdot y = y^t Ax = (A^t y)^t x = x\cdot(A^t y) \underset{A=A^t}{=} x\cdot(Ay)$.

Sean ahora $v_1 \in V_A(\lambda_1)$ y $v_2 \in V_A(\lambda_2)$, cualesquiera, entonces: $Av_1 = \lambda_1 v_1$ y $Av_2 = \lambda_2 v_2$, veamos que $v_1 \cdot v_2 = 0$.

$\lambda_1(v_1 \cdot v_2) = (\lambda_1 v_1) \cdot v_2 = (Av_1) \cdot v_2 \underset{A=A^t}{=} v_1 \cdot (Av_2) = v_1 \cdot (\lambda_2 v_2) = \lambda_2(v_1 \cdot v_2)$

luego, $\lambda_1(v_1 \cdot v_2) = \lambda_2(v_1 \cdot v_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2)(v_1 \cdot v_2) \underset{\lambda_1 \neq \lambda_2}{=} 0 \Rightarrow v_1 \cdot v_2 = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$. $\square$

**Corolario 178** *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es simétrica, los subespacios propios de $A$ son ortogonales.*

**Teorema 179** *Una matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ es ortogonalmente diagonalizable si y sólo si es simétrica.*

**Demostración:**

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $A$ es ortogonalmente diagonalizable, entonces existe una matriz $Q$ ortogonal y una matriz $D$ diagonal, tales que $D = Q^t AQ$. Se verifica que $A = QDQ^t$, y $A^t = (QDQ^t)^t = QDQ^t = A \Rightarrow A = A^t$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si $A$ es simétrica los subespacios propios de $A$ son ortogonales. Si hallamos una base ortonomal para cada uno de ellos y reunimos las bases obtendremos una base ortonormal $B = \{w_1, ..., w_n\}$ de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores de $A$, y por tanto $A$ será diagonalizable ortogonalmente siendo $Q = [w_1| \cdots |w_n]$ la matriz de paso.

**Diagonalización ortogonal**

Dada una matriz simétrica $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, el procedimiento para obtener una base ortonormal formada por autovectores es el siguiente:

1) Se calculan los autovalores de $A$, y ha de verificarse que:

$m_1 + \cdots + m_p = n$. Es decir, ha de haber $n$ raíces de $P_A(\lambda)$.

$\mu_i = m_i$, para todo autovalor $\lambda_i$, $i = 1, ..., p$.

2) Para cada autovalor $\lambda_i$, $i = 1, ..., p.$, se determina una base ortonormal de cada subespacio propio $V(\lambda_i)$.

3) Se obtiene la base $B = \{w_1, ..., w_n\}$ uniendo las bases ortonormales de los subespacios propios de $A$.

Una vez obtenida la base $B$, disponiendo las componentes de sus vectores por columnas se obtiene la matriz de paso $Q$ ortogonal. La matriz diagonal viene determinada por los autovalores, escritos en el mismo orden que los vectores correspondientes de la base $B$. Es decir,

$$Q = [w_1 | \cdots | w_n] \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{bmatrix}$$

**Ejemplo 180** *Diagonalizar ortogonalmente la matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 2-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 3\lambda - 10 = -(\lambda - 5)(\lambda - 2)(\lambda + 1)$$

*los autovalores son:* $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2$ *y* $\lambda_3 = 5$.

*Cálculo de los subespacios propios:*

$\boxed{\lambda_1 = -1}$ $\quad V(-1) = N(A + I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A + I)x = \mathbf{0}\}$.

$$(A + I)x = \mathbf{0}, \qquad \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \underset{F_{21}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \underset{F_{32}(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} 2x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 = 2x_3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_2 \\ x_2 = 2x_3 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = 2\alpha \\ x_2 = 2\alpha \\ x_3 = \alpha \end{array}}$$

*luego,* $V(-1) = L\{(2,2,1)\} = L\{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$

*Obsérvese que se ha dividido por la norma del vector* $(2,2,1)$ *para hallar el vector unitario* $(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

$\boxed{\lambda_2 = 2}$ $V(2) = N(A - 2I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - 2I)x = \mathbf{0}\}$

$$(A - 2I)x = \mathbf{0}, \qquad \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{F_{21}(-2)}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \underset{F_{32}(-\frac{1}{2})}{\sim} \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} -x_1 - 2x_2 = 0 \\ 4x_2 = 2x_3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 = -x_3 \\ x_2 = \dfrac{x_3}{2} \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = -\alpha \\ x_2 = \dfrac{\alpha}{2} \\ x_3 = \alpha \end{array}}$$

*luego,* $V(2) = L\{(-1, \frac{1}{2}, 1)\} = L\{(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$

$\boxed{\lambda_3 = 5}$ $V(3) = N(A - 5I) = \{x \in \mathbb{R}^n : (A - 5I)x = \mathbf{0}\}$

$$(A - 5I)x = \mathbf{0}, \qquad \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \underset{F_{21}(\frac{-1}{2})}{\sim} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix} \underset{F_{21}(-1)}{\sim} \begin{bmatrix} -4 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left\{ \begin{array}{r} -4x_1 - 2x_2 = 0 \\ 2x_2 = -2x_3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x_1 = \dfrac{x_3}{2} \\ x_2 = -x_3 \end{array} \right. \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{\alpha}{2} \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \alpha \end{array}}$$

*luego,* $V(5) = L\{(1,-2,2)\} = L\{(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$.
*Luego hemos determinado los tres subespacios propios mediante una base ortonormal:*

$V(-1) = L\{(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})\}$

$V(2) = L\{(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})\}$

$V(5) = L\{(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$

*Uniendo estas bases de los subespacios propios se tiene una base ortonormal de* $\mathbb{R}^3$ *formada por autovectores:*

$$B = \{w_1, w_2, w_3\} \textit{ siendo } w_1 = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}), w_2 = (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}) \textit{ y } w_3 = (\tfrac{1}{3}, -\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}).$$

$$Q = [w_1|w_2|w_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = Q^t A Q.$$

**Ejemplo 181** *Sea* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

*a) Diagonalizar* $A$.
*b) Diagonalizar ortogonalmente* $A$.

*a) Se puede comprobar fácilmente que los autovalores de* $A$ *son:* $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$, *con multiplicidades algebraicas* $m_1 = 2$ *y* $m_2 = 1$; *y que los subespacios propios son:*

$V(2) = L\{(1,-1,0), (1,0,-1)\} = L\{v_1, v_2\}$

$V(-1) = L\{(1,1,1)\} = L\{v_3\}$

*Con esta información se sigue que* $B = \{v_1, v_2, v_3\} = \{(1,-1,0), (1,0,-1), (1,1,1)\}$ *es una base de* $\mathbb{R}^3$ *formada por autovectores de* $A$.

*A partir de* $B$ *se tiene la matriz de paso* $P$ *que nos permite diagonalizar* $A$ *y obtener la matriz diagonal* $D$.

$$P = [v_1|v_2|v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

*b) Para diagonalizar ortogonalmente la matriz* $A$ *hemos de encontrar una base* $B'$ *ortonormal formada por atovectores de* $A$ *que sea ortonormal. Para ello vamos a ortonormalizar previamente las bases de los subespacios propios de* $A$.

- $V(2) = L\{(1,-1,0),(1,0,-1)\} = L\{v_1, v_2\}$

  *Aplicando Gram-Schmidt:*

  $u_1 = v_1 = (1,-1,0)$

  $u_2 = v_2 + \alpha u_1 = (1,0,-1) - \frac{1}{2}(1,-1,0) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right).$

  $u_2 \perp u_1 \Rightarrow u_2 \cdot u_1 = 0$

  $u_2 \cdot u_1 = (v_2 + \alpha u_1)\cdot u_1 = 0 \Rightarrow v_2 \cdot u_1 + \alpha(u_1 \cdot u_1) = 0 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{v_2 \cdot u_1}{u_1 \cdot u_1} = -\frac{1}{2}$

  *pues,* $u_1 \cdot u_1 = (1,-1,0)\cdot(1,-1,0) = 2$ *y* $v_2 \cdot u_1 = (1,0,-1)\cdot(1,-1,0) = 1$

  *luego* $\{u_1, u_2\}$ *es una base ortogonal de* $V(2)$. *Si dividimos cada vector por su norma se obtiene una base ortonormal* $\{w_1, w_2\}$ *de* $V(2)$.

  $$w_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

  $$w_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{2}}}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$$

  $$u_2 \cdot u_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)\cdot\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right) = \frac{3}{2}$$

  $V(2) = L\{w_1, w_2\}$.

- $V(-1) = L\{(1,1,1)\} = L\{v_3\}$

  *para hallar una base ortonormal de* $V(-1)$ *basta normalizar el vector* $v_3$.

  $$w_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

  $$u_3 \cdot u_3 = (1,1,1)\cdot(1,1,1) = 3$$

  *por tanto* $V(-1) = L\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\right\} = L\{w_3\}$

*Uniendo las bases ortonormales de* $V(2)$ *y* $V(-1)$ *se tiene la base ortonormal de* $\mathbb{R}^3$ *formada por autovectores:* $B' = \{w_1, w_2, w_3\}$

$B' = \{w_1, w_2, w_3\}$, *con* $w_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $w_2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{6}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)$ *y* $w_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

$$Q = [w_1|w_2|w_3] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = Q^t A Q.$$