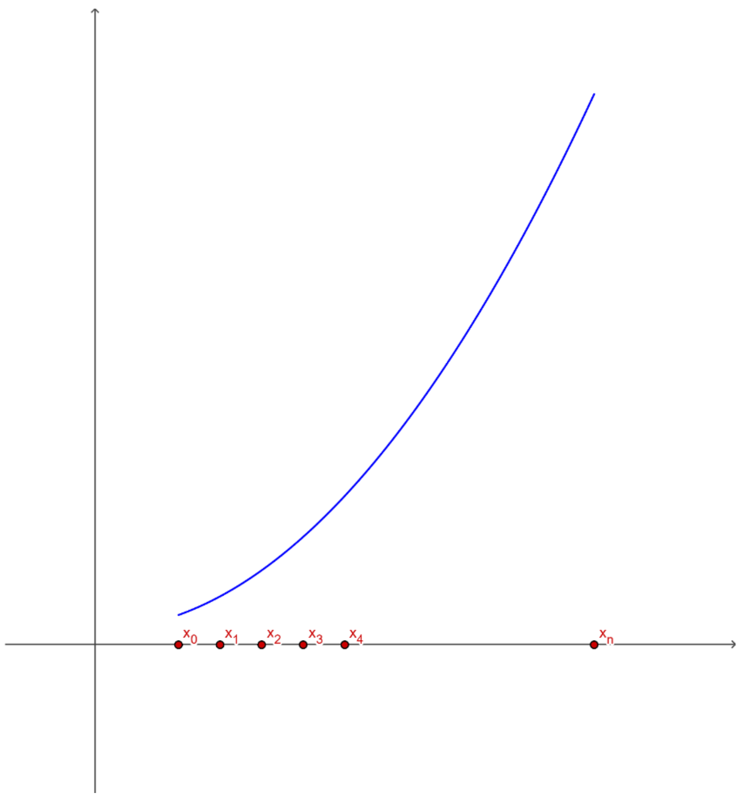
Tema 4 – Cuarta Parte

Integrales Triples

Sea f una función definida en un intervalo $[a,b]$

Se llama **integral definida** de la función f en el intervalo $[a,b]$ a

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$



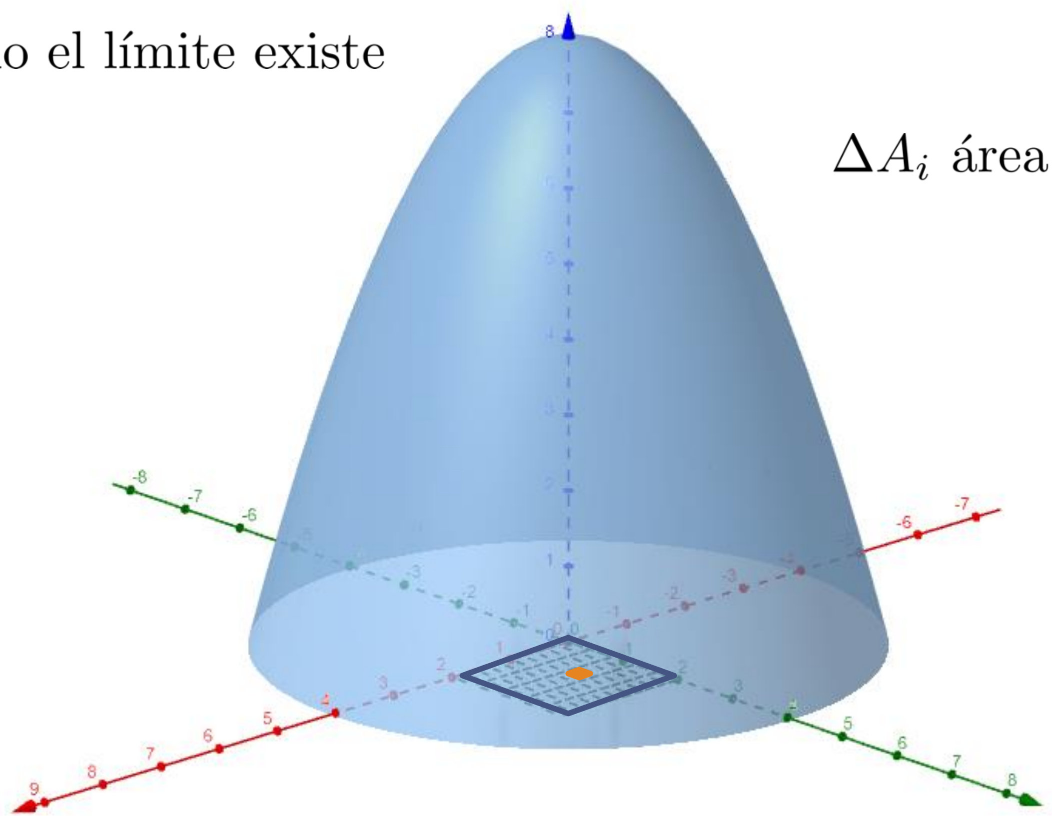
Δx_i longitud del i-ésimo subintervalo

Sea f una función definida en una región cerrada y acotada $\mathcal{R}$ del plano XY

Se llama **integral doble** de la función f sobre la región $\mathcal{R}$ a

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta A_i$$

cuando el límite existe



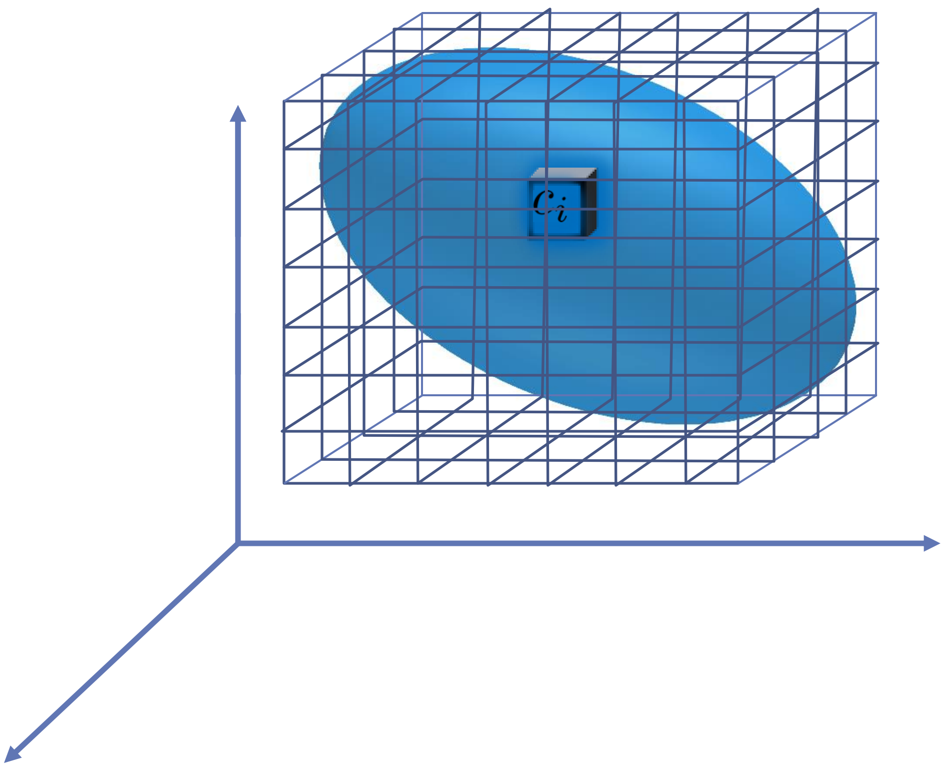
ΔA_i área del i-ésimo rectángulo R_i

Sea f una función continua definida sobre una región cerrada y acotada Q del espacio.

Se llama **integral triple** de f sobre Q a

$$\iiint_Q f(x,y,z)\,dV = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\,\Delta V_i$$

cuando el límite existe.



Volumen de la i-ésima caja:

ΔV_i

Sea f una función continua definida sobre una región cerrada y acotada Q del espacio.

Se llama **integral triple** de f sobre Q a

$$\int\int\int_Q f(x, y, z)\, dV = \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\, \Delta V_i$$

cuando el límite existe.

En el caso que $f(x, y, z) = 1$, se tiene que

$$\text{Volumen de } Q = \int\int\int_Q 1 dV$$

Propiedades de la integral triple

a) Si f es una función continua en una región cerrada y acotada $\mathcal{Q}$ del espacio tridimensional, y c es una constante, se verifica:

$$\iiint_{\mathcal{Q}} cf(x,y,z)dV = c\iiint_{\mathcal{Q}} f(x,y,z)\,dV$$

b) Si f y g son funciones continuas en una región cerrada y acotada $\mathcal{Q}$ del espacio tridimensional, se verifica:

$$\iiint_{\mathcal{Q}} \left(f(x,y,z) \pm g(x,y,z)\right) dV = \iiint_{\mathcal{Q}} f(x,y,z)dV \pm \iiint_{\mathcal{Q}} g(x,y,z)\,dV$$

c) Si f es una función continua en una región cerrada y acotada $\mathcal{Q}$ del espacio tridimensional, se verifica:

$$\iiint_{\mathcal{Q}} f(x,y,z)\,dV \geq 0$$

cuando $f(x,y,z) \geq 0$ para todo $(x,y,z) \in \mathcal{Q}$

Propiedades de la integral triple

d) Si f y g son funciones continuas en una región cerrada y acotada $\mathcal{Q}$ del espacio tridimensional, se verifica:

$$\text{Si } f(x,y,z) \geq g(x,y,z), \text{ entonces } \iiint_{\mathcal{Q}} f(x,y,z)dV \geq \iiint_{\mathcal{Q}} g(x,y,z)\, dV$$

e) Si f es una función continua en una región cerrada y acotada $\mathcal{Q}$ del espacio tridimensional, se verifica:

$$\iiint_{\mathcal{Q}} f(x,y,z)\, dV = \iiint_{\mathcal{Q}_1} f(x,y,z)\, dV + \iiint_{\mathcal{Q}_2} f(x,y,z)\, dV$$

siendo $\mathcal{Q}$ la unión de dos regiones $\mathcal{Q}_1$ y $\mathcal{Q}_2$ que no se solapan.

$$\iiint_Q f(x,y)dA = \lim_{\|\Delta\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta x_i \Delta y_i \Delta z_i$$

- ¿Cuándo existe la integral triple?

- ¿Cómo se puede calcular sin recurrir a las sumas de Riemann?

Teorema de Fubini para integrales triples

Sea f una función continua definida en una región sólida $\mathcal{Q}$, cuya proyección en el plano XY es la región $\mathcal{R}$. Sea $\mathcal{Q}$ limitada inferiormente por $z = g_1(x, y)$ y superiormente por $z = g_2(x, y)$, siendo g_1 y g_2 funciones continuas en $\mathcal{R}$.

- Si $\mathcal{R}$ se define mediante $a \leq x \leq b$, $h_1(x) \leq y \leq h_2(x)$, siendo h_1 y h_2 funciones continuas en un intervalo $[a, b]$, entonces se verifica que

$$\iiint_{\mathcal{Q}} f(x, y, z)dV = \int_a^b \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dzdydx$$

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ h_1(x) \leq y \leq h_2(x) \\ g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y) \end{cases}$$

Teorema de Fubini para integrales triples

Sea f una función continua definida en una región sólida $\mathcal{Q}$, cuya proyección en el plano XY es la región $\mathcal{R}$. Sea $\mathcal{Q}$ limitada inferiormente por $z = g_1(x, y)$ y superiormente por $z = g_2(x, y)$, siendo g_1 y g_2 funciones continuas en $\mathcal{R}$.

- Si $\mathcal{R}$ se define mediante $h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$, $c \leq y \leq d$, siendo h_1 y h_2 funciones continuas en un intervalo $[c, d]$, entonces se verifica que

$$\iiint_{\mathcal{Q}} f(x, y, z) dV = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x, y, z)\, dzdxdy$$

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ c \leq y \leq d \\ g_1(x, y) \leq z \leq g_2(x, y) \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular la integral triple $\iiint_{\mathcal{Q}} 24xydV$ siendo $\mathcal{Q}$ la región del espacio

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 1 \leq & x & \leq 3 \\ 1 \leq & y & \leq x \\ 2 \leq & z & \leq xy \end{cases}$$

$$\int\int\int_{\mathcal{Q}} 24xy\,dz\,dy\,dx \quad = \quad \int_1^3 \left[\int_1^x \left[\int_2^{xy} 24xy\,dz\right] dy\right] dx$$

$$= \int_1^3 \left[\int_1^x 24xy\,[z]_2^{xy}\ dy\right] dx = \int_1^3 \left[\int_1^x 24xy\,[xy-2]\ dy\right] dx$$

$$= \int_1^3 \left[\int_1^x (24x^2y^2 - 48xy)\,dy\right] dx = \int_1^3 \left[24x^2\frac{y^3}{3} - 48x\frac{y^2}{2}\right]_1^x dx$$

$$= \int_1^3 \left[\frac{24}{3}x^5 - 24x^3 - \frac{24}{3}x^2 + 24x\right] dx = \frac{1552}{3}$$

Ejemplo: Calcular la integral triple $\iiint_{\mathcal{Q}} z dV$ siendo $\mathcal{Q}$ la región del espacio

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & x & \leq \dfrac{y}{3} \\ 0 \leq & y & \leq 9 \\ 0 \leq & z & \leq \sqrt{y^2 - 9x^2} \end{cases}$$

$$\iiint_{\mathcal{Q}} z\, dV \qquad = \int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\ dz\ dx\ dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^9 \int_0^{y/3} \left[z^2\right]_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} dxdy \qquad = \frac{1}{2} \int_0^9 \int_0^{y/3} \left(y^2 - 9x^2\right) dxdy$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^9 \left[y^2 x - 3x^3\right]_0^{y/3} dy \qquad = \frac{1}{2} \int_0^9 \left[\frac{y^3}{3} - \frac{y^3}{9}\right] dy = \frac{1}{36} \left[y^4\right]_0^9 = \frac{729}{4}$$

Ejemplo: Calcular la integral triple $\iiint_{\mathcal{Q}} \cos\left(\frac{x}{y}\right)\, dV$ siendo $\mathcal{Q}$ la región del espacio

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & x & \leq y^2 \\ \frac{\pi}{2} \leq & y & \leq \pi \\ 0 \leq & z & \leq y \end{cases}$$

$$\iiint_{\mathcal{Q}} \cos\left(\frac{x}{y}\right)\, dV = \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{y^2} \int_0^{y} \cos\left(\frac{x}{y}\right)\, dz\, dx\, dy$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{y^2} \cos\left(\frac{x}{y}\right) [z]_0^y\, dx\, dy = \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^{y^2} y \cos\left(\frac{x}{y}\right)\, dx\, dy$$

$$= \int_{\pi/2}^{\pi} \left[y^2 \operatorname{sen}\left(\frac{x}{y}\right)\right]_0^{y^2} dy = \int_{\pi/2}^{\pi} y^2 \operatorname{sen} y\, dy = \pi^2 - \pi - 2$$

Partes (dos veces)

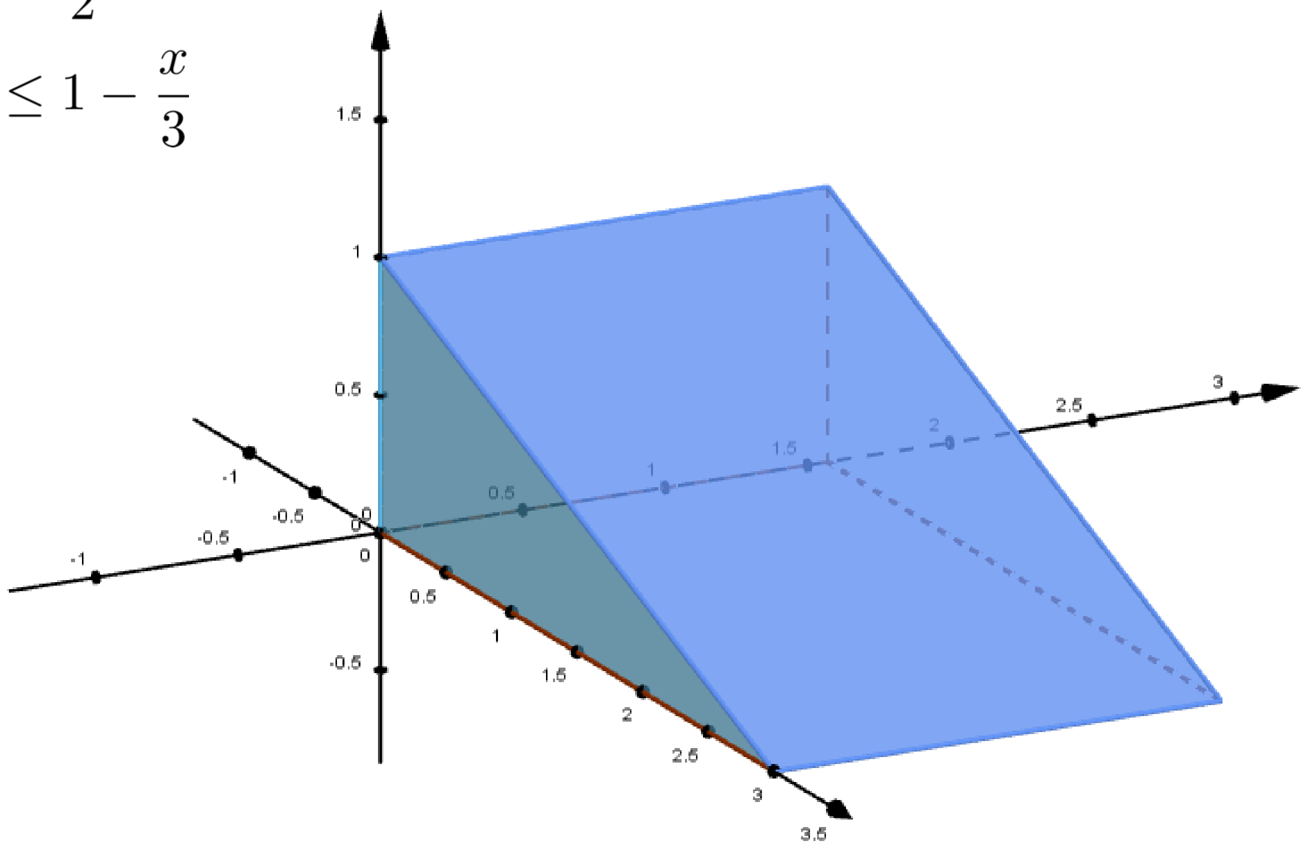
$u = y^2$

$dv = \operatorname{sen} y\, dy$

Ejemplo: Siendo $\mathcal{Q}$ la región del espacio acotada por los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y los planos $x + 3z = 3$, $y = \dfrac{\pi}{2}$, calcular

$$\iiint_{\mathcal{Q}} \cos y \, dV$$

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & x & \leq 3 \\ 0 \leq & y & \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq & z & \leq 1 - \dfrac{x}{3} \end{cases}$$



Ejemplo: Siendo $\mathcal{Q}$ la región del espacio acotada por los planos coordenados $x=0$, $y=0$, $z=0$ y los planos $x+3z=3$, $y=\dfrac{\pi}{2}$, calcular

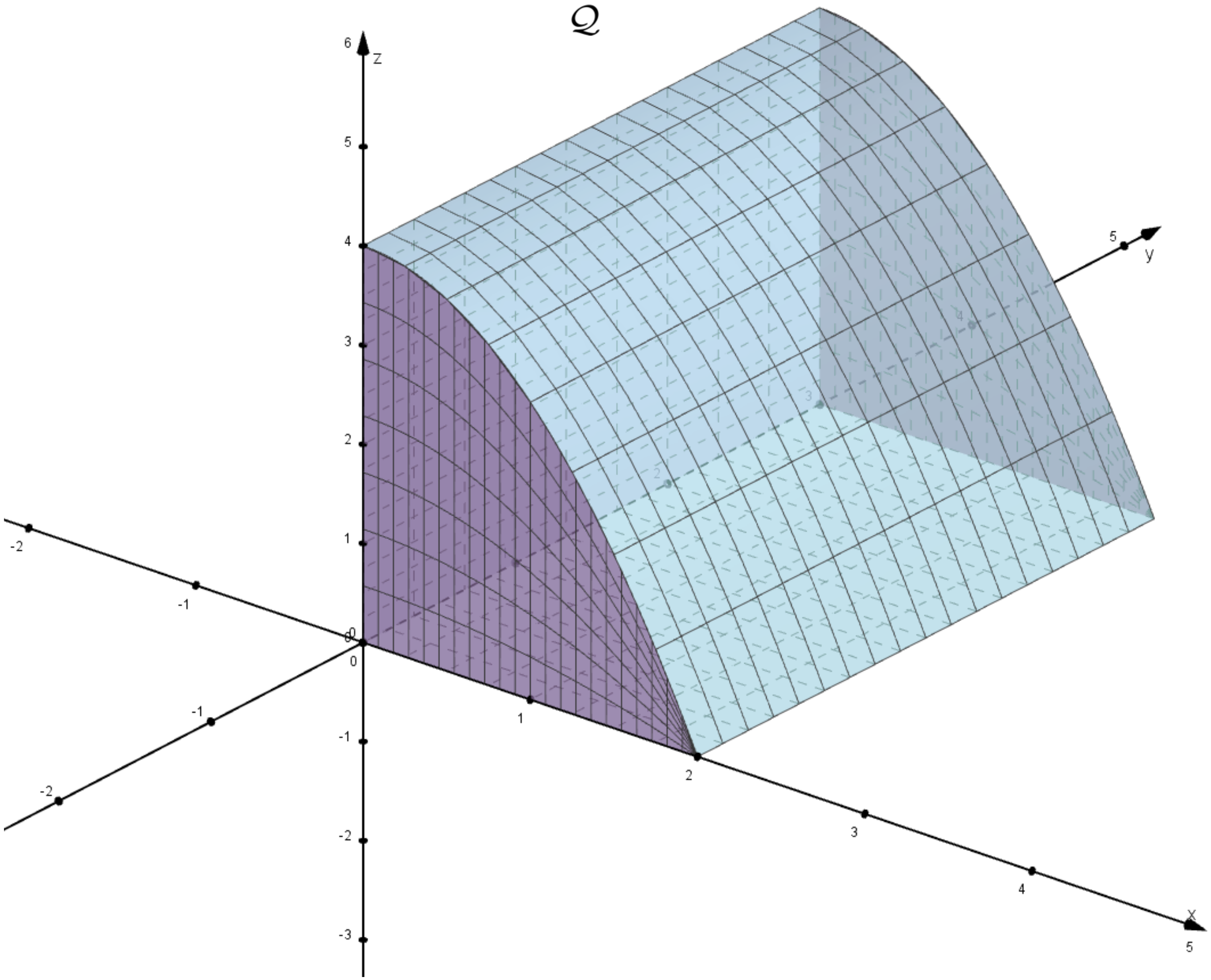
$$\iiint\limits_{\mathcal{Q}} \cos y \, dV$$

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & x & \leq 3 \\ 0 \leq & y & \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq & z & \leq 1 - \dfrac{x}{3} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \iiint\limits_{\mathcal{Q}} \cos y \, dV &= \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{1-\frac{x}{3}} \cos y \, dz dy dx = \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos y \ [z]_0^{1-\frac{x}{3}} \, dy dx \\ &= \int_0^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - \frac{x}{3}\right) \cos y \, dy dx = \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3}\right) [\operatorname{sen} y]_0^{\pi/2} \, dx \\ &= \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3}\right) dx = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ejemplo: Siendo $\mathcal{Q}$ la región del primer octante acotada por los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, el plano $y = 3$, y la superficie $z = 4 - x^2$, calcular

$$\int\int\int_{\mathcal{Q}} (y - 4x)dV$$

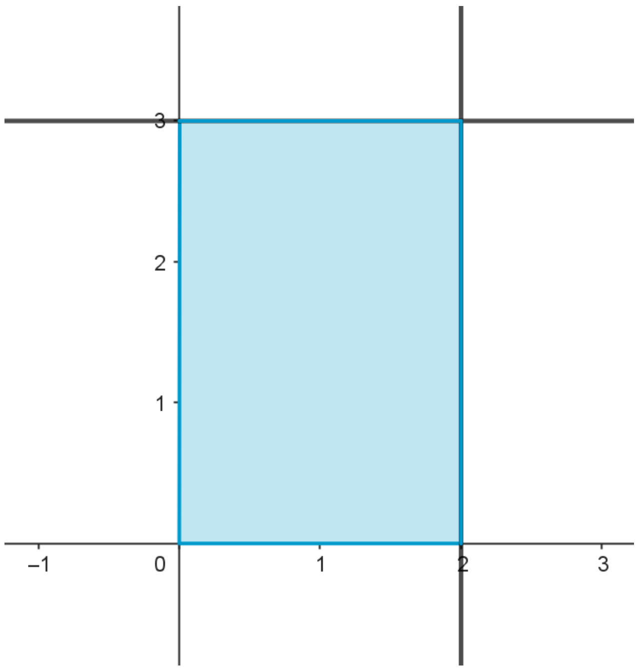


Ejemplo: Siendo Q la región del primer octante acotada por los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, el plano $y = 3$, y la superficie $z = 4 - x^2$, calcular

$$\iiint_Q (y - 4x)dV$$

$$\left.\begin{array}{l} z = 4 - x^2 \\ z = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Primer octante: } x = 2$$

$$Q = \begin{cases} 0 \leq & x & \leq 2 \\ 0 \leq & y & \leq 3 \\ 0 \leq & z & \leq 4 - x^2 \end{cases}$$



Ejemplo: Siendo $\mathcal{Q}$ la región del primer octante acotada por los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, el plano $y = 3$, y la superficie $z = 4 - x^2$, calcular

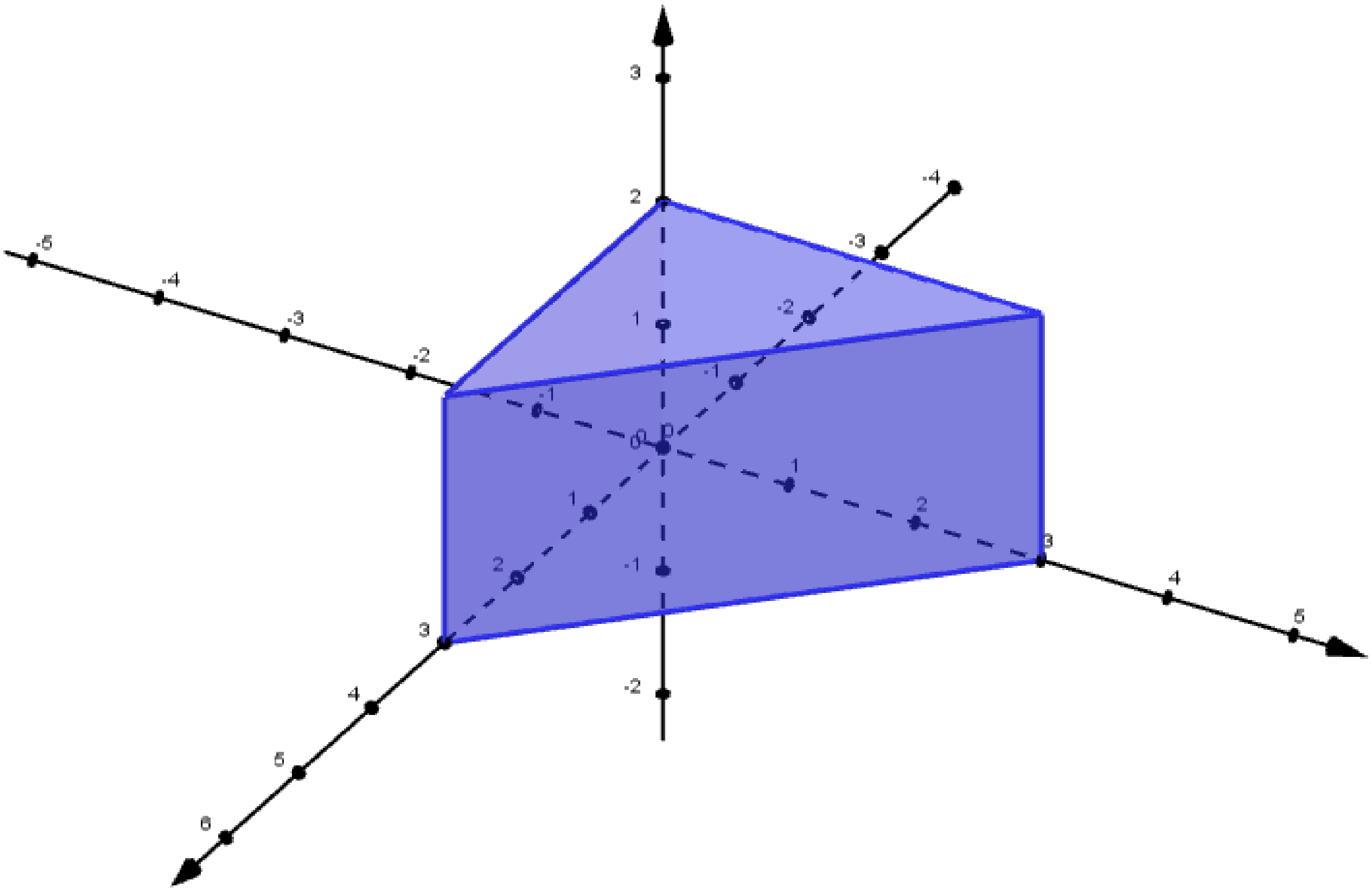
$$\iiint_{\mathcal{Q}} (y - 4x)dV$$

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & x & \leq 2 \\ 0 \leq & y & \leq 3 \\ 0 \leq & z & \leq 4 - x^2 \end{cases}$$

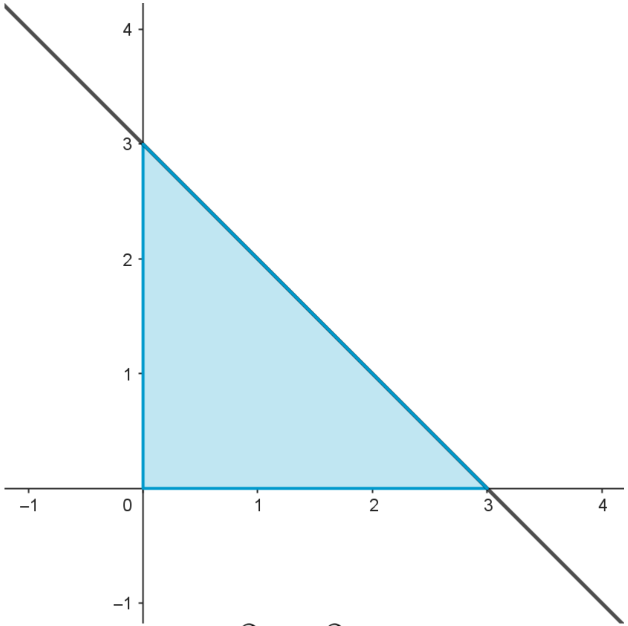
$$\iiint_{\mathcal{Q}} (y - 4x)dV \quad = \quad \int_0^2 \int_0^3 \int_0^{4-x^2} (y - 4x)dzdydx$$

$$= \int_0^2 \int_0^3 (y - 4x)\left(4 - x^2\right) dydx \quad = \quad \int_0^2 \left(18 - \frac{9}{2}x^2 - 48x + 12x^3\right) dx = -24$$

Ejemplo: Utilizar integrales triples para calcular el volumen de la región $\mathcal{Q}$ del primer octante acotada por los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, y los planos $y + x = 3$, $z = 2$.



Ejemplo: Utilizar integrales triples para calcular el volumen de la región $\mathcal{Q}$ del primer octante acotada por los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, y los planos $y + x = 3$, $z = 2$.



$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & x & \leq 3 \\ 0 \leq & y & \leq 3 - x \\ 0 \leq & z & \leq 2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V(\mathcal{Q}) &= \iiint_{\mathcal{Q}} 1 dV = \int_0^3 \int_0^{3-x} \int_0^2 dz dy dx = \int_0^3 \int_0^{3-x} 2 dy dx \\ &= \int_0^3 2(3 - x) dx = 9 \end{aligned}$$

Ejemplo: Usar integrales triples para calcular el volumen de la región del espacio que, en el primer octante, delimitan los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z + y = 2$.

$$Q = \begin{cases} 0 \leq & x & \leq 2 \\ 0 \leq & y & \leq \sqrt{4 - x^2} \\ 0 \leq & z & \leq 2 - y \end{cases}$$

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{2-y} dz dy dx = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (2 - y) \, dy dx$$

$$= \int_0^2 \left(2\sqrt{4 - x^2} - \frac{4 - x^2}{2} \right) dx = 2 \underbrace{\int_0^2 \sqrt{4 - x^2} \, dx}_{\text{Área de un cuarto de círculo de radio 2}} - \frac{16}{3} = 2\pi - \frac{16}{3}$$