Tema 3 – Cuarta Parte

Funciones de varias variables

Derivadas direccionales. Gradiente.

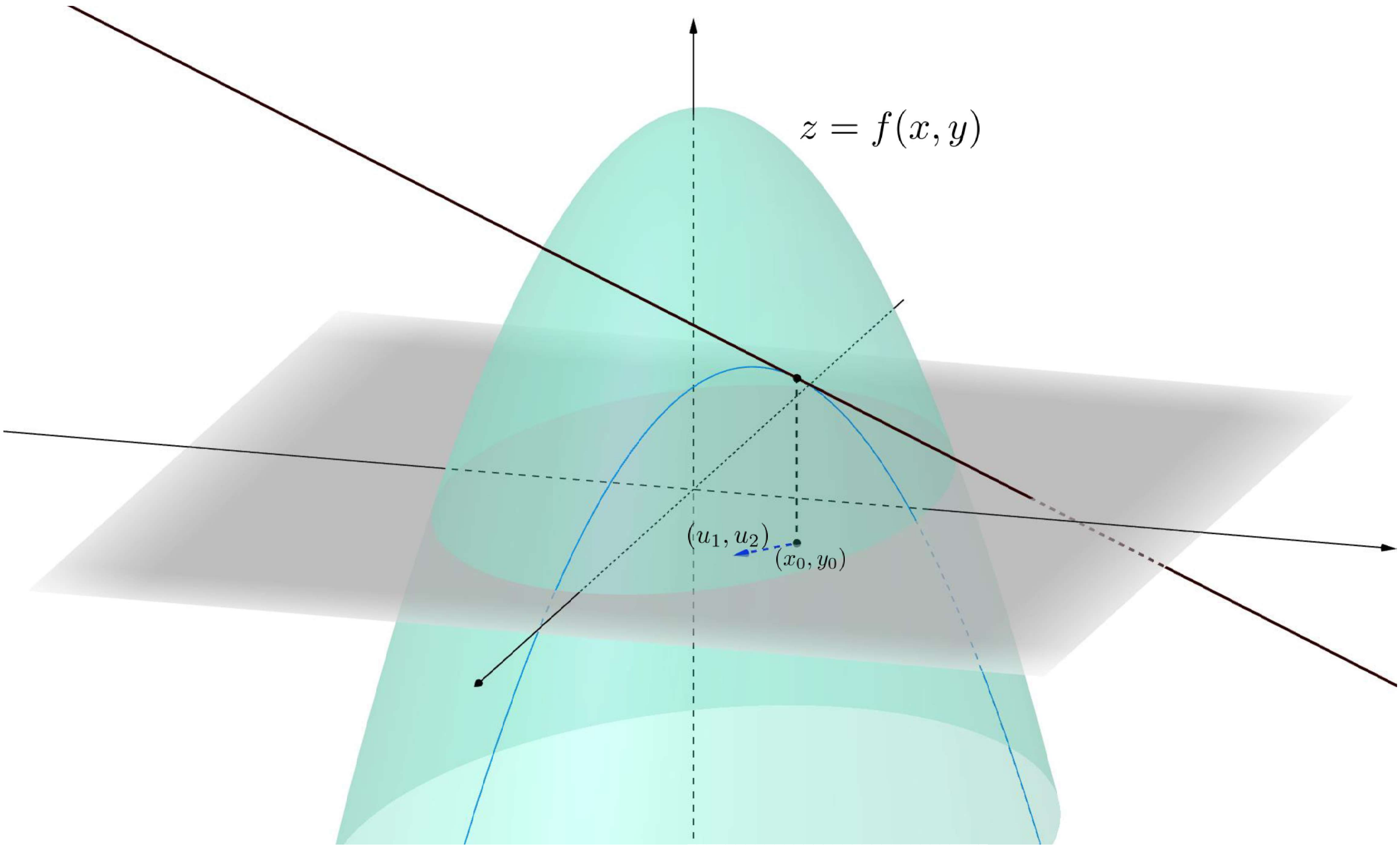
Derivada direccional:

Sea f una función de dos variables x e y y sea $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ un vector unitario. La derivada direccional de f en la dirección (u_1, u_2) es

$$D_{\mathbf{u}} f(x, y) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tu_1, y + tu_2) - f(x, y)}{t}$$

La derivada direccional de la función $f(x, y)$ en el punto (x_0, y_0) en la dirección del vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto (x_0, y_0) a la curva que se obtiene al cortar la superficie $z = f(x, y)$ por el plano vertical que pasa por el punto (x_0, y_0) y es paralelo al vector $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$

Nos indica la variación de la función cuando nos movemos desde un punto a lo largo de una dirección



Derivadas parciales:

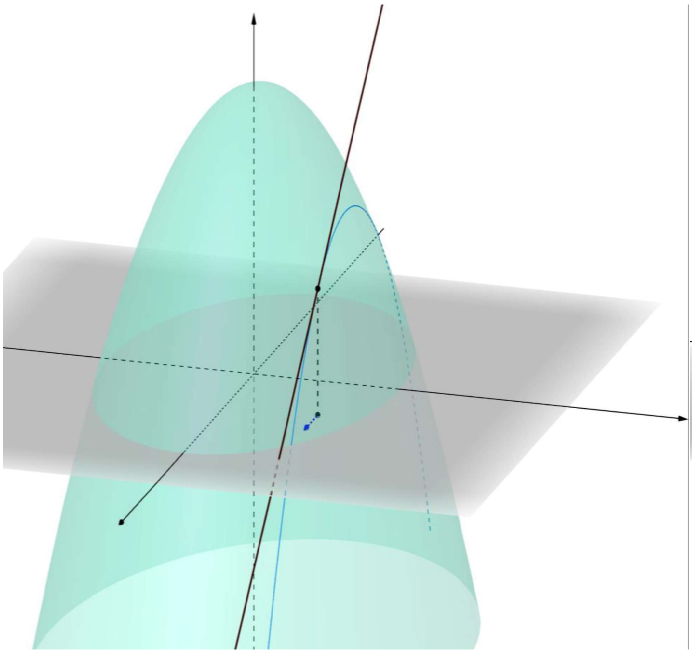
$$D_{(u_1,u_2)}f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu_1, y+tu_2) - f(x,y)}{t}$$

Existen dos derivadas direccionales particularmente interesantes:

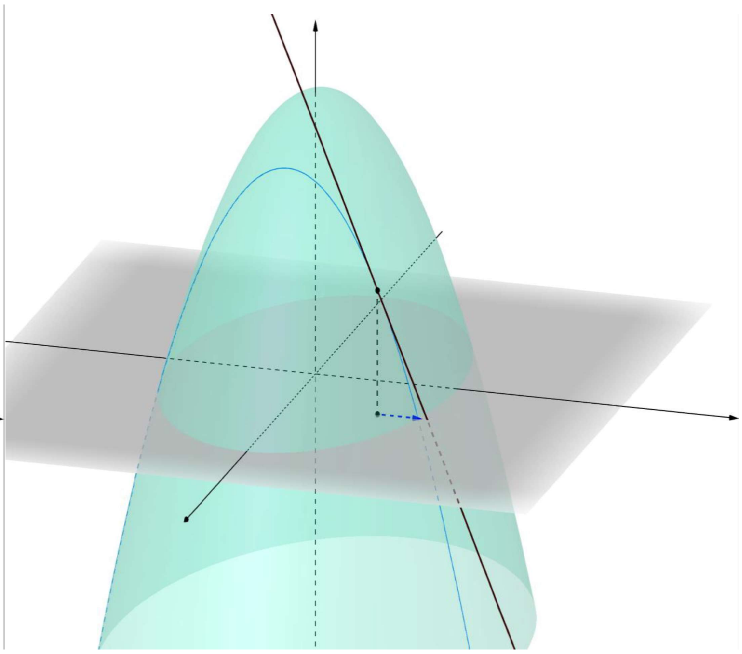
$$D_{(1,0)}f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+t, y) - f(x,y)}{t} \quad = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$D_{(0,1)}f(x,y) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x, y+t) - f(x,y)}{t} \quad = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Derivadas parciales



$$D_{(1,0)}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$



$$D_{(0,1)}f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Vector gradiente

Si f es diferenciable en un punto (x,y), se define el vector gradiente de f en (x,y) como

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)$$

Ejemplo: Calcular el vector gradiente en el punto $(1,1)$ de la función $f(x,y) = 2x^2 + 2xy + y^2 + 2x$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + 2y + 2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 8 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 4 \end{aligned}\right\} \nabla f(1,1) = (8,4)$$

Vector gradiente

Si f es diferenciable en un punto (x,y) y (u_1,u_2) es un vector unitario. Entonces se verifica:

$$D_{(u_1,u_2)}f(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot(u_1,u_2)$$

Demostración:

Sea

$$h(t) = f(x+tu_1, y+tu_2)$$

Por un lado, se tiene que

$$h'(0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x+tu_1,y+tu_2)-f(x,y)}{t} = D_{(u_1,u_2)}f(x,y)$$

Por otro lado, por la regla de la cadena, se tiene que

$$h'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)u_2 = \nabla f(x,y)\cdot(u_1,u_2)$$

Ejemplo:

Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = 2x^2y^3 + 6xy$ en el punto $(1,1)$ en la dirección del vector unitario $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4xy^3 + 6y \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 10 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 6x^2y^2 + 6x \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 12\end{array}\right\} \nabla f(1,1) = (10,12)$$

$$D_{\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)}f(1,1) = \nabla f(1,1)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) = (10,12)\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right) = 5\sqrt{3}+6$$

Ejemplo:

Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = 4x^2 + y^2$ en el punto $(2,1)$ en la dirección del vector $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 8x \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial x}(2,1) = 16 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial y}(2,1) = 2 \end{array}\right\} \nabla f(2,1) = (16,2)$$

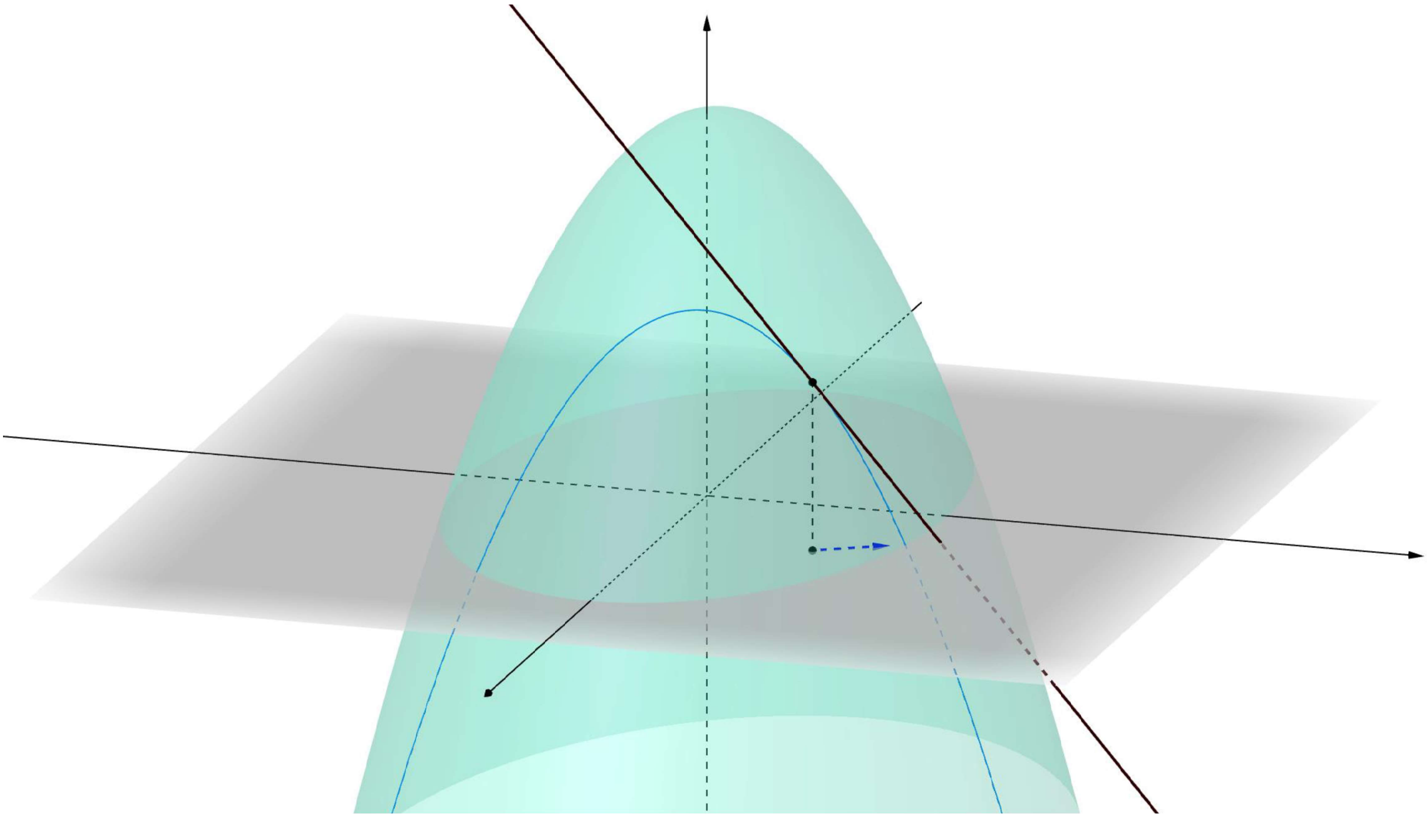
$$D_{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(2,1) = \nabla f(2,1) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = (16,2) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 9\sqrt{2}$$

Ejemplo:

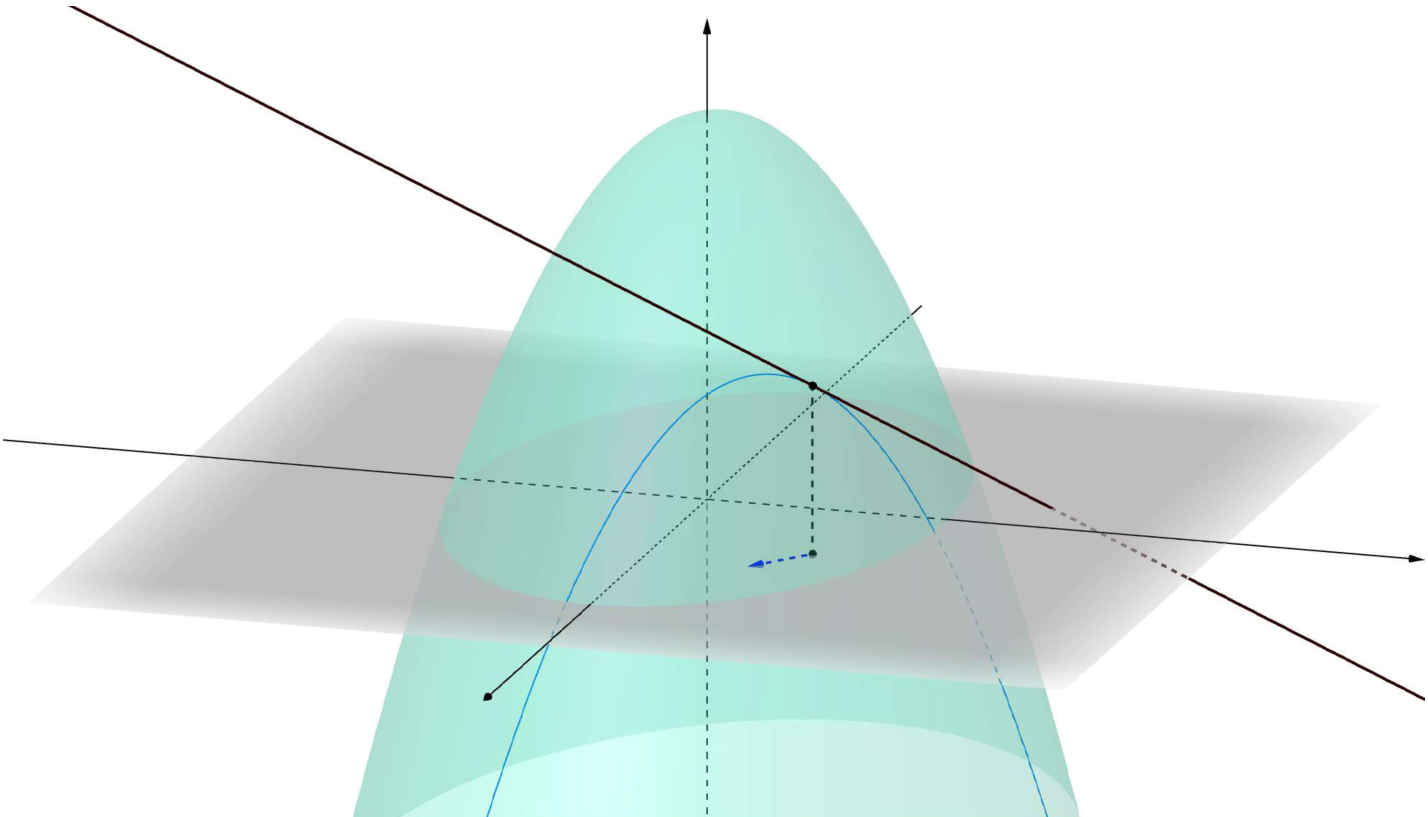
Calcular la derivada direccional de $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ en el punto $(3,2)$ en la dirección del vector $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2x}{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial x}(3,2) = \dfrac{6}{13} \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{2y}{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial y}(3,2) = \dfrac{4}{13} \end{array}\right\} \nabla f(3,2) = \left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}\right)$$

$$D_{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} f(3,2) = \left(\frac{6}{13}, \frac{4}{13}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{-5\sqrt{2}}{13}$$



La derivada direccional nos indica la variación de la función cuando nos movemos desde un punto a lo largo de una dirección



¿En qué dirección hay un máximo crecimiento de la función $f(x,y)$?
¿Y el mínimo crecimiento?

Propiedades del vector gradiente

Sea f diferenciable en un punto (x,y)

$$D_{(u_1,u_2)}f(x,y)=\nabla f(x,y)\cdot(u_1,u_2)=\|\nabla f(x,y)\|\cos(\widehat{\nabla f(x,y),(u_1,u_2)})$$

- $\cos(\widehat{\nabla f(x,y),(u_1,u_2)})=1 \quad \text{si} \quad (u_1,u_2)=\dfrac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|}$

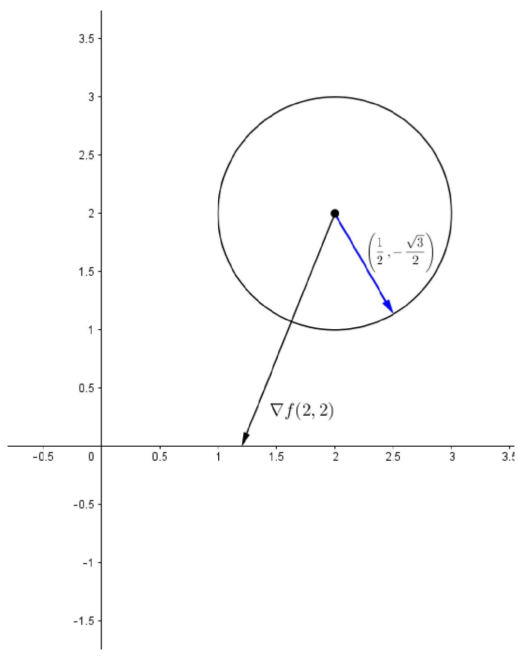
  La dirección de máximo crecimiento en (x,y) viene dada por $\nabla f(x,y)$
  El valor máximo de $D_{\mathbf{u}}f(x,y)$ es $||\nabla f(x,y)||$

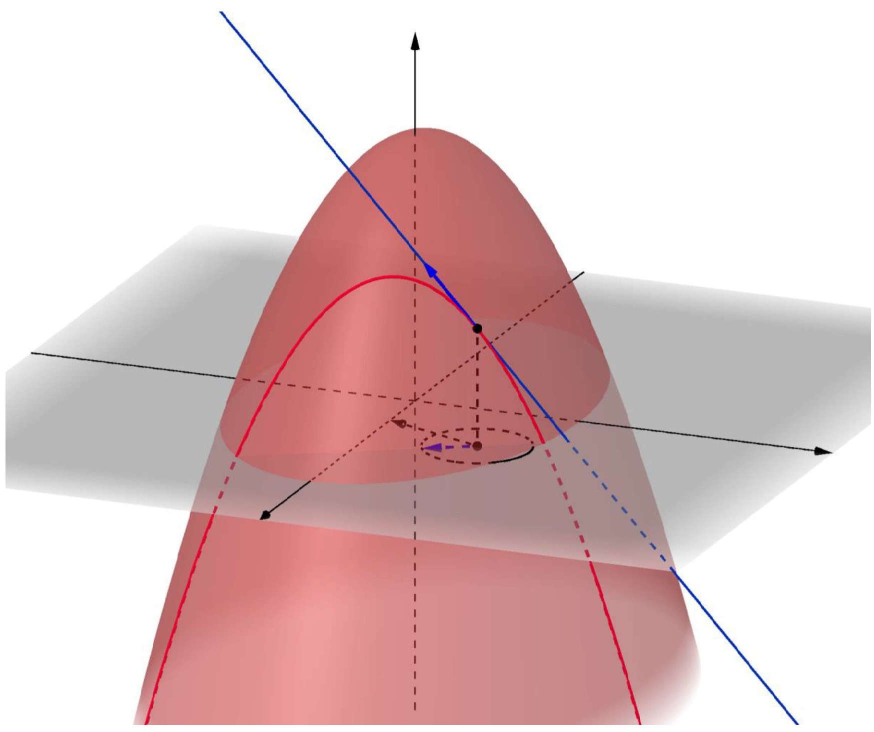
- $\cos(\widehat{\nabla f(x,y),(u_1,u_2)})=-1 \quad \text{si} \quad (u_1,u_2)=-\dfrac{\nabla f(x,y)}{\|\nabla f(x,y)\|}$

  La dirección de mínimo crecimiento en (x,y) viene dada por $-\nabla f(x,y)$
  El valor mínimo de $D_{\mathbf{u}}f(x,y)$ es $-||\nabla f(x,y)||$

- $\cos(\widehat{\nabla f(x,y),(u_1,u_2)})=0 \quad \text{si} \quad (u_1,u_2)\perp\nabla f(x,y)$

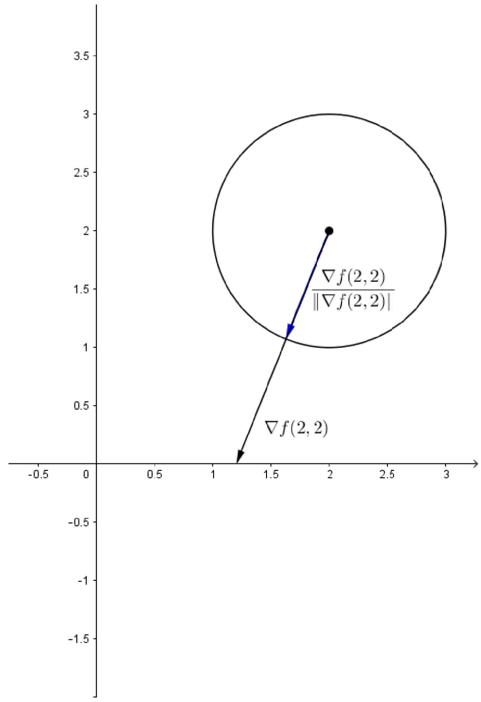
$$f(x,y)=5-\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{2}$$

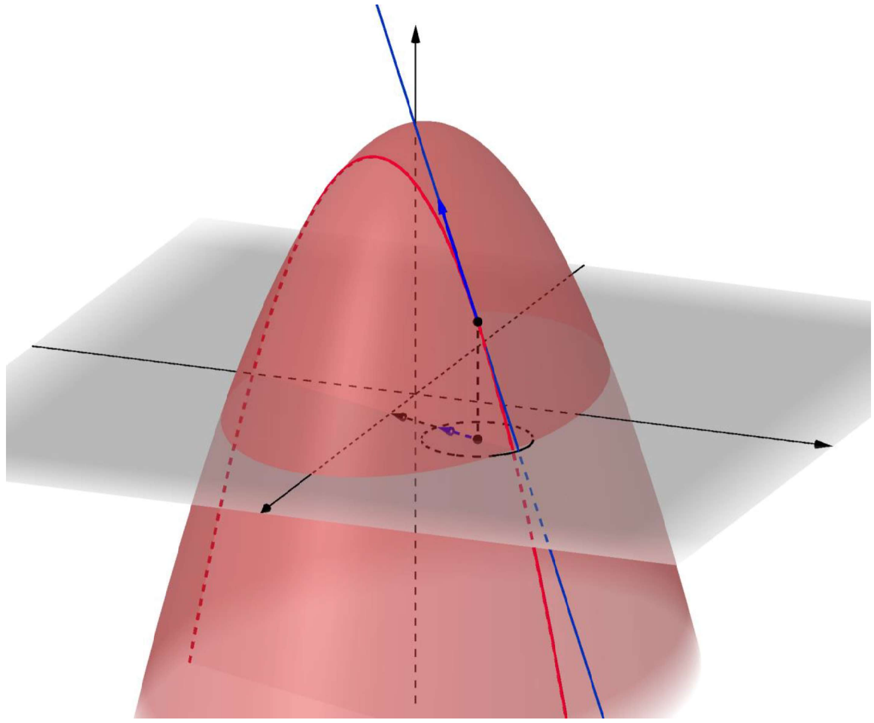




$$D_{\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)}f(2,2)=\nabla f(2,2)\cdot\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=\left(-\frac{4}{5},-2\right)\cdot\left(\frac{1}{2},\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{2}{5}+\sqrt{3}$$

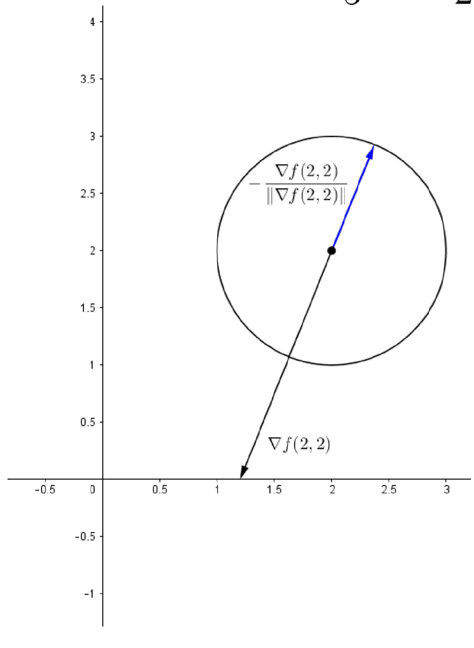
$$f(x,y) = 5 - \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2}$$

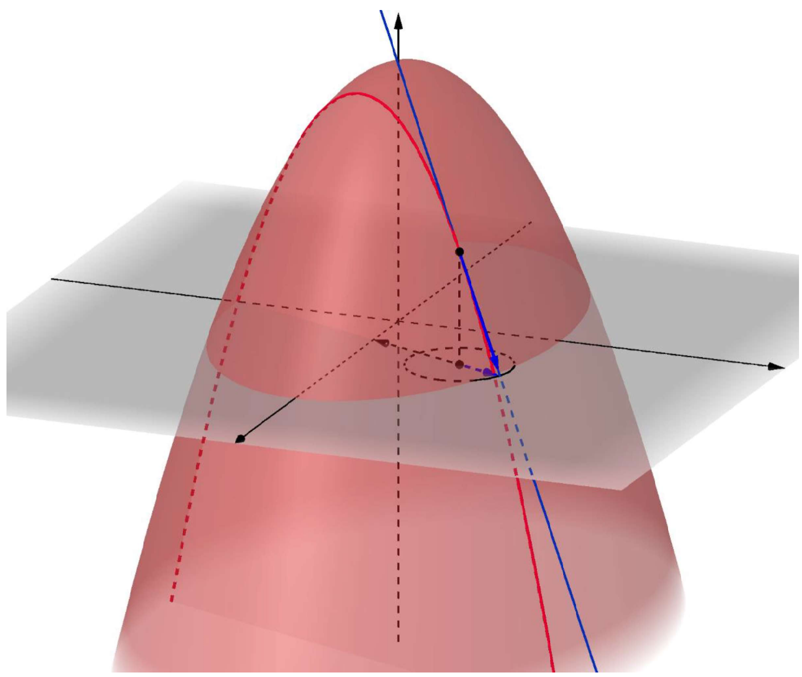




$$D_{\left(-\frac{2}{\sqrt{29}},-\frac{5}{\sqrt{29}}\right)} f(2,2) = \nabla f(2,2)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{29}},-\frac{5}{\sqrt{29}}\right) = \left(-\frac{4}{5},-2\right)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{29}},-\frac{5}{\sqrt{29}}\right) = \frac{2\sqrt{29}}{5}$$

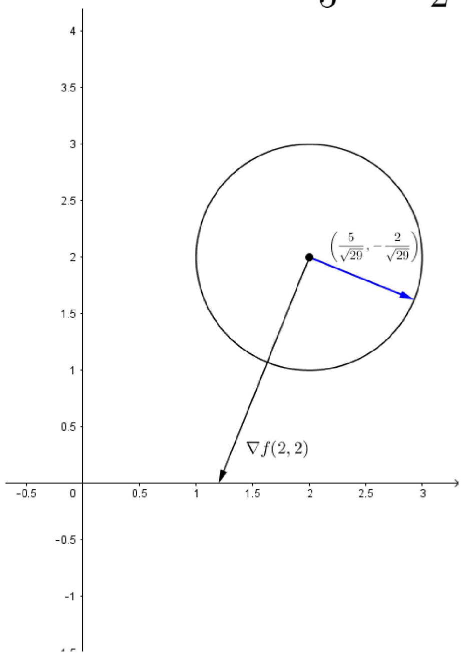
$$f(x,y) = 5 - \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2}$$

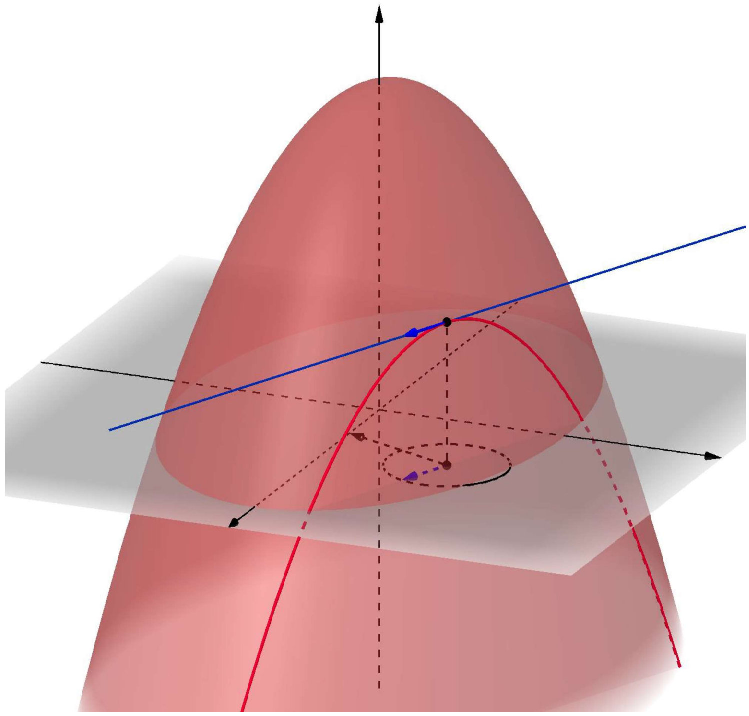




$$D_{\left(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}}\right)} f(2,2) = \nabla f(2,2)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}}\right) = \left(-\frac{4}{5},-2\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{29}},\frac{5}{\sqrt{29}}\right) = -\frac{2\sqrt{29}}{5}$$

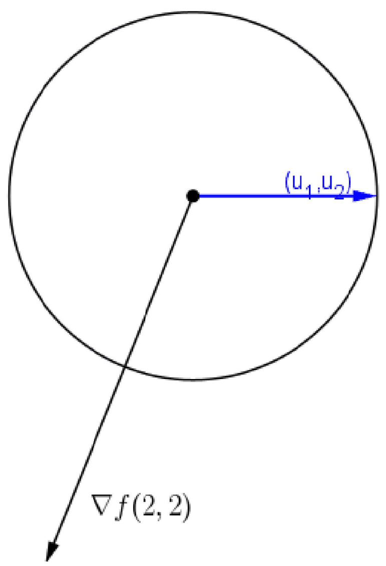
$$f(x,y) = 5 - \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2}$$

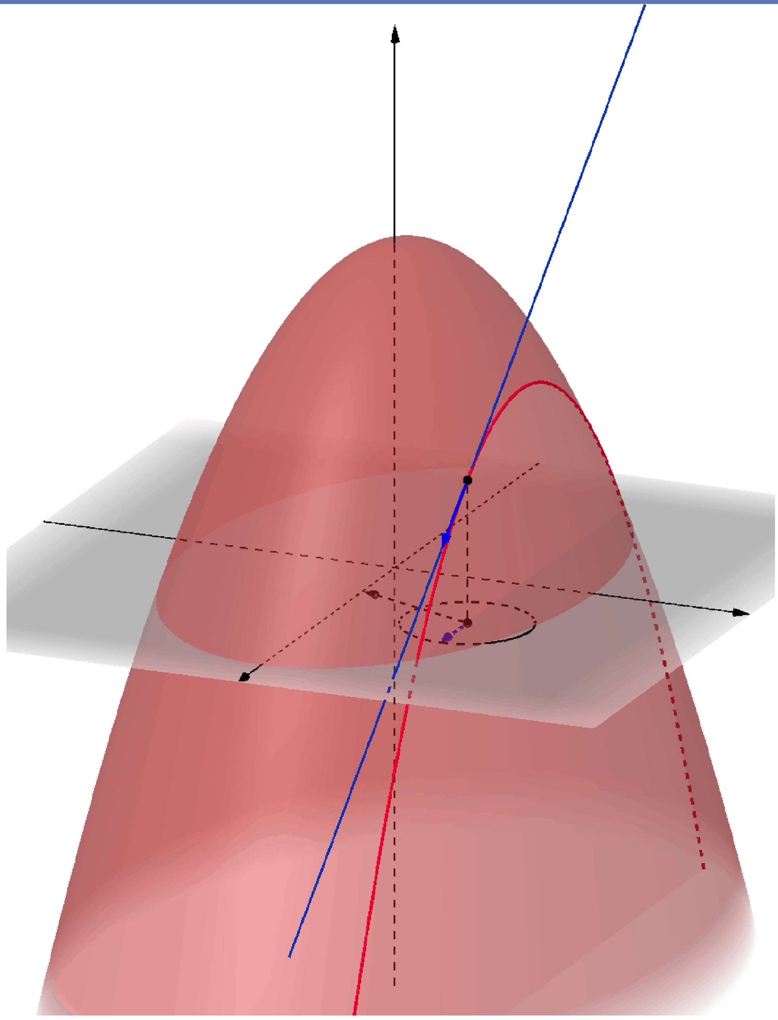




$$D_{\left(\frac{5}{\sqrt{29}},-\frac{2}{\sqrt{29}}\right)} f(2,2) = \nabla f(2,2) \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}\right) = \left(-\frac{4}{5}, -2\right) \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{29}}, -\frac{2}{\sqrt{29}}\right) = 0$$

$$f(x,y) = 5 - \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{2}$$





Ejemplo: La temperatura en cada punto de coordenadas (x, y) de una plancha metálica viene dada por la función $T(x, y) = 100 - 4x^2 - y^2$. ¿En qué dirección a partir del punto $(2, -3)$ crece más rápidamente la temperatura?

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) = -8x \qquad \frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = -2y$$

$$\nabla T(x, y) = (-8x, -2y)$$

$$\nabla T(2, -3) = (-16, 6)$$

$$\frac{\nabla T(2, -3)}{\|\nabla T(2, -3)\|} = \left(-\frac{16}{\sqrt{292}}, \frac{6}{\sqrt{292}}\right)$$