Tema 3 – Séptima Parte

Funciones de varias variables

Extremos absolutos

<u>Extremos absolutos de funciones de dos variables</u>

Sea f una función de dos variables definida en un conjunto $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ que contiene al punto (x_0, y_0)

- f alcanza en (x_0, y_0) su mínimo absoluto en $\mathcal{R}$ si para cualesquiera $(x, y) \in \mathcal{R}$ se tiene que

$$f(x_0, y_0) \leqslant f(x, y)$$

- f alcanza en (x_0, y_0) su máximo absoluto en $\mathcal{R}$ si para cualesquiera $(x, y) \in \mathcal{R}$ se tiene que

$$f(x_0, y_0) \geqslant f(x, y)$$

Extremos absolutos de funciones de dos variables

No toda función alcanza su máximo o su mínimo absoluto en una región $\mathcal{R}$.

Una función f puede no tener extremos absolutos en una región $\mathcal{R}_1 \in \mathbb{R}^2$ y sí tenerlos en otra región $\mathcal{R}_2 \in \mathbb{R}^2$.

Buscaremos una condición suficiente para que una función alcance su máximo y su mínimo absoluto en un subconjunto $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$.

EXTREMOS ABSOLUTOS

RECORDAR

Teorema de Weierstrass

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$. Entonces f alcanza en $[a,b]$ su máximo y su mínimo absoluto.

$$\boxed{f \text{ alcanza un extremo absoluto en } x_0 \in [a,b]}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{c} x_0 \text{ es un punto crítico de } f \\ \text{ó} \\ x_0 = a \quad \text{ó} \quad x_0 = b \end{array}}$$

Extremos absolutos de funciones de dos variables

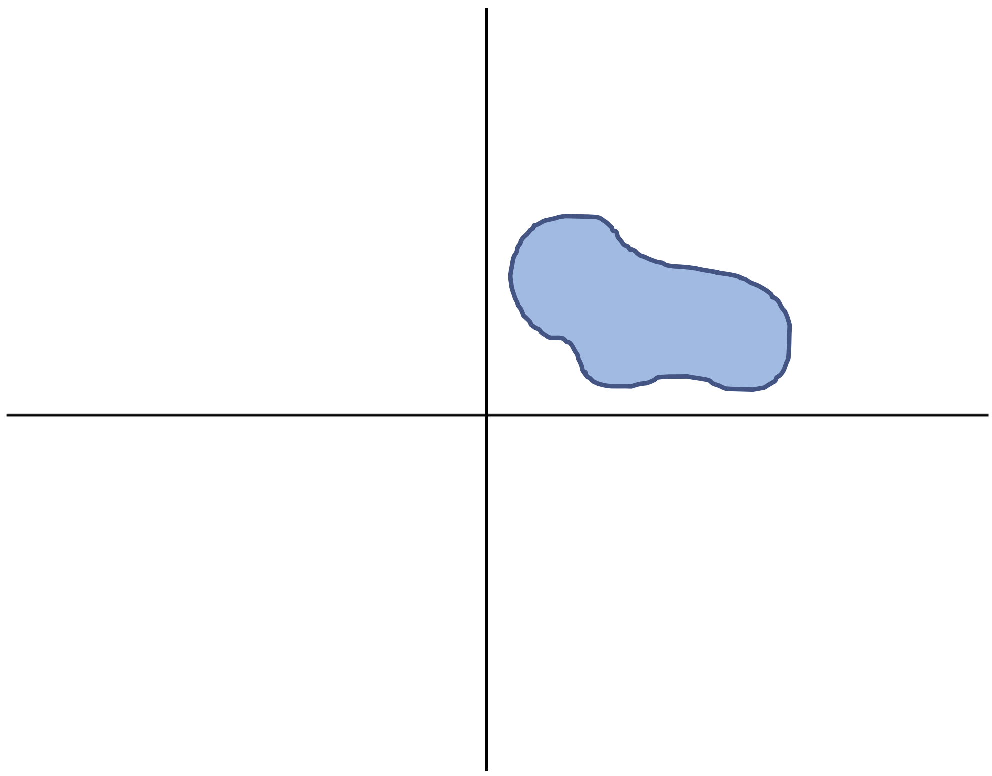
Teorema:

Sea $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ una región cerrada y acotada. Sea $f\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathcal{R}$. Entonces f alcanza en $\mathcal{R}$ su máximo y su mínimo absoluto.

EXTREMOS ABSOLUTOS

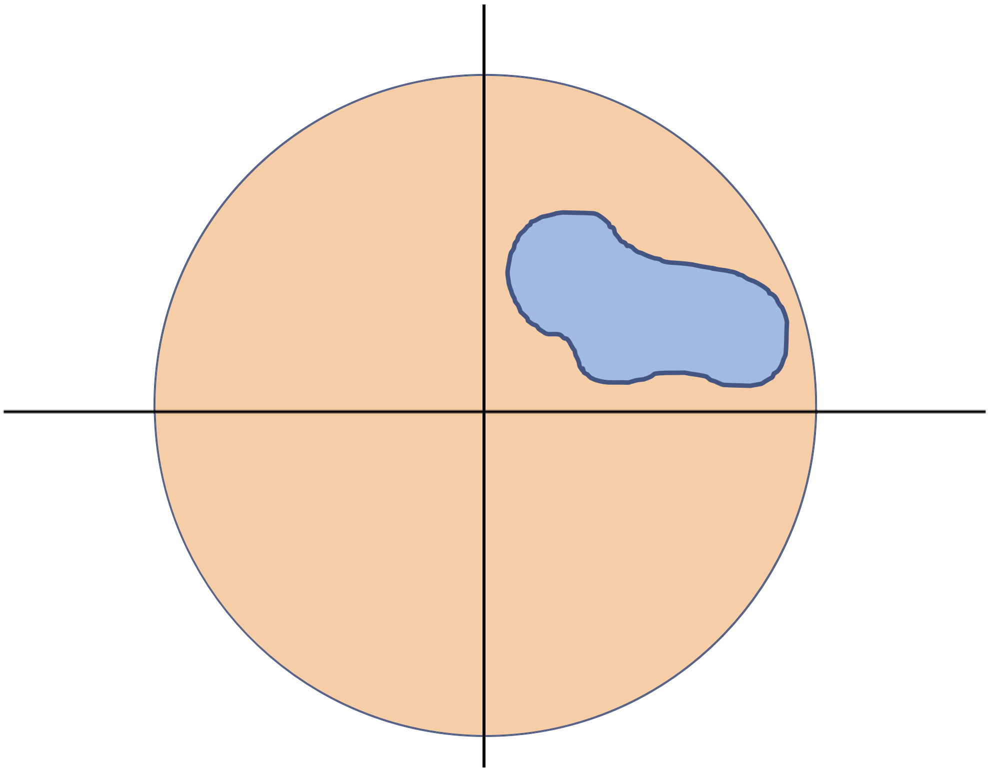
Extremos absolutos de funciones de dos variables

$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ es acotada si está contenido en algún círculo.



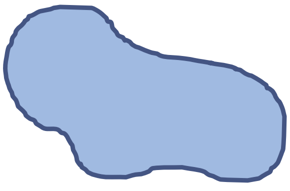
Extremos absolutos de funciones de dos variables

$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ es acotada si está contenido en algún círculo.

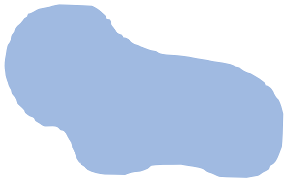


Extremos absolutos de funciones de dos variables

$\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ es cerrada si contiene a todos los puntos de su frontera.



cerrado



abierto

Extremos absolutos de funciones de dos variables

Teorema:

Sea $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ una región cerrada y acotada. Sea $f\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathcal{R}$. Entonces f alcanza en $\mathcal{R}$ su máximo y su mínimo absoluto.

f alcanza un extremo absoluto en $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$

$\Downarrow$

(x_0, y_0) es un punto crítico de f en $\mathcal{R}$

ó

$(x_0, y_0) \in \mathcal{F}$ (frontera de $\mathcal{R}$)

Extremos absolutos de funciones de dos variables

Sea $\mathcal{R} \subseteq \mathbb{R}^2$ una región cerrada y acotada. Sea $f\colon \mathcal{R} \to \mathbb{R}$ una función continua en $\mathcal{R}$.

Método para determinar los extremos absolutos de f

1. Se calculan los puntos críticos en el interior de la región $\mathcal{R}$
2. Se determinan los puntos donde la función restringida a la frontera podría alcanzar su máximo y su mínimo absoluto
3. Se evalúa la función en los puntos determinados en los pasos anteriores

MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x$ en la región $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9\}$.

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f que están en el interior de $\mathcal{R}$.

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 4 & 2x + 4 = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y & 2y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Punto crítico de } f\text{: } (-2,0)$$

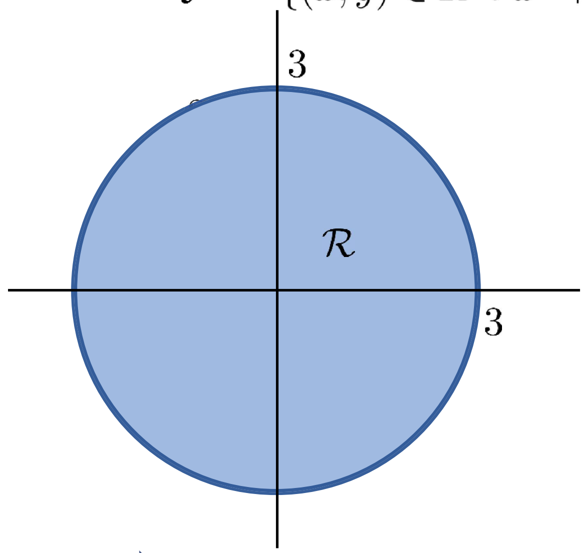
$$(-2,0) \in \mathcal{R}$$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x$ en la región $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9\}$.

Estudiamos ahora la frontera $\mathcal{F}$ $\qquad \mathcal{F} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 9\}$

Multiplicadores de Lagrange:



$$\left.\begin{array}{l} 2x + 4 = 2x \cdot \lambda \\ 2y = 2y \cdot \lambda \\ x^2 + y^2 - 9 = 0 \end{array}\right\}$$

$$y = 0,\ x = \pm 3 \Rightarrow (-3,0), (3,0)$$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4x$ en la región $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 9\}$.

Concluimos que f debe alcanzar su máximo y su mínimo absoluto en los puntos

$f(-2,0) = -4$ Mínimo absoluto

$f(3,0) = 21$ Máximo absoluto

$f(-3,0) = -3$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = e^{x-y}(x^2+y^2)$ en la región $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\}$.

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f que están en el interior de $\mathcal{R}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{x-y}(x^2+y^2) + e^{x-y}2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^{x-y}(x^2+y^2) + e^{x-y}2y$$

$$\left.\begin{array}{r} e^{x-y}(x^2+y^2+2x) = 0 \\ -e^{x-y}(x^2+y^2-2y) = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} x^2+y^2+2x = 0 \\ x^2+y^2-2y = 0 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} y = -x \\ 2x^2+2x = 0 \end{array}\right\}$$

Puntos críticos de f :

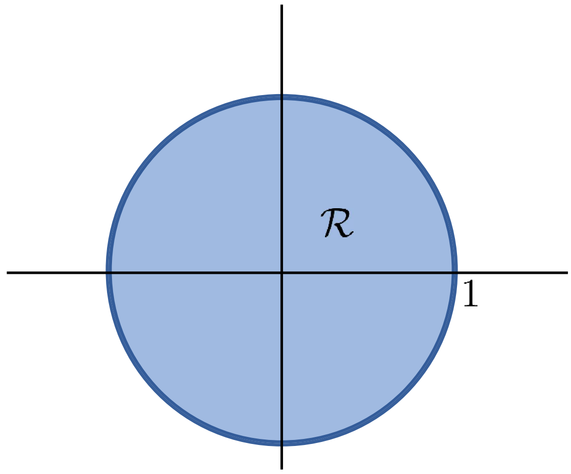
$(0,0) \in \mathcal{R}$

$(-1,1) \notin \mathcal{R}$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y)=e^{x-y}(x^2+y^2)$ en la región $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1\}$.

Estudiamos ahora la frontera $\mathcal{F}$ $\qquad \mathcal{F}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\}$



Multiplicadores de Lagrange:

$$\begin{cases} e^{x-y}(x^2+y^2+2x)=2x\cdot\lambda \\ -e^{x-y}(x^2+y^2-2y)=2y\cdot\lambda \\ x^2+y^2-1=0 \end{cases}$$

$$x=-y$$
$$2x^2=1$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Ejemplo:

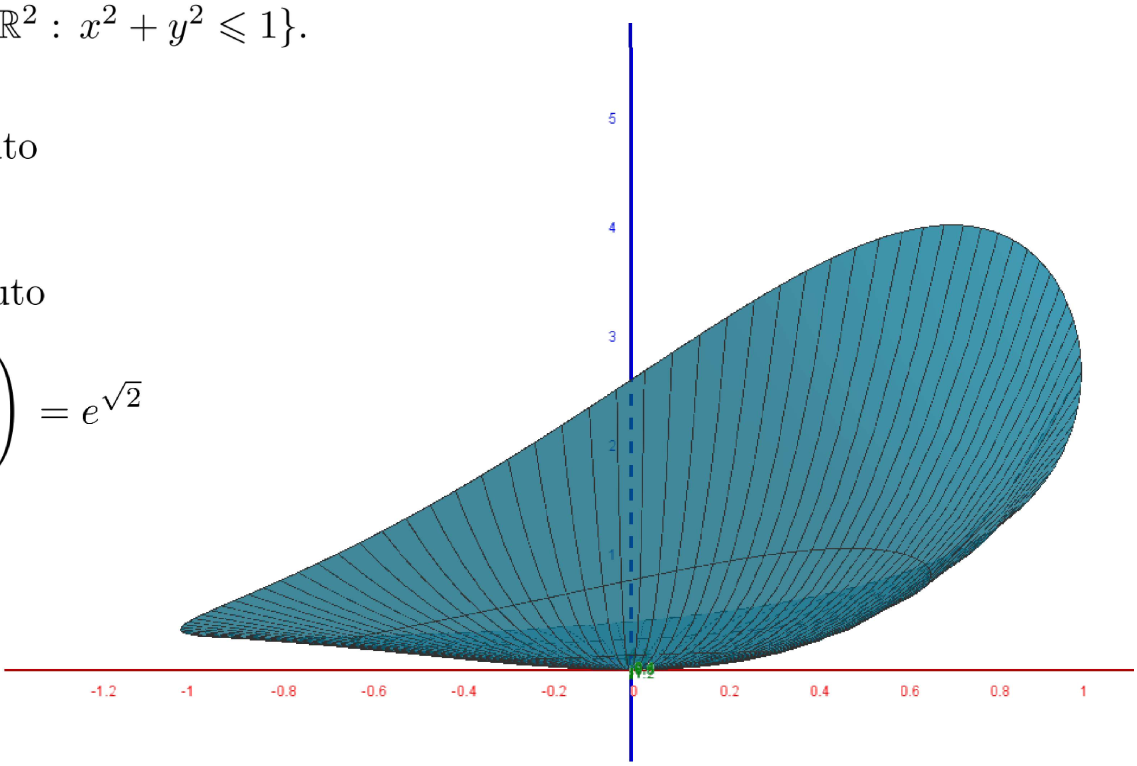
Calcular los extremos absolutos de $f(x,y)=e^{x-y}(x^2+y^2)$ en la región $\mathcal{R}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leqslant 1\}$.

Mínimo absoluto

$f\,(0,0)=0$

Máximo absoluto

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{\sqrt{2}}$$



Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = (y^2 - x^2)e^{-x^2}$ en el círculo de centro el origen y radio $\sqrt{2}$.

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f que están en el interior de $\mathcal{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = -2xe^{-x^2}(1+y^2-x^2) \\ f_y(x,y) = 2ye^{-x^2} \end{array}\right\}$$

$$2xe^{-x^2}(1+y^2-x^2) = 0$$

$$2ye^{-x^2} = 0 \Longrightarrow y = 0 \Longrightarrow x(1-x^2) = 0$$

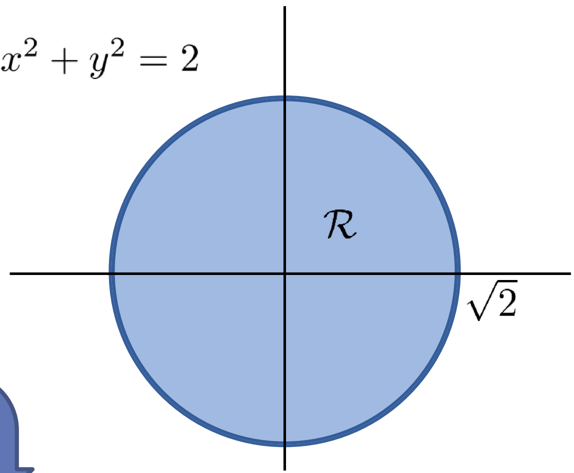
Puntos críticos de f: $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ $\qquad$ $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ $\in \mathcal{R}$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = (y^2 - x^2)e^{-x^2}$ en el círculo de centro el origen y radio $\sqrt{2}$.

Estudiamos ahora la frontera $\mathcal{F}$

$x^2 + y^2 = 2$



Multiplicadores de Lagrange:

$$\left.\begin{array}{l} -2xe^{-x^2}(1+y^2-x^2) = 2x\cdot\lambda \\ 2ye^{-x^2} = 2y\cdot\lambda \\ x^2+y^2-2 = 0 \end{array}\right\}$$

$(\sqrt{2},0)$ $\qquad$ $(-\sqrt{2},0)$

$(0,\sqrt{2})$ $\qquad$ $(0,-\sqrt{2})$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = (y^2 - x^2)e^{-x^2}$ en el círculo de centro el origen y radio $\sqrt{2}$.

Concluimos que f debe alcanzar su máximo y su mínimo absoluto en los puntos

$f\,(0,0) = 0$

$f\,(1,0) = -e^{-1}$ Mínimo absoluto

$f\,(-1,0) = -e^{-1}$ Mínimo absoluto

$f\,(\sqrt{2},0) = -2e^{-2}$

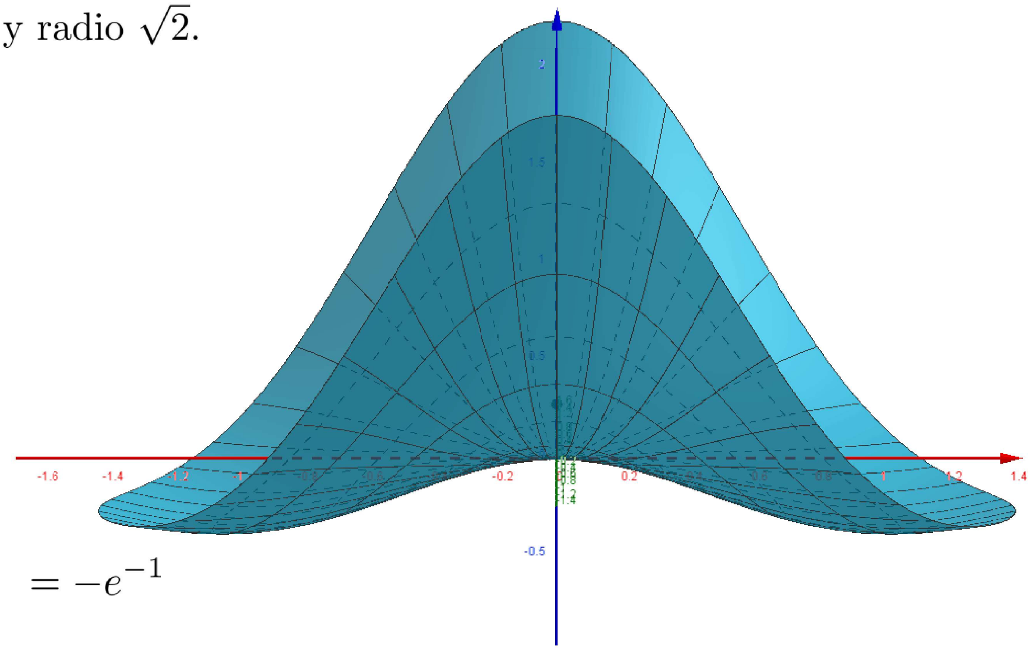
$f\,(0,\sqrt{2}) = 2$ Máximo absoluto

$f\,(-\sqrt{2},0) = -2e^{-2}$

$f\,(0,-\sqrt{2}) = 2$ Máximo absoluto

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = (y^2 - x^2)e^{-x^2}$ en el círculo de centro el origen y radio $\sqrt{2}$.



Mínimo absoluto

$f\,(1,0) = f(-1,0) = -e^{-1}$

Máximo absoluto

$f(0,\sqrt{2}) = f\,(0,-\sqrt{2}) = 2$

EXTREMOS ABSOLUTOS

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = 2 + (x-1)^2 + y^2$ en la región del plano $\mathcal{R} = \{(x,y) : x^2 + 3y^2 \leq 9\}$.

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f que están en el interior de $\mathcal{R}$.

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y) = 2(x-1) = 0 \\ f_y(x,y) = 2y = 0 \end{array}\right\}$$

Puntos críticos de f : $(1,0)$

$$(1,0) \in \mathcal{R}$$

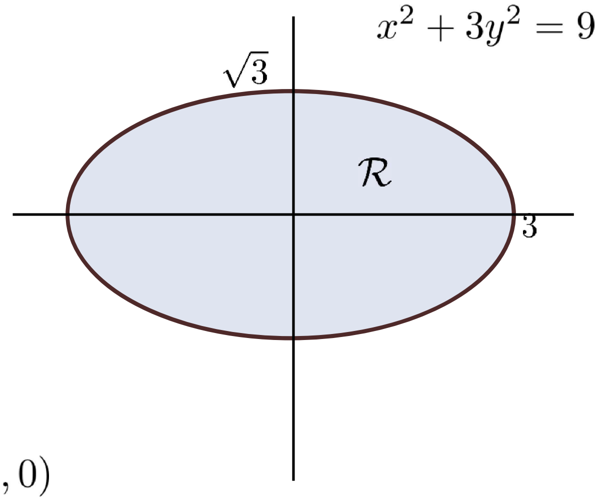
EXTREMOS ABSOLUTOS

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = 2 + (x-1)^2 + y^2$ en la región del plano $\mathcal{R} = \{(x,y) : x^2 + 3y^2 \leq 9\}$.

Estudiamos ahora la frontera $\mathcal{F}$

Multiplicadores de Lagrange:



$$\left.\begin{array}{l} 2(x-1) = 2x \cdot \lambda \\ 2y = 6y \cdot \lambda \\ x^2 + 3y^2 - 9 = 0 \end{array}\right\}$$

$(3,0)$ $(-3,0)$

$\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ $\left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

EXTREMOS ABSOLUTOS

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = 2 + (x-1)^2 + y^2$ en la región del plano $\mathcal{R} = \{(x,y) : x^2 + 3y^2 \leq 9\}$.

Concluimos que f debe alcanzar su máximo y su mínimo absoluto en los puntos

$f\,(1,0) = 2$ Mínimo absoluto

$f\,(3,0) = 6$

$f\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$

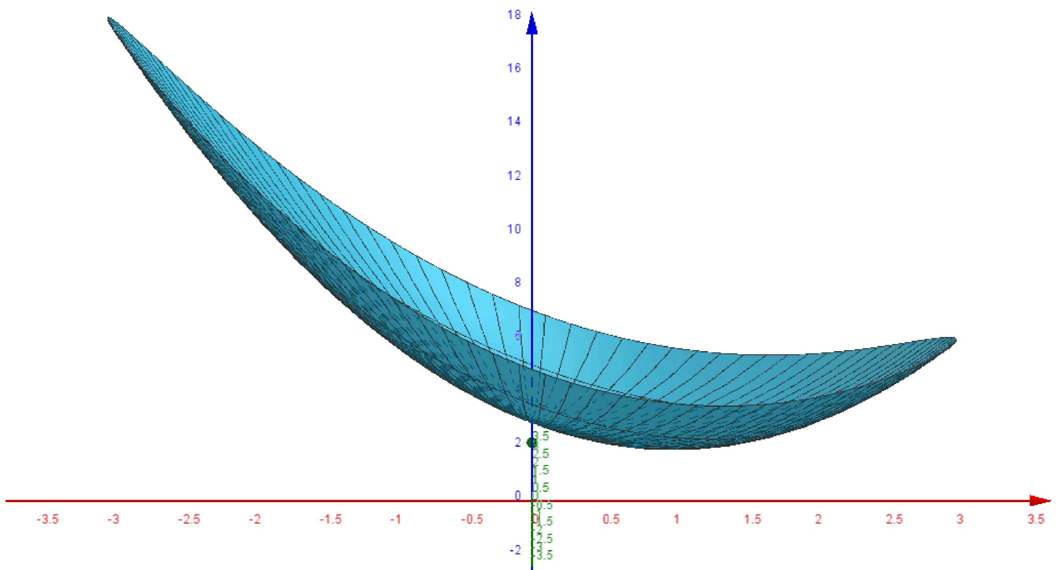
$f\,(-3,0) = 18$ Máximo absoluto

$f\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$

EXTREMOS ABSOLUTOS

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = 2 + (x-1)^2 + y^2$ en la región del plano $\mathcal{R} = \{(x,y) : x^2 + 3y^2 \leq 9\}$.



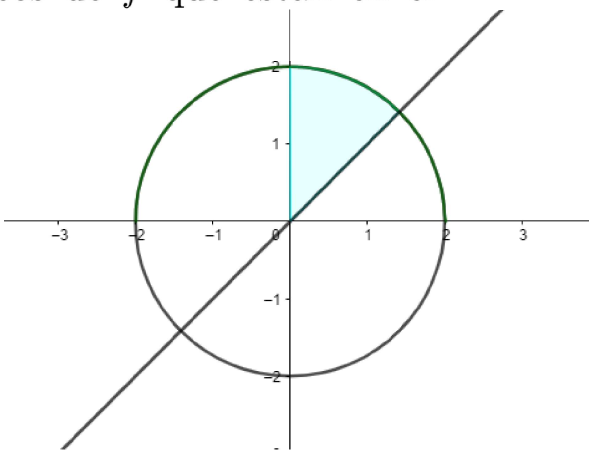
$f\,(1,0) = 2$ Mínimo absoluto

$f\,(-3,0) = 18$ Máximo absoluto

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = x(y^2-4)$ en la región del primer cuadrante acotada por $x=0,\ y=x,\ \ x^2+y^2=4$.

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f que están en el interior de $\mathcal{R}$.



$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= y^2-4=0 \\ f_y(x,y) &= 2xy=0 \end{aligned}\right\}$$

Puntos críticos de f : $(0,-2),\ (0,2)$

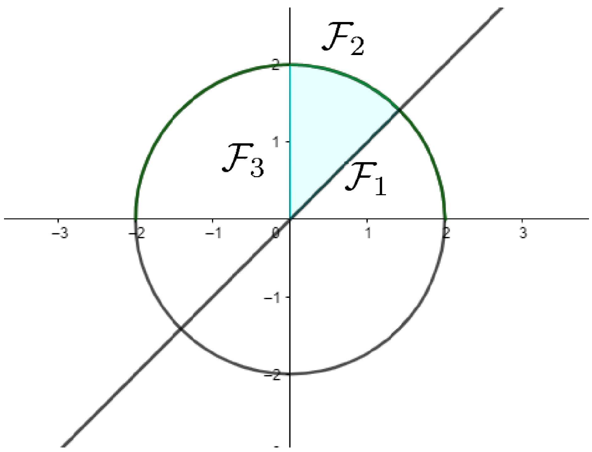
$$(0,-2)\notin\mathcal{R}, \quad (0,2)\in\mathcal{F}$$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = x(y^2-4)$ en la región del primer cuadrante acotada por $x=0,\ y=x,\ \ x^2+y^2=4$.

Estudiamos ahora $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2\cup\mathcal{F}_3$

Multiplicadores de Lagrange en cada $\mathcal{F}_i$



$\mathcal{F}_1$: $\qquad y=x,\ x\in\left[0,\sqrt{2}\right]$

$$\left.\begin{aligned} y^2-4 &= -1\cdot\lambda \\ 2xy &= 1\cdot\lambda \\ y-x &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$$

$(0,0)$ punto terminal de $\mathcal{F}_1$

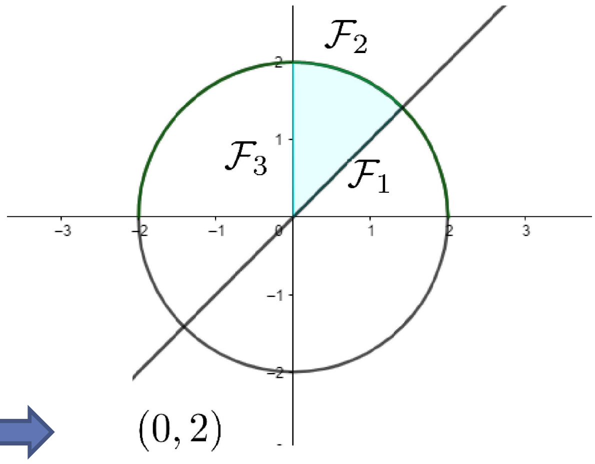
$(\sqrt{2},\sqrt{2})$ punto terminal de $\mathcal{F}_1$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = x(y^2-4)$ en la región del primer cuadrante acotada por $x=0,\ y=x,\ \ x^2+y^2=4$.

Estudiamos ahora $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$

Multiplicadores de Lagrange en cada $\mathcal{F}_i$



$\mathcal{F}_2 :\qquad x^2+y^2=4,\ x\in\left[0,\sqrt{2}\right],\ y>0$

$$\left.\begin{array}{l} y^2-4 = 2x\cdot\lambda \\ 2xy = 2y\cdot\lambda \\ x^2+y^2-4=0, \quad x\in[0,\sqrt{2}],\ y>0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,2)$$

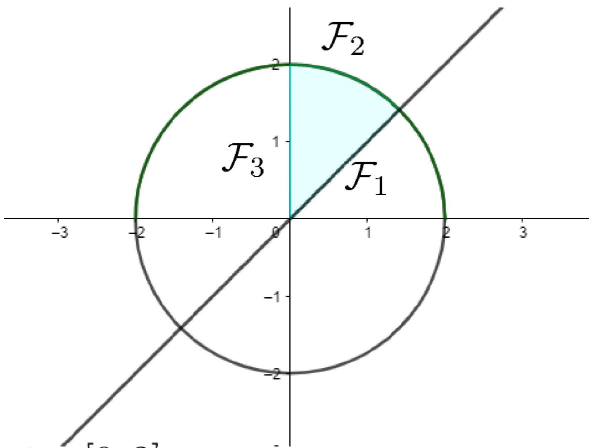
$\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ punto terminal de $\mathcal{F}_2$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = x(y^2-4)$ en la región del primer cuadrante acotada por $x=0,\ y=x,\ \ x^2+y^2=4$.

Estudiamos ahora $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$

Multiplicadores de Lagrange en cada $\mathcal{F}_i$



$\mathcal{F}_3 :\qquad x=0,\ y\in[0,2]$

$$\left.\begin{array}{l} y^2-4 = 1\cdot\lambda \\ 2xy = 0\cdot\lambda \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (0,t) \qquad \text{con } t\in[0,2]$$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = x(y^2 - 4)$ en la región del primer cuadrante acotada por $x = 0,\ y = x,\ \ x^2 + y^2 = 4.$

Concluimos que f debe alcanzar su máximo y su mínimo absoluto en los puntos

$f\ (0,t)\ = 0$ con $t \in [0,2]$ Máximo absoluto

$f\ (\sqrt{2},\sqrt{2})\ = -2\sqrt{2}$

$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{16}{3\sqrt{3}}$ Mínimo absoluto

EXTREMOS ABSOLUTOS

Ejemplo:

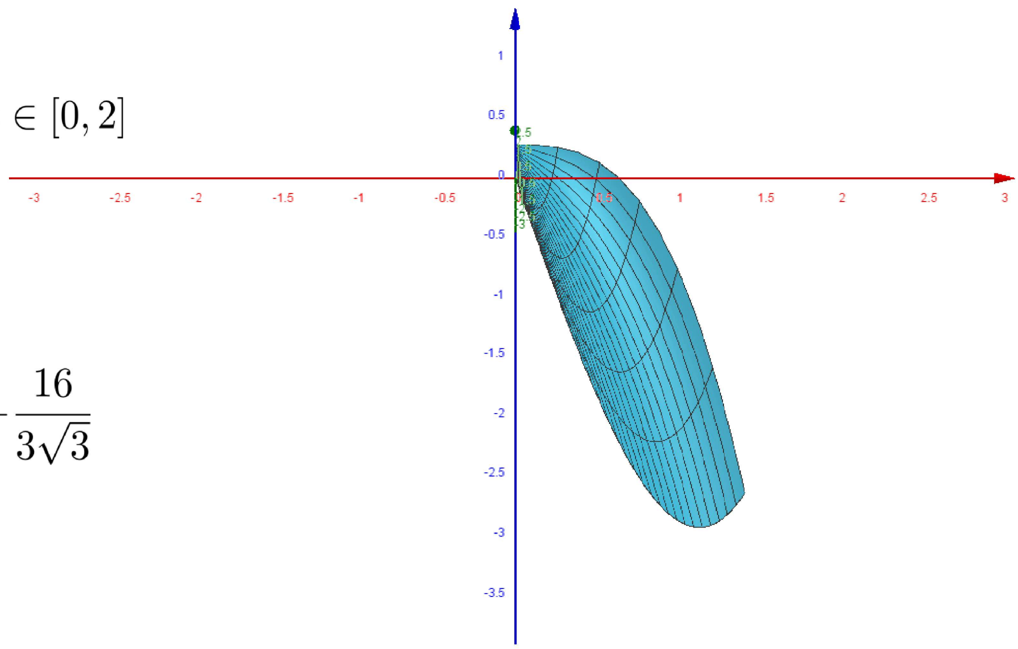
Calcular los extremos absolutos de $f(x,y) = x(y^2 - 4)$ en la región del primer cuadrante acotada por $x = 0,\ y = x,\ \ x^2 + y^2 = 4.$

Máximo absoluto

$f(0,t)\ = 0$ con $t \in [0,2]$

Mínimo absoluto

$f\left(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{16}{3\sqrt{3}}$



Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = (x-1)^2 y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leqslant y \leqslant 4 - x^2\}$.

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f que están en el interior de $\mathcal{R}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x-1)y \qquad \qquad \left.\begin{array}{l} 2(x-1)y = 0 \\ (x-1)^2 = 0 \end{array}\right\}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (x-1)^2$$

Puntos críticos de f: $(1, y_0)$ con $y_0 \in \mathbb{R}$

Puntos críticos de f en $\mathcal{R}$: $(1,3) \in \mathcal{F}$

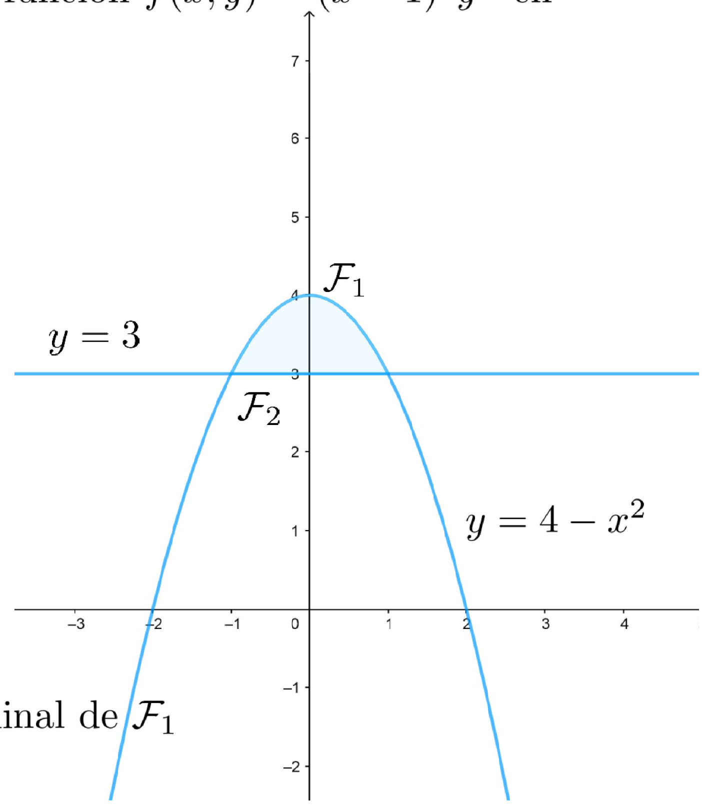
Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = (x-1)^2 y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leqslant y \leqslant 4 - x^2\}$.

Estudiamos ahora $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$

Multiplicadores de Lagrange en cada $\mathcal{F}_i$

$\mathcal{F}_1 :$ $\quad y = 4 - x^2, \; x \in [-1, 1]$



$$\left.\begin{array}{l} 2(x-1)y = 2x \cdot \lambda \\ (x-1)^2 = 1 \cdot \lambda \\ y + x^2 - 4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,3)$$

$(-1,3)$ punto terminal de $\mathcal{F}_1$

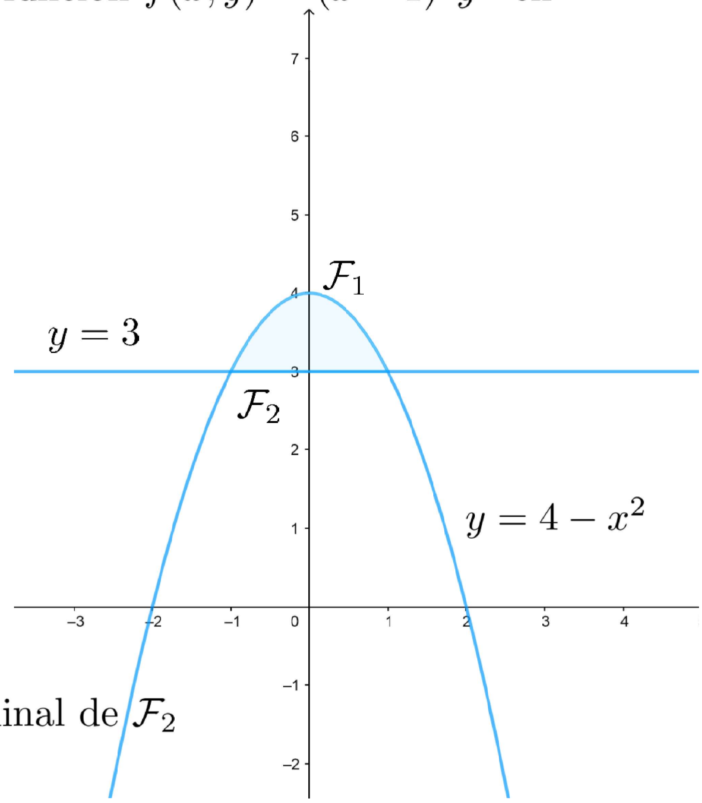
Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = (x-1)^2 y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leqslant y \leqslant 4 - x^2\}$.

Estudiamos ahora $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$

Multiplicadores de Lagrange en cada $\mathcal{F}_i$

$\mathcal{F}_2$: $y = 3,\ x \in [-1, 1]$



$$\left.\begin{array}{l} 2(x-1)y = 0 \cdot \lambda \\ (x-1)^2 = 1 \cdot \lambda \\ y - 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,3)$$

$(-1,3)$ punto terminal de $\mathcal{F}_2$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = (x-1)^2 y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3 \leqslant y \leqslant 4 - x^2\}$.

Concluimos que f debe alcanzar su máximo y su mínimo absoluto en los puntos

$f(1,3) = 0$ Mínimo absoluto

$f(-1,3) = 12$ Máximo absoluto

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = xy - 2x - 3y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 2x\}$.

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f que están en el interior de $\mathcal{R}$.

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - 2 & \qquad y - 2 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - 3 & \qquad x - 3 = 0 \end{array}\right\}$$

EXTREMOS ABSOLUTOS

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = xy - 2x - 3y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 2x\}$.

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f que están en el interior de $\mathcal{R}$.

$$\left.\begin{array}{ll} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - 2 & \qquad y - 2 = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - 3 & \qquad x - 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Punto crítico de } f\text{: } (3,2)$$

$$(3,2) \in \mathcal{R}$$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = xy - 2x - 3y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 2x\}$.

Estudiamos ahora $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$

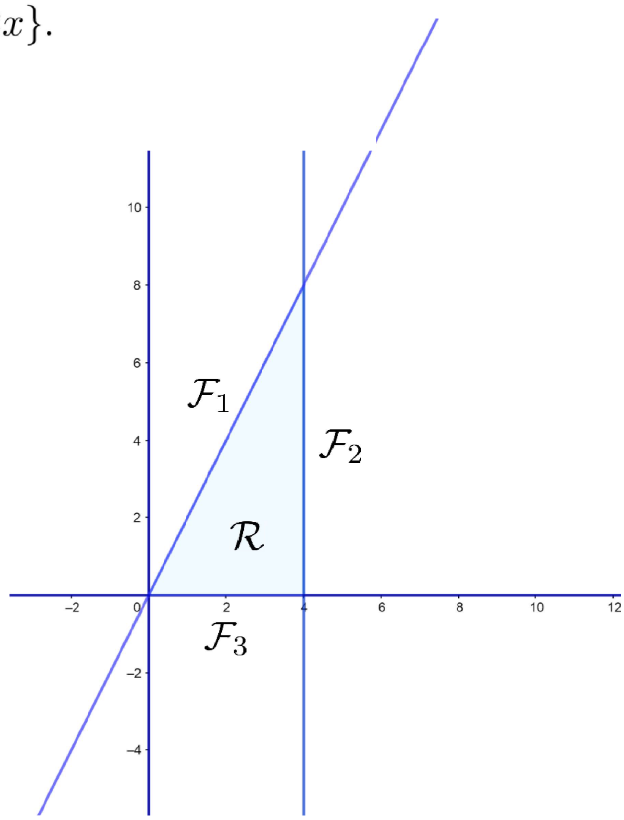
Multiplicadores de Lagrange en cada $\mathcal{F}_i$

$\mathcal{F}_1 : \qquad y = 2x,\ x \in [0,4]$

$$\left.\begin{array}{l} y-2 = -2\cdot\lambda \\ x-3 = 1\cdot\lambda \\ y-2x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (2,4)$$

$(0,0)$ punto terminal de $\mathcal{F}_1$

$(4,8)$ punto terminal de $\mathcal{F}_1$



Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = xy - 2x - 3y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 2x\}$.

Estudiamos ahora $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$

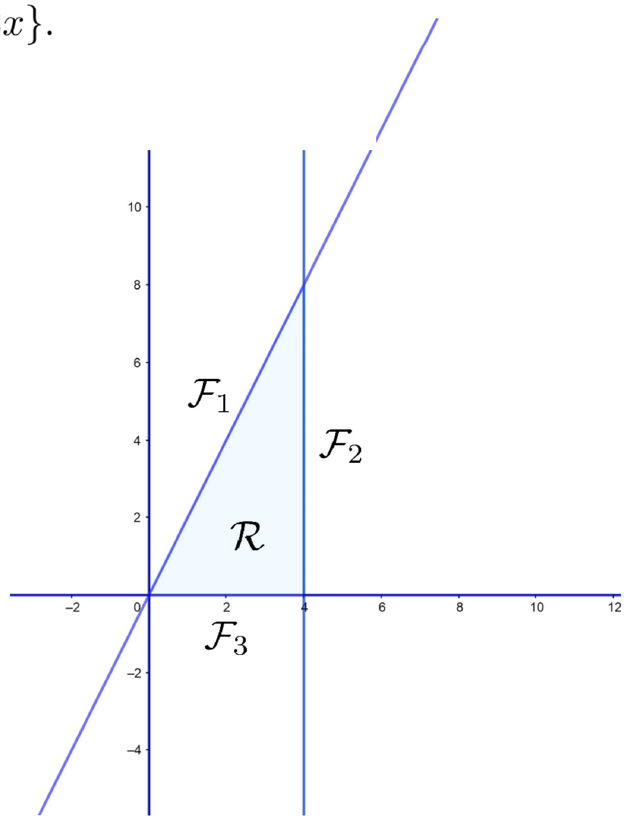
Multiplicadores de Lagrange en cada $\mathcal{F}_i$

$\mathcal{F}_2 : \qquad x = 4,\ y \in [0,8]$

$$\left.\begin{array}{l} y-2 = 1\cdot\lambda \\ x-3 = 0\cdot\lambda \\ x-4 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

$(4,0)$ punto terminal de $\mathcal{F}_2$

$(4,8)$ punto terminal de $\mathcal{F}_2$



Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = xy - 2x - 3y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 2x\}$.

Estudiamos ahora $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3$

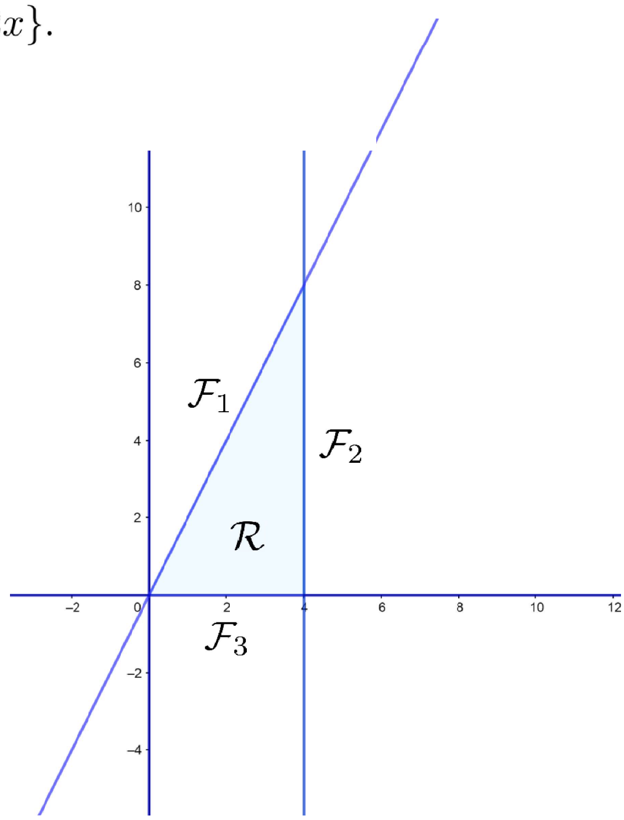
Multiplicadores de Lagrange en cada $\mathcal{F}_i$

$\mathcal{F}_3 :\qquad y = 0,\ x \in [0,4]$

$$\left.\begin{array}{l} y - 2 = 0 \cdot \lambda \\ x - 3 = 1 \cdot \lambda \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

$(0,0)$ punto terminal de $\mathcal{F}_3$

$(4,0)$ punto terminal de $\mathcal{F}_3$



Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = xy - 2x - 3y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 4,\ 0 \leqslant y \leqslant 2x\}$.

Concluimos que f debe alcanzar su máximo y su mínimo absoluto en los puntos

$f(3,2) = -6$	
$f(0,0) = 0$	Máximo absoluto
$f(4,0) = -8$	Mínimo absoluto
$f(2,4) = -8$	Mínimo absoluto
$f(4,8) = 0$	Máximo absoluto

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 3\}$.

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f que están en el interior de $\mathcal{R}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x + 2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y + 4$$

$$\left.\begin{array}{l} -2x + 2 = 0 \\ -2y + 4 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Punto crítico de } f\text{: } (1,2)$$

$(1,2) \in \mathcal{R}$

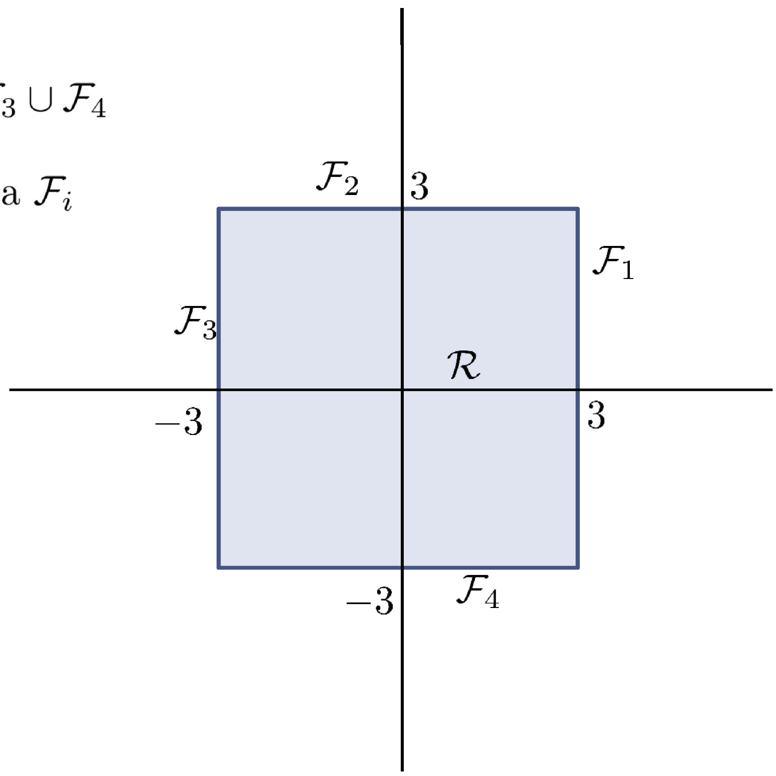
Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 3\}$.

Estudiamos ahora $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4$

Multiplicadores de Lagrange en cada $\mathcal{F}_i$

$\mathcal{F}_1 : \qquad x = 3,\ y \in [-3,3]$



$$\left.\begin{array}{l} -2x + 2 = 1 \cdot \lambda \\ -2y + 4 = 0 \cdot \lambda \\ x - 3 = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (3,2)$$

$(3,-3)$ punto terminal de $\mathcal{F}_1$

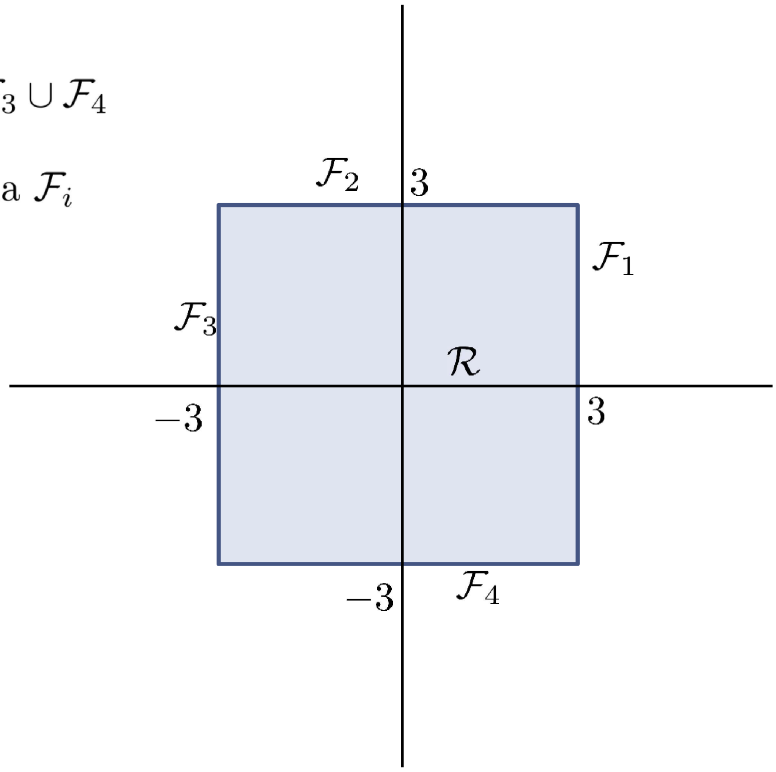
$(3,3)$ punto terminal de $\mathcal{F}_1$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 3\}$.

Estudiamos ahora $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4$

Multiplicadores de Lagrange en cada $\mathcal{F}_i$



$\mathcal{F}_2$: $\quad y = 3,\ x \in [-3,3]$

$$\left.\begin{array}{l} -2x+2 = 0\cdot\lambda \\ -2y+4 = 1\cdot\lambda \\ y-3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (1,3)$$

$(-3,3)$ punto terminal de $\mathcal{F}_2$

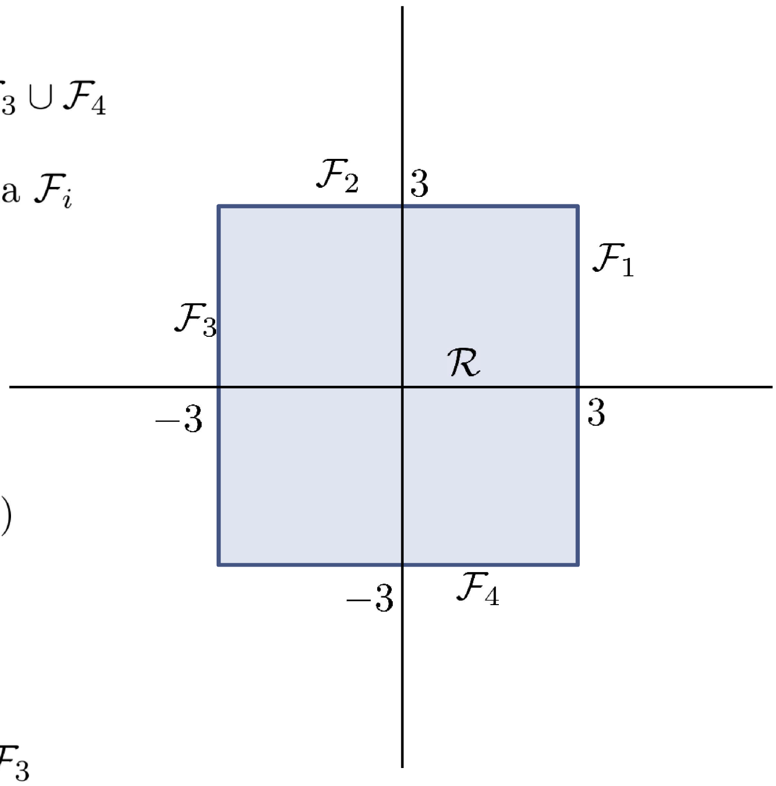
$(3,3)$ punto terminal de $\mathcal{F}_2$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 3\}$.

Estudiamos ahora $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4$

Multiplicadores de Lagrange en cada $\mathcal{F}_i$



$\mathcal{F}_3$: $\quad x = -3,\ y \in [-3,3]$

$$\left.\begin{array}{l} -2x+2 = 1\cdot\lambda \\ -2y+4 = 0\cdot\lambda \\ x+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (-3,2)$$

$(-3,3)$ punto terminal de $\mathcal{F}_3$

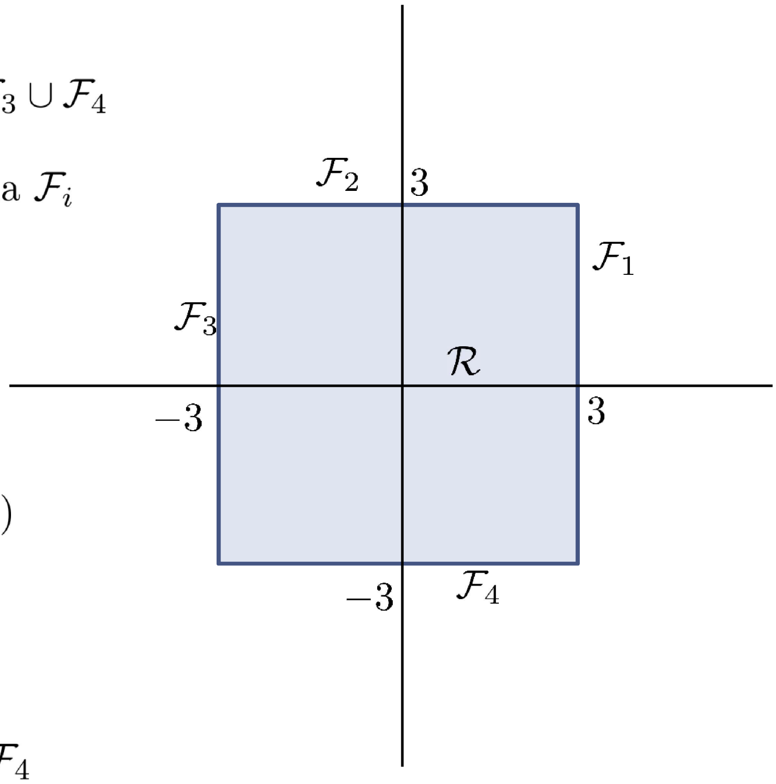
$(-3,-3)$ punto terminal de $\mathcal{F}_3$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 3\}$.

Estudiamos ahora $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3 \cup \mathcal{F}_4$

Multiplicadores de Lagrange en cada $\mathcal{F}_i$



$\mathcal{F}_4 : \qquad y = -3, \; x \in [-3,3]$

$$\left.\begin{array}{l} -2x + 2 = 0 \cdot \lambda \\ -2y + 4 = 1 \cdot \lambda \\ y + 3 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad (1,-3)$$

$(-3,3)$ punto terminal de $\mathcal{F}_4$

$(-3,-3)$ punto terminal de $\mathcal{F}_4$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 3\}$.

Concluimos que f debe alcanzar su máximo y su mínimo absoluto en los puntos

$f(1,2) = 5$ Máximo absoluto

$f(3,-3) = -24$

$f(3,2) = 1$

$f(3,3) = 0$

$f(-3,3) = -12$

$f(1,3) = 4$

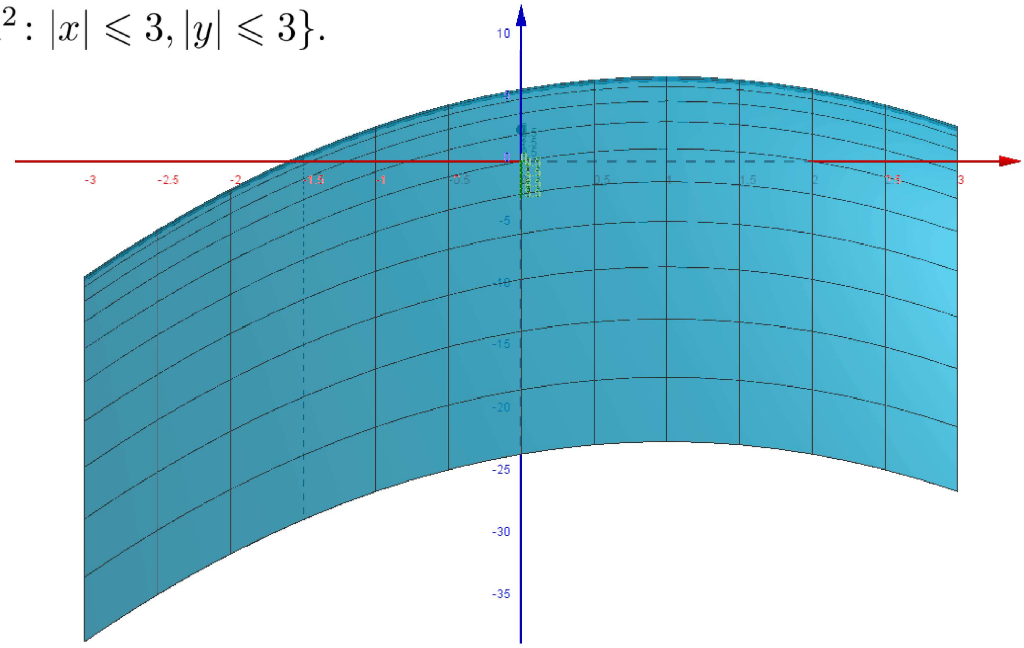
$f(-3,-3) = -36$ Mínimo absoluto

$f(-3,2) = -11$

$f(1,-3) = -20$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y$ en $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 3, |y| \leqslant 3\}$.



$f(1,2) = 5$ Máximo absoluto

$f(-3,-3) = -36$ Mínimo absoluto

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y) = xy$ en $\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{2} - 1 \leq y, \, x^2 + y^2 \leq 2\right\}$.

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f que están en el interior de $\mathcal{R}$.

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y & y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x & x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Punto crítico de } f\text{: } (0,0)$$

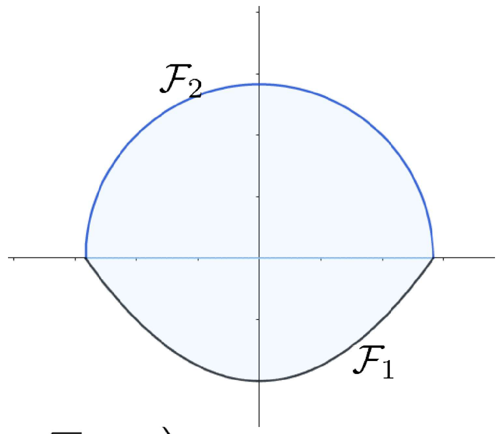
$(0,0) \in \mathcal{R}$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y)=xy$ en

$$\mathcal{R}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ \frac{x^2}{2}-1\le y,\ x^2+y^2\le 2\right\}.$$

Estudiamos ahora $\mathcal{F}=\mathcal{F}_1\cup\mathcal{F}_2$



Multiplicadores de Lagrange en cada $\mathcal{F}_i$

$$\mathcal{F}_1:\qquad y=\frac{x^2}{2}-1,\ x\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} y&=-x\cdot\lambda\\ x&=1\cdot\lambda\\ y-\frac{x^2}{2}+1&=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left(\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{2}{3}\right)\ \left(-\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{2}{3}\right)$$

$(-\sqrt{2},0)$ punto terminal de $\mathcal{F}_1$

$(\sqrt{2},0)$ punto terminal de $\mathcal{F}_1$

Ejemplo:

Calcular los extremos absolutos de la función $f(x,y)=xy$ en

$$\mathcal{R}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ \frac{x^2}{2}-1\le y,\ x^2+y^2\le 2\right\}.$$

Concluimos que f debe alcanzar su máximo y su mínimo absoluto en los puntos

$$f\,(0,0)=0$$

$$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

$$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}},-\frac{2}{3}\right)=-\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$$

$f\,(1,1)=1$ Máximo absoluto

$f\,(-1,1)=-1$ Mínimo absoluto

$$f\,(-\sqrt{2},0)=0$$

$$f\,(\sqrt{2},0)=0$$