Matemáticas II. Curso 2020-21

Primera convocatoria. Parte 1 Grado en Ingeniería Eléctrica **1-7-2021**

Nombre:

D.N.I.:

Grupo de teoría: T1 ☐

1. **[2,5 puntos]** Calcule
$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx$$

2. **[2,5 puntos]** Considere la región delimitada por el eje de abscisas y la curva $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ entre $x = 0$ y $x = 1$. Calcule el volumen del sólido que se genera al girar dicha región alrededor del eje $x = 1$.

3. **[2,5 puntos]** Calcule la siguiente integral impropia:
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

4. **[2,5 puntos]** Determine y clasifique los extremos relativos de la función $f(x, y) = e^{-y}(x^2 - 2x + y^2 + 1)$.

- ▶ **Los resultados se presentarán lo más simplificados que sea posible.**
- ▶ **Todas las respuestas deberán estar debidamente razonadas.**

RESOLUCIÓN:

1. Se trata de la integral de una función racional en $\operatorname{sen} x, \cos x$. Debemos determinar en qué caso estamos dentro de las integrales de este tipo. Sea

$$R(\operatorname{sen} x, \cos x) = \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$$

En primer lugar, obsérvese que $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) \neq -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$, $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) \neq -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ y $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$. Por tanto debemos realizar el cambio $t = \operatorname{tg} x$. Recordemos que las ecuaciones de este cambio son:

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$
$$dx = \frac{1}{1+t^2} dt$$

Por tanto, se tiene

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx = \int \frac{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}}{\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}} \frac{1}{1+t^2}\, dt = \int \frac{t}{(t+1)(t^2+1)}\, dt$$

Para calcular la integral de la función racional obtenida debemos descomponer en fracciones simples. Observad que ya tenemos factorizado el denominador. Ahora, como sabemos, debemos escribir la función de la forma

$$\frac{t}{(t+1)(t^2+1)} = \frac{A}{t+1} + \frac{Bt+C}{t^2+1} = \frac{A(t^2+1)+(Bt+C)(t+1)}{(t+1)(t^2+1)}$$

Se tiene por tanto:

$$t = A(t^2+1) + (Bt+C)(t+1)$$

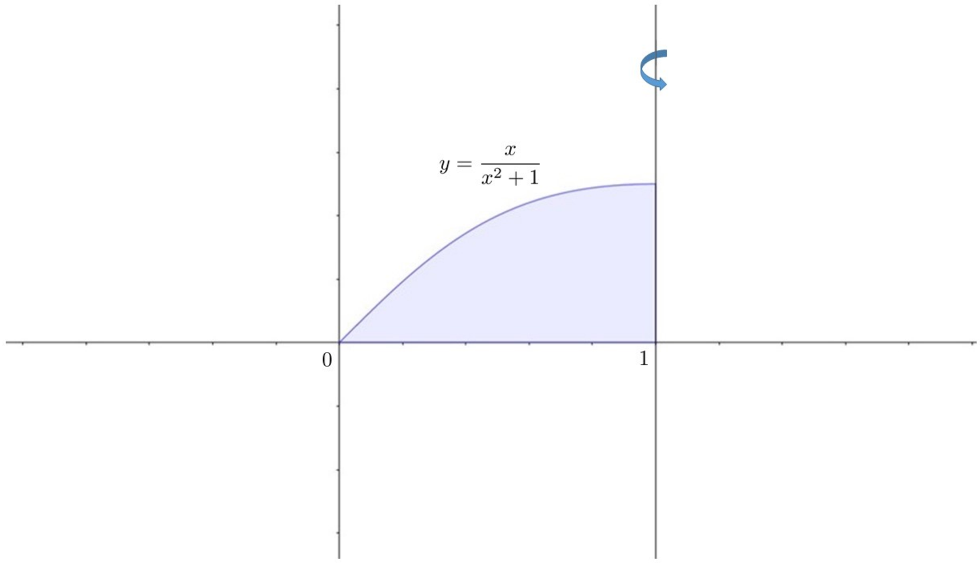
Para calcular A, B, C damos algunos valores a t

$$\begin{aligned} t = -1 &\implies -1 = 2A \\ t = 0 &\implies 0 = A + C \\ t = 1 &\implies 1 = 2A + 2B + 2C \end{aligned}$$

Del sistema de ecuaciones de arriba se obtiene fácilmente que $A = -\frac{1}{2}, B = \frac{1}{2}, C = \frac{1}{2}$. Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned} \int \frac{t}{(t+1)(t^2+1)}\, dt &= \int \left(\frac{-\frac{1}{2}}{t+1} + \frac{\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}}{t^2+1} \right) dt = -\frac{1}{2} \int \frac{1}{t+1}\, dt + \frac{1}{2} \int \frac{t}{t^2+1}\, dt + \frac{1}{2} \int \frac{1}{t^2+1}\, dt \\ &= -\frac{1}{2} \ln|t+1| + \frac{1}{4} \ln(t^2+1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln|\operatorname{tg} x + 1| + \frac{1}{4} \ln(\operatorname{tg}^2 x + 1) + \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln\left| \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x} \right| + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1}{\cos^2 x} \right) + \frac{1}{2} x + C \\ &= = -\frac{1}{2} \ln\left| \frac{\operatorname{sen} x + \cos x}{\cos x} \right| - \frac{1}{2} \ln|\cos x| + \frac{1}{2} x + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln|\operatorname{sen} x + \cos x| + \frac{1}{2} x + C \end{aligned}$$

2. Representemos gráficamente la región indicada en el problema, así como el eje de giro.



Lo más conveniente es calcular el volumen pedido mediante el método de capas (si intentáramos hacerlo por discos, tendríamos que despejar, en la expresión de la curva, x en función de y). De acuerdo al método de capas, el volumen es igual a

$$2\pi \int_0^1 (1-x)\frac{x}{x^2+1}\, dx$$

Calculamos primero la integral indefinida

$$\int \frac{-x^2+x}{x^2+1}\, dx$$

Se trata de la integral de una función racional. Obsérvese que el grado del numerador es igual que el del denominador. Por tanto, en primer lugar debemos hacer la división de polinomios, obteniendo que

$$\begin{aligned} \int \frac{-x^2+x}{x^2+1}\, dx &= \int \left(-1+\frac{x+1}{x^2+1}\right) dx = \int (-1)\, dx + \int \frac{x}{x^2+1}\, dx + \int \frac{1}{x^2+1}\, dx \\ &= -x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C \end{aligned}$$

Volviendo a la integral definida del principio, se tiene que el volumen pedido es igual a

$$2\pi \left[-x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x\right]_0^1 = 2\pi\left(-1+\frac{1}{2}\ln 2 + \frac{\pi}{4}\right) = \pi\left(-2+\ln 2+\frac{\pi}{2}\right)$$

3. Es evidente que la integral dada es una integral impropia de tipo I. De acuerdo a la definición que vimos en clase para integrales impropias de tipo I tiene que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

Resolvemos por partes la integral indefinida siguiente:

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

Para ello, tomamos $u = \ln x$, $dv = \dfrac{1}{x^2}dx$. Se obtiene:

$$\int \frac{\ln x}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} + \int \frac{1}{x^2}\,dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} + C$$

Volviendo a la integral impropia que nos piden, se tiene que

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \int_1^b \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{b\to+\infty} \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to+\infty} \left(-\frac{\ln b}{b} - \frac{1}{b} + 1\right) = 1$$

En la última igualdad hemos usado que $\displaystyle\lim_{b\to+\infty} \frac{\ln b}{b} = 0$. Comprobemos esto:

$$\lim_{b\to+\infty} \frac{\ln b}{b} \overset{*}{=} \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{b} = 0$$

($*$ se aplica la regla de l'Hôpital)

4. En primer lugar debemos calcular los puntos críticos de f. Para ello, calculamos sus derivadas parciales:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 2e^{-y}(x-1)\\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= e^{-y}(-x^2-y^2+2x+2y-1)\end{aligned}$$

Los puntos críticos serán por tanto las soluciones del sistema

$$\begin{cases} x-1 = 0\\ -x^2-y^2+2x+2y-1 = 0\end{cases}$$

Al hacer en la segunda ecuación $x = 1$ se obtiene $-y^2 + 2y = 0$, cuyas soluciones son 0 y 2. Por tanto, los puntos críticos de f son $(1,0)$ y $(1,2)$. Por la condición necesaria de extremo relativo sabemos que en ningún punto distinto de estos dos la función f puede tener un extremo relativo. Ahora, para determinar si f tiene extremo relativo en cada uno de esos puntos, usaremos el criterio del Hessiano. Para ello calculamos las derivadas parciales de orden 2.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2e^{-y}\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y) &= -2e^{-y}(x-1)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= e^{-y}(x^2+y^2-2x-4y+3)\end{aligned}$$

Veamos si f tiene en $(1,0)$ un extremo relativo. Se tiene que

$$H(f)(1,0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

de donde $|H(f)(1,0)| = 4$. Por el criterio del Hessiano, f tiene un extremo relativo en $(1,0)$. Además, puesto que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,0) > 0$, este extremo es un mínimo relativo.

Veamos ahora si f tiene en $(1,2)$ un extremo relativo. Se tiene que

$$H(f)(1,2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,2) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2)\\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(1,2) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,2)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2e^{-2} & 0\\ 0 & -2e^{-2}\end{pmatrix}$$

de donde $|H(f)(1,2)| = -4e^{-4}$. Por el criterio del Hessiano, f no tiene un extremo relativo (sino un punto de silla) en $(1,2)$.