Tema 5 – Segunda Parte

Integrales de línea

- Curva en el plano

$$\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$$

Ejemplo: $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{r}(t) = (\operatorname{sen}\, t, \cos t)$

- Curva en el espacio

$$\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

Ejemplo: $\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \mathbf{r}(t) = \left(t^2, t + 2, 3\cos t\right)$

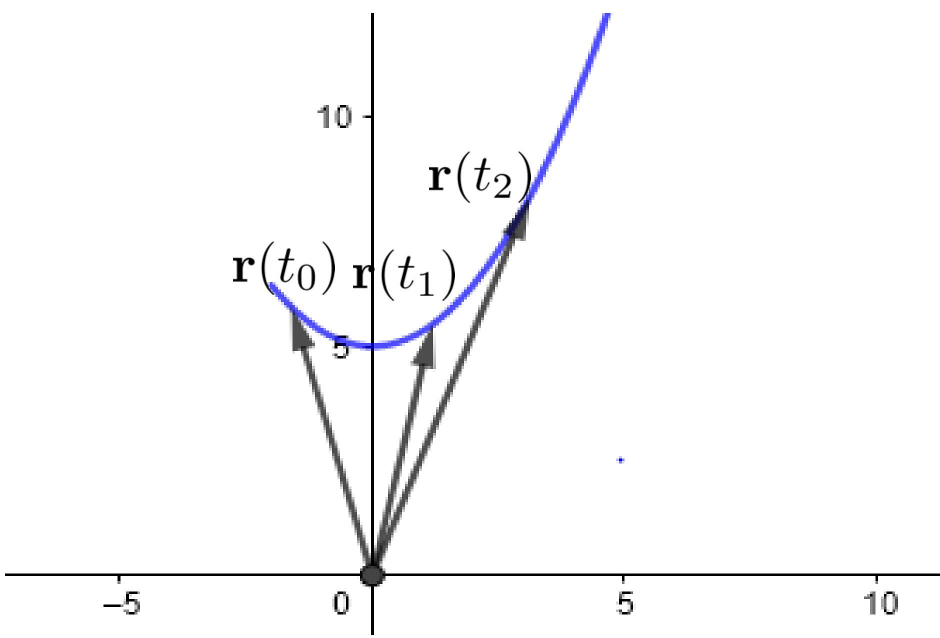
Funciones vectoriales de variable real

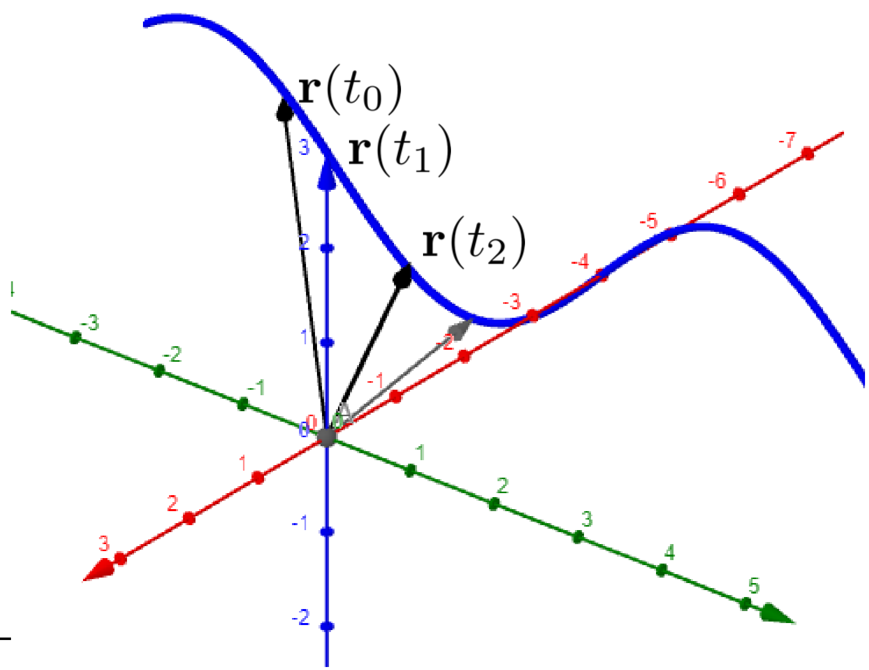
- Curva en el plano

$$\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \qquad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t)) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$$

- Curva en el espacio

$$\mathbf{r} : I \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$$

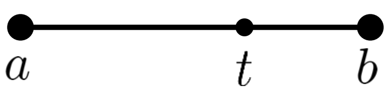


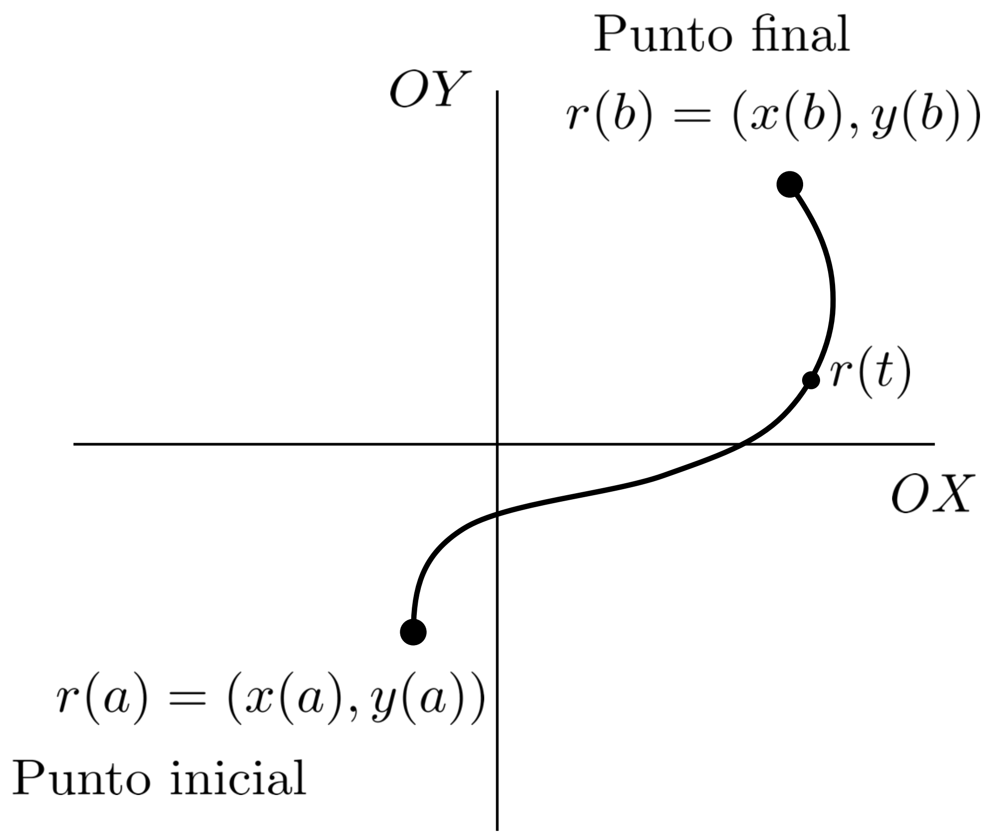


Vector de posición

Curva en paramétricas

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} \colon [a,b] &\to \mathbb{R}^2 \\
t \quad &\to \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))
\end{aligned}
$$





Una curva $\mathcal{C}$ dada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$ con $t \in I$ es **suave** en el intervalo I cuando

- $x'(t)$, $y'(t)$ son continuas en I
- $x'(t)$, $y'(t)$ no se anulan simultáneamente, excepto quizá en los puntos extremos de I

La curva $\mathcal{C}$ se denomina **suave a trozos** si es suave en cada subintervalo de alguna partición de I.

Una curva $\mathcal{C}$ dada por $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ con $t \in I$ es **suave** en el intervalo I cuando

- $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ son continuas en I
- $x'(t)$, $y'(t)$, $z'(t)$ no se anulan simultáneamente, excepto quizá en los puntos extremos de I $\quad (\mathbf{r}'(t) \neq \mathbf{0}$ para todo $t \in I)$

La curva $\mathcal{C}$ se denomina **suave a trozos** si es suave en cada subintervalo de alguna partición de I.

Integrales de línea para campos escalares

Si f es una función continua en una región del plano xy que contiene una curva suave C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}$ con $t \in [a, b]$, entonces la **integral de línea de f sobre C** viene dada por:

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\,||\mathbf{r}'(t)||\,dt$$

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\,\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt$$

Integrales de línea para campos escalares

Si f es una función continua en una región del espacio xyz que contiene una curva suave C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j} + z(t)\,\mathbf{k}$ con $t \in [a, b]$, entonces la **integral de línea de f sobre C** viene dada por:

$$\int_C f(x, y, z)\, ds \quad = \quad \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\, ||\mathbf{r}'(t)||\, dt$$

$$\int_C f(x, y, z)\, ds \quad = \quad \int_a^b f(x(t), y(t), z(t))\, \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt$$

Si C es una curva cerrada entonces integral de línea se denota $\oint_C f\, ds$

Propiedades de la integral de línea de campos escalares

1) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ entonces

$$\int_C (\alpha f + \beta g)\, ds = \alpha \int_C f ds + \beta \int_C g ds$$

2) Si $C = C_1 \cup C_2$ entonces

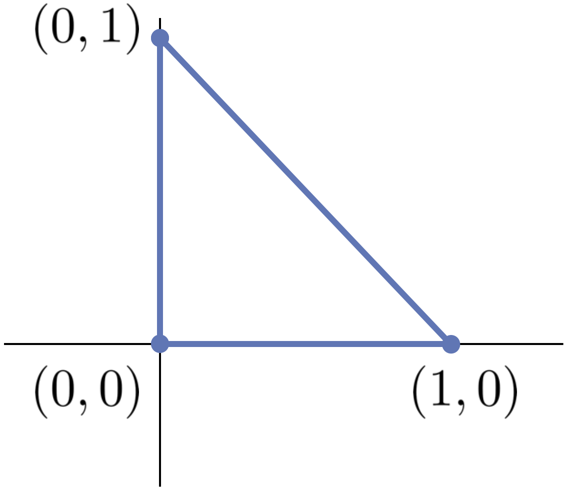
$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds$$

3) La longitud de la curva C viene dada por

$$long\,(C) = \int_C 1\, ds$$

4) El valor de la integral de línea de f sobre C no depende de la parametrización de la curva C que se elija

Ejemplo: Calcular la integral de línea $\oint_C (x+4\sqrt{y})ds$ donde C es el triángulo de vértices $(0,0), (1,0)$ y $(0,1)$



$$\mathbf{r}_1(t) = (t,0) \qquad t \in [0,1]$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (1-t,t) \qquad t \in [0,1]$$

$$\mathbf{r}_3(t) = (0,1-t) \qquad t \in [0,1]$$

$$\mathbf{r}_1{}'(t) = (1,0) \implies ||\mathbf{r}_1{}'(t)|| = 1$$

$$\mathbf{r}_2{}'(t) = (-1,1) \implies ||\mathbf{r}_2{}'(t)|| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{r}'_3(t) = (0,-1) \implies ||\mathbf{r}_3{}'(t)|| = 1$$

$$\oint_C (x+4\sqrt{y})ds = \int_{C_1} (x+4\sqrt{y})ds + \int_{C_2} (x+4\sqrt{y})ds + \int_{C_3} (x+4\sqrt{y})ds$$

$$= \int_0^1 t dt + \int_0^1 \left((1-t)+4\sqrt{t}\right)\sqrt{2}\,dt + \int_0^1 4\sqrt{1-t}\,dt \quad = \frac{19}{6} + \frac{19}{6}\sqrt{2}$$

Ejemplo: Calcular

$$\int_C (1+z)\,ds$$

siendo C la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t\,\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}t\,\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le 6\pi$$

$$\mathbf{r}'(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen} t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$||\mathbf{r}'(t)|| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t + \frac{1}{2}\cos^2 t + \frac{1}{2}\right)} = 1$$

$$\int_C (1+z)\,ds = \int_0^{6\pi} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}t\right) 1\,dt = 6\pi\left(1 + \frac{3\pi}{\sqrt{2}}\right)$$

Ejemplo: Calcular $\int_C (x - y^2 + z)ds$ siendo C el segmento que une los puntos $(0, 0, 0)$ y $(1, 1, 2)$

$$\begin{cases} x = 0 + t \\ y = 0 + t \\ z = 0 + 2t \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$

$$\mathbf{r}(t) = (t,\ t,\ 2t) \qquad t \in [0, 1]$$

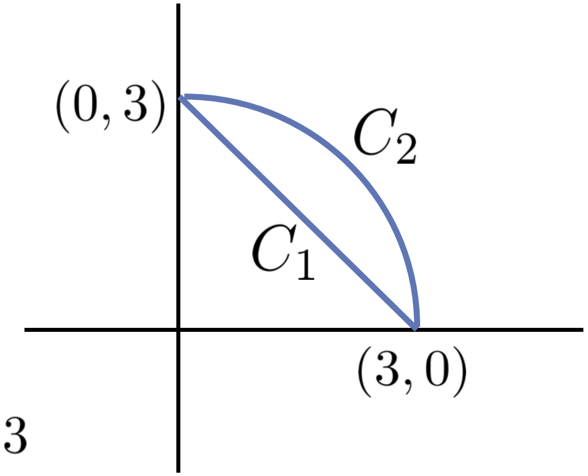
$$\mathbf{r}\,'(t) = (1, 1, 2) \implies ||\mathbf{r}\,'(t)|| = \sqrt{6}$$

$$\int_C (x - y^2 + z)ds \quad = \int_0^1 (t - t^2 + 2t)\sqrt{6}dt \quad = \frac{7}{6}\sqrt{6}$$

Ejemplo: Calcular $\oint_C (x^2+y^2)ds$ a lo largo de la curva $C = C_1 \cup C_2$, compuesta por el segmento C_1 que une los puntos $(0,3)$ y $(3,0)$, y el arco C_2 de la circunferencia $x^2+y^2=9$ que pertenece al primer cuadrante.

$$\mathbf{r}_1(t) = (t, -t+3) \qquad t \in [0,3]$$

$$\mathbf{r}_2(t) = (3\cos t, 3\operatorname{sen} t) \qquad t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$



$$\mathbf{r}_1'(t) = (1,\ -1) \Longrightarrow \|\mathbf{r}_1'(t)\| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{r}_2'(t) = (-3\operatorname{sen}\ t,\ 3\cos t) \Longrightarrow \|\mathbf{r}_2'(t)\| = 3$$

$$\begin{aligned}\oint_C (x^2+y^2)ds &= \int_{C_1}(x^2+y^2)ds + \int_{C_2}(x^2+y^2)ds \\ &= \int_0^3 (t^2+(-t+3)^2)\sqrt{2}dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} ((3\cos t)^2 + (3\operatorname{sen} t)^2)3dt \\ &= \sqrt{2}\int_0^3 (2t^2-6t+9)dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 9\cdot 3dt = 18\sqrt{2} + 27\frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Ejemplo: Determinar la longitud de arco de la curva

$$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j} \qquad \text{con} \;\; 1 \leq t \leq 4$$

$$\mathbf{r}'(t) = 1\mathbf{i} + \frac{3}{2}t^{1/2}\mathbf{j}$$

$$long(C) = \int_C 1\, ds = \int_1^4 ||\mathbf{r}'(t)||\, dt = \int_1^4 \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}dt$$

$$= \int_1^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}\, dt \;\; = \int_1^4 \left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{1/2} \; dt$$

$$= \left[\frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{3/2}\right]_1^4 \;\; = \frac{8}{27}\left(10^{3/2} - \left(\frac{13}{4}\right)^{3/2}\right)$$

Ejemplo: Determinar la longitud de arco de la hélice

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \qquad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\mathbf{r}'(t) = -2\,\mathrm{sen}\, t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$$

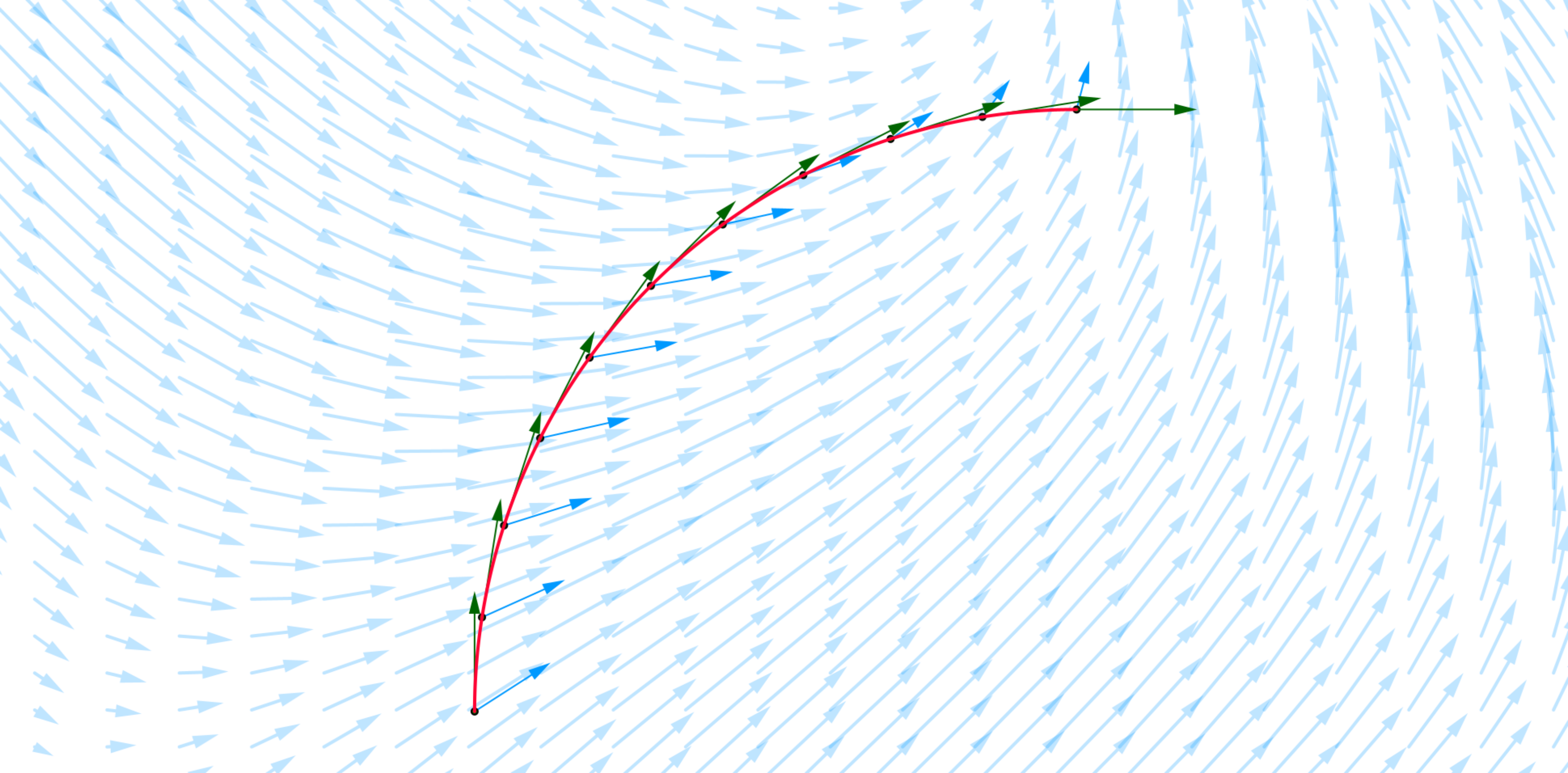
$$long(C) = \int_C 1\, ds = \int_0^{2\pi} ||\mathbf{r}'(t)||\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-2\,\mathrm{sen}\, t)^2 + (2\cos t)^2 + 1}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{4+1}\, dt = 2\pi\sqrt{5}$$

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave dada por C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}, \qquad t \in [a, b]$.

La **integral de línea de F sobre** C se define como la integral de línea sobre C de la función que asigna a cada punto de la curva el producto escalar del campo $\mathbf{F}$ en el punto por el vector tangente a C en el punto.



Integrales de línea para campos vectoriales

Sea $\mathbf{F}$ un campo vectorial continuo definido sobre una curva suave dada por C dada por $\mathbf{r}(t) = x(t)\,\mathbf{i} + y(t)\,\mathbf{j}, \qquad t \in [a, b].$

La **integral de línea de F sobre** C se define como

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T} ds = \int_a^b \mathbf{F}(x(t), y(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt$$

producto escalar

$$\mathbf{T}\, ds = \frac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||} ||\mathbf{r}'(t)|| dt$$

Vector tangente unitario

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{||\mathbf{r}'(t)||}$$

Otra notación habitual para la integral de línea de un campo vectorial:

- En el plano: $\mathbf{F}(x,y) = M(x,y)\,\mathbf{i} + N(x,y)\,\mathbf{j}$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C M\,dx + N\,dy$$

- En el espacio: $\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\,\mathbf{i} + N(x,y,z)\,\mathbf{j} + P(x,y,z)\,\mathbf{k}$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_C M\,dx + N\,dy + P\,dz$$

El valor de una integral de línea de campos vectoriales depende de la parametrización de la curva C en el siguiente sentido:

- el valor de la integral **cambia de signo cuando la parametrización de C invierte la orientación de la curva**.
- el valor de la integral no cambia usando diferentes parametrizaciones que determinen la misma orientación.

Propiedades de la integral de línea para campos vectoriales

1) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\int_C (\alpha \mathbf{F} + \beta \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{r} = \alpha \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \beta \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$$

2) Si $-C$ representa la misma curva C parametrizada con orientación opuesta a la dada inicialmente entonces

$$\int_{-C} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

3) Si $C = C_1 \cup C_2$, con las orientaciones dadas por C, entonces

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Ejemplo: Aplicar la definición para calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, siendo

$$\mathbf{F}(x,y) = xy\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} \qquad C:\ \mathbf{r}(t) = 4t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1.$$

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t)dt = \int_0^1 \mathbf{F}\,(4t,t)\cdot(4,1)\,dt \\ &= \int_0^1 \left(4t^2, t\right)\cdot(4,1)\ dt = \int_0^1 \left(16t^2 + t\right)dt = \frac{35}{6}\end{aligned}$$

Ejemplo: Aplicar la definición para calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, siendo

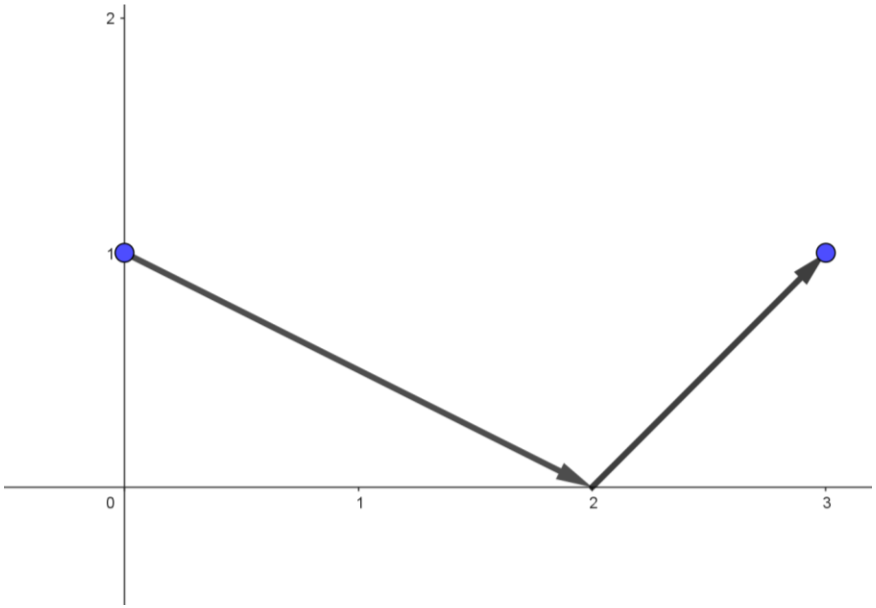
$$\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k} \qquad C:\ \mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2.$$

$$\begin{aligned}
\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}\left(\operatorname{sen} t\,,\cos t\,, t^2\right)\cdot(\cos t, -\operatorname{sen} t, 2t)\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(\operatorname{sen}^2 t\,,\cos^2 t\,, t^4\right)\cdot(\cos t, -\operatorname{sen} t, 2t)\ dt \\
&= \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 t\ \cos t - \cos^2 t \operatorname{sen} t + 2t^5)\, dt = \frac{\pi^6}{192}
\end{aligned}$$

Ejemplo: Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}(x, y) = 6xy\,\mathbf{i} + (3x^2 + y^2)\,\mathbf{j}$ C es la unión de los segmentos rectos que van de $(0, 1)$ a $(2, 0)$ y de $(2, 0)$ a $(3, 1)$

$$C_1 \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - t \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$

$$C_2 \equiv \begin{cases} x = 2 + t \\ y = t \end{cases} \qquad t \in [0, 1]$$



$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= \int_0^1 \left(12t(1-t),\, 12t^2 + (1-t)^2\right) \cdot (2, -1)\, dt$$

$$+ \int_0^1 \left(6(2+t)t,\, 3(2+t)^2 + t^2\right) \cdot (1, 1) dt = -\frac{1}{3} + \frac{82}{3} = 27$$

Ejemplo: Calcular $\int_C xdx + ydy - 5zdz$ donde C es la curva dada por

$$\mathbf{r}(t) = 2\cos t\mathbf{i} + 2\operatorname{sen} t\mathbf{j} + t\mathbf{k} \qquad \text{con } 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} - 5z\mathbf{k}$$

$$\int_C xdx + ydy - 5zdz = \int_0^{2\pi} 2\cos t(-2\operatorname{sen} t)dt + 2\operatorname{sen} t(2\cos t)dt - 5tdt$$

$$= \int_0^{2\pi} -5tdt = \left[-5\frac{t^2}{2}\right]_0^{2\pi} = -10\pi^2$$

Ejemplo: Calcular $\int_C (2x-y)dx + (x+3y)dy$ donde C es el arco parabólico de $y = 2x^2$ que va desde $(2,8)$ hasta $(0,0)$

$$\mathbf{F}(x,y) = (2x-y)\,\mathbf{i} + (x+3y)\,\mathbf{j}$$

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 2t^2 \end{cases} \qquad t \in [-2,0]$$

$$\int_C (2x-y)dx + (x+3y)dy \;=\; \int_{-2}^{0} (-2t-2t^2)(-dt) + (-t+6t^2)4tdt$$

$$= \int_{-2}^{0} (24t^3 - 2t^2 + 2t)dt \quad = \left[6t^4 - 2\frac{t^3}{3} + t^2\right]_{-2}^{0} \quad = -\frac{316}{3}$$

Ejemplo: Calcular $\int_C (2x-y)dx+(x+3y)dy$ donde C es el arco de la elipse $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ que va desde el punto (0,3) hasta (4,0)

$$\mathbf{F}(x,y)=(2x-y)\,\mathbf{i}+(x+3y)\,\mathbf{j}$$

$$\begin{cases} x=4\operatorname{sen} t \\ y=3\cos t \end{cases} \qquad t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\int_C (2x-y)dx+(x+3y)dy$$

$$=\int_0^{\pi/2}(8\text{sen }t-3\cos t)(4\cos t dt)+(4\text{sen }t+9\cos t)(-3\text{sen }tdt)$$

$$=\int_0^{\pi/2}(5\text{sen }t\cos t-12)dt=\left[\frac{5}{2}\text{sen}^2 t-12t\right]_0^{\pi/2}=\frac{5}{2}-6\pi$$

TEOREMA FUNDAMENTAL

Si C es una curva suave a trozos, dada por $\mathbf{r}(t)$, $t \in [a, b]$, que está contenida en una región abierta $\mathcal{R}$, y $\mathbf{F}$ es un campo vectorial continuo y **conservativo** en $\mathcal{R}$, entonces:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(\underbrace{\mathbf{r}(b)}_{\text{punto final de } C}) - f(\underbrace{\mathbf{r}(a)}_{\text{punto inicial de } C})$$

donde f es una función potencial de $\mathbf{F}$.

- En el plano: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \qquad a \leq t \leq b$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

- En el espacio: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \qquad a \leq t \leq b$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b), z(b)) - f(x(a), y(a), z(a))$$

TEOREMA FUNDAMENTAL

$\mathbf{F}$ conservativo en $\mathcal{R}$

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_C \nabla f \cdot d\mathbf{r} = f(x(b), y(b)) - f(x(a), y(a))$$

- El valor de $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es el mismo para todas las curvas suaves a trozos (contenidas en $\mathcal{R}$) que vayan desde un punto fijo P de la región $\mathcal{R}$ hasta otro punto fijo Q de la misma región.

- El valor de $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ se podría calcular también mediante la definición, utilizando en lugar de C cualquier otra curva más simple (por ejemplo, formada por segmentos de rectas) que vaya desde el punto inicial $\mathbf{r}(a)$ al punto final $\mathbf{r}(b)$ de la curva C.

CONDICIONES EQUIVALENTES

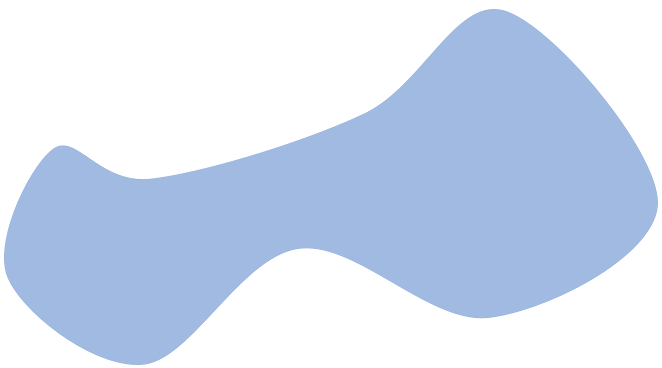
Si $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ tiene derivadas parciales continuas en una región abierta conexa $\mathcal{R}$ y C es una curva cualquiera suave a trozos contenida en $\mathcal{R}$, las siguientes condiciones son equivalentes:

1) $\mathbf{F}$ es un campo conservativo. Existe una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$

2) $\displaystyle\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ es independiente del camino

3) $\displaystyle\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$ para toda curva cerrada C definida en $\mathcal{R}$

Una región del plano (o del espacio) es *conexa* si dos puntos arbitrarios de la región pueden unirse mediante una curva suave a trozos, toda ella situada en el interior de la región.



$\mathcal{R}_1$ es conexa

$\mathcal{R}_2$ no es conexa

Ejemplo: Calcular $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}(x,y) = 6xy\,\mathbf{i} + (3x^2+y^2)\,\mathbf{j}$ y C es la unión de los segmentos rectos que van de $(0,1)$ a $(2,0)$ y de $(2,0)$ a $(3,1)$.

Comprobamos si $\mathbf{F}$ es conservativo

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x = \frac{\partial N}{\partial x}$$

Existe una función f tal que $\mathbf{F} = \nabla f$

Se tiene que verificar las condiciones:

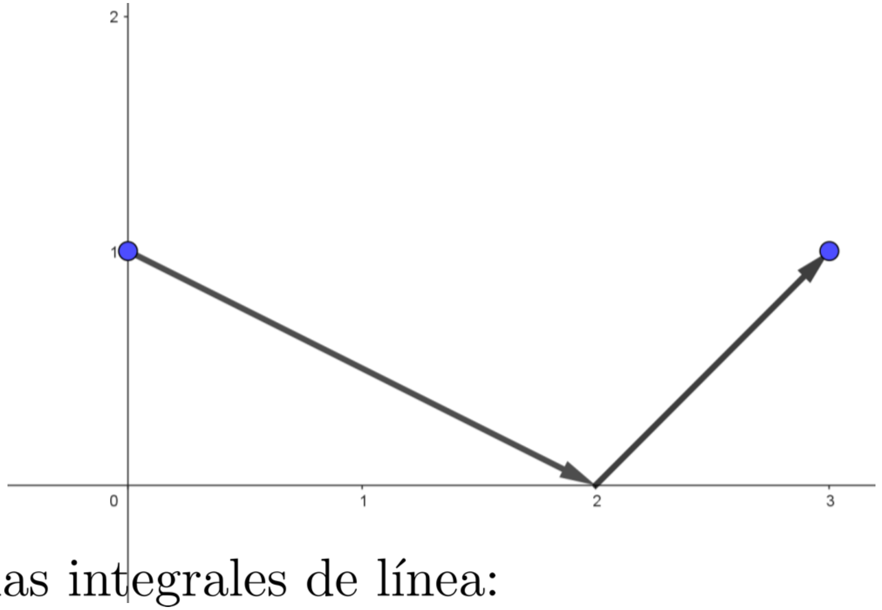
$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6xy \quad \xrightarrow{\text{Integramos con respecto a } x} \quad f(x,y) = \int 6xy\,dx = 3x^2y + g(y)$$

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2+y^2 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f(x,y) = 3x^2y + \frac{y^3}{3}}$$

$$f(x,y) = 3x^2y + g(y) \text{ verifica } (2) \iff 3x^2 + g'(y) = 3x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow g'(y) = y^2 \implies g(y) = \frac{y^3}{3} + C$$

Ejemplo: Calcular $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ donde $\mathbf{F}(x,y) = 6xy\,\mathbf{i} + (3x^2 + y^2)\,\mathbf{j}$ y C es la unión de los segmentos rectos que van de $(0,1)$ a $(2,0)$ y de $(2,0)$ a $(3,1)$.



Función potencial

$$f(x,y) = 3x^2y + \frac{y^3}{3}$$

Aplicando el teorema fundamental de las integrales de línea:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(3,1) - f(0,1) = \left(27 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3} = 27$$

Ejemplo: Siendo $\mathbf{F}(x,y) = ye^{xy}\,\mathbf{i} + xe^{xy}\,\mathbf{j}$, calcular el valor de la integral de línea $\int_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r}$ a lo largo de las curvas

(i) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t-3)\mathbf{j}\ , \quad 0 \leq t \leq 3$

(ii) Segmentos rectos que van de $(0,3)$ a $(3,3)$ y de $(3,3)$ a $(3,0)$

Vemos si $\mathbf{F}$ es conservativo:

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y)$$

Buscamos una función potencial $f(x,y)$ para $\mathbf{F}$. Se tiene que verificar:

Integramos con respecto a x

(1) $f_x(x,y) = ye^{xy} \Longrightarrow f(x,y) = e^{xy} + g(y)$

(2) $f_y(x,y) = xe^{xy} \Longrightarrow \boxed{f(x,y) = e^{xy}}$

$f(x,y) = e^{xy} + g(y)$ verifica (2) $\iff xe^{xy} + g'(y) = xe^{xy} \iff g(y) = C$

Ejemplo: Siendo $\mathbf{F}(x,y) = ye^{xy}\,\mathbf{i} + xe^{xy}\,\mathbf{j}$, calcular el valor de la integral de línea $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\,d\mathbf{r}$ a lo largo de las curvas

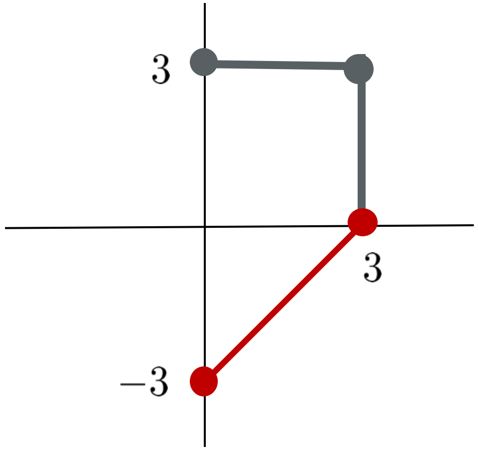
(i) $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (t-3)\mathbf{j}\ , \quad 0 \leq t \leq 3$

(ii) Segmentos rectos que van de $(0,3)$ a $(3,3)$ y de $(3,3)$ a $(3,0)$

Función potencial $\qquad f(x,y) = e^{xy}$

(i) El punto inicial es $\mathbf{r}(0) = (0,-3)$ y el punto final $\mathbf{r}(3) = (3,0)$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(3,0) - f(0,-3) = 1 - 1 = 0$$



(ii) El punto inicial es $(0,3)$ y el final es $(3,0)$

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(3,0) - f(0,3) = 1 - 1 = 0$$

Ejemplo: Sea C el trozo de circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1 que parte del punto $(0,1)$ y llega al punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ en sentido horario. Calcular

$$\int_C \frac{2x}{y}dx + \left(\frac{1-x^2}{y^2}\right)dy$$

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{2x}{y}\mathbf{i} + \left(\frac{1-x^2}{y^2}\right)\mathbf{j}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{2x}{y^2} \implies \mathbf{F} \text{ es conservativo}$$

Existe una función potencial tal que $\nabla f(x,y) = \mathbf{F}(x,y)$.

Integramos con respecto a x

$$(1)\quad f_x(x,y) = \frac{2x}{y} \quad \Rightarrow \quad f(x,y) = \frac{x^2}{y} + g(y)$$

$$(2)\quad f_y(x,y) = \frac{1-x^2}{y^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x,y) = \frac{x^2-1}{y}}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} + g(y) \text{ verifica } (2) \iff -\frac{x^2}{y^2} + g'(y) = \frac{1-x^2}{y^2}$$

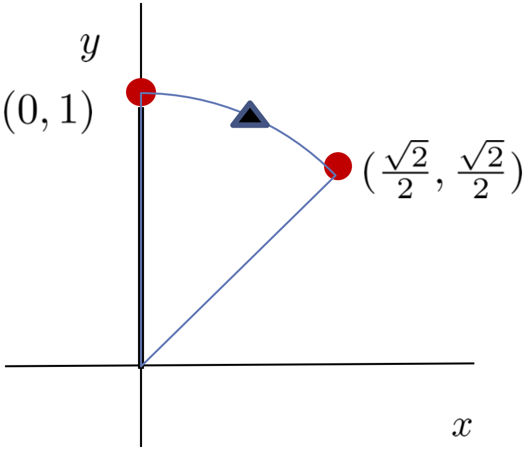
$$\iff g'(y) = \frac{1}{y^2} \iff g(y) = \frac{-1}{y} + C$$

Ejemplo: Sea C el trozo de circunferencia de centro $(0,0)$ y radio 1 que parte del punto $(0,1)$ y llega al punto $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ en sentido horario. Calcular

$$\int_C \frac{2x}{y} dx + \left(\frac{1-x^2}{y^2}\right) dy$$

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{2x}{y}\mathbf{i} + \left(\frac{1-x^2}{y^2}\right)\mathbf{j}$$

Función potencial $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2-1}{y}$



$$\int_C \frac{2x}{y} dx + \left(\frac{1-x^2}{y^2}\right) dy = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

$$= f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - f(0,1) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

Ejemplo: Calcular $\int_C zydx + xzdy + xydz$ a lo largo de la siguiente curva:

a) Segmentos rectos que van $(0,0,0)$ a $(0,0,1)$ y de éste a $(1,1,1)$.

b) Segmentos rectos que van $(0,0,0)$ a $(0,1,0)$ y de éste a $(1,1,1)$.

c) Segmentos rectos que van $(0,0,0)$ a $(1,0,0)$ y de éste a $(1,1,1)$.

$\mathbf{F}(x,y,z) = zy\ \mathbf{i} + xz\ \mathbf{j} + xy\ \mathbf{k}$ es conservativo, pues rotacional es nulo.

$$\mathbf{rot F} = \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ zy & xz & xy \end{vmatrix} = 0\ \mathbf{i} + 0\ \mathbf{j} + 0\ \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

$f(x,y,z) = xyz$ función potencial para $\mathbf{F}$

$$\int_C zydx + xzdy + xydz = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(1,1,1) - f(0,0,0) = 1 - 0 = 1$$