ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR	MATEMÁTICAS II
TEMA 1. Integrales Indefinidas	Ejercicios Resueltos

1. $\int \sqrt{(-2x+5)^3}dx$	2. $\int \frac{2}{e^{-x}+1}dx$	3. $\int \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}dt$
4. $\int \frac{2x-1}{x^2+4}dx$	5. $\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx$	6. $\int \frac{xe^{2x}}{(2x+1)^2}dx$
7. $\int x\sqrt{x-1}dx$	8. $\int x^2e^{2x}dx$	9. $\int x^3\text{sen } xdx$
10. $\int 2x\sqrt{2x-3}dx$	11. $\int \text{sen}^5 2x\cos 2xdx$	12. $\int \cos^3 3xdx$
13. $\int x\text{sen}^2 xdx$	14. $\int \text{sen } 6x\text{sen } 5xdx$	15. $\int \frac{1}{\sqrt{1-\frac{2x^2}{3}}}dx$
16. $\int x\sqrt{9-x^2}dx$	17. $\int \frac{x^4+2x^3-4x^2+x-3}{x^2-x-2}dx$	18. $\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}dx$
19. $\int \frac{2x^3-4x^2-15x+5}{x^2-2x-8}dx$	20. $\int \frac{x^2-1}{x+x^3}dx$	21. $\int \frac{2x-3}{(x-13)^2}dx$
22. $\int \frac{1}{\cos x}dx$	23. $\int \frac{dx}{3\cos x-4\text{sen}x}$	24. $\int \frac{\text{sen } x-\cos x}{\cos x+\text{sen } x}dx$
25. $\int \frac{1}{\text{sen } x}dx$	26. $\int \frac{x^2}{(x^3-2)^3}dx$	27. $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx$
28. $\int \frac{1}{1+e^x}dx$	29 $\int x\sqrt{2-x}dx$	30. $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$
31. $\int \cos 2x\text{sen } 3xdx$	32. $\int \cos^4 x\text{sen}^3 xdx$	33. $\int e^{2x}\text{sen } xdx$

SOLUCIONES:

1. Integral inmediata:
$$\int \sqrt{(-2x+5)^3}dx = -\frac{1}{2}\int (-2x+5)^{\frac{3}{2}}(-2)\,dx = -\frac{1}{5}\sqrt{(-2x+5)^5}+C.$$
También puede hacerse realizando el cambio de variable: $u=-2x+5 \Rightarrow du=-2dx \Rightarrow dx=-\dfrac{du}{2}$
$$\int \sqrt{(-2x+5)^3}dx = -\frac{1}{2}\int u^{\frac{3}{2}}du = -\frac{1}{2}\frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+C = -\frac{1}{5}\sqrt{(-2x+5)^5}+C.$$

2. $$\int \frac{2}{e^{-x}+1}dx = \int \frac{2}{\frac{1}{e^x}+1}dx = \int \frac{2e^x}{e^x+1}dx = 2\int \frac{e^x}{e^x+1}dx = 2\ln|e^x+1|+C.$$
También puede hacerse con el cambio de variable:
$u=e^x+1 \Rightarrow du=e^x dx \Rightarrow \displaystyle\int \frac{2e^x}{e^x+1}dx = 2\int \frac{1}{u}du = 2\ln|u|+C = 2\ln|e^x+1|+C.$

3. Integral inmediata:
$$\int \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}dt = -\int e^{\frac{1}{t}}\left(\frac{-1}{t^2}\right)dt = -e^{\frac{1}{t}}+C.$$
También puede hacerse realizando el cambio de variable: $u=\dfrac{1}{t} \Rightarrow du=\dfrac{-dt}{t^2}$
$$\int \frac{e^{\frac{1}{t}}}{t^2}dt = -\int e^u du = -e^u+C = -e^{\frac{1}{t}}+C.$$

4. $$\int \frac{2x-1}{x^2+4}dx = \int \frac{2x}{x^2+4}dx - \int \frac{1}{x^2+4}dx = \ln\left|x^2+4\right| - \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x}{2}\right)+C.$$

5. Integral inmediata:
$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int (\ln x)^2\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{3}\ln^3 x+C.$$
También puede hacerse realizando el cambio de variable: $u=\ln x \Rightarrow du=\dfrac{dx}{x}$
$$\int \frac{(\ln x)^2}{x}dx = \int u^2 du = \frac{u^3}{3}+C = \frac{1}{3}\ln^3 x+C.$$

6. Integral por partes.
$$\left\{\begin{array}{ll} u=xe^{2x} & u'=e^{2x}+2xe^{2x}=(2x+1)\,e^{2x} \\ v'=\dfrac{1}{(2x+1)^2} & v=\dfrac{-1}{2\,(2x+1)} \end{array}\right.$$
$$\left(\text{también podemos escribir}\ \left\{\begin{array}{ll} u=xe^{2x} & du=\left(e^{2x}+2xe^{2x}\right)dx=(2x+1)\,e^{2x}dx \\ dv=\dfrac{1}{(2x+1)^2}dx & v=\dfrac{-1}{2\,(2x+1)} \end{array}\right.\right)$$
$$\int \frac{xe^{2x}}{(2x+1)^2}dx = \frac{-xe^{2x}}{2\,(2x+1)}+\frac{1}{2}\int \frac{(2x+1)e^{2x}}{(2x+1)}dx = \frac{-xe^{2x}}{2\,(2x+1)}+\frac{e^{2x}}{4}+C = \frac{e^{2x}}{4\,(2x+1)}+C.$$

7. La haremos de tres formas:
<u>Cambio de variable</u>: $u=x-1 \Rightarrow du=dx$
$$\int x\sqrt{x-1}dx = \int (u+1)\sqrt{u}du = \int u^{\frac{3}{2}}du + \int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}+C$$
$$=\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}+\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+C.$$

Cambio de variable: $u^2 = x - 1 \Rightarrow 2udu = dx$

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \int \left(u^2+1\right) u.2udu = 2\int \left(u^4+u^2\right) du = \frac{2}{5}u^5 + \frac{2}{3}u^3 + C$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C.$$

Por partes:

$$\left\{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \sqrt{x-1} & v = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} \end{array}\right. \qquad \left(\text{o} \left\{\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = \sqrt{x-1}dx & v = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3} \end{array}\right.\right)$$

$$\int x\sqrt{x-1}dx = \frac{2x}{3}\sqrt{(x-1)^3} - \frac{2}{3}\int \sqrt{(x-1)^3}dx = \frac{2x}{3}\sqrt{(x-1)^3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5} + C = \frac{2x}{3}\sqrt{(x-1)^3} - \frac{4}{15}\sqrt{(x-1)^5} + C.$$

Puede observarse que las funciones resultantes por los tres métodos se diferencia en una constante, que en este caso vale cero. En efecto:

$$\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}+\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}-\left(\frac{2x}{3}\sqrt{(x-1)^3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}\right) = -\frac{2x-2}{3}\sqrt{(x-1)^3}+\frac{10}{15}\sqrt{(x-1)^5} = -\frac{2}{3}(x-1)\sqrt{(x-1)^3} + \frac{2}{3}(x-1)\sqrt{(x-1)^3} = 0.$$

8. Integral por partes:

$$\left\{\begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = e^{2x} & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right. \qquad \left(\text{o} \left\{\begin{array}{ll} u = x^2 & du = 2xdx \\ dv = e^{2x}dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right.\right)$$

$$\int x^2e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}dx.$$

Para hacer esta última integral volvemos a utilizar el método de integración por partes.

$$\left\{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = e^{2x} & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right. \qquad \left(\text{o} \left\{\begin{array}{ll} u = x & du = dx \\ dv = e^{2x}dx & v = \frac{1}{2}e^{2x} \end{array}\right.\right)$$

$$\int x^2e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \int xe^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{2}\int e^{2x}dx = \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} + \frac{1}{4}e^{2x} + C.$$

9. Integral por partes:

$$\left\{\begin{array}{ll} u = x^3 & u' = 3x^2 \\ v' = \operatorname{sen}x & v = -\cos x \end{array}\right. \qquad \left(\text{o} \left\{\begin{array}{ll} u = x^3 & du = 3x^2dx \\ dv = \operatorname{sen}xdx & v = -\cos x \end{array}\right.\right)$$

$$\int x^3\operatorname{sen}xdx = -x^3\cos x + 3\int x^2\cos xdx.$$

Para hacer esta última integral volvemos a utilizar el método de integración por partes.

$$\left\{\begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \cos x & v = \operatorname{sen}x \end{array}\right.$$

$$\int x^3\operatorname{sen}xdx = -x^3\cos x + 3\int x^2\cos xdx = -x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen}x - 6\int x\operatorname{sen}xdx.$$

Para realizar la última integral volvemos a utilizar el método de integración por partes.

$$\left\{\begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = \operatorname{sen}x & v = -\cos x \end{array}\right.$$

$$\int x^3\operatorname{sen}xdx = -x^3\cos x + 3\int x^2\cos xdx = -x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen}x - 6\int x\operatorname{sen}xdx =$$

$$-x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen}x + 6x\cos x - 6\int \cos xdx = -x^3\cos x + 3x^2\operatorname{sen}x + 6x\cos x - 6\operatorname{sen}x + C.$$

10. Lo hacemos primeramente por el <u>método de sustitución</u>.

Utilizamos el cambio de variable: $u^2 = 2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u^2+3}{2} \\ 2udu = 2dx \end{cases}$

$$\int 2x\sqrt{2x-3}dx = \int \left(u^2+3\right) uudu = \int \left(u^4+3u^2\right) du = \frac{u^5}{5} + u^3 + C =$$
$$= \frac{\sqrt{(2x-3)^5}}{5} + \sqrt{(2x-3)^3} + C.$$

También puede realizarse el cambio: $u = 2x - 3 \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{u+3}{2} \\ du = 2dx \end{cases}$

$$\int 2x\sqrt{2x-3}dx = \int (u+3)\sqrt{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int u^{3/2}du + \frac{3}{2}\int u^{1/2}du = \frac{1}{5}u^{5/2} + u^{3/2} + C$$
$$= \frac{\sqrt{(2x-3)^5}}{5} + \sqrt{(2x-3)^3} + C.$$

Ahora por el <u>método de integración por partes</u>: $\begin{cases} u = 2x & u' = 2 \\ v' = \sqrt{2x-3} & v = \dfrac{\sqrt{(2x-3)^3}}{3} \end{cases}$

$$\int 2x\sqrt{2x-3}dx = \frac{2x\sqrt{(2x-3)^3}}{3} - \frac{2}{3}\int \sqrt{(2x-3)^3}dx = \frac{2x\sqrt{(2x-3)^3}}{3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{(2x-3)^5} + C =$$
$$\frac{2x\sqrt{(2x-3)^3}}{3} - \frac{2}{15}\sqrt{(2x-3)^5} + C.$$

Si realizamos algunos cálculos vemos, al igual que sucedía en el apartado **g)** del primer ejercicio, que estos resultados coinciden, aunque la diferencia en general es una constante.

$$\frac{2x\sqrt{(2x-3)^3}}{3} - \frac{2}{15}\sqrt{(2x-3)^5} = \frac{(2x-3)\sqrt{(2x-3)^3}}{3} + \frac{3\sqrt{(2x-3)^3}}{3} - \frac{2\sqrt{(2x-3)^5}}{15} = \sqrt{(2x-3)^3} +$$
$$\frac{\sqrt{(2x-3)^5}}{3} - \frac{2\sqrt{(2x-3)^5}}{15} = \sqrt{(2x-3)^3} + \frac{\sqrt{(2x-3)^5}}{5}.$$

11. Integral inmediata:

$$\int \operatorname{sen}^5 2x \cos 2x dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}^5 2x\left(2\cos 2x\right) dx = \frac{1}{12}\operatorname{sen}^6 2x + C.$$

12. $\displaystyle\int \cos^3 3x dx = \int \left(\cos^2 3x\right)\cos 3x dx = \int \left(1-\operatorname{sen}^2 3x\right)\cos 3x dx = \int \cos 3x dx - \int \left(\operatorname{sen}^2 3x\right)\cos 3x dx =$
$\dfrac{1}{3}\operatorname{sen}3x - \dfrac{1}{9}\operatorname{sen}^3 3x + C.$

13. Integral por partes:

$$\begin{cases} u = x & u' = 1 \\ v' = \operatorname{sen}^2 x & v = \displaystyle\int \operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\, dx = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\operatorname{sen}2x}{2}\right) \end{cases}$$

$$\int x\operatorname{sen}^2 x dx = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x\operatorname{sen}2x}{2}\right) - \int \frac{1}{2}\left(x - \frac{\operatorname{sen}2x}{2}\right) dx = \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{x\operatorname{sen}2x}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} + \frac{\cos 2x}{4}\right) +$$
$$C = \frac{x^2}{2} - \frac{x\operatorname{sen}2x}{4} - \left(\frac{x^2}{4} + \frac{\cos 2x}{8}\right) + C = \frac{1}{8}\left(2x^2 - 2x\operatorname{sen}2x - \cos 2x\right) + C.$$

14. Para calcular esta integral hay que tener en cuenta que $\text{sen}a\text{sen}b = \dfrac{1}{2}\left(\cos(a-b) - \cos(a+b)\right).$

$$\int \text{sen}6x\text{sen}5x dx = \frac{1}{2}\int \left(\cos x - \cos(11x)\right) dx = \frac{1}{2}\left(\text{sen}x - \frac{1}{11}\text{sen}11x\right) + C.$$

15. $$\int \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{2x^2}{3}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2}}dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\int \frac{\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}}\right)^2}}dx = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\text{arcsen}\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{3}} + C.$$

16. Llamando $t = 9 - x^2$, $dt = -2xdx$, se tiene:

$$\int x\sqrt{9-x^2}dx = \int t^{1/2}\left(\frac{-1}{2}\right)dt = -\frac{1}{3}t^{3/2} + C = -\frac{1}{3}\sqrt{(9-x^2)^3} + C.$$

17. $$\int \frac{x^4+2x^3-4x^2+x-3}{x^2-x-2}dx.$$

La divisón de los polinomios nos proporciona

$$\frac{x^4+2x^3-4x^2+x-3}{x^2-x-2} = x^2+3x+1+\frac{8x-1}{x^2-x-2}$$

Así,

$$\int \frac{x^4+2x^3-4x^2+x-3}{x^2-x-2}dx = \int \left(x^2+3x+1+\frac{8x-1}{x^2-x-2}\right)dx = \frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+x+\int \frac{8x-1}{x^2-x-2}dx$$

Para realizar la integral que nos queda descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{8x-1}{x^2-x-2} = \frac{8x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-2} \Rightarrow 8x-1 = A(x-2)+B(x+1).$$

Haciendo $x = 2$, se obtiene $8\cdot 2 - 1 = B\cdot 3$, de donde $B = 5$.

Tomando $x = -1$, se deduce $8\cdot(-1) - 1 = A\cdot(-3)$ y de aquí, $A = 3$.

Por tanto,

$$\int \frac{8x-1}{x^2-x-2}dx = \int \left(\frac{3}{x+1}+\frac{5}{x-2}\right)dx = 3\ln|x+1| + 5\ln|x-2| + C$$

y

$$\int \frac{x^4+2x^3-4x^2+x-3}{x^2-x-2}dx = \frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}+x+3\ln|x+1|+5\ln|x-2|+C.$$

18. Esta integral es inmediata:

$$\int \frac{x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{(x^2+3)^3}}dx = \frac{1}{2}\int (x^2+3)^{-\frac{3}{2}}2xdx = (x^2+3)^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{(x^2+3)}} + C.$$

19. Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, dividimos y obtenemos

$$\frac{2x^3-4x^2-15x+5}{x^2-2x-8} = 2x + \frac{x+5}{x^2-2x-8}$$

Ya que las ceros x^2-2x-8 son 4 y -2 tenemos $x^2-2x-8=(x-4)(x+2)$. Por tanto, la descomposición en fracciones simples será

$$\frac{x+5}{x^2-2x-8}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x+2)}{x^2-2x-8}\Rightarrow A(x-4)+B(x+2)=x+5.$$

Para $x=4\Rightarrow 6B=9\Rightarrow B=\frac{3}{2}$.

Para $x=-2\Rightarrow -6A=3\Rightarrow B=-\frac{1}{2}$.

Por lo tanto $\int\frac{2x^3-4x^2-15x+5}{x^2-2x-8}dx=\int 2xdx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-4}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+2}dx=$

$=x^2+\frac{3}{2}\ln|x-4|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+C=x^2+\ln\sqrt{\frac{|x-4|^3}{|x+2|}}+C.$

20. Descomponemos $\frac{x^2-1}{x+x^3}$ en suma de fracciones simples.

$\frac{x^2-1}{x+x^3}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+Bx^2+Cx}{x+x^3}\Rightarrow A(x^2+1)+Bx^2+Cx=x^2-1$

$\Rightarrow (A+B)\,x^2+Cx+A=x^2-1\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}A+B=1\\ C=0\\ A=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}A=-1\\ B=-2\\ C=0\end{array}\right.$

Por lo tanto $\int\frac{x^2-1}{x+x^3}dx=-\int\frac{1}{x}dx+\int\frac{2x}{x^2+1}dx=-\ln|x|+\ln\left|x^2+1\right|+C=$

$=\ln\left|\frac{x^2+1}{x}\right|+C.$

21. Descomponemos $\frac{2x-3}{(x-13)^2}$ en suma de fracciones simples.

$\frac{2x-3}{(x-13)^2}=\frac{A}{(x-13)}+\frac{B}{(x-13)^2}=\frac{A(x-13)+B}{(x-13)^2}\Rightarrow Ax-13A+B=2x-3\Rightarrow$

$\left\{\begin{array}{r}A=2\\ -13A+B=-3\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{r}A=2\\ B=23\end{array}\right.$

Por lo tanto,

$\int\frac{2x-3}{(x-13)^2}dx=2\int\frac{1}{(x-13)}dx+23\int\frac{1}{(x-13)^2}dx=2\ln|x-13|-\frac{23}{(x-13)}+C.$

También podemos hacer esta integral sin utilizar la descomposición en fracciones simples:

$\int\frac{2x-3}{(x-13)^2}dx=\int\frac{2x-26-3+26}{(x-13)^2}dx=\int\frac{2x-26}{x^2-26+169}dx+\int\frac{23}{(x-13)^2}dx$

$=\ln\left|x^2-26+169\right|-\frac{23}{(x-13)}+C=\ln\left|(x-13)^2\right|-\frac{23}{(x-13)}+C=2\ln|x-13|-\frac{23}{(x-13)}+C.$

22. Realizamos el cambio de variable $\text{sen}x=t\Rightarrow\cos x dx=dt$. Así, la integral queda

$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\cos x}{1-sen^2x}dx=\int\frac{dt}{1-t^2}=$

(descomponiendo en fracciones simples)

$=\frac{1}{2}\left(-\ln|1-t|+\ln|1+t|\right)+C=$

$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\text{sen}x}{1-\text{sen}x}\right|+C=\ln\sqrt{\left|\frac{1+\text{sen}x}{1-\text{sen}x}\right|}+C.$

23. Realizamos el cambio de variables
$u = \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} \Rightarrow \mathrm{sen}x = \dfrac{2u}{1+u^2}; \quad \cos x = \dfrac{1-u^2}{1+u^2}; \quad dx = \dfrac{2du}{1+u^2}.$
Sustituyendo estos valores en la integral obtenemos
$\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos x - 4\mathrm{sen}x} = \int \frac{\frac{2du}{1+u^2}}{3\frac{1-u^2}{1+u^2} - 4\frac{2u}{1+u^2}} = \int \frac{-2du}{3u^2+8u-3}$. Esta última integral es racional y se resuelve descomponinedo el integrando en suma de fracciones simples:

$$\frac{-2}{3u^2+8u-3} = \frac{A}{3u-1} + \frac{B}{u+3}$$

Realizando los cálculos como en casos anteriores obtenemos $A = -\dfrac{3}{5}$ y $B = \dfrac{1}{5}$.
Por lo tanto,
$\displaystyle\int \frac{dx}{3\cos x - 4\mathrm{sen}x} = \int \frac{-2du}{3u^2+8u-3} = -\frac{3}{5}\int \frac{du}{3u+1} + \frac{1}{5}\int \frac{du}{u+3} =$
$\displaystyle= -\frac{1}{5}\ln|3u+1| + \frac{1}{5}\ln|u+3| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{u+3}{3u+1}\right| + C = \frac{1}{5}\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+3}{3\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}\right| + C.$

24. Integral inmediata $\int \dfrac{\mathrm{sen}x - \cos x}{\cos x + \mathrm{sen}x}dx = -\ln|\cos x + \mathrm{sen}x| + C.$

25. Hacemos el cambio de variable $t = \cos x \Rightarrow dt = -senxdx$. Así,
$\displaystyle\int \frac{1}{\mathrm{sen}x}dx = \int \frac{senx}{\mathrm{sen}^2 x}dx = \int \frac{senx}{1-\cos^2 x}dx = \int \frac{-1}{1-t^2}dt =$
(descomponiendo en fracciones simples)$= \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1-t}{1+t}\right| + C =$
$\displaystyle= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-t}{1+t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right| + C = \ln\sqrt{\left|\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right|} + C.$

26. $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^3-2)^3}dx = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2}{(x^3-2)^3}dx = \frac{1}{3}\int 3x^2\left(x^3-2\right)^{-3}dx = \frac{1}{3}\frac{\left(x^3-2\right)^{-3+1}}{-3+1} = \frac{-1}{6\left(x^3-2\right)^2} + C$

27. $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}}dx = \frac{1}{2}\mathrm{arcsen}\ x^2 + C.$

28. $\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x-e^x}{1+e^x}dx = \int \frac{1+e^x}{1+e^x}dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx$
$\displaystyle= \int 1dx - \int \frac{e^x}{1+e^x}dx = x - \ln|1+e^x| + C.$

29. $\displaystyle\int x\sqrt{2-x}dx = \left[2-x=t^2 \Longrightarrow x = 2-t^2, dx = -2tdt\right] = \int \left(2-t^2\right)\sqrt{t^2}\,(-2)\,tdt = -2\int \left(2-t^2\right)t^2dt =$
$\displaystyle-2\int \left(2t^2-t^4\right)dt = 2\frac{t^5}{5} - 4\frac{t^3}{3} + C = 2\frac{\sqrt{(2-x)^5}}{5} - 4\frac{\sqrt{(2-x)^3}}{3} + C.$
<u>Otra forma</u> (utilizando el método de integración por partes):

$$\int x\sqrt{2-x}dx = \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \sqrt{2-x} \Rightarrow v = \int \sqrt{2-x}dx = -\int -(2-x)^{1/2}\,dx = -\frac{2}{3}(2-x)^{3/2} \end{array}\right]$$

$$= -\frac{2}{3}x(2-x)^{3/2} - \int -\frac{2}{3}(2-x)^{3/2}\,dx = -\frac{2}{3}x(2-x)^{3/2} - \frac{2}{3}\int -(2-x)^{3/2}\,dx$$

$$= -\frac{2}{3}x(2-x)^{3/2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}(2-x)^{5/2} + C = -\frac{2}{3}x\sqrt{(2-x)^3} - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{(2-x)^5} + C$$

Con una simple manipulación algebráica podemos observar que las funciones obtenidas (sin la constante C) son idénticas, aunque podrían haberse diferenciado en una constante.

30. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}\,dx = \left[x = t^6 \Rightarrow dx = 6t^5dt\right] = \int \frac{\sqrt{t^6}}{\sqrt{t^6}+\sqrt[3]{t^6}}\,6t^5dt = \int \frac{t^3}{t^3+t^2}\,6t^5dt =$
$\displaystyle 6\int \frac{t^6}{t+1}\,dt = 6\int \frac{t^6}{t+1}\,dt = 6\int\left(t^5 - t^4 + t^3 - t^2 + t - 1 + \frac{1}{t+1}\right)dt$

$$= 6\left(\frac{t^6}{6} - \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} - t + \ln|t+1|\right) + C =$$

$$= 6\left(\frac{x}{6} - \frac{\sqrt[6]{x^5}}{5} + \frac{\sqrt[3]{x^2}}{4} - \frac{\sqrt{x}}{3} + \frac{\sqrt[3]{x}}{2} - x + \ln|\sqrt[6]{x}+1|\right) + C.$$

31. $\displaystyle\int \cos 2x \text{sen} 3x dx = \int \frac{1}{2}(\text{sen }(3x+2x) + \text{sen }(3x-2x))\,dx = \int \frac{1}{2}(\text{sen }(5x) + \text{sen }(x))\,dx$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 5x}{5} - \cos x\right) + C.$$

32. $\displaystyle\int \cos^4 x\text{sen }^3 x dx = \int \cos^4 x\text{sen } x\text{sen }^2 x dx = \int \cos^4 x\text{sen } x\left(1-\cos^2 x\right)dx = \int \cos^4 x\text{sen } x dx -$
$\displaystyle\int \cos^6 x\text{sen } x dx = -\frac{\cos^5 x}{5} + \frac{\cos^7 x}{7} + C.$

33. $\displaystyle\int e^{2x}\text{sen } x dx = \left[\begin{array}{c} u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx \\ dv = \text{sen}x dx \Rightarrow v = -\cos x \end{array}\right] = -e^{2x}\cos x + \int 2e^{2x}\cos x dx = -e^{2x}\cos x +$
$\displaystyle 2\int e^{2x}\cos x dx = \left[\begin{array}{c} u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x}dx \\ dv = \cos x dx \Rightarrow v = \text{sen } x \end{array}\right] = -e^{2x}\cos x + 2\left(e^{2x}\text{sen } x - \int 2e^{2x}\text{sen } x dx\right)$

$$= -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\text{sen}x - 4\int e^{2x}\text{sen } x dx$$

De aquí, si denominamos $I = \displaystyle\int e^{2x}\text{sen}x dx$, conseguimos $I = -e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\text{sen}x - 4I$ y despejando,

$$I = \frac{-e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\text{sen}x}{5}$$

es decir, $\int e^{2x}\text{sen}x dx = \dfrac{-e^{2x}\cos x + 2e^{2x}\text{sen}x}{5} + C.$