MATEMÁTICAS II

Grado en Ingeniería Eléctrica

Boletín 3 - Funciones de varias variables

---

1. Calcular y representar gráficamente el dominio de las siguientes funciones:

   a) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ *b)* $f(x,y) = \dfrac{2+x^2}{x-y}$ *c)* $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

   d) $f(x,y) = e^{\sqrt{1-x-y^2}}$ *e)* $f(x,y) = e^{\frac{\sqrt{y}}{xy-1}}$ *f)* $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{y}{1+x^2}\right)$

   g) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2-y^2}$ *h)* $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$ *i)* $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x-1}}{\ln(y-2)}$

   j) $f(x,y) = \operatorname{arcsen}(y-x^2)$ *k)* $f(x,y) = \ln(y-|x|)$ *l)* $f(x,y) = \sqrt{x-2y} + \sqrt{y-2x}$

2. Hallar las derivadas parciales de segundo orden y observar que las derivadas cruzadas son iguales:

   a) $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2$ *b)* $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y^2}$ *c)* $f(x,y) = e^x \operatorname{tg} y$

   d) $f(x,y) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$ *e)* $f(x,y) = x^3 + x^2y + \ln(x+y)$ *f)* $f(x,y) = e^{x+\cos y}$

   g) $f(x,y) = xe^{\frac{x}{y}}$ *h)* $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)\ln x$

3. Determinar el plano tangente y la recta normal a la superficie en el punto dado:

   a) $z = x^2 - y^2$, $P = (5,4,9)$ *b)* $z = \ln\sqrt{x^2+y^2}$, $P = (3,4,\ln 5)$

   c) $x^2 + y^2 + z = 9$, $P = (1,2,4)$ *d)* $z = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $P = (1,1,\pi/4)$

   e) $z = x^2\ln(x+y)$, $P = \left(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2},0\right)$ *f)* $z = x + e^{xy}\cos(xy)$, $P = (0,1,1)$

   g) $z = 8x^3 - 24xy + y^3$, punto donde $x = 3, y = 4$

4. Usando la regla de la cadena, hallar $\dfrac{dw}{dt}$ de las siguientes funciones:

   a) $w = x\sec y$, con $x = e^t, y = \pi - t$ *b)* $w = xy + xz + yz$, con $x = t-1, y = t^2-1, z = t$

   c) $w = x^2 + xy^3$, donde $x = \cos t$, $y = e^t$ *d)* $w = xy\cos z$, donde $x = 2t^3+2$, $y = t-1$, $z = t^2$

5. Calcular las derivadas parciales de $z = z(x,y)$ usando derivación implícita:

   a) $\operatorname{tg}(x+y) + \operatorname{tg}(y+z) = 1$ *b)* $e^{xz} + xy = 0$ *c)* $x\ln y + y^2z + z^2 = 8$

   d) $xyz + xzw - yzw + w^2 = 5$ *e)* $w - \sqrt{x-y} - \sqrt{y-w} + z = 0$

6. Utilizar la regla de la cadena para calcular, en cada caso, las derivadas que se indican:

   a) $w = x^2 + y^2, \qquad x = s + t, y = s - t \qquad \dfrac{\partial w}{\partial t}, \dfrac{\partial w}{\partial s}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial s \partial t}$

   b) $w = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right), \qquad x = r\cos\theta, y = r\operatorname{sen}\theta \qquad \dfrac{\partial w}{\partial r}, \dfrac{\partial w}{\partial \theta}, \dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}$

   c) $f(x) = x^2 - 3x + 1, \qquad x = u^2 v - v^2 w \qquad \dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial v}, \dfrac{\partial f}{\partial w}$

   d) $f(x,y) = x^2 - xy - y^2, \qquad x = s^2 + t,\ y = s - t^2 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial s}, \dfrac{\partial f}{\partial t}$

   e) $f(x,y) = ye^x + \ln(y), \qquad x = u^2 + v + w,\ y = uvw^2 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial u}, \dfrac{\partial f}{\partial v}, \dfrac{\partial f}{\partial w}$

   f) $f = f(x,y), \qquad x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\operatorname{sen}\theta \qquad \dfrac{\partial f}{\partial \rho}, \dfrac{\partial f}{\partial \theta}$

7. Hallar la derivada direccional de la función dada que en cada caso se indica:

   a) $f(x,y) = xy$, en $P = (2,3)$ en la dirección de $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

   b) $f(x,y) = e^x \operatorname{sen} y$, en $P = (1, \pi/2)$ en la dirección de $\mathbf{v} = -\mathbf{i}$

   c) $f(x,y,z) = xy + yz + xz$, en $P = (1,1,1)$ en la dirección de $\mathbf{v} = \left(\frac{\sqrt{6}}{3}, \frac{\sqrt{6}}{6}, -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$

   d) $f(x,y) = x^2 + y^2$, en $P = (x,y)$ en la dirección de $\mathbf{v} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\mathbf{j}$

   e) $f(x,y) = \operatorname{sen}(2x - y)$, en $P = (x,y)$ en la dirección de $\mathbf{v} = \cos\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)\mathbf{i} + \operatorname{sen}\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)\mathbf{j}$

8. Calcular el gradiente de la función y el valor máximo de la derivada direccional en el punto que se especifica:

   a) $h(x,y) = x \operatorname{tg} y$ en $P = (2, \pi/4)$ *b)* $g(x,y) = \ln \sqrt[3]{x^2 + y^2}$ en $P = (1,2)$

   c) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en $P = (1,4,2)$

9. La temperatura en el punto (x,y) de una lámina metálica es $T = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$. Hallar la dirección de máximo crecimiento de la temperatura en el punto $(3,4)$.

10. La temperatura en cada punto de una placa metálica viene dada por la función $T(x,y) = 400e^{-\frac{x^2+y}{2}}$ para todo $x, y \geqslant 0$. Una hormiga se encuentra sobre el punto $(1,3)$.

    a) ¿Hacia qué dirección deberá comenzar a moverse si desea que la temperatura aumente lo más rápidamente posible?

    b) ¿Hacia qué dirección deberá comenzar a moverse si desea que la temperatura disminuya lo más rápidamente posible?

    c) ¿Hacia qué direcciones puede comenzar a moverse si desea que la temperatura se mantenga constante?

11. Determinar los puntos críticos y obtener los extremos relativos de las siguientes funciones:

    a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$ *b)* $f(x,y) = 8x^3 - 24xy + y^3$ *c)* $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2 + x + y}{xy}$

    d) $f(x,y) = y^3 + x^2y + x^2 + 2y^2 - 4y$ *e)* $f(x,y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2 + 1}$ *f)* $f(x,y) = 2xy - \dfrac{1}{2}(x^4 + y^4)$

    g) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy$ *h)* $f(x,y) = x^2 - 3xy - y^2$ *i)* $f(x,y) = e^{-x}\operatorname{sen} y$

    j) $f(x,y) = x^2 + y^4$

12. Determinar los valores de a para los que el punto $P = (0, 3)$ es un máximo relativo de la función $f(x, y) = x^3 + y^3 + ax^2 - 18y^2 + 81y + 5$.

13. Calcular la mínima distancia desde el punto $P = (5, 5, 0)$ al paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$.

14. Un tanque metálico rectangular sin tapa debe contener 256 metros cúbicos de líquido. ¿Cuáles son las dimensiones del tanque que requiere menos material para su construcción?

15. Una caja de $\mathbb{R}^3$ tiene la forma del cubo $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq 1$. Se coloca dentro de la caja la placa que es la porción del plano $x + y + z = 1$ que cabe dentro de ella. Se calienta la placa de tal forma que la temperatura en el punto (x, y, z) es $T(x, y, z) = 4 - 2x^2 - y^2 - z^2$. Hallar el punto más caliente y más frío de la placa.

16. Utilizar los *multiplicadores de Lagrange* para hallar el extremo indicado.

    a) Mínimo de $f(x, y) = x^2 - y^2$ en la recta $x - 2y + 6 = 0$
    b) Máximo de $f(x, y) = 2x + 2xy + y$ en la recta $2x + y = 100$
    c) Máximo de $f(x, y) = \sqrt{6 - x^2 - y^2}$ en la recta $x + y - 2 = 0$
    d) Mínimo de $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ en el plano $x + y + z - 6 = 0$
    e) Mínimo de $f(x, y) = x^2 + y^2$ en la curva $x^2 - y^2 = 1$

17. Determinar el punto de la parábola $y = x^2 - 6x + 9$ más cercano al origen.

18. Calcular el punto de la elipse $2x^2 + y^2 + xy + 8x + 3y + 7 = 0$ más cercano al eje OY.

19. Calcular los extremos absolutos de la función $f(x, y)$ en la región $\mathcal{R}$:

    a) $f(x, y) = 3x^2 + 2y^2 - 4y + 3$ — $\mathcal{R}$ = región acotada por las gráficas $y = x^2$, $y = 5$

    b) $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$ — $\mathcal{R} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 8\}$

    c) $f(x, y) = (y^2 - x^2)e^{-x^2}$ — $\mathcal{R} = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\}$

    d) $f(x, y) = -x^2 - y^2 + 2x + 4y$ — $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1\}$

    e) $f(x, y) = 2 + (x - 1)^2 + y^2$ — $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + 3y^2 \leq 9\}$

    f) $f(x, y) = x^3 + x^2y + y^2 + 2y$ — $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq 1 - x\}$

    g) $f(x, y) = xy(1 - x - y)$ — $\mathcal{R}$ = región cerrada triangular de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$

    h) $f(x, y) = x(y^2 - 4)$ — $\mathcal{R}$ = región 1^{er} cuadrante acotada por $x = 0$, $y = x$, $x^2 + y^2 = 4$

    i) $f(x, y) = \dfrac{2x}{x - y}$ — $\mathcal{R}$ = región triangular acotada por $x - y = 1$, $x = 2$, $y = 0$

    j) $f(x, y) = -x^2 + \dfrac{1}{3}(y - 2)^2$ — $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ -x \leq y \leq 2 - x^2\}$

    k) $f(x, y) = x^3 + x^2 + y^2$ — $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant \frac{1}{4}\}$

SOLUCIONES

1. *a)* $D(f)=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$
   b) $D(f)=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=x\}$
   c) $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\leqslant 1\}$
   d) $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y^2\leqslant 1-x\}$
   e) $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y\geqslant 0, xy\neq 1\}$
   f) $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y>0\}$
   g) $D(f)=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=x\}\cup\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y=-x\}$
   h) $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2+y^2\geqslant 4\}$
   i) $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geqslant 1, y\in(2,3)\cup(3,+\infty)\}$
   j) $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x^2-1\leqslant y\leqslant x^2+1\}$
   k) $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: |x|<y\}$
   l) $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\leqslant 0, 2x\leqslant y\leqslant \frac{x}{2}\}$

2. *a)* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=2,\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6,\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-2$
   b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\dfrac{2y^3}{(x+y^2)^3},\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{2xy(y^2-3x)}{(x+y^2)^3},\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{3xy^2-y^4}{(x+y^2)^3}$
   c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^x\mathrm{tg}\ y,\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=2e^x\sec^2 y\ \mathrm{tg}\ y,\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=e^x\sec^2 y$
   d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{-2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2},\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$
   e) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x+2y-\dfrac{1}{(x+y)^2},\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\dfrac{1}{(x+y)^2},\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=2x-\dfrac{1}{(x+y)^2}$
   f) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=e^{x+\cos y},\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{x+\cos y}(\mathrm{sen}^2 y-\cos y),\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-e^{x+\cos y}\mathrm{sen}\, y$
   g) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{(x+2y)e^{\frac{x}{y}}}{y^2},\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{x^2(x+2y)e^{\frac{x}{y}}}{y^4},\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=-\dfrac{x(x+2y)e^{\frac{x}{y}}}{y^3}$
   h) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{2y\cos(xy)}{x}-y^2\mathrm{sen}(xy)\ln x-\dfrac{\mathrm{sen}(xy)}{x^2},\qquad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-x^2\mathrm{sen}(xy)\ln x,$
   $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=(1+\ln x)\cos(xy)-xy\,\mathrm{sen}(xy)\ln x$

3.

a) $10x-8y-z=9,\qquad \dfrac{x-5}{10}=\dfrac{y-4}{-8}=\dfrac{z-9}{-1}$

b) $3x+4y-25z=25\,(1-\ln 5)\,,\qquad \dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-\ln 5}{-25}$

c) $2x+4y+z=14,\qquad \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-4}{1}$

d) $x-y+2z=\pi/2,\qquad \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-\frac{\pi}{4}}{2}$

e) $z=\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{4}-\dfrac{1}{4}\qquad \dfrac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{y-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}=\dfrac{z}{-1}$

f) $z=2x+1\qquad \dfrac{x}{2}=\dfrac{z-1}{-1},\quad y=1$

g) $120x-24y-z=272\qquad \dfrac{x-3}{120}=\dfrac{y-4}{-24}=\dfrac{z+8)}{-1}$

4.
a) $e^t \sec(\pi - t)\left[1 - \operatorname{tg}\ (\pi - t)\right]$ *b)* $3\left(2t^2 - 1\right)$

c) $(3e^{3t} - 2\operatorname{sen} t)\cos t - e^{3t}\operatorname{sen} t$ *d)* $(8t^3 - 6t^2 + 2)\cos t^2 - 4t(t^4 - t^3 + t - 1)\operatorname{sen} t^2$

5. *a)* $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-\sec^2(x+y)}{\sec^2(y+z)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -1 - \dfrac{\sec^2(x+y)}{\sec^2(y+z)}$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-\left(ze^{xz} + y\right)}{xe^{xz}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-1}{e^{xz}}$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{\ln y}{y^2 + 2z}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x + 2y^2 z}{y\left(y^2 + 2z\right)}$

d) $\dfrac{\partial w}{\partial x} = -\dfrac{yz + zw}{xz - yz + 2w}$; $\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{-xz + zw}{xz - yz + 2w}$; $\dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{xy + xw - yw}{xz - yz + 2w}$

e) $\dfrac{\partial w}{\partial z} = -\dfrac{xy + xw - yw}{xz - yz + 2w}$; $\dfrac{\partial w}{\partial y} = \dfrac{-\sqrt{y-w} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x-y}\left(2\sqrt{y-w} + 1\right)}$; $\dfrac{\partial w}{\partial z} = -2\dfrac{\sqrt{y-w}}{2\sqrt{y-w} + 1}$

6. *a)* $\dfrac{\partial w}{\partial t}(s,t) = 4t$, $\dfrac{\partial w}{\partial s}(s,t) = 4s$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial s \partial t} = 0$

b) $\dfrac{\partial w}{\partial r}(r,\theta) = 0$, $\dfrac{\partial w}{\partial \theta} = 1$, $\dfrac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta}(r,\theta) = 0$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v,w) = 2uv(2u^2 v - 2v^2 w - 3)$

$\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v,w) = 2u^4 v - 3u^2(2v^2 w + 1) + 2vw(2v^2 w + 3)$

$\dfrac{\partial f}{\partial w}(u,v,w) = v^2(-2u^2 v + 2v^2 w + 3)$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial s}(s,t) = 4s^3 - 3s^2 + 2s(t^2 + 2t - 1) + t(2t - 1)$

$\dfrac{\partial f}{\partial t}(s,t) = 2s^2(t+1) + s(4t - 1) + t(-4t^2 + 3t + 2)$

e) $\dfrac{\partial f}{\partial u}(u,v,w) = (2u^2 + 1)v\, w^2 e^{u^2+v+w} + \dfrac{1}{u}$

$\dfrac{\partial f}{\partial v}(u,v,w) = u(v+1)w^2 e^{u^2+v+w} + \dfrac{1}{v}$

f) $\dfrac{\partial f}{\partial \rho}(\rho,\theta) = \cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) + \operatorname{sen}(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$

$\dfrac{\partial f}{\partial \theta}(\rho,\theta) = -\rho\operatorname{sen}(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) + \rho\cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta)$

7. *a)* $5\sqrt{2}/2$, *b)* $-e$, *c)* $2\sqrt{6}/3$, *d)* $\sqrt{2}\,(x+y)$, *e)* $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\cos(2x - y)$.

8. *a)* $\operatorname{tg}\ y\mathbf{i} + x\sec^2 y\mathbf{j}$, $\sqrt{17}$, *b)* $\dfrac{2}{3(x^2+y^2)}\left(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}\right)$, $\dfrac{2\sqrt{5}}{15}$, *c)* $\dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, 1.

9. $\dfrac{1}{625}\left(7\mathbf{i} - 24\mathbf{j}\right)$

10. *a*) $\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,-1)$

    b) $\frac{1}{\sqrt{5}}(2,1)$

    c) $\frac{1}{\sqrt{5}}(1,-2)$, $\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2)$

11. *a*) Puntos críticos: $(1,2)$, $(-1,2)$, $(1,-2)$, $(-1,-2)$
    Máximo relativo en $(1,2)$. Mínimo relativo en $(-1,-2)$. Puntos de silla en $(-1,2)$, $(1,-2)$

    b) Puntos críticos: $(0,0)$ y $(2,4)$
    Mínimo relativo en $(2,4)$. Punto de silla en $(0,0)$

    c) Puntos críticos: $(1,1)$
    Mínimo relativo en $(1,1)$

    d) Puntos críticos: $(0,-2)$, $(0,\frac{2}{3})$, $(\sqrt{5},-1)$, $(-\sqrt{5},-1)$
    Máximo relativo en $(0,-2)$. Mínimo relativo en $\left(0,\frac{2}{3}\right)$. Puntos de silla en $(\sqrt{5},-1)$, $(-\sqrt{5},-1)$

    e) Puntos críticos: $(1,0)$, $(-1,0)$
    Máximo relativo en $(1,0)$. Mínimo relativo en $(-1,0)$

    f) Puntos críticos: $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,-1)$
    Máximo relativo en $(1,1)$. Máximo relativo en $(-1,-1)$. Punto de silla en $(0,0)$

    g) Puntos críticos: $(0,0)$, $(3,3)$
    Mínimo relativo en $(3,3)$. Punto de silla en $(0,0)$

    h) Puntos críticos: $(0,0)$
    Punto de silla en $(0,0)$. f no tiene extremos relativos

    i) Puntos críticos: No hay puntos críticos
    f no tiene extremos relativos

    j) Puntos críticos: $(0,0)$
    $f(0,0) \leq f(x,y)$ para todo $x \in \mathbb{R}^2$. Mínimo relativo (absoluto) en $(0,0)$

12. $a < 0$

13. $d = 6$

14. $x = 8$, $y = 8$, $z = \frac{256}{8 \cdot 8} = 4$

15. El punto más caliente de la placa es $((1/5),(2/5),(2/5))$,donde la temperatura es de 3,6 unidades, y el punto $(1,0,0)$ es el punto de menor temperatura (en dicho punto la temperatura es de 2 unidades)

16. *a*) $f(2,4) = -12$

    b) $f(25,50) = 2600$

    c) $f(1,1) = 2$

    d) $f(2,2,2) = 12$

    e) $f(1,0) = f(-1,0) = 1$

17. $(2,1)$

18. $(-1,-1)$

19. *a*) Máximo absoluto: $f(-\sqrt{5},5) = f(\sqrt{5},5) = 48$
    Mínimo absoluto: $f(0,1) = 1$

    b) Máximo absoluto: $f(2,2) = f(-2,-2) = 16$
    Mínimo absoluto: $f(x,y) = 0$ para los puntos del conjunto $\{(x,y) : y = -x,\ x \in [-2,2]\}$

    c) Máximo absoluto: $f(0,-\sqrt{2}) = f(0,\sqrt{2}) = 2$
    Mínimo absoluto: $f(1,0) = f(-1,0) = -e^{-1}$

d) Máximo absoluto: $f(1,1) = 4$
Mínimo absoluto: $f(-1,1) = 0$

e) Máximo absoluto: $f(-3,0) = 18$
Mínimo absoluto: $f(1,0) = 2$

f) Máximo absoluto: $f(0,1) = 3$
Mínimo absoluto: $f(0,0) = 0$

g) Máximo absoluto: $f(\frac{1}{3},\frac{1}{3}) = \frac{1}{27}$
Mínimo absoluto: $f(x,y) = 0$ para los puntos de la frontera de R

h) Máximo absoluto: $f(0,t) = 0 \quad \text{con } t \in [0,2]$
Mínimo absoluto: $f(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}}) = -\frac{16}{3\sqrt{3}}$

i) Máximo absoluto: $f(2,1) = 4$
Mínimo absoluto: $f(x,y) = 2$ para los puntos $(x,0)$ con $x \in [1,2]$

j) Máximo absoluto: $f(1,-1) = 2$
Mínimo absoluto: $f(-1,1) = -\frac{2}{3}$

k) Máximo absoluto: $f\left(\frac{1}{2},0\right) = \frac{3}{8}$
Mínimo absoluto: $f\left(-\frac{1}{2},0\right) = \frac{1}{8}$