Tema 3 – Segunda Parte

Funciones de varias variables

Derivadas parciales

Plano Tangente

Derivadas parciales

Cuando en una función de varias variables se consideran todas las variables como si fueran constantes salvo una, y se deriva respecto de ésta que se deja variable, se obtienen lo que se denomina derivada parcial de la función con respecto a dicha variable

Así, si f es una función de dos variables x, y, podemos hablar de sus derivadas parciales f_x, f_y

$$f_x(x,y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} \qquad = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$f_y(x,y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y} \qquad = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Ejemplo: calcular las derivadas parciales de $f(x,y) = 5 - \dfrac{x^2}{5} - \dfrac{y^2}{2}$ en $(3,1)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{2}{5}x \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(3,1) = -\frac{6}{5}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -y \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(3,1) = -1$$

Ejemplo: calcular las derivadas parciales de las siguientes funciones:

a) $f(x,y) = 3x^2 + 5xy - y$

b) $f(x,y) = xe^{xy} + y \operatorname{sen} x^2$

c) $f(x,y) = y \operatorname{sen}(3x^2 + y)$

d) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

e) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

a) $f(x,y) = 3x^2 + 5xy - y \qquad f_x(x,y) = 6x + 5y \qquad f_y(x,y) = 5x - 1$

b) $f(x,y) = xe^{xy} + y \operatorname{sen} x^2$

$f_x(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} + 2xy\cos x^2 \qquad f_y(x,y) = x^2 e^{xy} + \operatorname{sen} x^2$

c) $f(x,y) = y \operatorname{sen}(3x^2 + y)$

$f_x(x,y) = 6xy\cos(3x^2 + y) \qquad f_y(x,y) = \operatorname{sen}(3x^2 + y) + y\cos(3x^2 + y)$

d) $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$

$f_x(x,y) = \dfrac{2x}{x^2 + y^2} \qquad f_y(x,y) = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$

e) $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$

$f_x(x,y) = \dfrac{-y(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2} \qquad f_y(x,y) = \dfrac{x(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}$

Dada la función $z = f(x,y)$, cuando existen las funciones f_x, f_y, cabe plantearse su derivadas parciales

- Derivar dos veces respecto a x: $\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$

- Derivar dos veces respecto a y: $\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$

- Derivar primero con respecto a x y a continuación con respecto a y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

- Derivar primero con respecto a y y a continuación con respecto a x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = f_{yx}$$

$$f(x,y) = x^2 \ln y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \ln y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2 \ln y$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{2x}{y}}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2x}{y}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^2}{y}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -\frac{x^2}{y^2}$$

$$f(x,y) = xy^2 + \frac{x}{y} + \cos(x^2+1)$$

$$f_{xx}(x,y) = -2\text{sen}(x^2+1) - 4x^2\cos(x^2+1)$$

$$f_x(x,y) = y^2 + \frac{1}{y} - 2x\text{sen}(x^2+1)$$

$$\boxed{f_{xy}(x,y) = 2y - \frac{1}{y^2}}$$

$$f_{xy} = f_{yx}$$

$$f_y(x,y) = 2xy - \frac{x}{y^2}$$

$$\boxed{f_{yx}(x,y) = 2y - \frac{1}{y^2}}$$

$$f_{yy}(x,y) = 2x + \frac{2x}{y^3}$$

Supongamos que f es una función de una variable derivable en un punto x_0. Se tiene que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = \varepsilon(x) \qquad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

$$f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \varepsilon(x)(x - x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

$$\boxed{f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0}$$

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \varepsilon(x)(x - x_0) \qquad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Ahora, qué significará que una función f de dos variables sea diferenciable en un punto (x_0, y_0)?

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \varepsilon_1(x,y)(x-x_0) + \varepsilon_2(x,y)(y-y_0)$$

siendo $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon_1(x,y) = 0 \qquad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon_2(x,y) = 0$

Condición de diferenciabilidad de f en (x_0, y_0)

$$\boxed{f \text{ es diferenciable en } (x_0, y_0)}$$

$$\Downarrow$$

El recíproco no es cierto en general

- f es continua en (x_0, y_0)
- Existen las derivadas parciales de f en (x_0, y_0)

Condición suficiente de diferenciabilidad:

Si f es una función de x e y con f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ continuas en una región abierta $\mathcal{R}$, entonces f es diferenciable en $\mathcal{R}$

Ejemplo: probar que $f(x,y) = x \ln y$ es diferenciable en todo punto de su dominio.

El dominio de f es $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y > 0\}$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \ln y \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{x}{y} \end{aligned}\right\} \text{funciones continuas en } D(f) \Rightarrow f \text{ es diferenciable en } D(f)$$

Condición de diferenciabilidad de f en (x_0, y_0)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \varepsilon_1(x,y)(x-x_0) + \varepsilon_2(x,y)(y-y_0)$$

siendo $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon_1(x,y) = 0 \qquad \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon_2(x,y) = 0$

$$\underset{(x,y)\,\to\,(x_0,y_0)}{f(x,y) \quad \approx} \quad f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

Es decir, f es diferenciable en (x_0, y_0) si puede aproximarse localmente "cerca" de (x_0, y_0) por un plano.

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Condición de diferenciabilidad de f en (x_0, y_0)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \varepsilon_1(x,y)(x-x_0) + \varepsilon_2(x,y)(y-y_0)$$

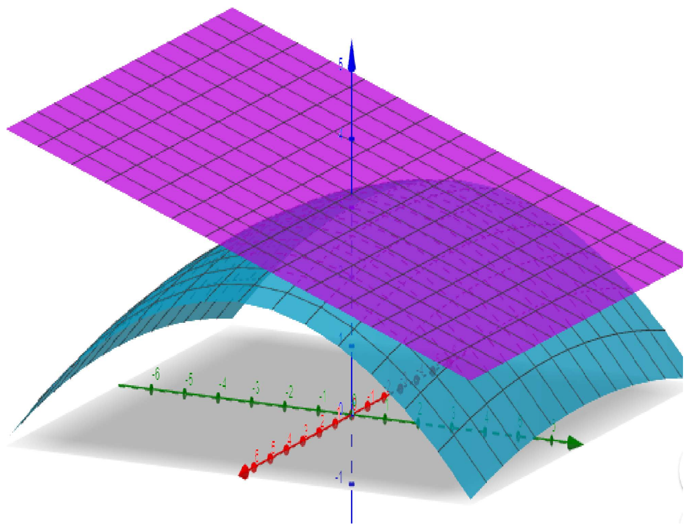
siendo $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon_1(x,y) = 0 \qquad \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon_2(x,y) = 0$

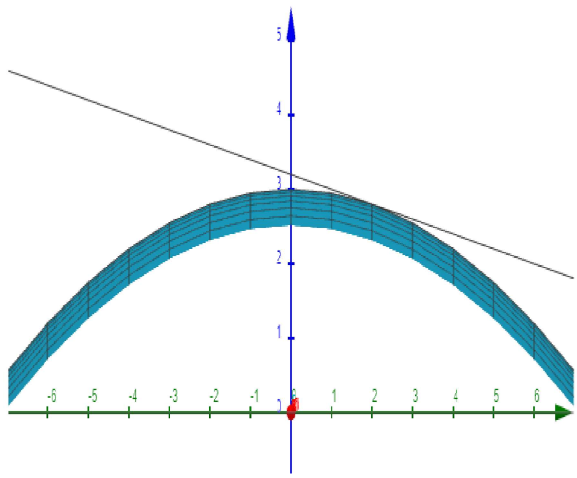
Si f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) entonces su plano tangente en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ viene dado por

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$

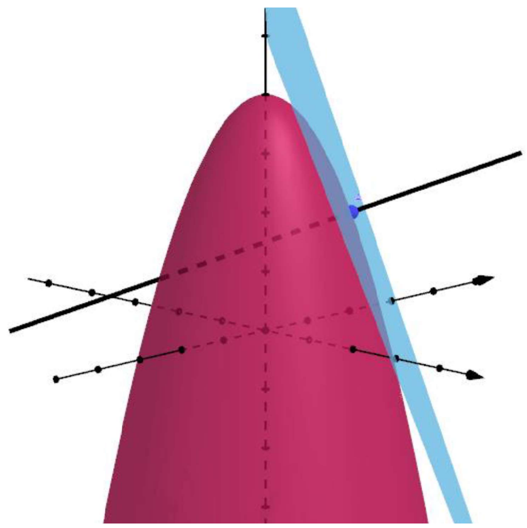
Si f es diferenciable en un punto (x_0, y_0) entonces su plano tangente en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ viene dado por

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$





La recta perpendicular al plano tangente a una superficie en un punto P se dice que es la recta normal en P



La ecuación de la recta normal a la superficie $z = f(x, y)$ en el punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ es

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}$$

Plano tangente en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Recta normal en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}$$

Ejemplo: Calcular el plano tangente y la recta normal a la función $f(x, y) = 2 + x^2 + y^2$ en el punto $(1, 1)$.

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x & \Rightarrow & \dfrac{\partial f}{\partial x}(1, 1) = 2 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y & \Rightarrow & \dfrac{\partial f}{\partial y}(1, 1) = 2 \end{array}\right\}$$

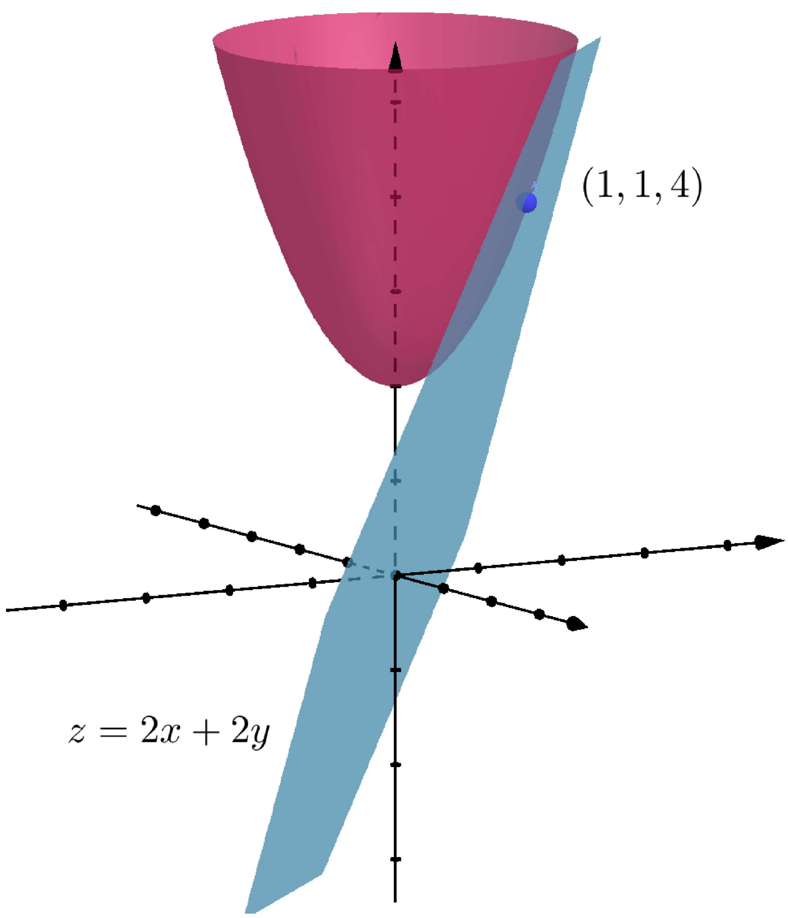
Plano tangente

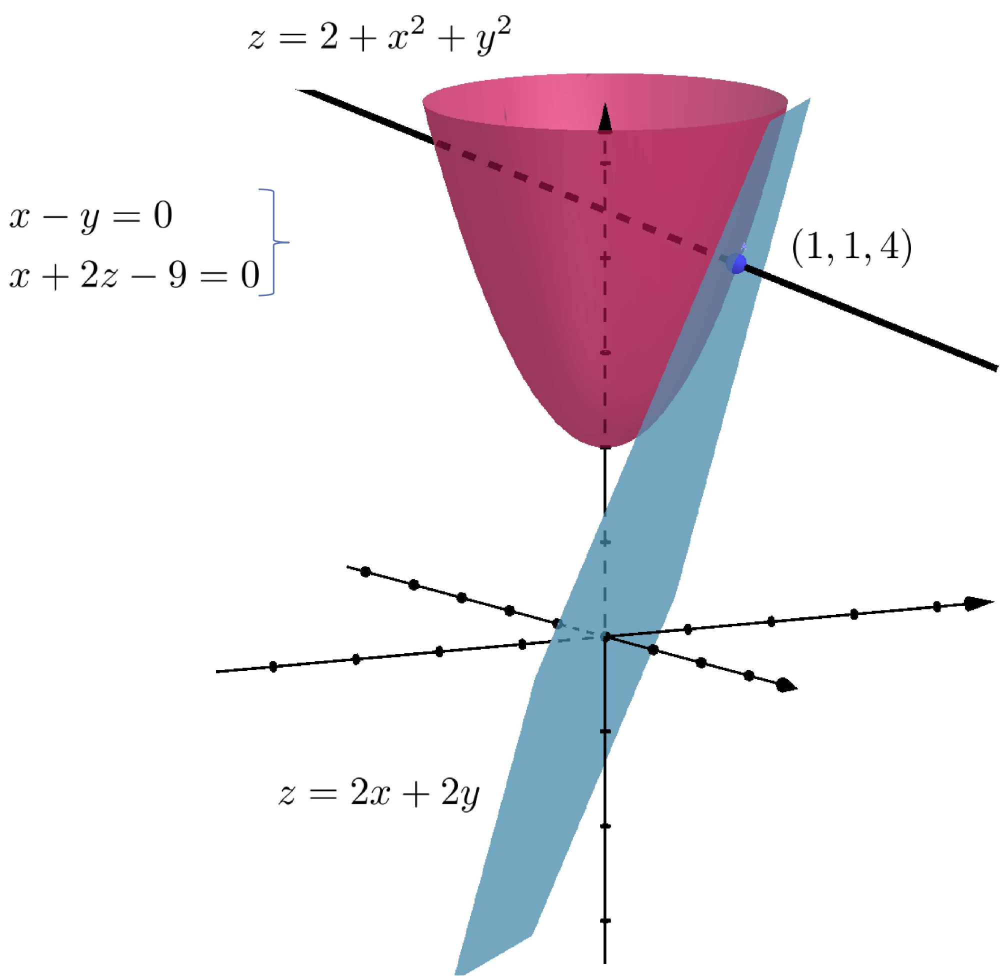
$$z = 2(x - 1) + 2(y - 1) + 4$$

$$z = 2x + 2y$$

Recta normal $\quad \dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y - 1}{2} = \dfrac{z - 4}{-1}$

IABLES





Plano tangente en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Recta normal en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}$$

Ejemplo: Calcular el plano tangente y la recta normal a la función $f(x, y) = xy^2 + 2\ln y$ en el punto $(2, 1)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y^2 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(2, 1) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2xy + \frac{2}{y} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(2, 1) = 6$$

Plano tangente

$$z = 1(x - 2) + 6(y - 1) + 2$$

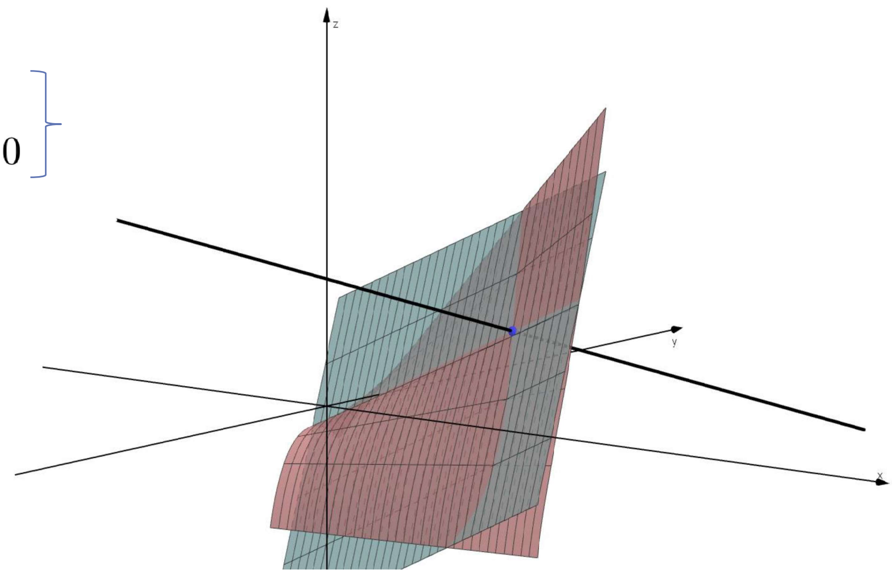
$$z = x + 6y - 6$$

Recta normal $\quad \frac{x - 2}{1} = \frac{y - 1}{6} = \frac{z - 2}{-1}$

$$z = x + 6y - 6$$

$$z = xy^2 + 2\ln y$$

$$\left.\begin{aligned} x + z - 4 &= 0 \\ y + 6z - 13 &= 0 \end{aligned}\right\}$$



Plano tangente en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Recta normal en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}$$

Ejemplo: Calcular el plano tangente y la recta normal a la superficie $z = \dfrac{x}{x+y}$ en el punto $(4, -2, 2)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y}{(x+y)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(4, -2) = -\frac{1}{2}$$

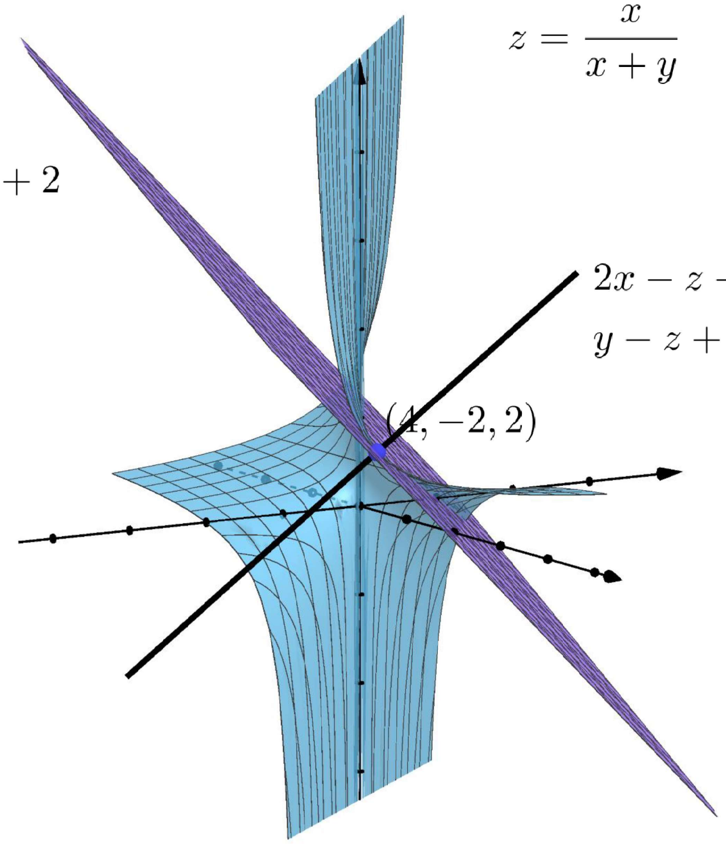
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-x}{(x+y)^2} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(4, -2) = -1$$

Plano tangente

$$z = -\frac{1}{2}(x - 4) - (y + 2) + 2$$

$$z = -\frac{1}{2}x - y + 2$$

Recta normal $\dfrac{x - 4}{-1/2} = \dfrac{y + 2}{-1} = \dfrac{z - 2}{-1}$



$$z = \frac{x}{x+y}$$

$$z = -\frac{1}{2}x - y + 2$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x - z - 6 = 0 \\ y - z + 4 = 0 \end{array}\right\}$$

Plano tangente en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Recta normal en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$\frac{x - x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z - f(x_0, y_0)}{-1}$$

Ejemplo: Calcular el plano tangente y la recta normal a la superficie $z = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$ en el punto $(-2, 3, 3)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 4x + 8 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(-2, 3) = 0$$

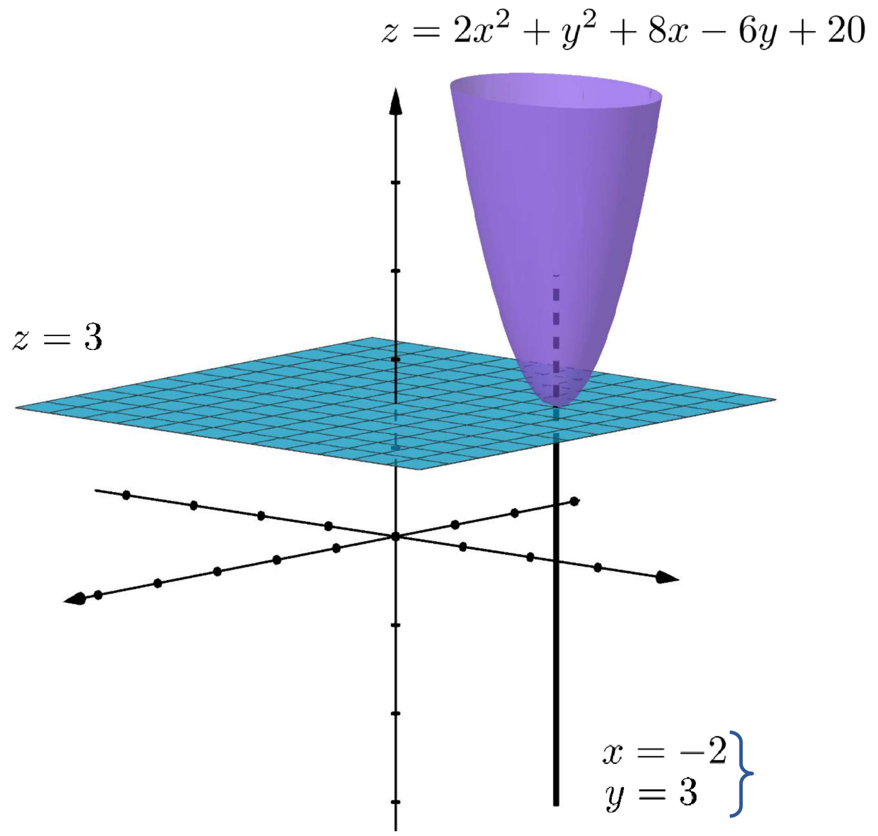
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y - 6 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(-2, 3) = 0$$

Plano tangente horizontal

$$z = 0(x + 2) + 0(y - 3) + 3$$

$$z = 3$$

Recta normal $\left.\begin{array}{l} x = -2 \\ y = 3 \end{array}\right\}$ Intersección de planos verticales


$z = 2x^2 + y^2 + 8x - 6y + 20$
$z = 3$
$\left.\begin{matrix} x = -2 \\ y = 3 \end{matrix}\right\}$