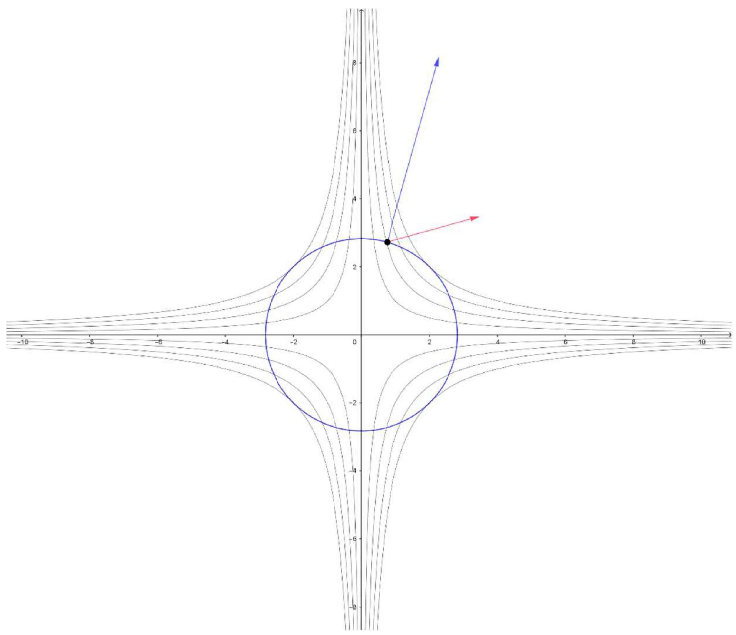
# Tema 3 – Sexta Parte

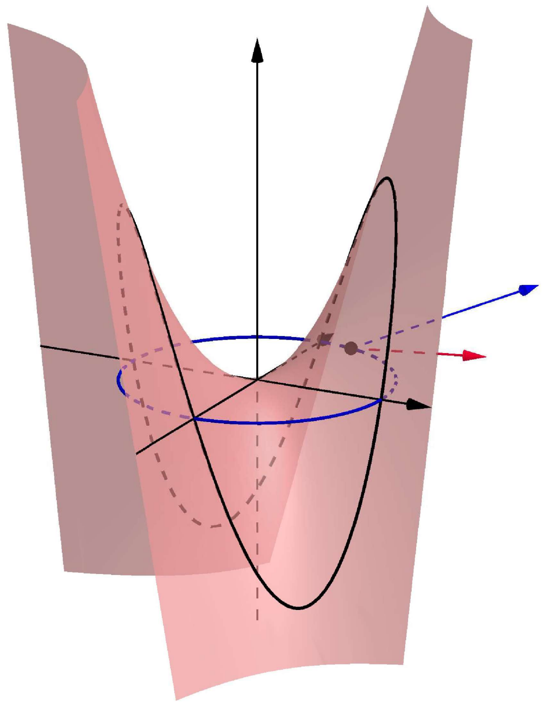
# Funciones de varias variables

# Multiplicadores de Lagrange

## MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

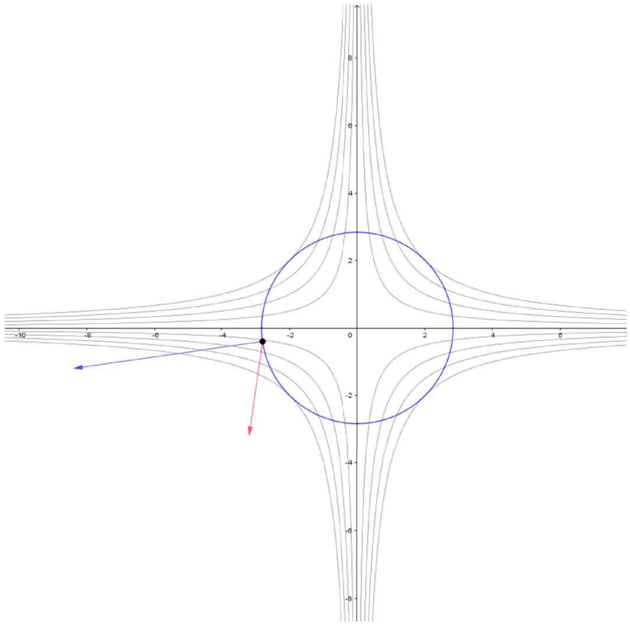
Encontrar el máximo de $f(x,y) = xy$ sujeto a la condición o restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 - 8 = 0$.

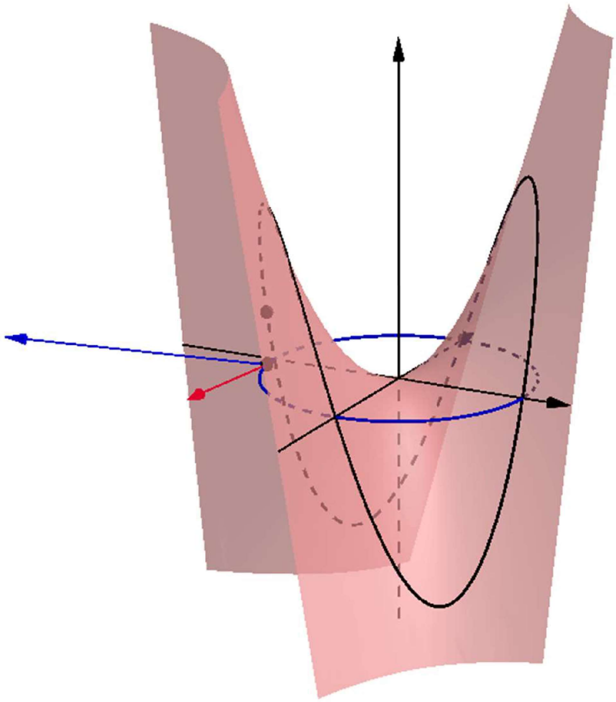




Consideramos $\nabla f$ y $\nabla g$ en los puntos de la curva $g(x,y) = 0$

Encontrar el máximo de $f(x,y) = xy$ sujeto a la condición o restricción $g(x,y) = x^2 + y^2 - 8 = 0$.



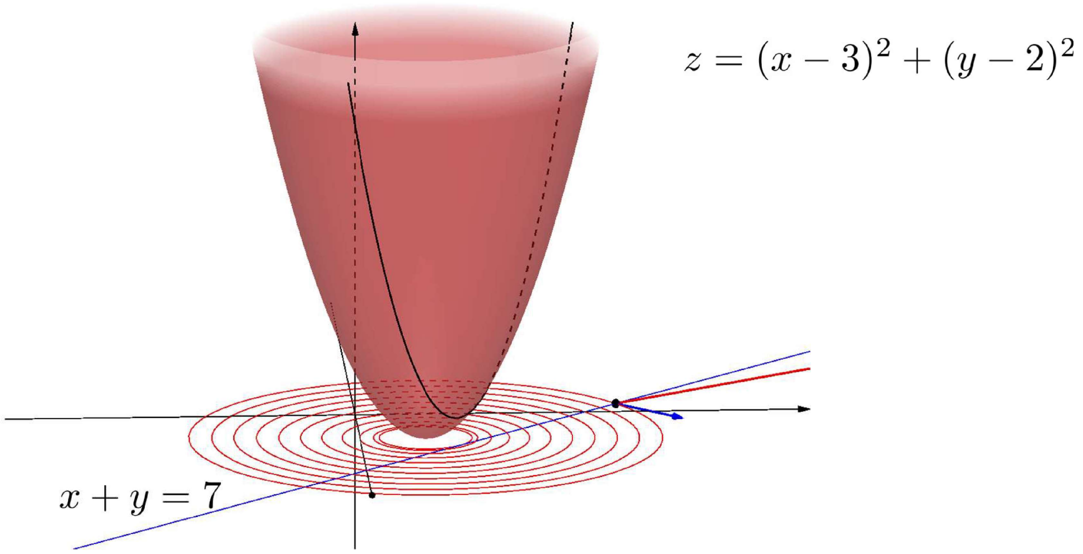


Observamos que el máximo se alcanza cuando $\nabla f$ y $\nabla g$ son paralelos



Veamos otro ejemplo.

Encontrar el mínimo de $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-2)^2$ sujeto a la condición o restricción $x + y = 7$.




Consideramos $\nabla f$ y $\nabla g$ en los puntos de la curva $g(x,y) = 0$

Observamos que el mínimo se alcanza cuando $\nabla f$ y $\nabla g$ son paralelos

TEOREMA DE LAGRANGE

Sean $f, g\colon \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funciones con derivadas parciales primeras continuas tales que $f$ restringida a los puntos de la curva $g(x,y) = 0$ alcanza tiene un máximo o un mínimo relativo en un punto $(x_0, y_0)$. Entonces, si $\nabla g(x_0, y_0) \neq \mathbf{0}$, existe un número real $\lambda$ tal que

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

La condición de proporcionalidad de los vectores gradiente es una condición **necesaria** de extremo, no suficiente.



MÉTODO DE LOS MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Supongamos que $f$ y $g$ satisfacen las hipótesis del teorema de Lagrange y que $f$ restringida al conjunto de puntos que verifican $g(x,y) = 0$ **tiene un mínimo o un máximo absoluto**. Para hallar dicho mínimo o máximo, deben seguirse los siguientes pasos:

1. Resolver el sistema de ecuaciones dado por:

$$\begin{aligned} f_x(x,y) &= \lambda g_x(x,y) \\ f_y(x,y) &= \lambda g_y(x,y) \\ g(x,y) &= 0 \end{aligned}$$

2. Evaluar $f$ en cada punto solución obtenido en el paso anterior. El mayor de esos valores da el máximo de $f$ sujeta a la restricción $g(x,y) = 0$ (siempre que dicho máximo exista), mientras el menor de todos da el mínimo de $f$ sujeta a la restricción $g(x,y) = 0$ (siempre que dicho mínimo exista).

Observaciones

1. Si la curva formada por los puntos que satisfacen $g(x,y) = 0$ es acotada, se sabe que $f$ restringida a los puntos de dicha curva debe tener tanto máximo como mínimo absoluto.

2. En todos lo ejercicios que realicemos, si se pide determinar el máximo (resp. mínimo) absoluto de $f$ restringida al conjunto de puntos que satisfacen $g(x,y) = 0$, se asumirá que $f$ restringida a dicha curva tiene máximo (resp. mínimo) absoluto.

3. Si queremos determinar el máximo (resp. mínimo) absoluto de $f$ restringida a una sección de la curva de ecuación $g(x,y) = 0$, entonces los puntos candidatos serán aquellos en los que se verifica la condición indicada en el Teorema de Lagrange y también los puntos "terminales" de la sección correspondiente de la curva $g(x,y) = 0$.

4. En todos los ejercicios que realicemos, el vector gradiente de $g$ será no nulo en todos los puntos de la curva $g(x,y) = 0$.



Ejemplo:

Encontrar los extremos de $f(x,y) = xy$ restringida al conjunto de puntos que satisfacen $x^2 + y^2 = 8$.

$$\nabla f(x,y) = (y,x) \qquad \nabla g(x,y) = (2x, 2y)$$

Obsérvese que debe ser $x, y \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x\lambda \\ x = 2y\lambda \\ x^2 + y^2 - 8 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{y}{2x} = \frac{x}{2y} \Rightarrow y^2 = x^2$$

$$2x^2 = 8 \qquad x = \pm 2 \qquad y = \pm 2$$

Puntos candidatos: $(-2,-2)$, $(2,2)$, $(-2,2)$, $(2,-2)$

El máximo se alcanza en $(-2,-2)$ y $(2,2)$ y vale $f(-2,-2) = f(2,2) = 4$

El mínimo se alcanza en $(-2,2)$ y $(2,-2)$ y vale $f(2,-2) = f(-2,2) = -4$

Ejemplo:

Encontrar el mínimo de $f(x,y) = (x-3)^2 + (y-2)^2$ restringida a la recta de ecuación $x + y = 7$.

$$\nabla f(x,y) = (2x-6, 2y-4) \qquad \nabla g(x,y) = (1,1)$$

$$\left.\begin{aligned} 2x-6 &= \lambda \\ 2y-4 &= \lambda \\ x+y-7 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 2x-6 = 2y-4$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{aligned} x-y &= 1 \\ x+y-7 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow x = 4 \qquad y = 3$$

El mínimo se alcanza en $(4,3)$ y vale $f(4,3) = 2$

(la función $f$ restringida a la recta $x + y = 7$ no tiene máximo)



Ejemplo:

Encontrar el máximo de $f(x,y) = 9 - x^2 - y^2$ restringida a la recta $x + y = 3$.

$$\nabla f(x,y) = (-2x, -2y) \qquad \nabla g(x,y) = (1,1)$$

$$\left.\begin{aligned} -2x &= \lambda \\ -2y &= \lambda \\ x+y-3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x = \frac{3}{2} \qquad y = \frac{3}{2}$$

El máximo se alcanza en $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y vale $f\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) = \frac{9}{2}$

(la función $f$ restringida a la recta $x + y = 3$ no tiene mínimo)

Ejemplo:

Encontrar los extremos de la función $f(x,y)=y$ restringida a la curva $x^4-4x+4y^2+y^4-2=0$.

$$\nabla f(x,y)=(0,1) \qquad \nabla g(x,y)=(4x^3-4,4y^3+8y)$$

$$\left.\begin{array}{l} 0=\lambda(4x^3-4) \\ 1=\lambda(8y+4y^3) \\ x^4-4x+4y^2+y^4-2=0 \end{array}\right\} \xRightarrow{\lambda\neq 0} x^3=1 \Rightarrow \begin{array}{l} x=1 \\ 4y^2+y^4-5=0 \\ \Downarrow \\ y=\pm 1 \end{array}$$

Puntos candidatos: $(1,1),(1,-1)$

El máximo se alcanza en $(1,1)$ y vale $f(1,1)=1$

El mínimo se alcanza en $(1,-1)$ y vale $f(1,-1)=-1$



Ejemplo:

Encontrar los extremos de la función $f(x,y)=y^3+x^2y+2x^2+2y^2-4y-8$ restringida a la curva $x^2+y^2=1$.

$$\nabla f(x,y)=(2xy+4x,3y^2+x^2+4y-4) \qquad \nabla g(x,y)=(2x,2y)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2x(y+2)=\lambda(2x) \\ 3y^2+x^2+4y-4=\lambda(2y) \\ x^2+y^2-1=0 \end{array}\right\}$$

Si $x=0 \Rightarrow y^2-1=0 \Rightarrow y=\pm 1$

Si $x\neq 0 \Rightarrow \lambda=y+2$

$\Rightarrow 3y^2+x^2+4y-4=(y+2)2y$

$x^2+y^2-4=0$ No hay solución

Puntos candidatos: $(0,1),(0,-1)$

El máximo se alcanza en $(0,-1)$ y vale $f(0,-1)=-3$

El mínimo se alcanza en $(0,1)$ y vale $f(0,1)=-9$

## MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Ejemplo:

Encontrar el mínimo de $f(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2$ restringida al plano $2x - 3y - 4z = 49$.

$$\nabla f(x,y,z) = (4x, 2y, 6z) \qquad \nabla g(x,y,z) = (2,-3,-4)$$

$$\left.\begin{array}{l} 4x = 2\lambda \\ 2y = -3\lambda \\ 6z = -4\lambda \\ 2x - 3y - 4z = 49 \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = 2x \Rightarrow x = 3 \quad y = -9 \quad z = -4$$

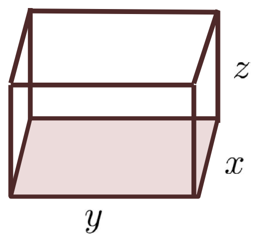
El mínimo se alcanza en $(3,-9,-4)$ y vale $f(3,-9,-4) = 147$

(la función $f$ restringida al plano $2x + 3y + 4z = 49$ no tiene máximo)

## MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Ejercicio:

Un tanque metálico rectangular sin tapa debe contener 256 metros cúbicos de líquido. ¿Cuáles son las dimensiones del tanque que requiere menos material para su construcción?




Sean $x$ e $y$ las longitudes de los lados de la base y $z$ la altura.
El material necesario viene dado por la función

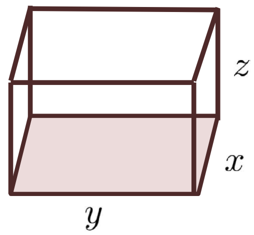
$$f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$$

y tenemos la restricción $xyz = 256$ con $x, y, z > 0$

## MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Ejercicio:

Un tanque metálico rectangular sin tapa debe contener 256 metros cúbicos de líquido. ¿Cuáles son las dimensiones del tanque que requiere menos material para su construcción?




$$f(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz$$

$$g(x,y,z) = xyz - 256$$

Multiplicadores de Lagrange:

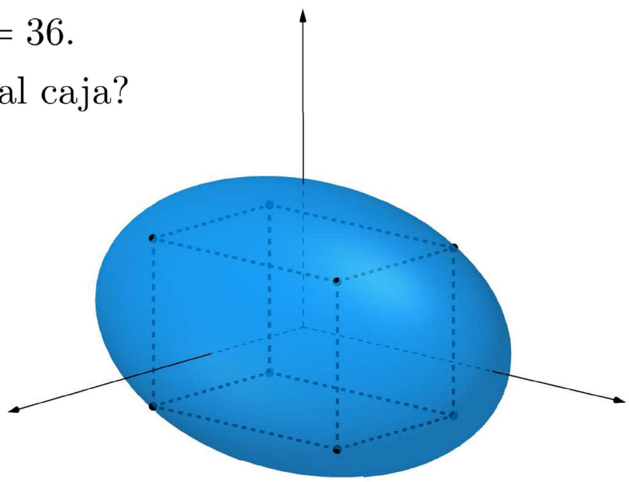
$$\left.\begin{aligned} y + 2z &= yz \cdot \lambda \\ x + 2z &= xz \cdot \lambda \\ 2x + 2y &= xy \cdot \lambda \\ xyz - 256 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (8,8,4)$$

$$f(8,8,4) = 192$$

## MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Ejercicio:

Una caja rectangular, cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas, se inscribe en el elipsoide $96x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 36$.
¿Cuál es el mayor volumen posible para tal caja?



El volumen de la caja

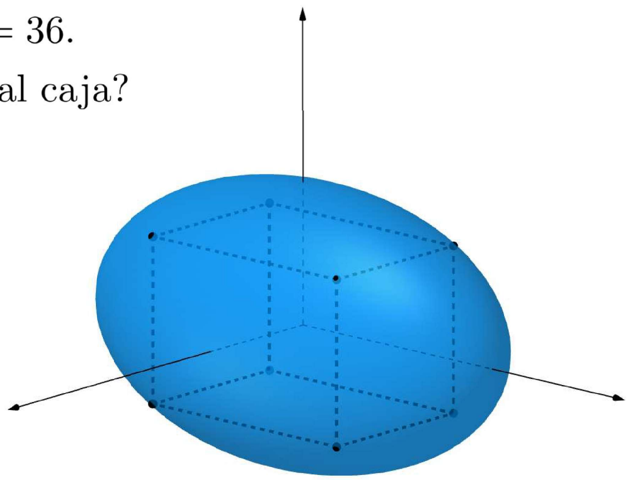
$$V(x,y,x) = 8xyz$$

donde $x, y, z > 0$
y el punto $(x,y,z)$ está en la superficie del elipsoide de ecuación

$$96x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 36.$$

Ejercicio:

Una caja rectangular, cuyos lados son paralelos a los ejes de coordenadas, se inscribe en el elipsoide $96x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 36$.
¿Cuál es el mayor volumen posible para tal caja?



Multiplicadores de Lagrange:

$$\left.\begin{aligned} 8yz &= 192x \cdot \lambda \\ 8xz &= 8y \cdot \lambda \\ 8xy &= 8z \cdot \lambda \\ 96x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 36 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right)$$

$$V\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \sqrt{3}, \sqrt{3}\right) = 6\sqrt{2}$$