Tema 4 – Primera Parte

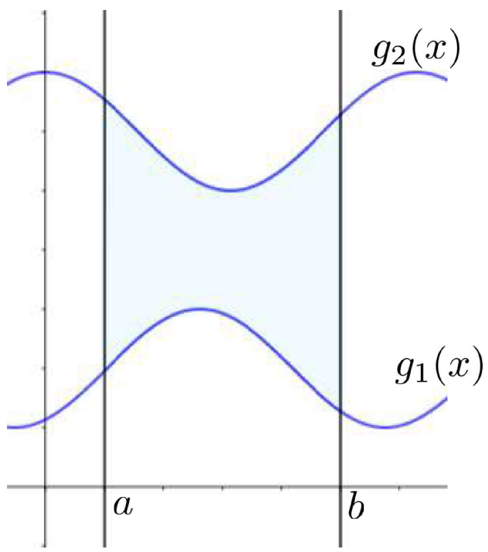
Integrales Iteradas y

Área en el plano

Descripción de regiones en el plano

Región verticalmente simple

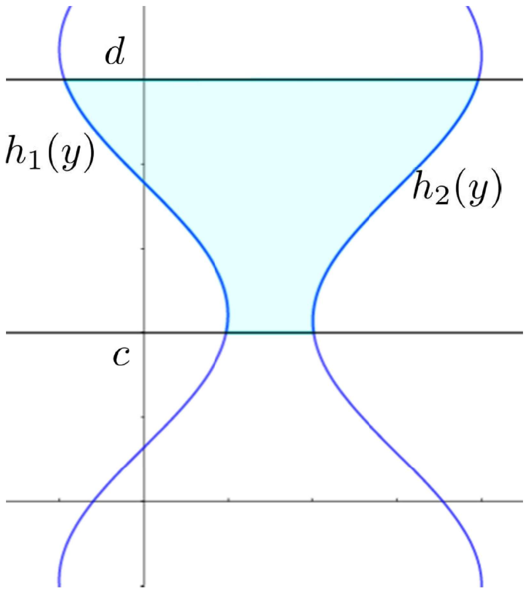
$$\mathcal{R} = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{cases}$$



Descripción de regiones en el plano

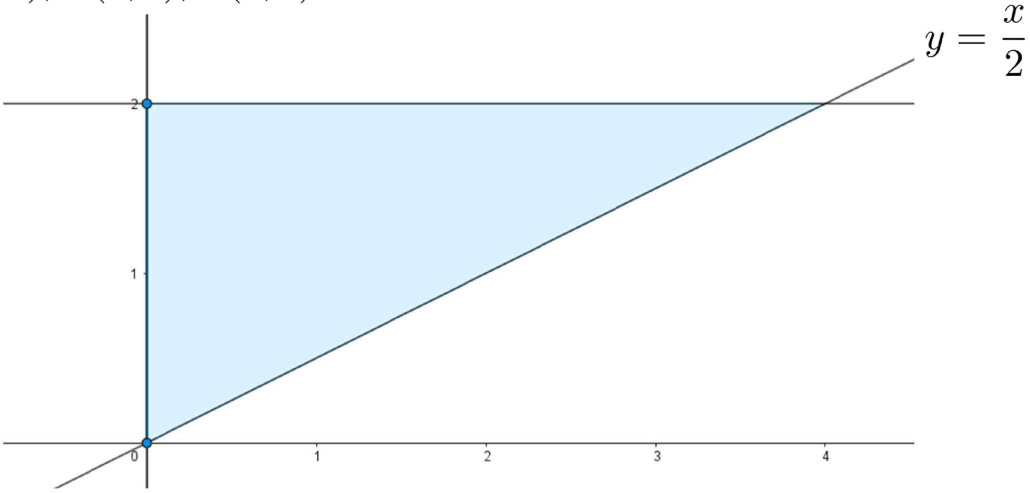
Región horizontalmente simple

$$\mathcal{R} = \begin{cases} h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$



Descripción de regiones en el plano

Ejemplo: Describir los puntos de la región $\mathcal{R}$ cuya frontera es el triángulo de vértices $A(0,0), B(0,2), C(4,2)$

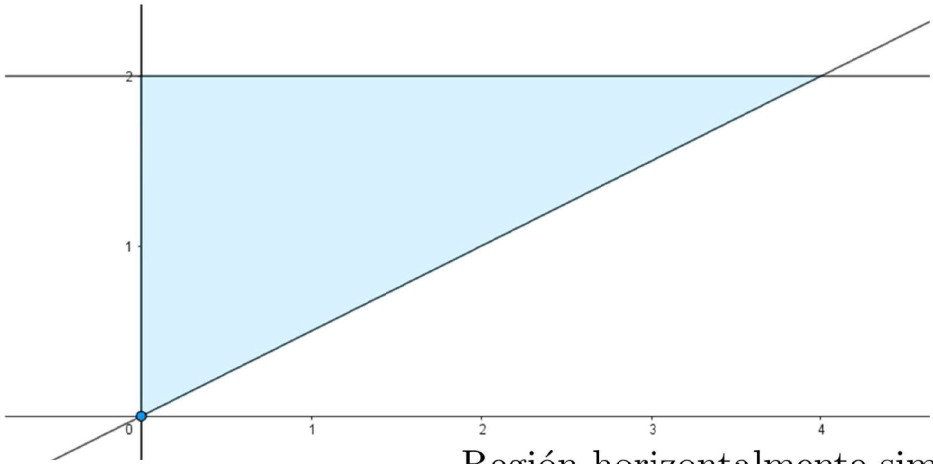


Región verticalmente simple

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ \frac{x}{2} \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Descripción de regiones en el plano

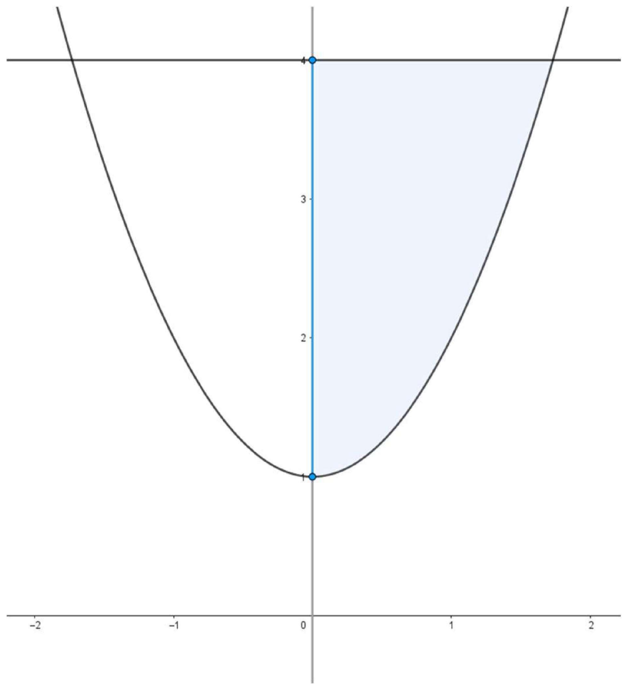
Ejemplo: Describir los puntos de la región $\mathcal{R}$ cuya frontera es el triángulo de vértices $A(0,0), B(0,2), C(4,2)$



Región horizontalmente simple

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

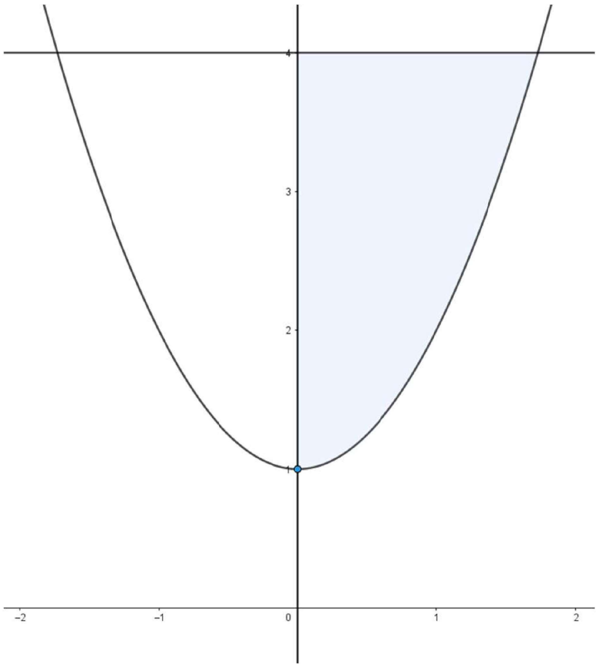
Ejemplo: Describir los puntos de la región $\mathcal{R}$ del 1^{er} cuadrante acotada por $y = 4$, $y = x^2 + 1$ y el eje de ordenadas



Región verticalmente simple

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{3} \\ x^2 + 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

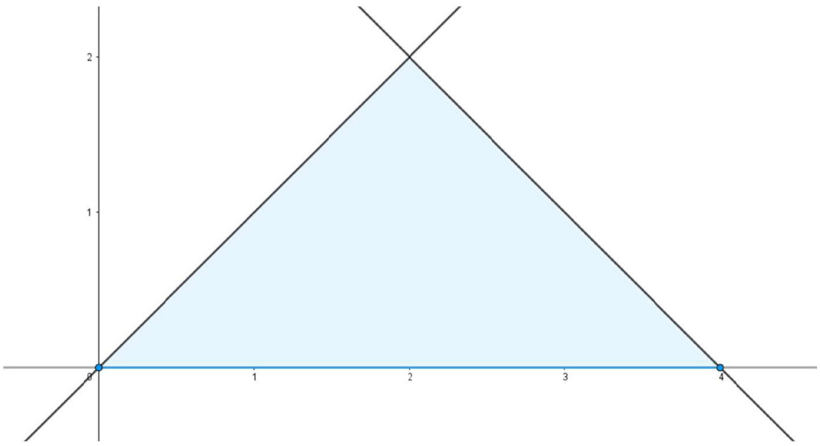
Ejemplo: Describir los puntos de la región $\mathcal{R}$ del 1^{er} cuadrante acotada por $y = 4$, $y = x^2 + 1$ y el eje de ordenadas



Región horizontalmente simple

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq \sqrt{y-1} \\ 1 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

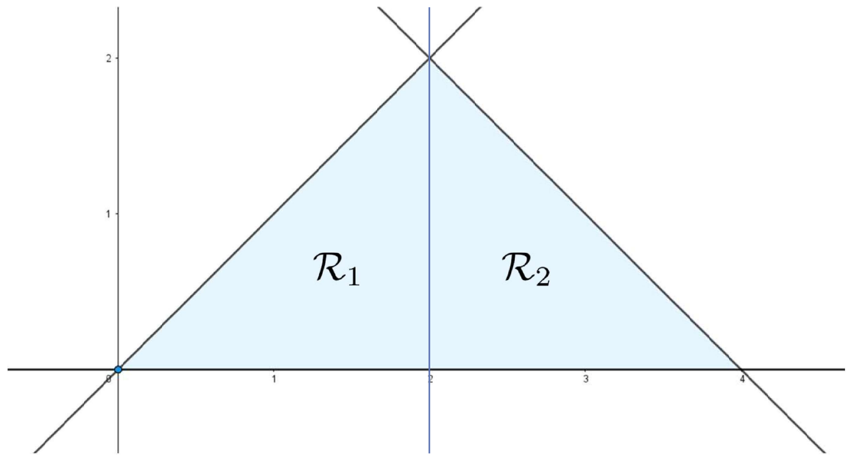
Ejemplo: Describir los puntos de la región $\mathcal{R}$ acotada por el eje OX y las rectas $y = x$, $y = 4 - x$



Región horizontalmente simple

$$\mathcal{R} = \begin{cases} y \leq x \leq 4 - y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

Ejemplo: Describir los puntos de la región $\mathcal{R}$ acotada por el eje OX y las rectas $y = x$, $y = 4 - x$



Región verticalmente simple

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 \qquad \mathcal{R}_1 = \begin{cases} 0 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le x \end{cases} \qquad \mathcal{R}_2 = \begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 4 - x \end{cases}$$

Integrales Iteradas

Son integrales de la forma

$$\int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy \right] dx \iff \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dydx$$

$$\int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx \right] dy \iff \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dxdy$$

INTEGRALES ITERADAS

Integrales Iteradas

$$\int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx \quad \Longleftrightarrow \quad \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

$$a \leq x \leq b$$

$$g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$

INTEGRALES ITERADAS

Integrales Iteradas

$$\int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy \quad \Longleftrightarrow \quad \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$

$$c \leq y \leq d$$

Ejemplo: Calcular la integral iterada

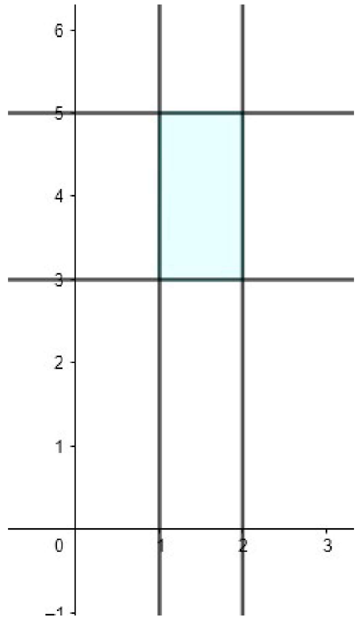
$$\int_1^2 \int_3^5 (x+2y)dydx$$

$$\int_1^2 \left[\int_3^5 (x+2y)dy\right] dx = \int_1^2 \left[xy+y^2\right]_3^5 dx$$

$$= \int_1^2 [(5x+25)-(3x+9)]dx = \int_1^2 (2x+16)dx = 19$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 3 \leq y \leq 5 \end{cases}$$

Región de integración



Ejemplo: Calcular la integral iterada

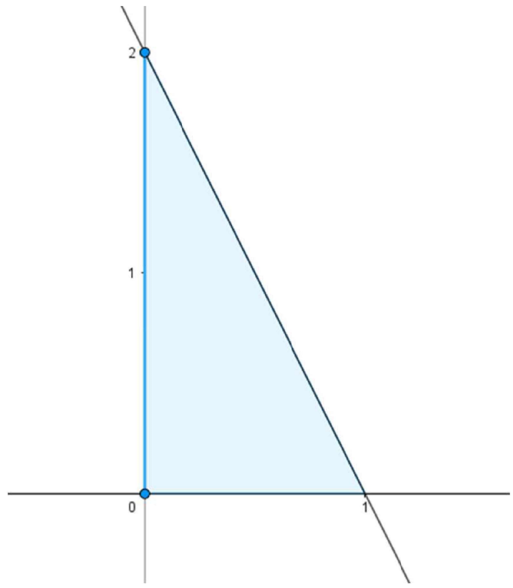
$$\int_0^1 \int_0^{2-2x} (2-2x-y)dydx$$

$$\int_0^1 \left[\int_0^{2-2x} (2-2x-y)dy\right] dx = \int_0^1 \left[2y-2xy-\frac{y^2}{2}\right]_0^{2-2x} dx$$

$$= \int_0^1 (2(2-2x)-2x(2-2x)-2(1-x)^2)dx$$

$$= \int_0^1 (2x^2-4x+2)dx = \frac{2}{3}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2-2x \end{cases}$$



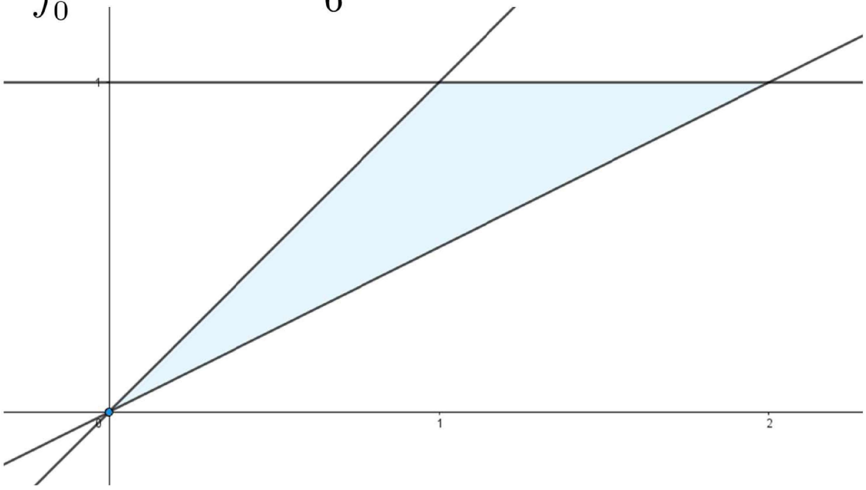
Ejemplo: Calcular la integral iterada

$$\int_0^1 \int_y^{2y} (1-y)\,dx\,dy$$

$$\int_0^1 \left[\int_y^{2y} (1-y)\,dx \right] dy = \int_0^1 [x - yx]_y^{2y}\, dy$$

$$= \int_0^1 (2y - 2y^2 - y + y^2)\,dy = \int_0^1 (y - y^2)\,dy = \frac{1}{6}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} y \leq x \leq 2y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



Ejemplo: Calcular la integral iterada

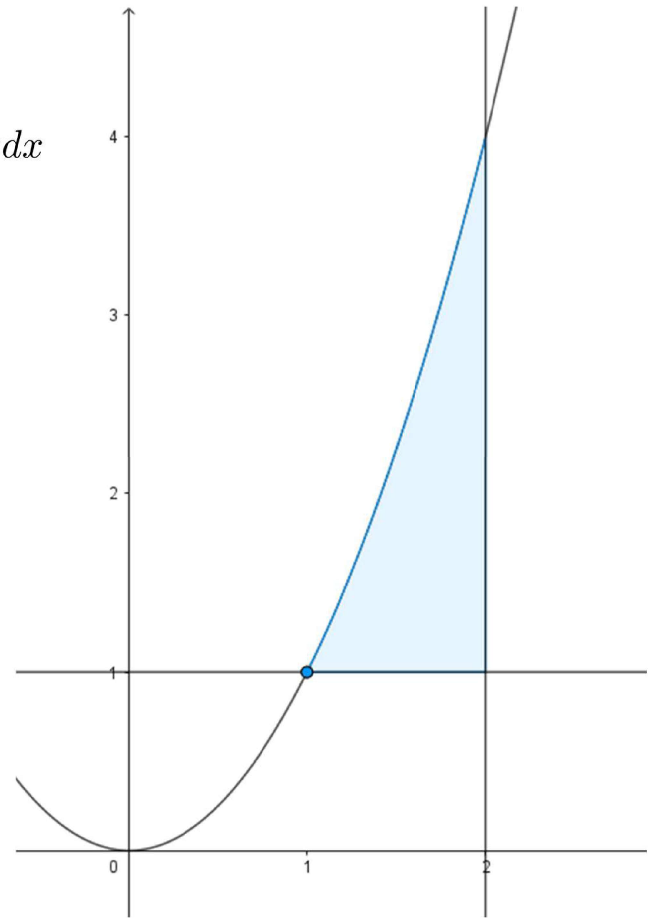
$$\int_1^2 \int_1^{x^2} \frac{x}{y}\,dy\,dx$$

$$\int_1^2 \left[\int_1^{x^2} \frac{x}{y}\,dy \right] dx = \int_1^2 [x \ln |y|]_1^{x^2}\, dx$$

$$= \int_1^2 (2x \ln x)\,dx = \left[x^2 \ln x - \frac{x^2}{2} \right]_1^2$$

$$= 4 \ln 2 - 2 + \frac{1}{2} = 4 \ln 2 - \frac{3}{2}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 1 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$



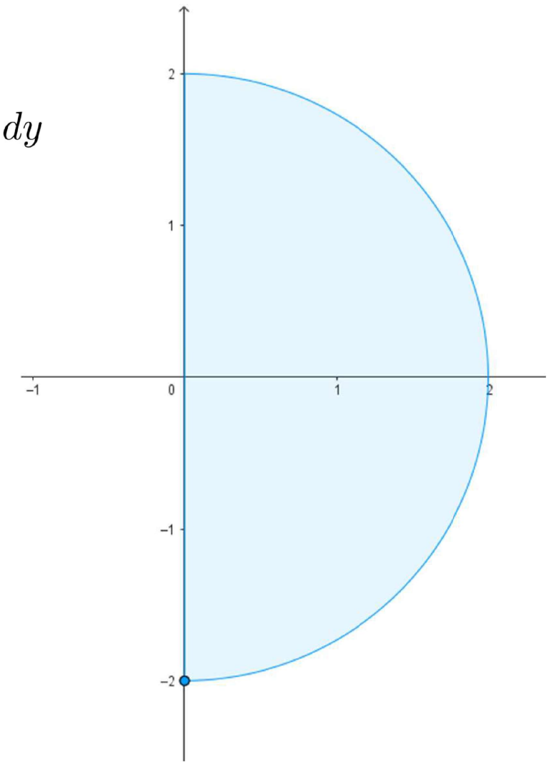
Ejemplo: Calcular la integral iterada

$$\int_{-2}^{2}\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} y^2x\ dxdy$$

$$\int_{-2}^{2}\left[\int_{0}^{\sqrt{4-y^2}} y^2x\ dx\right] dy = \int_{-2}^{2}\left[y^2\frac{x^2}{2}\right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy$$

$$= \int_{-2}^{2} y^2\frac{(4-y^2)}{2} dy = \frac{64}{15}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \le x \le \sqrt{4-y^2} \\ -2 \le y \le 2 \end{cases}$$



INTEGRALES ITERADAS

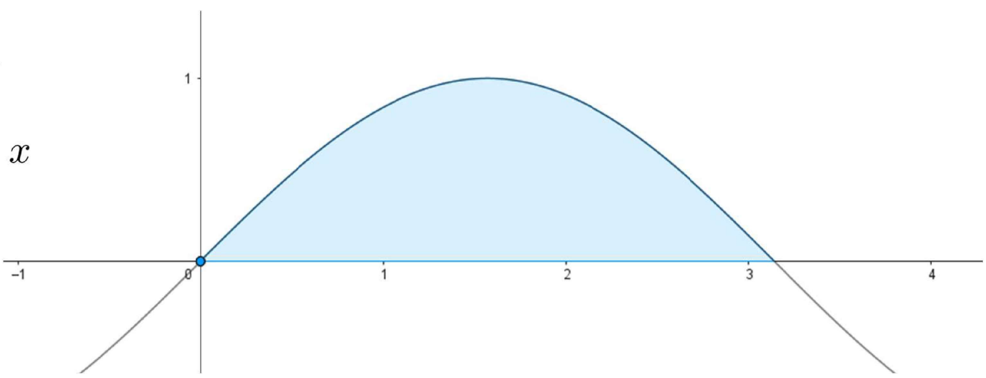
Ejemplo: Calcular la integral iterada

$$\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\operatorname{sen} x} (1+\cos x)\, dydx$$

$$\int_{0}^{\pi}\left[\int_{0}^{\operatorname{sen} x} (1+\cos x)\, dy\right] dx = \int_{0}^{\pi} [y + y\cos x]_0^{\operatorname{sen} x}\, dx$$

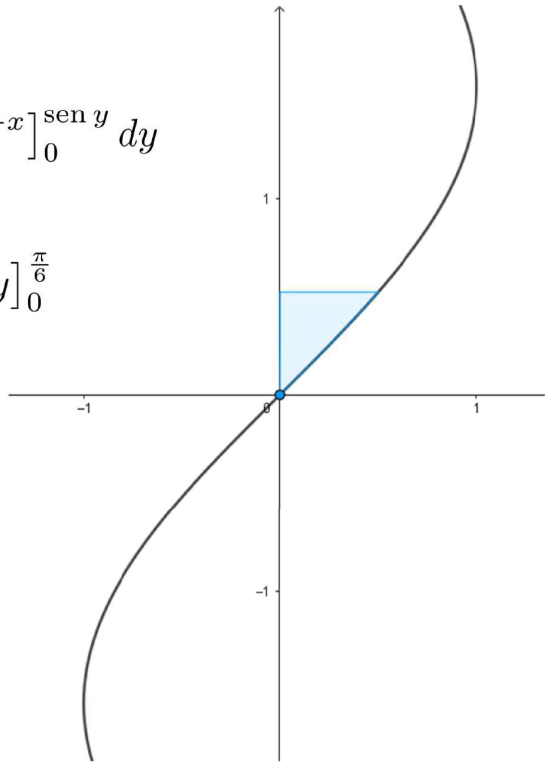
$$= \int_{0}^{\pi} (\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x) dx \quad = \left[-\cos x + \frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}\right]_0^{\pi} = 2$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \le x \le \pi \\ 0 \le y \le \operatorname{sen}\, x \end{cases}$$



Ejemplo: Calcular la integral iterada

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{\operatorname{sen} y} e^{-x} \cos y \, dx \, dy$$



$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \left[\int_0^{\operatorname{sen} y} e^{-x} \cos y \, dx \right] dy = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos y \left[-e^{-x} \right]_0^{\operatorname{sen} y} dy$$

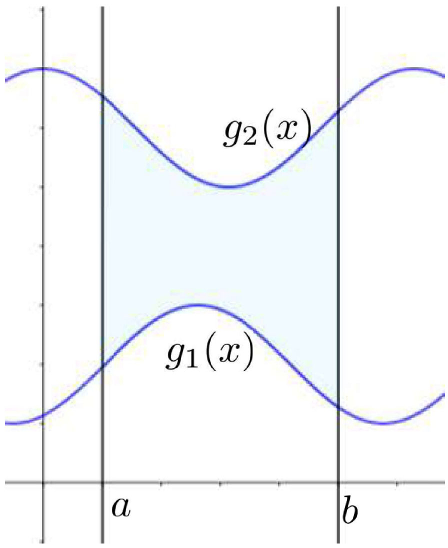
$$= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos y (-e^{-\operatorname{sen} y} + 1) dy = \left[e^{-\operatorname{sen} y} + \operatorname{sen} y \right]_0^{\frac{\pi}{6}}$$

$$= e^{-\operatorname{sen} \frac{\pi}{6}} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} - 1 = \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{1}{2}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq \operatorname{sen} \, y \\ 0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

Área de regiones planas como integrales iteradas

Región verticalmente simple



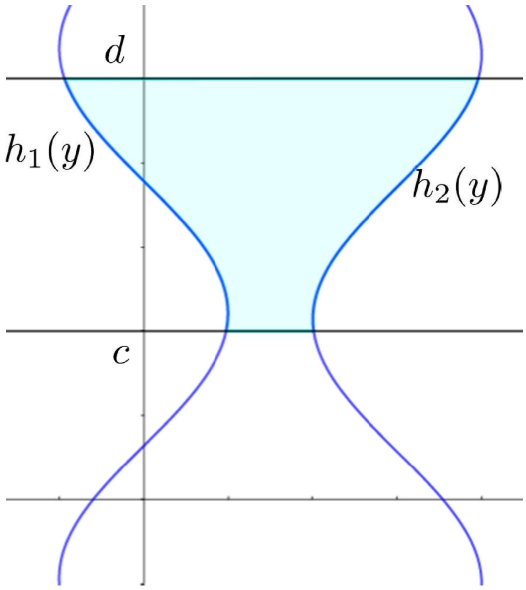
$$\mathcal{R} = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x) \end{cases}$$

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_a^b [g_2(x) - g_1(x)] \, dx = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \right) dx = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy \, dx$$

Área de regiones planas como integrales iteradas

Región horizontalmente simple

$$R = \begin{cases} h_1(y) \leq x \leq h_2(y) \\ c \leq y \leq d \end{cases}$$



$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_c^d [h_2(y) - h_1(y)]\, dy = \int_c^d \left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx \right) dy = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, dy$$

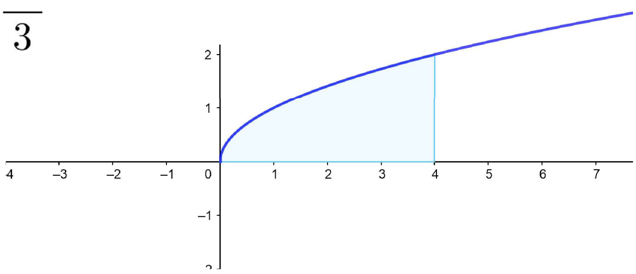
Ejemplo: Calcular el área encerrada por $y = \sqrt{x}$, $x = 4$ e $y = 0$

- Región verticalmente simple

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$$

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{x}} dy\, dx =$$

$$= \int_0^4 [y]_0^{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^4 \sqrt{x}\, dx = \frac{16}{3}$$



- Región horizontalmente simple

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_0^2 \int_{y^2}^4 dx\, dy = \int_0^2 \left(4 - y^2\right) dy$$

$$= \left[4y - \frac{y^3}{3}\right]_0^2 = \frac{16}{3}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} y^2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

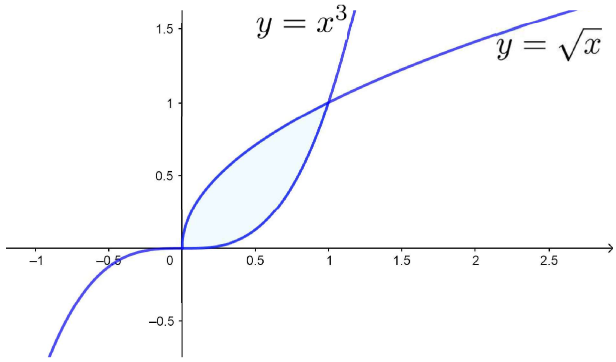
Ejemplo: Calcular el área del la región $\mathcal{R}$ de la figura.

- Región verticalmente simple

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x^3 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$$

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dy\, dx =$$

$$= \int_0^1 [y]_{x^3}^{\sqrt{x}}\, dx = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^3)\, dx = \frac{5}{12}$$



- Región horizontalmente simple

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt[3]{y}} dx\, dy$$

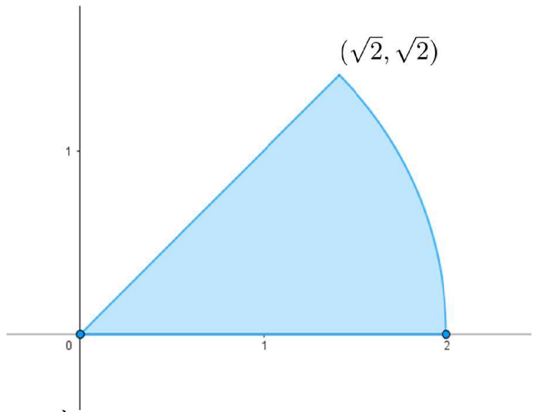
$$= \int_0^1 \left(\sqrt[3]{y} - y^2\right)\, dy = \frac{5}{12}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} y^2 \le x \le \sqrt[3]{y} \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular el área del la región $\mathcal{R}$, siendo $\mathcal{R}$ un sector circular situado en el primer cuadrante y determinado por $x^2 + y^2 = 4$ entre $y = 0$ e $y = x$

- Región horizontalmente simple

$$\mathcal{R} = \begin{cases} y \le x \le \sqrt{4 - y^2} \\ 0 \le y \le \sqrt{2} \end{cases}$$



$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} dx\, dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\sqrt{4 - y^2} - y\right) dy$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - y^2} dy - \int_0^{\sqrt{2}} y dy = \frac{1}{2}\pi + 1 - 1 = \frac{1}{2}\pi$$

$$\int_0^{\sqrt{2}} \sqrt{4 - y^2} dy \underset{y = 2\,\text{sen}\, t}{\overset{\downarrow}{=}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{4 - (2\,\text{sen}\, t)^2} 2\cos t dt = 4 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2 t dt$$

$$= 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = 2 \left[t + \frac{1}{2}\,\text{sen}\, 2t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\left(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\pi + 1$$

Ejemplo: Calcular el área del la región $\mathcal{R}$ limitada por las gráficas de $y^2 = 1 - x$, $y = \frac{1}{2}x + 1$

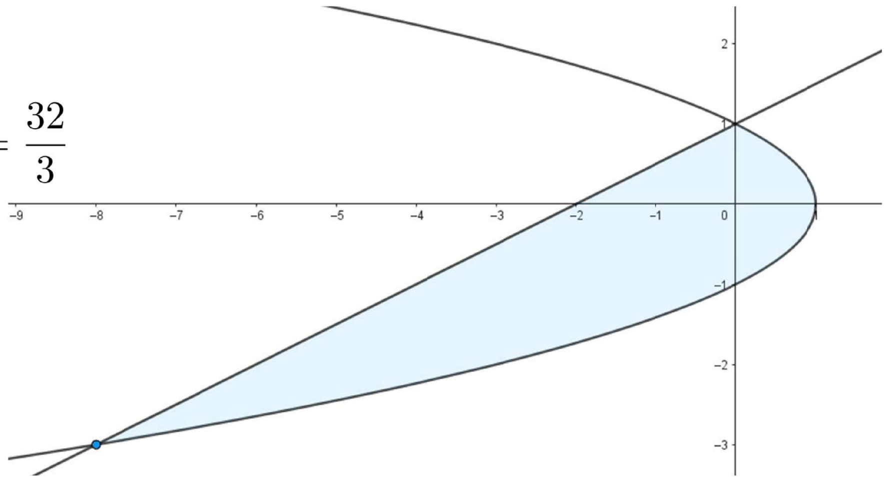
- Región horizontalmente simple

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 2y - 2 \leq x \leq 1 - y^2 \\ -3 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \int_{-3}^{1} \int_{2y-2}^{1-y^2} dx\, dy$$

$$= \int_{-3}^{1} (1 - y^2 - (2y - 2))\, dy$$

$$= \int_{-3}^{1} (3 - y^2 - 2y)\, dy = \frac{32}{3}$$

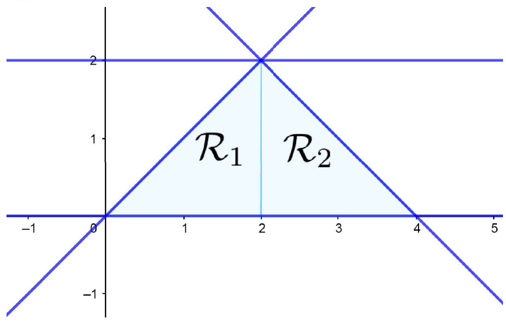


Ejemplo: Dibuja la región $\mathcal{R}$ cuya área representa la integral iterada. Calcular dicha área, cambiando previamente el orden de integración.

$$\int_0^2 \int_0^x dydx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dydx$$

$$\mathcal{R}_1 = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases} \qquad \mathcal{R}_2 = \begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 4 - x \end{cases}$$

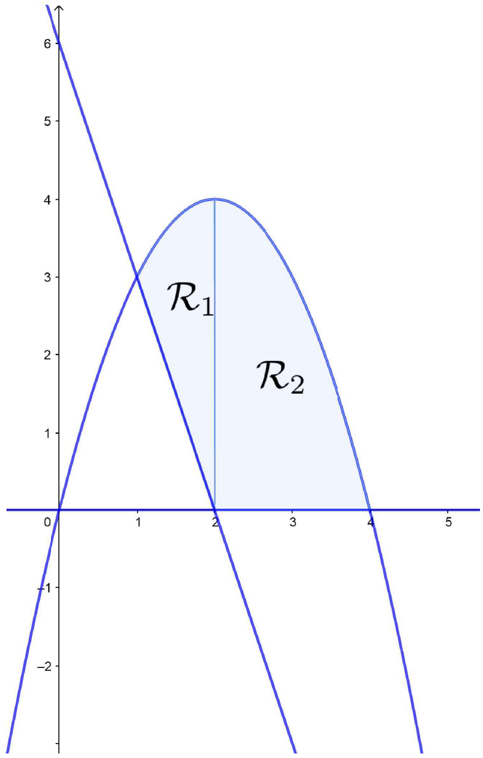
$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = \begin{cases} y \leq x \leq 4 - y \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$



$$\int_0^2 \int_0^x dydx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dydx = \int_0^2 \int_y^{4-y} dxdy$$

$$= \int_0^2 [x]_y^{4-y}\, dy \quad = \int_0^2 (4 - 2y)\, dy = \left[4y - y^2\right]_0^2 = 4$$

Ejemplo: Calcular el área de la región $\mathcal{R}$ situada bajo $y = 4x - x^2$, sobre el eje x y por encima de la recta $y = -3x + 6$.



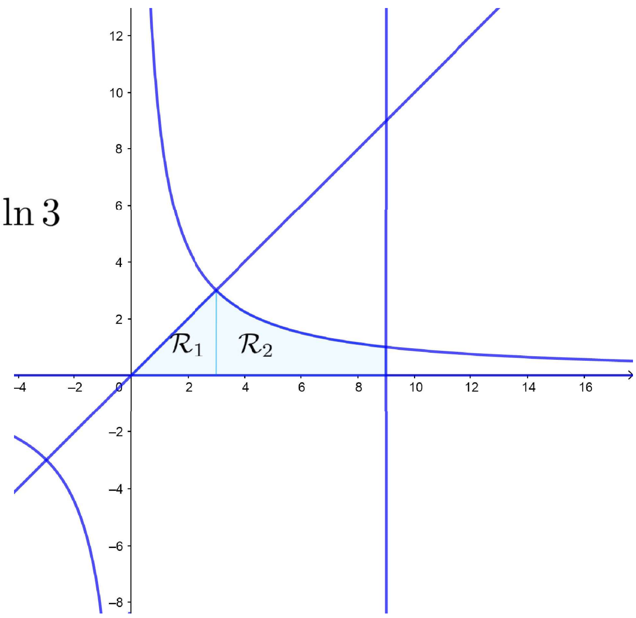
$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \text{Área}(\mathcal{R}_1) + \text{Área}(\mathcal{R}_2)$$

$$= \int_1^2 \int_{-3x+6}^{4x-x^2} dy\,dx + \int_2^4 \int_0^{4x-x^2} dy\,dx = \frac{15}{2}$$

$$\mathcal{R}_1 = \begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ -3x+6 \le y \le 4x - x^2 \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_2 = \begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 4x - x^2 \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular el área de la región $\mathcal{R}$ acotada por las gráficas $xy = 9$, $y = x$, $y = 0$ y $x = 9$



$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \text{Área}(\mathcal{R}_1) + \text{Área}(\mathcal{R}_2)$$

$$= \int_0^3 \int_0^{x} dy\,dx + \int_3^9 \int_0^{9/x} dy\,dx = \frac{9}{2} + 9\ln 3$$

$$\mathcal{R}_1 = \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le x \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_2 = \begin{cases} 3 \le x \le 9 \\ 0 \le y \le \dfrac{9}{x} \end{cases}$$