ESCUELA POLITÉCNICA SUPERIOR
DE SEVILLA

MATEMÁTICAS II

Boletín 2 - Integrales impropias. Integración Numérica

1. Estudiar la convergencia de las siguientes integrales impropias. En caso de convergencia, determine su valor.

   $a)\ \int_0^{\infty} e^{-x}dx \qquad b)\ \int_{-\infty}^{0} x^2e^{-x}dx \qquad c)\ \int_0^{8} \frac{1}{(8-x)^{\frac{1}{3}}}dx \qquad d)\ \int_0^{2} \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}}dx$

   $d)\ \int_0^{2} \frac{1}{(x-1)^{\frac{4}{3}}}dx \qquad e)\ \int_0^{1} \frac{6}{x-1}dx \qquad f)\ \int_1^{\infty} \frac{e^{\frac{-1}{x}}}{x^2}dx \qquad g)\ \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx$

   $h)\ \int_{-1}^{2} \frac{1}{x^2}dx \qquad i)\ \int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx \qquad j)\ \int_1^{+\infty} (1-x)e^{-x}\,dx \qquad k)\ \int_{\frac{1}{3}}^{+\infty} \frac{1}{1+9x^2}dx$

   $l)\ \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx \qquad m)\ \int_0^{1} x\ln x dx \qquad n)\ \int_e^{\infty} \frac{dx}{x\,(\ln x)^2} \qquad o)\ \int_0^{\infty} e^{-x}\text{sen}x dx$

   $p)\ \int_0^{\infty} \cos^2 x dx \qquad q)\ \int_1^{\infty} \frac{4x-8}{x^3+7x^2+15x+9}dx \qquad r)\ \int_1^{\infty} \frac{2+x}{x(1+x^2)}dx$

2. Explicar por qué es impropia la integral $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ y calcularla.

3. Calcular la integral definida $\int_0^{2} 2x^3\cos x^2 dx$, usando la regla de Barrow y empleando el método de los trapecios para $n = 4$.

4. Dada la función $f(x) = (x-3)e^x$, aproximar el valor de la integral $\int_1^{1,5} f(x)dx$ mediante el método de los trapecios con $n = 5$. Redondear los cálculos a cuatro cifras decimales.

5. Aproxima, usando el método de los trapecios con $n = 5$, la integral $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\cos^2 x}\,dx$. Redondear los cálculos con tres cifras decimales.

6. Calcular $\int_0^{1} \sqrt{1+x}$, aproximando su valor con la regla de los trapecios con $n = 2$, y acotar el error cometido.

7. Dada la integral $\int_0^{1} \frac{3x+5}{(x+1)(x^2+1)}dx$, se pide:
   a) Obtener su valor exacto
   b) Obtener un valor aproximado usando el método de los trapecios con $n = 3$.

8. Aproximar $\int_0^{2} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx$ utilizando la regla de Simpson con $n = 4$. Redondear los cálculos a cuatro cifras decimales.

9. Utilizar la Regla de Simpson con $n = 4$, para aproximar el valor de la integral $\int_0^{3} \frac{1}{1+4x}dx$

10. Dada la función $h(x) = \operatorname{sen}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)\cos(2x)$ se pide:

    a) Calcular $\int_0^{\pi} h(x)dx$ de forma exacta.

    b) Utilizar la Regla de Simpson con $n = 2$ para dar un valor aproximado de $\displaystyle\int_0^{\pi} h(x)dx$.

11. Dada la función $h(x) = \dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen}^3 x}$ se pide:

    a) Calcular $\int h(x)dx$

    b) Utilizar la Regla de Simpson con $n = 2$ para dar un valor aproximado de $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} h(x)dx$.

12. Aproximar, mediante el método de los trapecios y el de Simpson con $n = 4$, el valor de $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{1+x^2}dx$.

13. Aproximar el valor de la integral para el n que se especifica con la regla de los trapecios y la regla de Simpson. Redondear a cuatro decimales y comparar los resultados con el valor exacto de la integral.

    a) $\displaystyle\int_4^9 \sqrt{x}dx$, $n = 8$ b) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{(x+1)^2}dx$ $n = 4$

14. Estimar el máximo error posible al aproximar la integral $\displaystyle\int_1^3 x^3dx$, con $n = 4$, mediante:

    a) La regla de los trapecios, b) La regla de de Simpson.

15. Siendo $f(x) = \dfrac{2+x}{x(1+x^2)}$. Utilizar el método de los trapecios o el método de Simpson, con $n = 2$, para aproximar la integral $\displaystyle\int_1^5 f(x)dx$

SOLUCIONES

1. a) 1 b) diverge c) 6 d)diverge e) diverge f) $1 - \frac{1}{e}$

   g) 2 h) diverge i) 2 j) $-\frac{1}{e}$ k) 0,196 l) $\frac{1}{2}$ m) $-\frac{1}{4}$

   n) 1 o) $\frac{1}{2}$ p) diverge q) 0 r) $-3\ln 2 + 5/2$

2. π. La función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ no está definida en $x = -1$ y $x = 1$.

3. a) $-4{,}6809$ b) $-4.\,073\,2$

4. $-3{,}0490$

5. 1,910

6. $L \simeq 1{,}22$, $E \leq 0{,}005$

7. Exacto: 3,48817 Trapecios: 3,4859

8. 1,4052

9. 0,69065

10. Exacto: 1,36032 Simpson: 2,72069

11. $I = \dfrac{1}{4}\ln\left(\dfrac{\cos x + 1}{1 - \cos x}\right) + \dfrac{1}{2}\dfrac{\cos x}{\cos^2 x - 1}$ Simpson=0.74048.

12. a) Trapecios: 2,976 5 b) Simpson: 2,9579
13. a) Trapecios: 12.6640 Simpson: 12.6667 Exacto: 12.6667
    b) Trapecios: 0.1676 Simpson: 0.1667 Exacto: 0.1667
14. a) 0.75 b) 0.0000
15. Trapecios: 1,88718 Simpson: 1,48034