MATEMÁTICAS II

Grado en Ingeniería Eléctrica

Boletín 5 - Análisis vectorial

Escuela Politécnica Superior de Sevilla

1. En los siguientes apartados, averiguar si los campos vectoriales son o no conservativos. En caso afirmativo, determinar una función potencial asociada.

   a) $\mathbf{F}(x,y) = 2xy\ \mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

   b) $\mathbf{F}(x,y) = e^x(\cos y\ \mathbf{i} + \text{sen } y\, \mathbf{j})$

   c) $\mathbf{F}(x,y,z) = e^z\ \mathbf{i} + \cos xy\mathbf{j} - x\mathbf{k}$

   d) $\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{y}\mathbf{i} - \dfrac{x}{y^2}\mathbf{j} - (2z-1)\mathbf{k}$

   e) $\mathbf{F}(x,y) = (2x(y+1) + e^x\cos y)\ \mathbf{i} + \big(x^2 - e^x\text{sen } y\big)\ \mathbf{j}$

   f) $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$

   g) $\mathbf{F}(x,y,z) = e^z(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$

   h) $\mathbf{F}(x,y) = 2xy^3\mathbf{i} + 3x^2y^2\mathbf{j}$

   i) $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{i} + \dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{j}$

   j) $\mathbf{F}(x,y) = (2x-2y)\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$

   k) $\mathbf{F}(x,y,z) = \text{sen} y\mathbf{i} - x\cos y\mathbf{j} + \mathbf{k}$

   l) $\mathbf{F}(x,y,z) = e^z(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k})$

   m) $\mathbf{F}(x,y,z) = 3x^2y^2z\mathbf{i} + 2x^3yz\mathbf{j} + x^3y^2\mathbf{k}$

2. En los siguientes apartados, calcular $\displaystyle\int_C f\,ds$ a lo largo de la curva C indicada.

   a) $\displaystyle\int_C 4xy\,ds$ $\quad C:\quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j},\quad 0 \le t \le 1.$

   b) $\displaystyle\int_C (x^2+y^2+z^2)\,ds$ $\quad C:\quad \mathbf{r}(t) = \text{sen } t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 8t\mathbf{k},\quad 0 \le t \le \pi/2.$

   c) $\displaystyle\int_C (xy+y^3)\,ds$ $\quad C:$ Eje y, desde $y=1$ hasta $y=10$.

   d) $\displaystyle\int_C (x^2+y^2)\,ds$ $\quad C:$ arco de la circunferencia $x^2+y^2=4$ que va desde $(2,0)$ a $(0,-2)$

   e) $\displaystyle\int_C (x+3y)\,ds$ $\quad C:\quad \mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i}, & 0\le t\le 3\\ 3\mathbf{i}+(t-3)\mathbf{j}, & 3\le t\le 6\\ (9-t)\mathbf{i}+(9-t)\mathbf{j}, & 6\le t\le 9\end{cases}$

   f) $\displaystyle\int_C (x+4\sqrt{y})\,ds$ $\quad C:$ el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj.

3. En los siguientes apartados, calcular $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva C indicada.

a) $\mathbf{F}(x,y) = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ $\quad C: \quad \mathbf{r}(t) = 4t\,\vec{\mathbf{i}} + t\,\vec{\mathbf{j}}, \quad 0 \le t \le 1.$

b) $\mathbf{F}(x,y) = 3x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$ $\quad C: \quad \mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\vec{\mathbf{i}} + 2\operatorname{sen} t\,\vec{\mathbf{j}}, \quad 0 \le t \le \pi/2.$

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2y\mathbf{i} + (x-z)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ $\quad C: \quad \mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1.$

d) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ $\quad C: \quad \mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2.$

e) $\mathbf{F}(x,y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2+y^2)\,\mathbf{j}.$ $\quad C:$ arco de la elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ que va desde el punto $(5,0)$ a $(0,4)$.

f) $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + (x+y^2)\mathbf{j}$ $\quad C: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi/2.$

g) $\mathbf{F}(x,y) = xy\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j}$ $\quad C:$ circunferencia $x^2 + y^2 = 4$

h) $\mathbf{F}(x,y) = (x^{3/2} - 3y)\mathbf{i} + (6x + 5\sqrt{y})\mathbf{j}$ $\quad C:$ frontera del triángulo de vértices $(0,0),\ (5,0),\ (0,5)$.

4. Calcular $\displaystyle\int_C (2x-y)dx + (x+3y)dy$, siendo C:

   a) el arco de parábola $y = 2x^2$ que va desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(2,8)$.

   b) Eje x, desde $x = 0$ hasta $x = 5$.

   c) Segmentos rectos de $(0,0)$ a $(0,-3)$ y de $(0,-3)$ a $(2,-3)$.

   d) El arco elíptico $x = 4\operatorname{sen} t$, $y = 3\cos t$, desde $(0,3)$ hasta $(4,0)$.

5. Calcular la integral de línea del campo vectorial, $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, en los siguientes casos:

   a) $\mathbf{F}(x,y) = (x^4 + 4xy^3)\mathbf{i} + (6x^2y^2 - 5y^4)\mathbf{j}$ $\quad C: \quad \mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi/2.$

   b) $\mathbf{F}(x,y) = e^x \operatorname{sen} y\mathbf{i} + (e^x\cos y + 3y)\mathbf{j}$ $\quad C:$ segmento de recta que va desde el punto $(0,-\pi)$ al punto $(0,\pi)$.

SOLUCIONES

1. a) $\mathbf{F}(x,y)$ es conservativo en todo el plano. Una función potencial es $f(x,y)=x^2y$.
   b) $\mathbf{F}(x,y)$ no es conservativo.
   c) $\mathbf{F}(x,y,z)$ no es conservativo.
   d) $\mathbf{F}(x,y,z)$ es conservativo en todo disco abierto que no contenga al plano $y=0$. Una función potencial es $f(x,y,z)=\dfrac{x}{y}-z^2+z$.
   e) $\mathbf{F}(x,y)$ es conservativo en todo el plano. Una función potencial es $f(x,y)=x^2(y+1)+e^x\cos y$.
   f) $\mathbf{F}(x,y)$ es conservativo en todo disco abierto que no contenga al origen. Una función potencial es $f(x,y)=\dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.
   g) $\mathbf{F}(x,y,z)$ es conservativo en todo el plano. Una función potencial es $f(x,y,z)=e^zxy$.
   h) $\mathbf{F}(x,y)$ es conservativo en todo el plano. Una función potencial es $f(x,y)=x^2y^3$.
   i) $\mathbf{F}(x,y)$ es conservativo en todo el plano. Una función potencial es $f(x,y)=\dfrac{-1}{x^2+y^2}$.
   j) $\mathbf{F}(x,y)$ es conservativo en todo el plano. Una función potencial es $f(x,y)=x^2-2xy$.
   k) $\mathbf{F}(x,y,z)$ no es conservativo.
   l) $\mathbf{F}(x,y,z)$ no es conservativo.
   m) $\mathbf{F}(x,y,z)$ es conservativo en todo el espacio. Una función potencial es $f(x,y,z)=x^3y^2z$.

2. -
   a) $\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ b) $\sqrt{65}\pi\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{8}{3}\pi^2\right)$ c) $\dfrac{9999}{4}$
   d) 4π e) $27+18\sqrt{2}$ f) $\dfrac{19}{6}(1+\sqrt{2})$

3. -
   a) $35/6$ b) 2 c) $-\dfrac{17}{15}$ d) $\dfrac{\pi^6}{192}$
   e) $\dfrac{64}{3}$ f) $\dfrac{\pi^2}{8}-\dfrac{3}{4}$ g) 4π h) $\dfrac{225}{2}$

4. -
   a) $\dfrac{316}{3}$ b) 25 c) $47/2$ d) $\dfrac{5}{2}-6\pi$

5. a) $\mathbf{F}(x,y)=(x^4+4xy^3)\mathbf{i}+(6x^2y^2-5y^4)\mathbf{j}$ es conservativo y $f(x,y)=\dfrac{x^5}{5}+2x^2y^3-y^5$ es una función potencial.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=f(0,1)-f(1,0)=\frac{4}{5}.$$

   b) $\mathbf{F}(x,y)=e^x\text{sen }y\mathbf{i}+(e^x\cos y+3y)\mathbf{j}$ es conservativo y $f(x,y)=e^x\text{sen }y+\dfrac{3}{2}y^2$ es una función potencial.

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}=f(0,\pi)-f(0,-\pi)=0.$$