Tema 4 – Quinta Parte

Integrales Triples

Coordenadas Cilíndricas

Coordenadas Esféricas

Coordenadas Cilíndricas y Coordenadas Esféricas

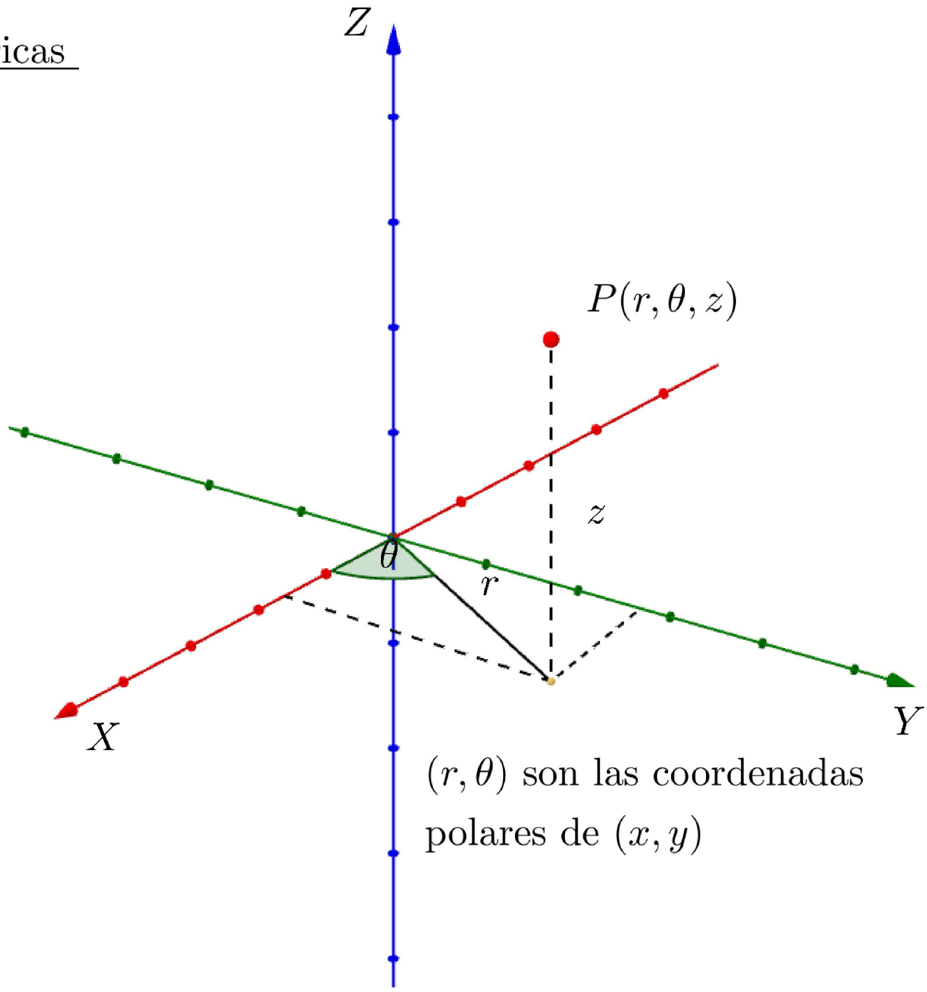
Un punto del espacio puede caracterizarze mediante

- Coordenadas Rectangulares: (x, y, z)
- Coordenadas Cilíndricas: (r, θ, z)
- Coordenadas Esféricas: (ρ, θ, ϕ)

Coordenadas Cilíndricas

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \operatorname{sen}\,\theta = \dfrac{y}{r} \\ z = z \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} r^2 = x^2 + y^2 \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{array}\right\}$$



- Cambiar de Coordenadas Cilíndricas a Coordenadas Rectangulares:

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\ \operatorname{sen}\,\theta = \dfrac{y}{r} \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\,\theta \\ z = z \end{array}}$$

- Cambiar de Coordenadas Rectangulares a Coordenadas Cilíndricas:

$$\left.\begin{array}{l} r^2 = x^2 + y^2 \\ \operatorname{tg}\theta = \dfrac{y}{x} \\ z = z \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) \quad (\text{si } x > 0) \\ z = z \end{array}}$$

θ no es único

Descripción de Superficies en Coordenadas Cilíndricas

- Cilindro centrado en el origen

$$x^2 + y^2 = k^2 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta = k^2 \Rightarrow r^2 = k^2$$

$$\boxed{r = k}$$

- Paraboloide centrado en el origen

$$z = x^2 + y^2 \Rightarrow z = r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta \Rightarrow z = r^2$$

$$\boxed{z = r^2}$$

- Cono centrado en el origen

$$z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow z^2 = r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta \Rightarrow z^2 = r^2$$

$$\boxed{z = r}$$

Descripción de Superficies en Coordenadas Cilíndricas

- Esfera centrada en el origen

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta + z^2 = k^2$$

$$\boxed{r^2 + z^2 = k^2}$$

- Plano horizontal

$$z = k \Rightarrow \boxed{z = k}$$

- Planos verticales

$$x = k \Rightarrow r\cos\theta = k \Rightarrow \boxed{r = \frac{k}{\cos\theta}}$$

$$y = k \Rightarrow r\text{sen}\theta = k \Rightarrow \boxed{r = \frac{k}{\text{sen }\theta}}$$

El cambio a coordenadas cilíndricas se suele utilizar para calcular integrales

$$\iiint_Q f(x,y,z)dV$$

en situaciones como las siguientes:

- Q está acotado por esferas, paraboloides, cilindros o conos
- El integrando $f(x,y,z)$ contiene expresiones donde aparece x^2+y^2

Forma cilíndrica del Teorema de Fubini

Sea f una función continua en una región Q del espacio tridimensional.

Si Q se define mediante

$$Q = \{(r,\theta,z) : \theta_1 \le \theta \le \theta_2,\, h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta),\, g_1(r,\theta) \le z \le g_2(r,\theta)\}$$

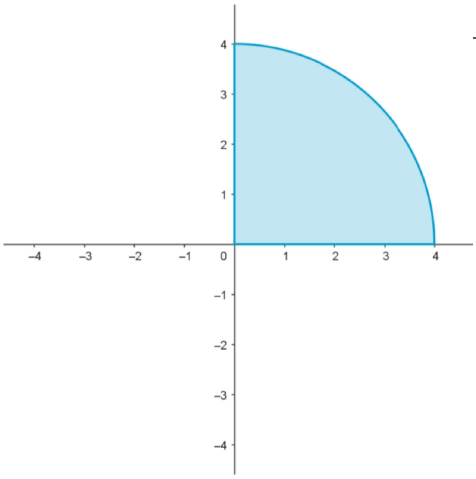
con h_1, h_2, g_1 y g_2 continuas, entonces

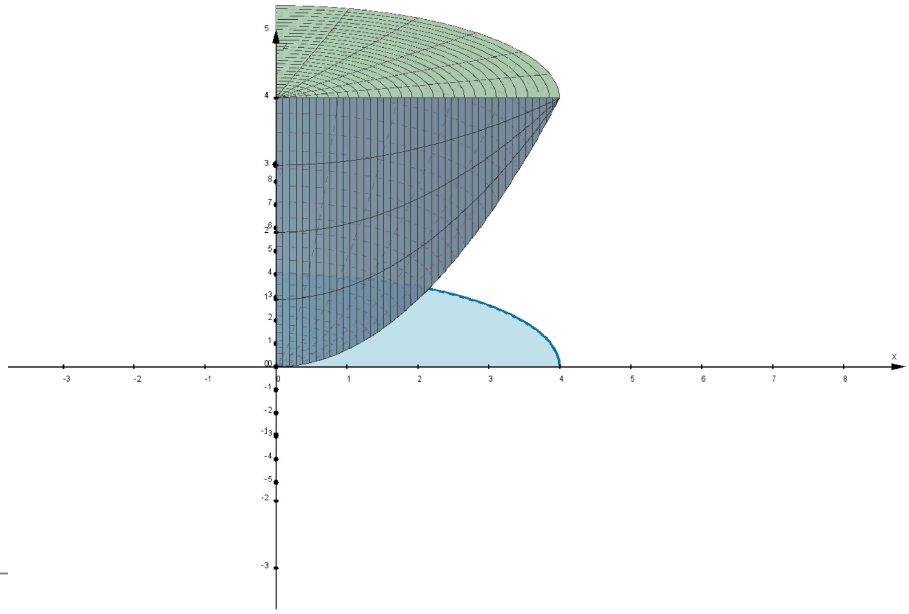
$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2}\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)}\int_{g_1(r,\theta)}^{g_2(r,\theta)} f(r,\theta,z)\boxed{r}\,dzdrd\theta$$

Jacobiano

Ejemplo: Calcular la integral $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^4 dzdydx$ en coordenadas cilíndricas

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & r & \leq 4 \\ 0 \leq & \theta & \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{r^2}{4} \leq & z & \leq 4 \end{cases}$$

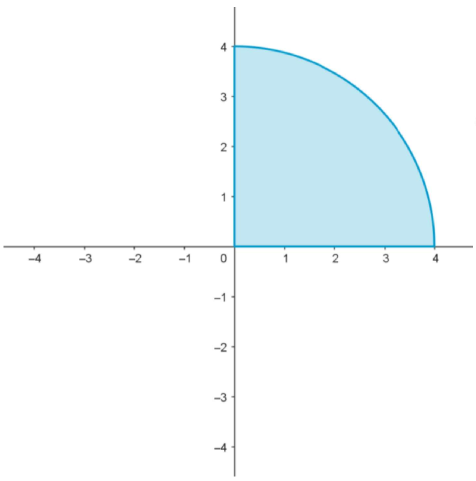


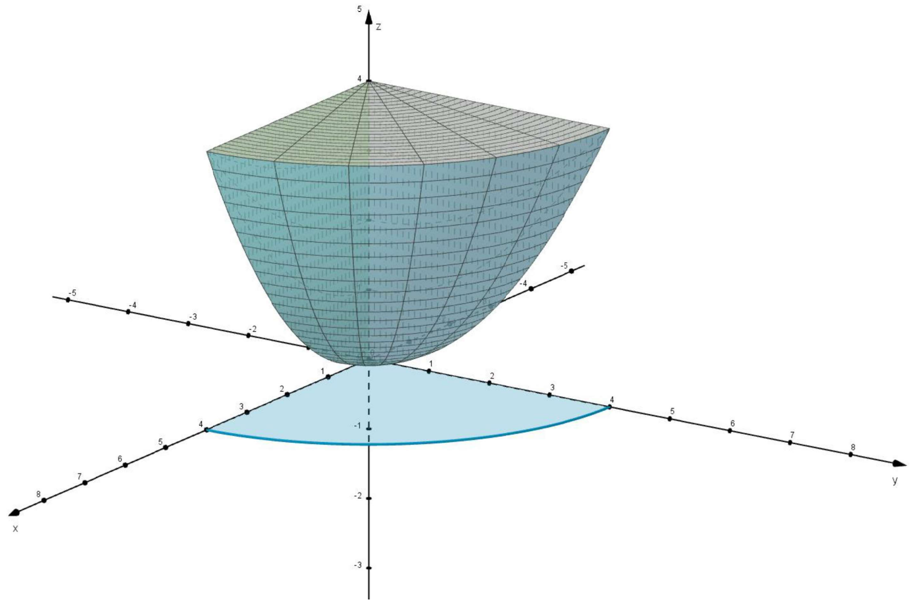


INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

Ejemplo: Calcular la integral $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^4 dzdydx$ en coordenadas cilíndricas

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & r & \leq 4 \\ 0 \leq & \theta & \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{r^2}{4} \leq & z & \leq 4 \end{cases}$$





Ejemplo: Calcular la integral $\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^4 dzdydx$ en coordenadas cilíndricas

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & r & \leq 4 \\ 0 \leq & \theta & \leq \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{r^2}{4} \leq & z & \leq 4 \end{cases}$$

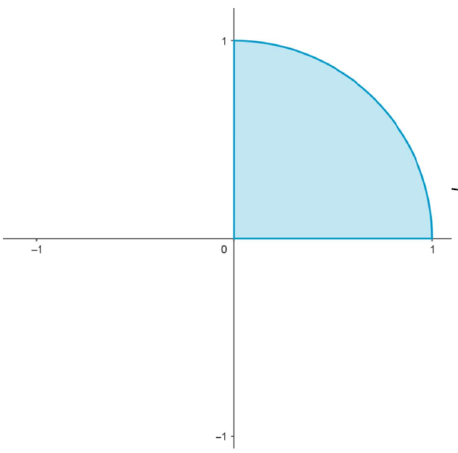
$$\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_{\frac{x^2+y^2}{4}}^4 dzdydx \quad = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \int_{\frac{r^2}{4}}^4 r\, dzdrd\theta$$

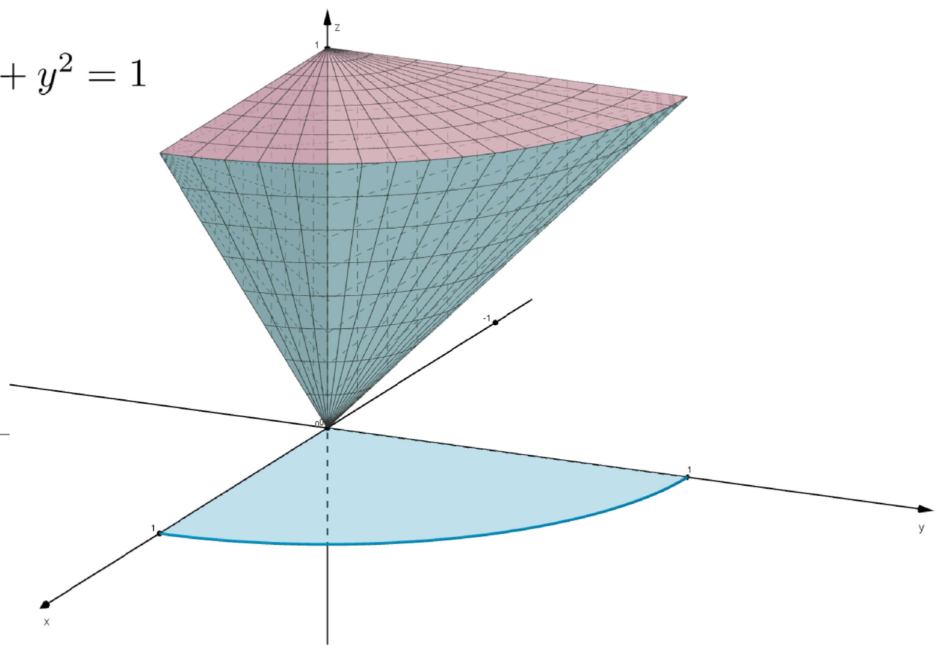
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 r\left(4 - \frac{r^2}{4}\right) drd\theta = 16 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 8\pi$$

Ejemplo: Calcular $\iiint_{\mathcal{Q}} z\sqrt{x^2+y^2}dV$, donde $\mathcal{Q}$ es el sólido, en el primer octante, con la forma determinada por la gráfica del semicono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ y los planos $z = 1$, $x = 0$, $y = 0$.

Intersección

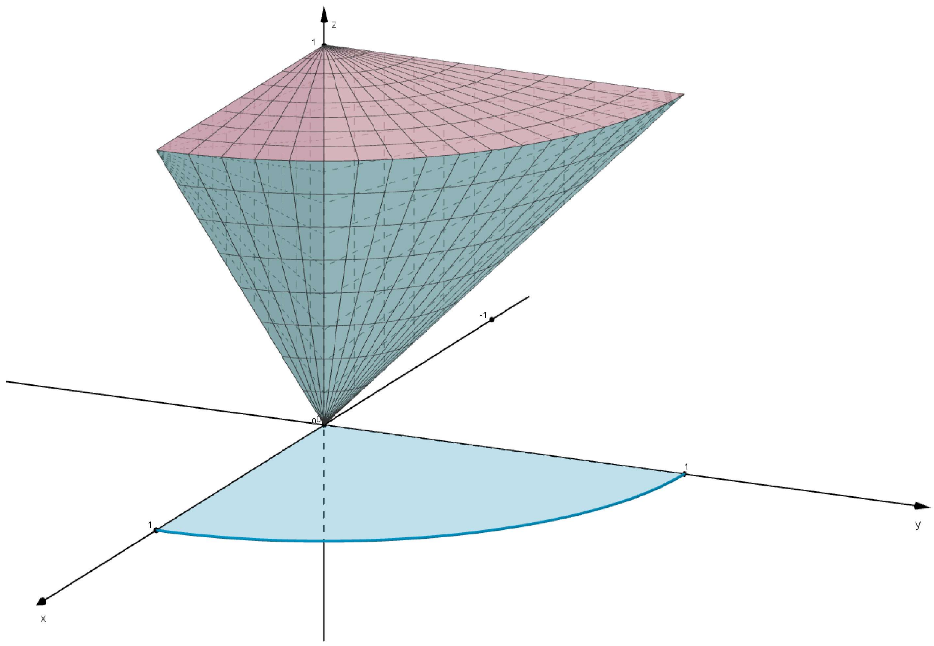
$$\left.\begin{array}{l} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ z = 1 \end{array}\right\} \qquad x^2 + y^2 = 1$$





Ejemplo: Calcular $\iiint_{\mathcal{Q}} z\sqrt{x^2+y^2}dV$, donde $\mathcal{Q}$ es el sólido, en el primer octante, con la forma determinada por la gráfica del semicono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y los planos $z=1$, $x=0$, $y=0$.

$$\mathcal{Q}=\begin{cases} 0\leq & r & \leq 1 \\ 0\leq & \theta & \leq \dfrac{\pi}{2} \\ r\leq & z & \leq 1 \end{cases}$$



Ejemplo: Calcular $\iiint_{\mathcal{Q}} z\sqrt{x^2+y^2}dV$, donde $\mathcal{Q}$ es el sólido, en el primer octante, con la forma determinada por la gráfica del semicono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ y los planos $z=1$, $x=0$, $y=0$.

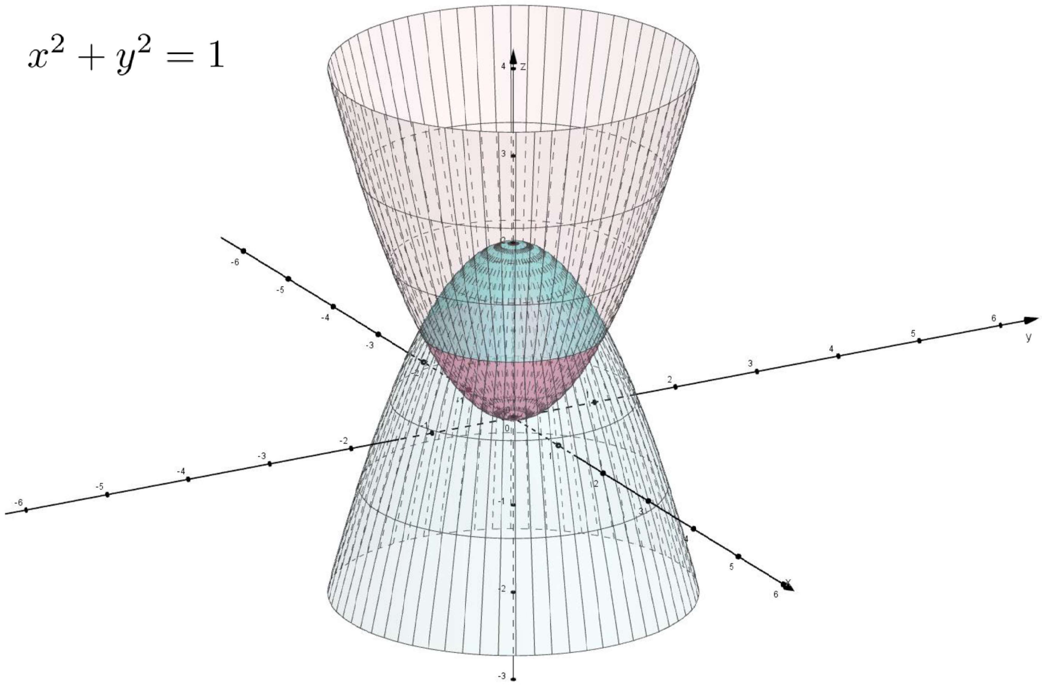
$$\mathcal{Q}=\begin{cases} 0\leq & r & \leq 1 \\ 0\leq & \theta & \leq \dfrac{\pi}{2} \\ r\leq & z & \leq 1 \end{cases}$$

$$\iiint_{\mathcal{Q}} z\sqrt{x^2+y^2}\,dV = \int_0^{\pi/2}\int_0^1\int_r^1 zr\cdot r\,dz\,dr\,d\theta = \frac{\pi}{30}$$

Ejemplo: Calcular la integral $\iiint_{\mathcal{Q}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dV$, donde $\mathcal{Q}$ es la región sólida acotada por los paraboloides $z = x^2+y^2, \quad z = 2-x^2-y^2$

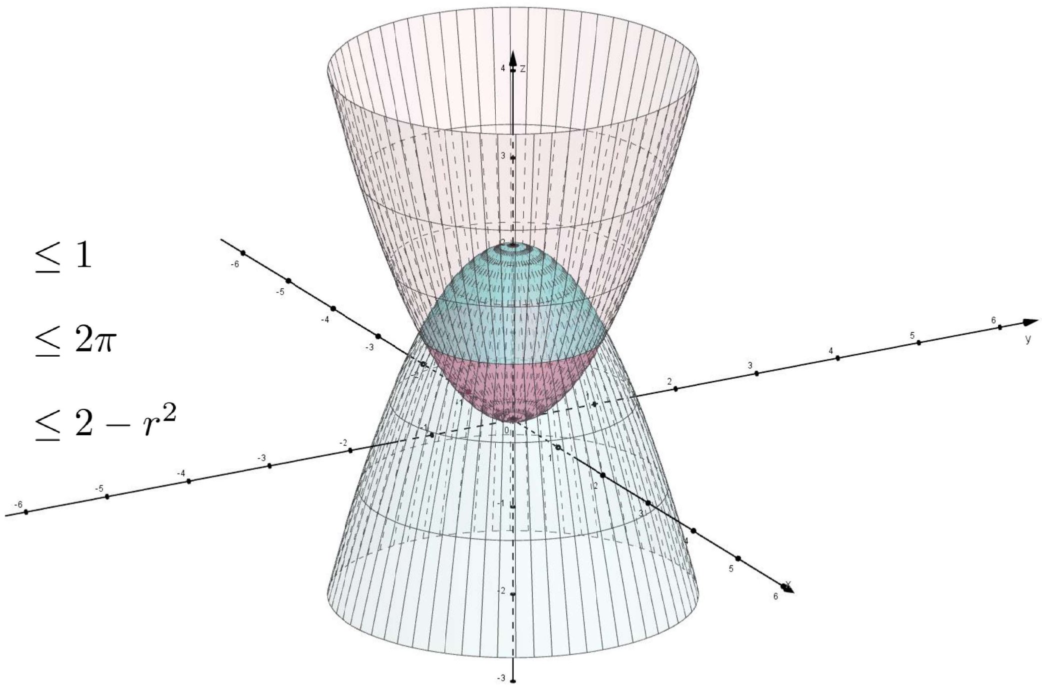
Intersección

$$\left.\begin{array}{l} z = x^2+y^2 \\ z = 2-x^2-y^2 \end{array}\right\} \quad x^2+y^2 = 1$$



Ejemplo: Calcular la integral $\iiint_{\mathcal{Q}} (x^2+y^2)^{3/2}\, dV$, donde $\mathcal{Q}$ es la región sólida acotada por los paraboloides $z = x^2+y^2, \quad z = 2-x^2-y^2$

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \le & r & \le 1 \\ 0 \le & \theta & \le 2\pi \\ r^2 \le & z & \le 2-r^2 \end{cases}$$



INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

Ejemplo: Calcular la integral $\iiint_Q (x^2+y^2)^{3/2}\,dV$, donde Q es la región sólida acotada por los paraboloides $z = x^2+y^2$, $\quad z = 2 - x^2 - y^2$

$$Q = \begin{cases} 0 \leq & r & \leq 1 \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \\ r^2 \leq & z & \leq 2 - r^2 \end{cases}$$

$$\int\!\!\int\!\!\int_Q (x^2+y^2)^{3/2} dV = \int_0^{2\pi}\int_0^1\int_{r^2}^{2-r^2} r^3 \cdot r\,dz\,dr\,d\theta$$

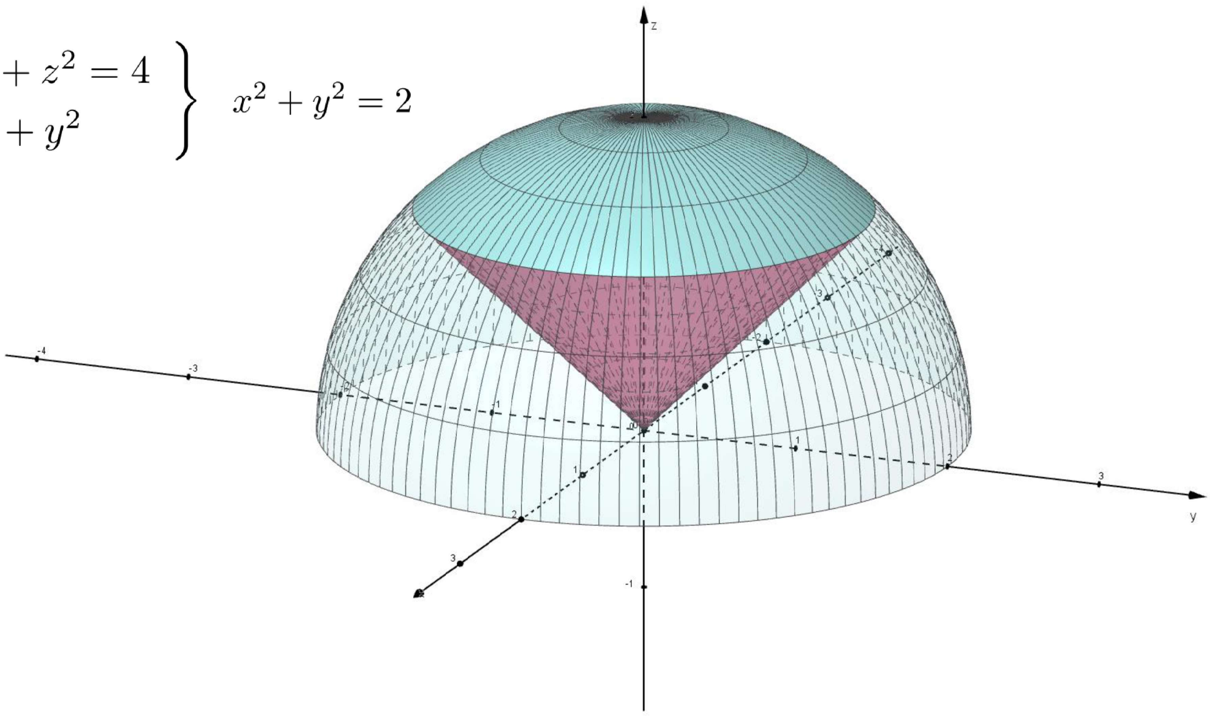
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 \left[r^4 z\right]_{r^2}^{2-r^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4(2-2r^2)\,dr d\theta = \frac{8\pi}{35}$$

INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

Ejemplo: Calcular $\iiint_Q z\,dV$ donde Q es la región sólida interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y por encima del semicono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

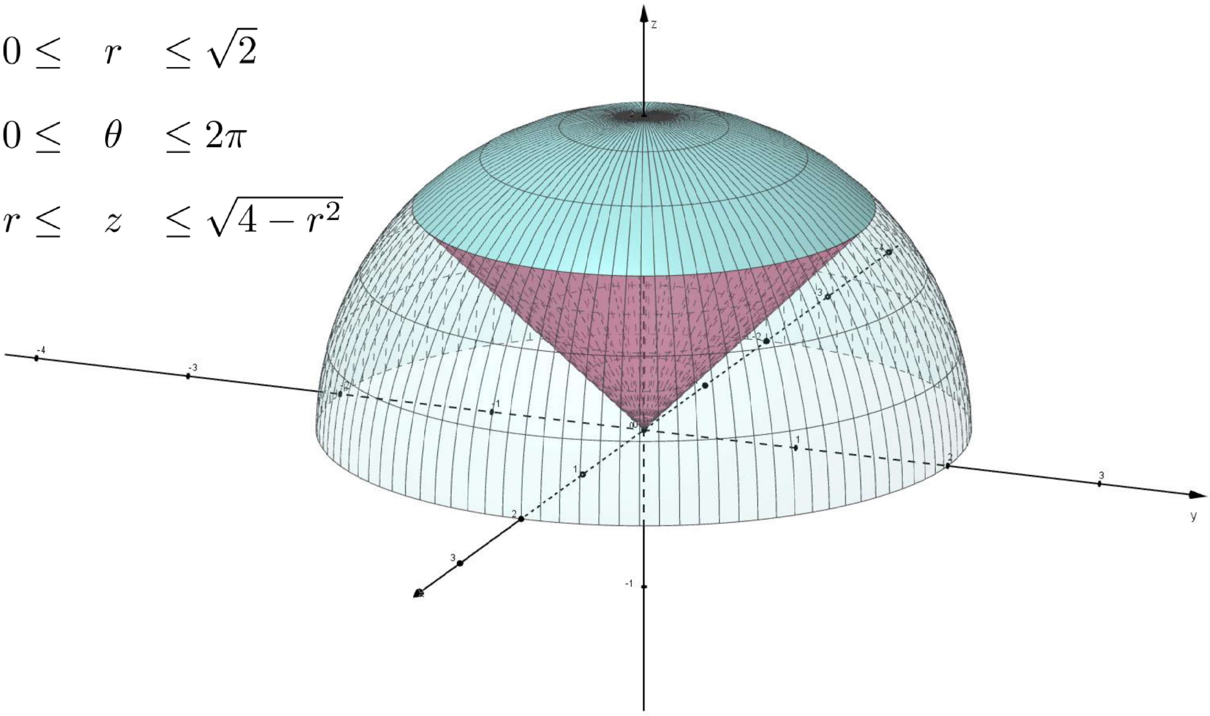
Intersección

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2+z^2=4 \\ z^2 = x^2+y^2 \end{array}\right\} \quad x^2+y^2=2$$



Ejemplo: Calcular $\iiint_{\mathcal{Q}} z\,dV$ donde $\mathcal{Q}$ es la región sólida interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y por encima del semicono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$\mathcal{Q}=\begin{cases} 0\le & r & \le \sqrt{2} \\ 0\le & \theta & \le 2\pi \\ r\le & z & \le \sqrt{4-r^2} \end{cases}$$



Ejemplo: Calcular $\iiint_{\mathcal{Q}} z\,dV$ donde $\mathcal{Q}$ es la región sólida interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y por encima del semicono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

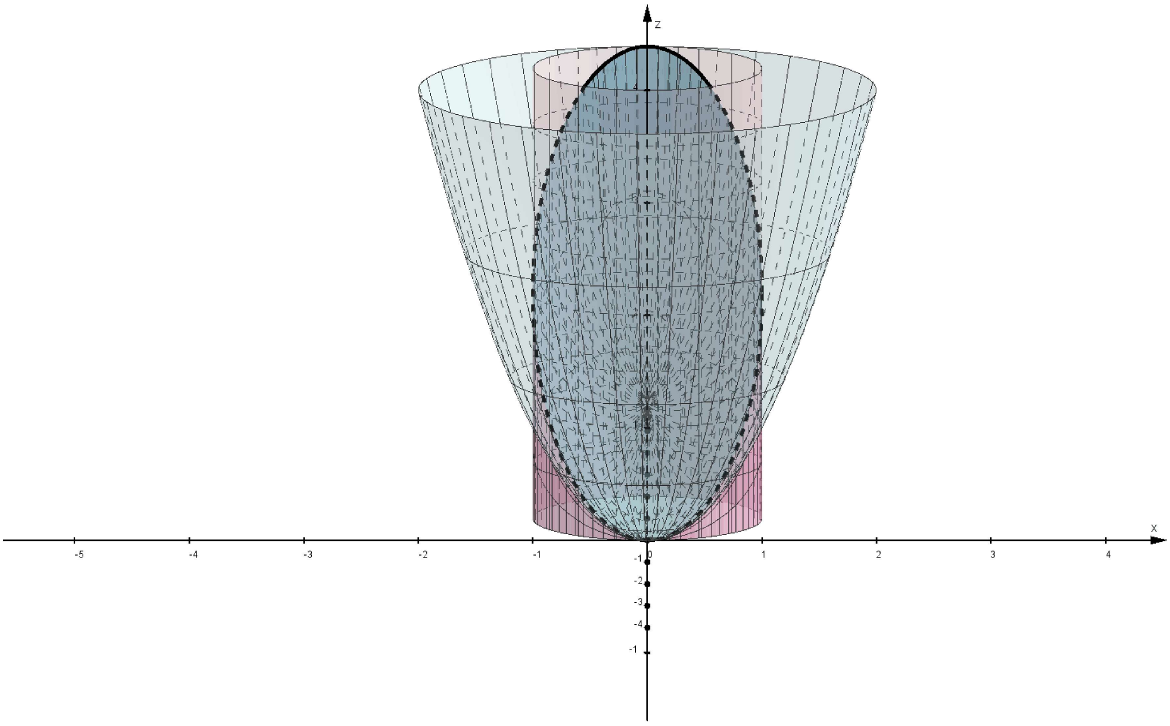
$$\mathcal{Q}=\begin{cases} 0\le & r & \le \sqrt{2} \\ 0\le & \theta & \le 2\pi \\ r\le & z & \le \sqrt{4-r^2} \end{cases}$$

$$\iiint_{\mathcal{Q}} z\,dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{4-r^2}} zr\,dzdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r}{2}\left[z^2\right]_r^{\sqrt{4-r^2}} drd\theta \quad = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \frac{r}{2}\left(4-r^2-r^2\right) drd\theta$$

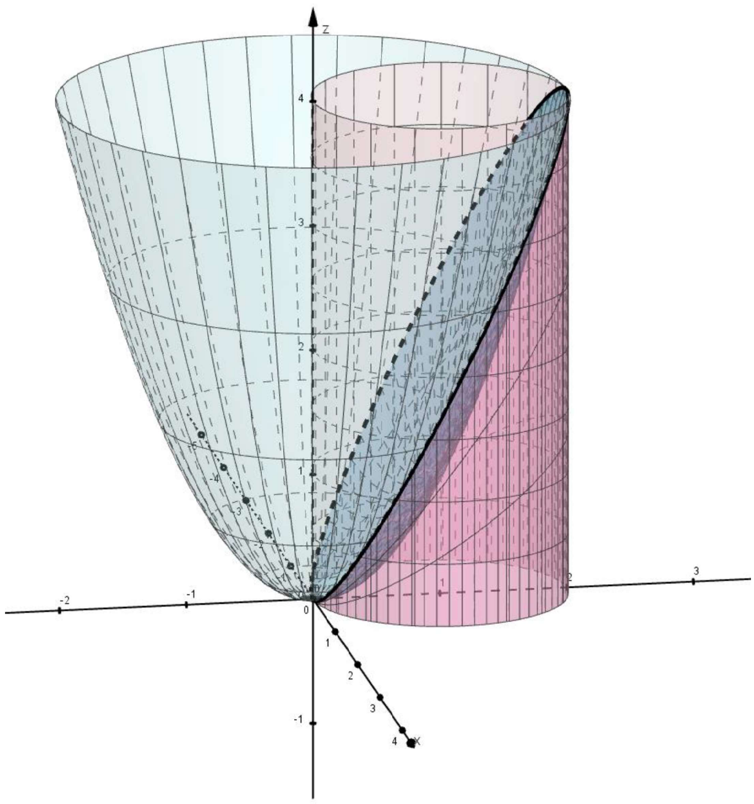
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} \left(2r-r^3\right) drd\theta = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

Ejemplo: Calcular $\iiint_{\mathcal{Q}} \sqrt{x^2+y^2}\, dV$ siendo $\mathcal{Q}$ el sólido interior al cilindro $x^2+y^2=2y$, que está limitado superiormente por el paraboloide $z=x^2+y^2$ e inferiormente por el plano $z=0$.

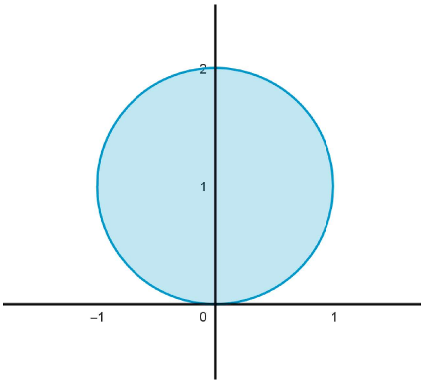


Ejemplo: Calcular $\iiint_{\mathcal{Q}} \sqrt{x^2+y^2}\, dV$ siendo $\mathcal{Q}$ el sólido interior al cilindro $x^2+y^2=2y$, que está limitado superiormente por el paraboloide $z=x^2+y^2$ e inferiormente por el plano $z=0$.

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & r & \leq 2\,\mathrm{sen}\theta \\ 0 \leq & \theta & \leq \pi \\ 0 \leq & z & \leq r^2 \end{cases}$$



$$x^2+(y-1)^2=1$$



INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

Ejemplo: Calcular $\iiint_{\mathcal{Q}} \sqrt{x^2+y^2}\, dV$ siendo $\mathcal{Q}$ el sólido interior al cilindro $x^2+y^2=2y$, que está limitado superiormente por el paraboloide $z=x^2+y^2$ e inferiormente por el plano $z=0$.

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & r & \leq 2\,\text{sen}\theta \\ 0 \leq & \theta & \leq \pi \\ 0 \leq & z & \leq r^2 \end{cases}$$

$$\iiint_{\mathcal{Q}} \sqrt{x^2+y^2} dV = \int_0^{\pi}\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta}\int_0^{r^2} r\cdot r\, dz dr d\theta = \int_0^{\pi}\int_0^{2\,\text{sen}\,\theta} r^4 dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi}\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^{2\,\text{sen}\,\theta} d\theta = \frac{32}{5}\int_0^{\pi}\text{sen}^5\theta\, d\theta = \frac{32}{5}\int_1^{-1} -(1-t^2)^2\, dt = \frac{512}{75}$$

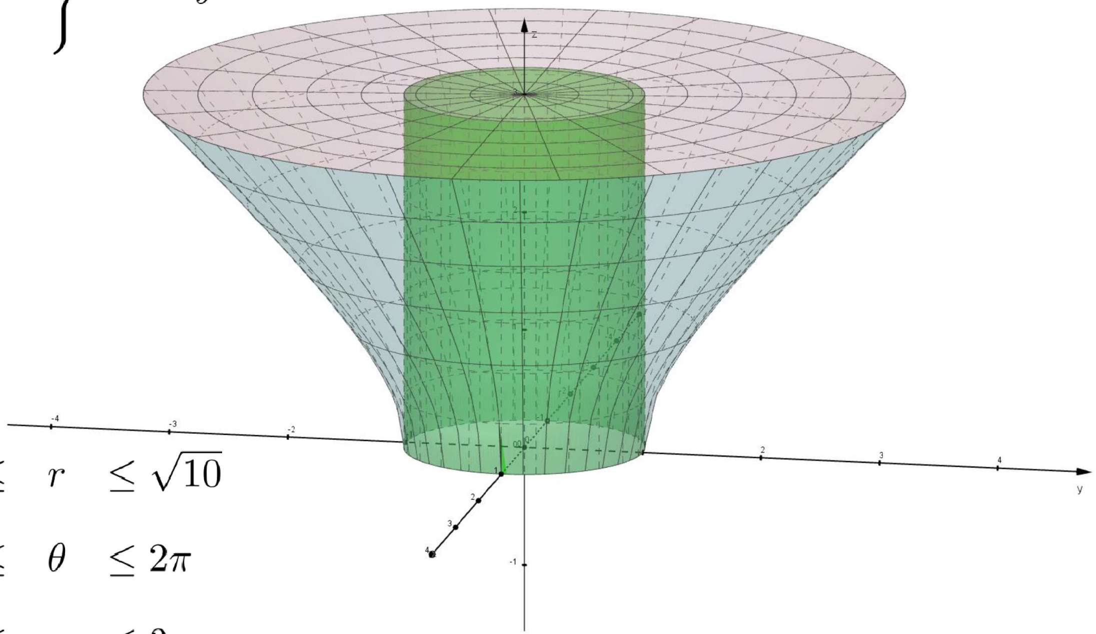
$$t = \cos\theta$$

INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

Ejemplo: Calcular el volumen del sólido acotado por la gráficas $z=0$ y $z=3$, exterior al cilindro $x^2+y^2=1$ e interior al hiperboloide $x^2+y^2-z^2=1$.

Intersección

$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2-z^2=1 \\ z=3 \end{array}\right\} \; x^2+y^2=10$$



$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 1 \leq & r & \leq \sqrt{10} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \\ \sqrt{r^2-1} \leq & z & \leq 3 \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular el volumen del sólido acotado por la gráficas $z = 0$ y $z = 3$, exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e interior al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 1 \leq & r & \leq \sqrt{10} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \\ \sqrt{r^2 - 1} \leq & z & \leq 3 \end{cases}$$

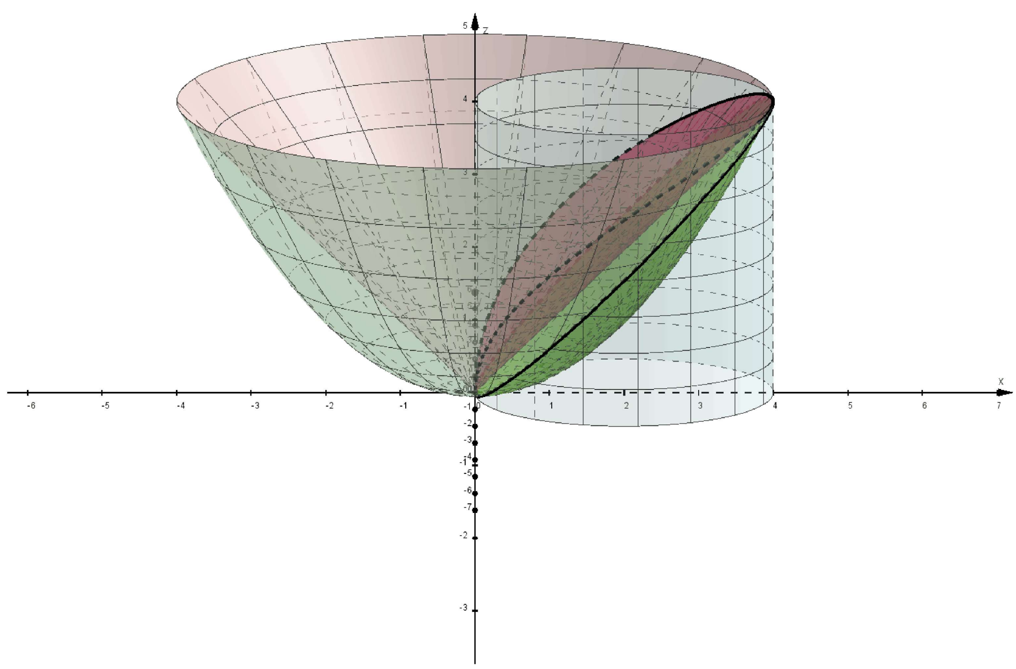
$$V(\mathcal{Q}) = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{10}} \int_{\sqrt{r^2-1}}^3 r dz dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{10}} \left(3r - r\sqrt{r^2 - 1}\right) dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3r^2}{2} - \frac{\sqrt{(r^2-1)^3}}{3}\right]_1^{\sqrt{10}} d\theta = \frac{9}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = 9\pi$$

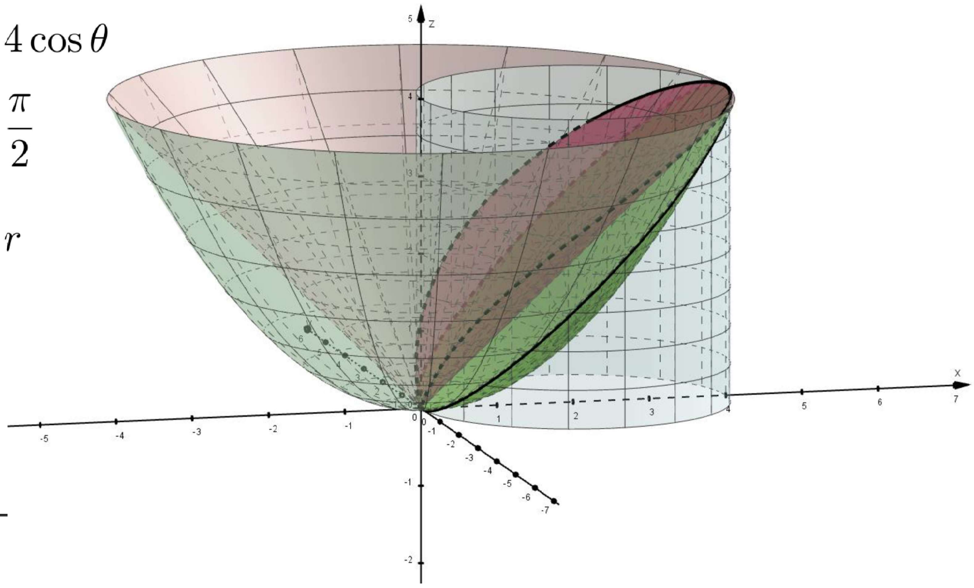
INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

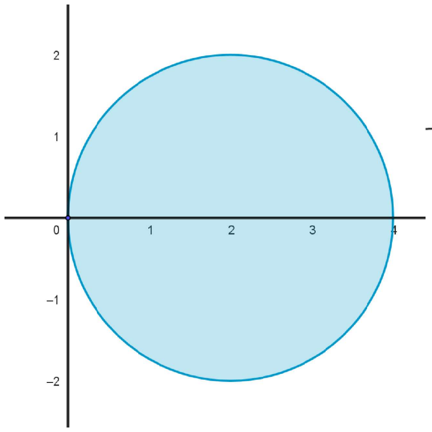
Ejemplo: Calcular el volumen del sólido acotado inferiormente por el paraboloide $4z = x^2 + y^2$, superiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e interior al cilindro $(x-2)^2 + y^2 = 4$.



Ejemplo: Calcular el volumen del sólido acotado inferiormente por el paraboloide $4z = x^2 + y^2$, superiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e interior al cilindro $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \le & r & \le 4\cos\theta \\ -\dfrac{\pi}{2} \le & \theta & \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{r^2}{4} \le & z & \le r \end{cases}$$





INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

Ejemplo: Calcular el volumen del sólido acotado inferiormente por el paraboloide $4z = x^2 + y^2$, superiormente por el cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e interior al cilindro $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \le & r & \le 4\cos\theta \\ -\dfrac{\pi}{2} \le & \theta & \le \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{r^2}{4} \le & z & \le r \end{cases}$$

$$V(\mathcal{Q}) = \iiint_Q dV = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta}\int_{r^2/4}^{r} r\,dz dr d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_0^{4\cos\theta} r\left(r - \frac{r^2}{4}\right) dr d\theta = \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{16}\right]_0^{4\cos\theta} d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{64\cos^3\theta}{3} - 16\cos^4\theta\right] d\theta$$

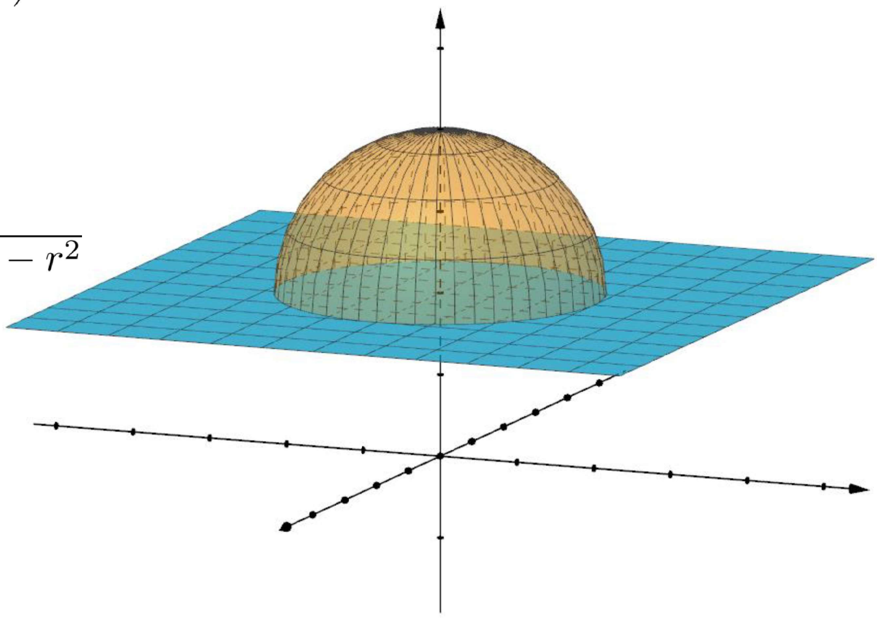
$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\left[\frac{64}{3}(1 - \operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta - \frac{16}{4}(1 + \cos 2\theta)^2\right] d\theta = \frac{256}{9} - 6\pi$$

Ejemplo: Calcular la integral triple

$$\iiint_{\mathcal{Q}} z dV$$

donde $\mathcal{Q}$ es el sólido acotado inferiormente por el plano $z = 1$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & r & \leq 1 \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \\ 1 \leq & z & \leq 1 + \sqrt{1 - r^2} \end{cases}$$



INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

Ejemplo: Calcular la integral triple

$$\iiint_{\mathcal{Q}} z dV$$

donde $\mathcal{Q}$ es el sólido acotado inferiormente por el plano $z = 1$ y superiormente por la esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$.

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & r & \leq 1 \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \\ 1 \leq & z & \leq 1 + \sqrt{1 - r^2} \end{cases}$$

$$\iiint_{Q} z dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^{1+\sqrt{1-r^2}} z\, r\, dz dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left[\frac{(1+\sqrt{1-r^2})^2}{2} - \frac{1}{2} \right] dr d\theta \; = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \left(\sqrt{1-r^2} + \frac{1-r^2}{2} \right) dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[-\frac{(1-r^2)^{3/2}}{3} + \frac{r^2}{4} - \frac{r^4}{8} \right]_0^1 d\theta \; = \int_0^{2\pi} \left(\frac{11}{24} \right) d\theta = \frac{11}{12}\pi$$

Ejemplo: Describir en coordenadas cilíndricas el sólido acotado inferiormente por $z = x^2 + y^2$ y superiormente por $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

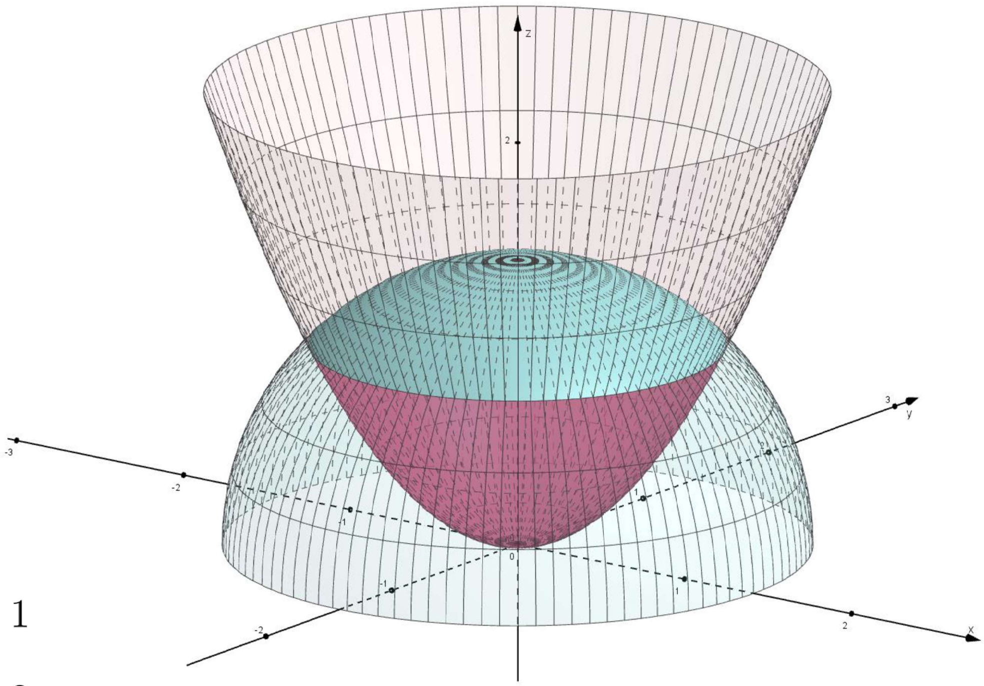
Intersección

$$\left.\begin{aligned} z &= \sqrt{2 - x^2 - y^2} \\ z &= x^2 + y^2 \end{aligned}\right\}$$

$$z + z^2 = 2$$

$z = -2$ $\qquad$ $z = 1$

No vale



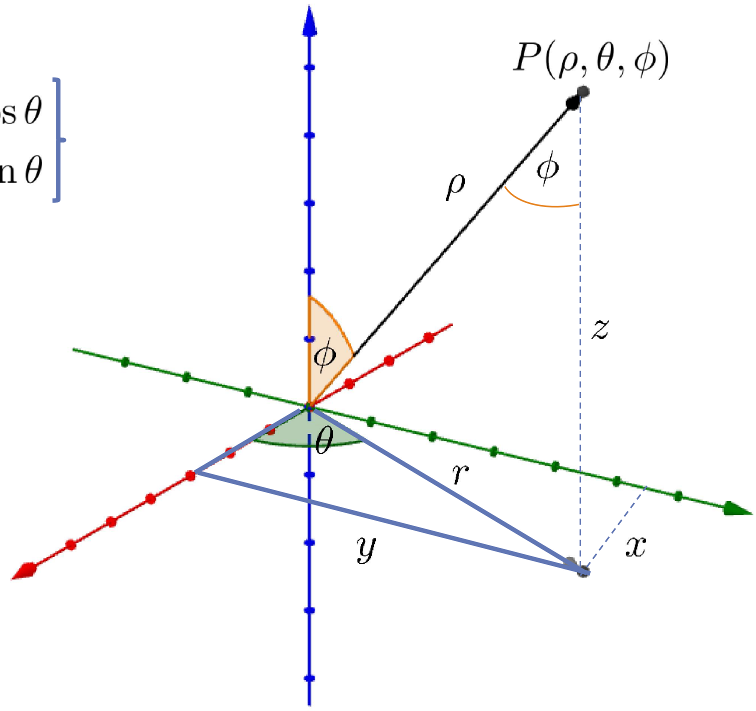
$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & r & \leq 1 \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \\ r^2 \leq & z & \leq \sqrt{2 - r^2} \end{cases}$$

Coordenadas Esféricas

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{sen}\phi &= \frac{r}{\rho} \\ \cos\phi &= \frac{z}{\rho} \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\operatorname{sen}\theta \end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho\operatorname{sen}\phi\cos\theta \\ y &= \rho\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho\cos\phi \end{aligned}}$$



$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$$

$$\cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$0 \leq \rho < +\infty,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi,\ 0 \leq \phi \leq \pi$$

- Cambiar de Coordenadas Esféricas a Coordenadas Rectangulares:

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned}}$$

- Cambiar de Coordenadas Rectangulares a Coordenadas Esféricas:

$$\left.\begin{aligned} \rho^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ \operatorname{tg}\theta &= \frac{y}{x} \\ \cos\phi &= \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} \rho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) \qquad (\text{si } x > 0) \\ \phi &= \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) \end{aligned}$$

INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

Descripción de Superficies en Coordenadas Esféricas

- Esfera centrada en el origen

$$x^2 + y^2 + z^2 = k^2 \Rightarrow \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta + \rho^2 \cos^2\phi = k^2$$

$$\Rightarrow \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi + \rho^2 \cos^2\phi = k^2 \Rightarrow \rho^2 = k^2 \qquad \boxed{\rho = k}$$

- Esfera de centro $(0, 0, a)$ y radio a

$$x^2 + y^2 + (z-a)^2 = a^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2az + a^2 = a^2 \Rightarrow$$

$$\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta + \rho^2 \cos^2\phi - 2a\rho\cos\phi + a^2 = a^2$$

$$\Rightarrow \rho^2 = 2a\rho\cos\phi \qquad \boxed{\rho = 2a\cos\phi}$$

$$\begin{aligned} x &= \rho \operatorname{sen}\phi \cos\theta \\ y &= \rho \operatorname{sen}\phi \operatorname{sen}\theta \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned}$$

Descripción de Superficies en Coordenadas Esféricas

- Cono centrado en el origen

$$z^2 = ax^2 + ay^2 \Rightarrow \rho^2 \cos^2\phi = a\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + a\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\Rightarrow \rho^2 \cos^2\phi = a\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \quad \Rightarrow \operatorname{tg}^2\phi = \frac{1}{a} \qquad \boxed{\phi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{a}}}$$

- Cilindro centrado en el origen

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta = a^2$$

$$\Rightarrow \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi = a^2 \quad \Rightarrow \rho^2 \operatorname{sen}^2\phi = a^2 \qquad \boxed{\rho = \frac{a}{\operatorname{sen}\phi}}$$

Descripción de Superficies en Coordenadas Esféricas

- Paraboloide centrado en el origen

$$z = ax^2 + ay^2 \Rightarrow \rho\cos\phi = a\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + a\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \operatorname{sen}^2\theta$$

$$\Rightarrow \rho\cos\phi = a\rho^2 \operatorname{sen}^2\phi \qquad \boxed{\rho = \frac{\cos\phi}{a\operatorname{sen}^2\phi}}$$

- Plano horizontal

$$z = k \Rightarrow \rho\cos\phi = k \qquad \boxed{\rho = \frac{k}{\cos\phi}}$$

Forma esférica del Teorema de Fubini

Sea f una función continua en una región $\mathcal{Q}$ del espacio tridimensional.

- Si $\mathcal{Q}$ se define mediante

$$\mathcal{Q} = \{(\rho, \theta, \phi) : \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2,\ \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2,\ g_1(\theta, \phi) \leq \rho \leq g_2(\theta, \phi)\}$$

con g_1 y g_2 continuas, entonces

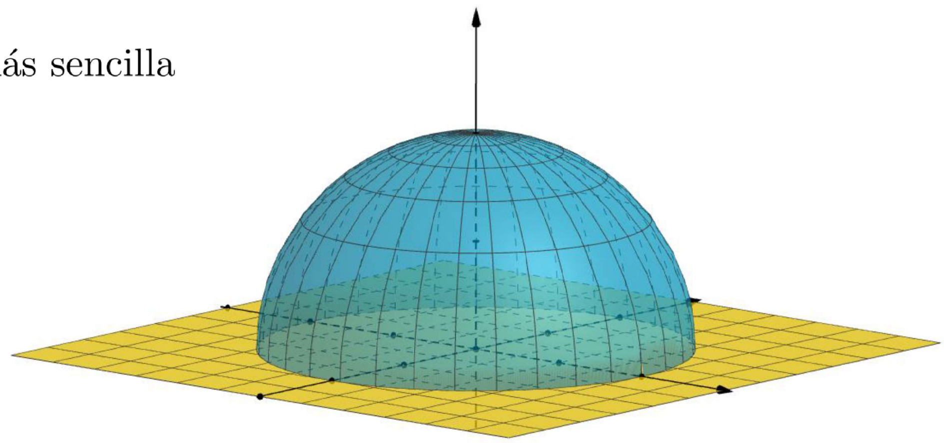
$$\iiint_Q f(x,y,z)dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{g_1(\theta,\phi)}^{g_2(\theta,\phi)} f(\rho,\theta,\phi) \boxed{\rho^2 \operatorname{sen}\phi}\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

Jacobiano

Ejemplo: Pasar la integral a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas.

$$I = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\; dz\; dy\; dx$$

Evaluar la que resulte más sencilla



$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{16-x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{16-x^2-y^2} \end{cases}$$

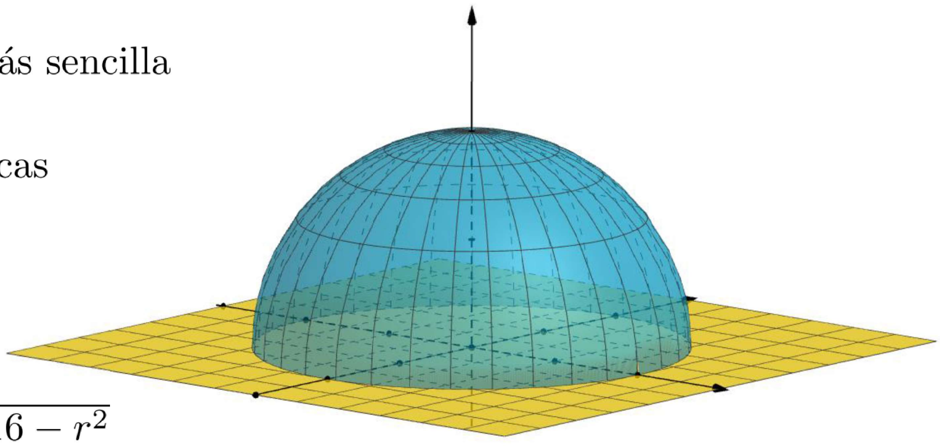
Ejemplo: Pasar la integral a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas.

$$I = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx$$

Evaluar la que resulte más sencilla

- Coordenadas cilíndricas

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & r & \leq 4 \\ 0 \leq & \theta & \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq & z & \leq \sqrt{16-r^2} \end{cases}$$



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r \cdot r dz dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r^2 dz dr d\theta$$

INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

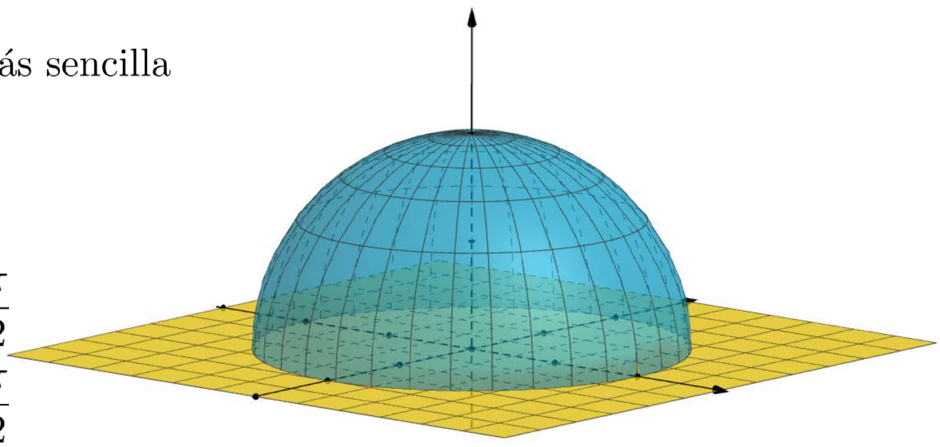
Ejemplo: Pasar la integral a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas.

$$I = \int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dz\, dy\, dx$$

Evaluar la que resulte más sencilla

- Coordenadas esféricas

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & \rho & \leq 4 \\ 0 \leq & \theta & \leq \dfrac{\pi}{2} \\ 0 \leq & \phi & \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^4 \rho \operatorname{sen}\phi \cdot \rho^2 \operatorname{sen}\phi d\rho d\phi d\theta \; = \frac{1}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2\phi \left[\rho^4\right]_0^4 d\phi d\theta$$

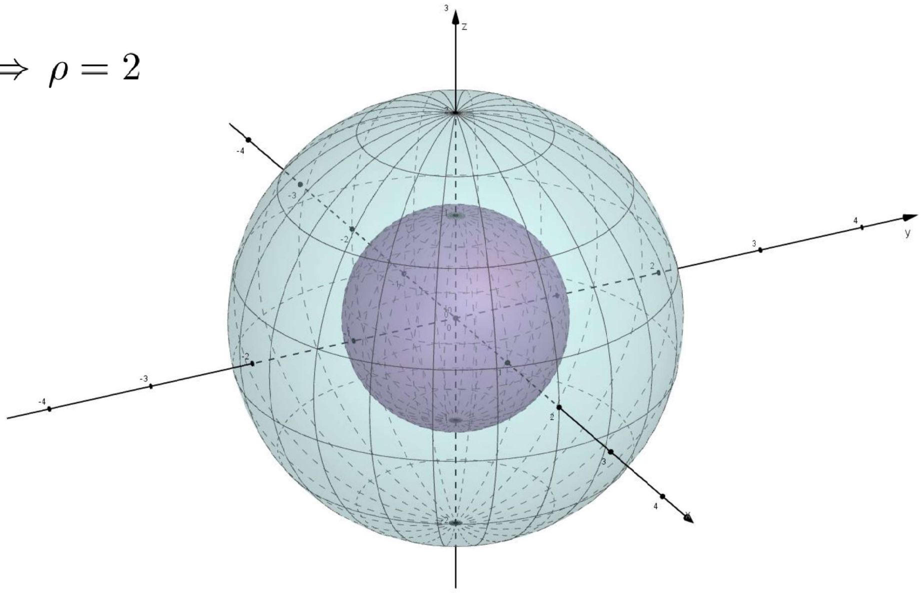
$$= 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^2 \phi d\phi d\theta = 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{\phi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2\phi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 16\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 8\pi^2$$

Ejemplo: Calcular $\displaystyle\iiint_{\mathcal{Q}} (x^2+y^2)\,dV$, donde $\mathcal{Q}$ es el sólido comprendido entre las esferas $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+y^2+z^2=4$.

$$x^2+y^2+z^2=1 \Rightarrow \rho=1$$

$$x^2+y^2+z^2=4 \Rightarrow \rho=2$$

$$\mathcal{Q}=\begin{cases} 1\le & \rho & \le 2\\ 0\le & \theta & \le 2\pi\\ 0\le & \phi & \le \pi\end{cases}$$



Ejemplo: Calcular $\displaystyle\iiint_{\mathcal{Q}} (x^2+y^2)\,dV$, donde $\mathcal{Q}$ es el sólido comprendido entre las esferas $x^2+y^2+z^2=1$ y $x^2+y^2+z^2=4$.

$$\mathcal{Q}=\begin{cases} 1\le & \rho & \le 2\\ 0\le & \theta & \le 2\pi\\ 0\le & \phi & \le \pi\end{cases} \qquad \iiint_{\mathcal{Q}} (x^2+y^2)\,dV$$

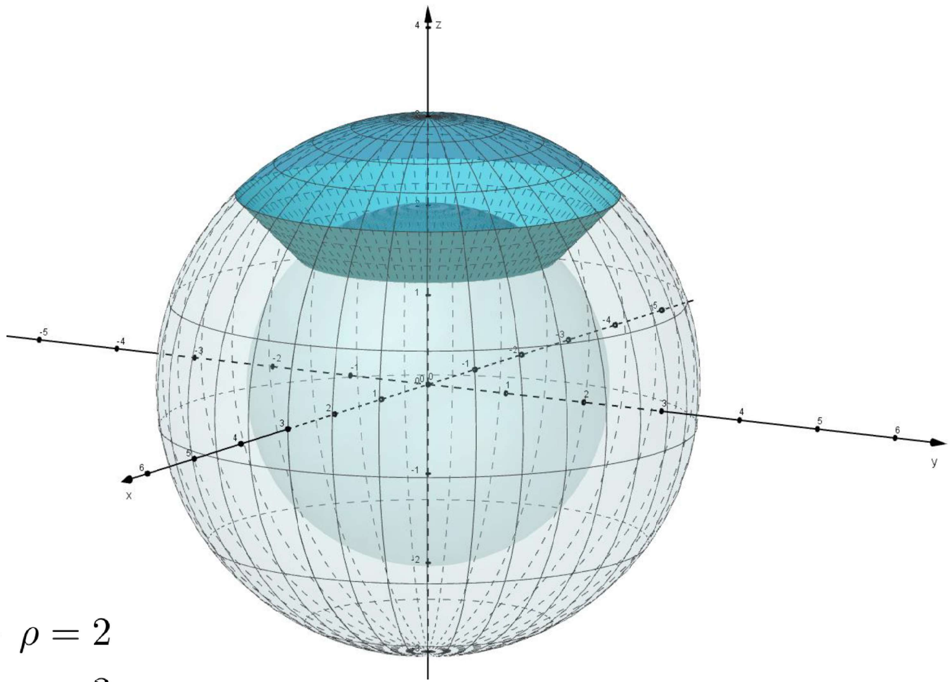
$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2}(\rho^2\cos^2\theta\,\mathrm{sen}^2\phi+\rho^2\mathrm{sen}^2\theta\,\mathrm{sen}^2\phi)\cdot\rho^2\mathrm{sen}\,\phi\,d\rho d\phi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_1^{2}\rho^4\mathrm{sen}^3\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \quad =\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\mathrm{sen}^3\phi\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_1^2 d\phi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{31}{5}\mathrm{sen}^3\phi\,d\phi\,d\theta=\frac{31}{5}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos^2\phi)\mathrm{sen}\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$=\frac{31}{5}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi+\frac{\cos^3\phi}{3}\right]_0^{\pi}d\theta=\frac{248}{15}\pi$$

Ejemplo: Calcula el volumen del sólido comprendido entre los hemisferios $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ e interior al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

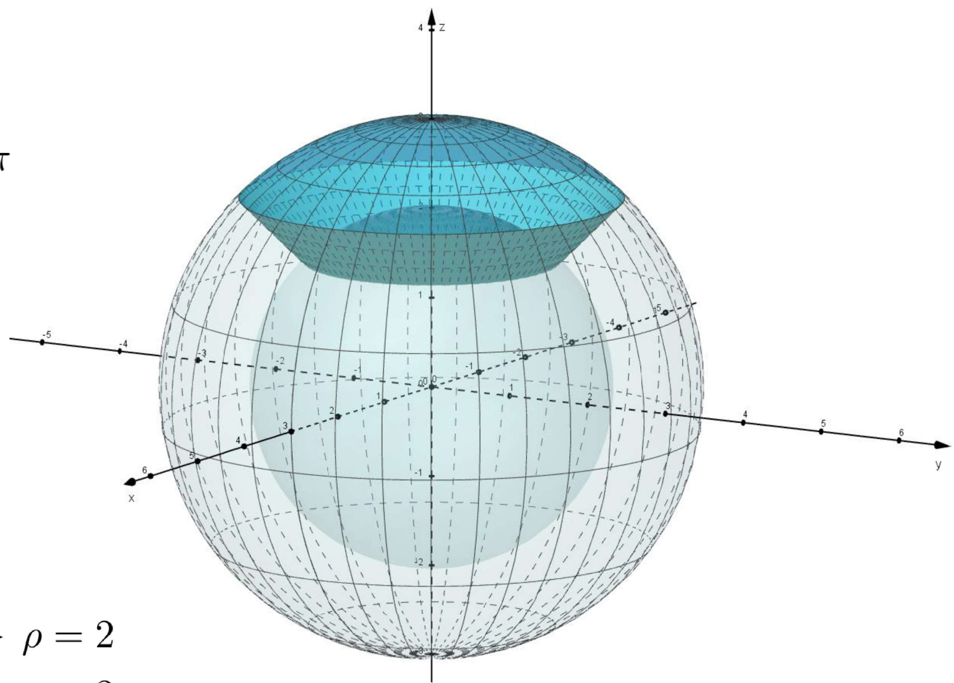


$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \Rightarrow \rho = 3$$
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \rho \cos\phi = \rho \operatorname{sen}\phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

Ejemplo: Calcula el volumen del sólido comprendido entre los hemisferios $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$ e interior al cono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 2 \leq & \rho & \leq 3 \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \\ 0 \leq & \phi & \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$



$$x^2 + y^2 + z^2 = 4 \Rightarrow \rho = 2$$
$$x^2 + y^2 + z^2 = 9 \Rightarrow \rho = 3$$
$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow \rho \cos\phi = \rho \operatorname{sen}\phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo: Calcula el volumen del sólido comprendido entre los hemisferios $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$, $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$ e interior al cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

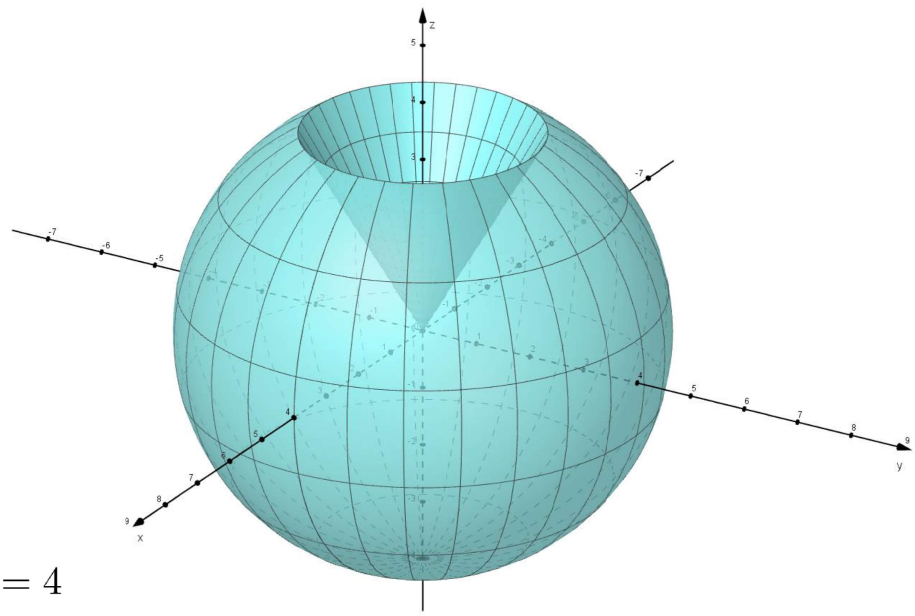
$$\mathcal{Q}=\begin{cases} 2\leq & \rho & \leq 3 \\ 0\leq & \theta & \leq 2\pi \\ 0\leq & \phi & \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$V(\mathcal{Q})=\iiint_Q dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_2^3 \rho^2 \operatorname{sen}\phi\, d\rho\, d\phi\, d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_2^3 \operatorname{sen}\,\phi\, d\phi\, d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\frac{19}{3}\operatorname{sen}\,\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$=\frac{19}{3}\int_0^{2\pi}[-\cos\phi]_0^{\pi/4}\, d\theta=\frac{19}{3}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right)d\theta \quad =\frac{38}{3}\pi\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$

Ejemplo: Determinar el volumen del sólido interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ y exterior al semicono $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$.



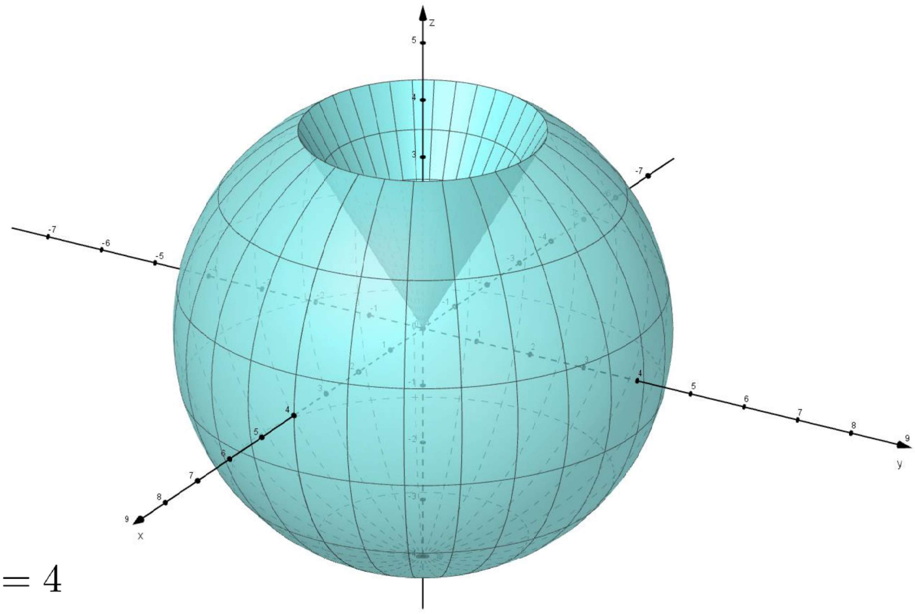
$$x^2+y^2+z^2=16 \Rightarrow \rho=4$$

$$z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \Rightarrow \rho\cos\phi=\sqrt{3}\sqrt{\rho^2\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta}$$

$$\Rightarrow \rho\cos\phi=\sqrt{3}\rho\operatorname{sen}\phi \Rightarrow \operatorname{tg}\phi=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi=\frac{\pi}{6}$$

Ejemplo: Determinar el volumen del sólido interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ y exterior al semicono $z=\sqrt{3\,(x^2+y^2)}$.

$$\mathcal{Q}=\begin{cases} 0\leq & \rho & \leq 4 \\ 0\leq & \theta & \leq 2\pi \\ \dfrac{\pi}{6}\leq & \phi & \leq \pi \end{cases}$$



$$x^2+y^2+z^2=16 \Rightarrow \rho=4$$

$$z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \Rightarrow \rho\cos\phi=\sqrt{3}\sqrt{\rho^2\operatorname{sen}^2\phi\cos^2\theta+\rho^2\operatorname{sen}^2\phi\operatorname{sen}^2\theta}$$
$$\Rightarrow \rho\cos\phi=\sqrt{3}\rho\operatorname{sen}\phi \Rightarrow \operatorname{tg}\phi=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \phi=\frac{\pi}{6}$$

INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

Ejemplo: Determinar el volumen del sólido interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=16$ y exterior al semicono $z=\sqrt{3\,(x^2+y^2)}$.

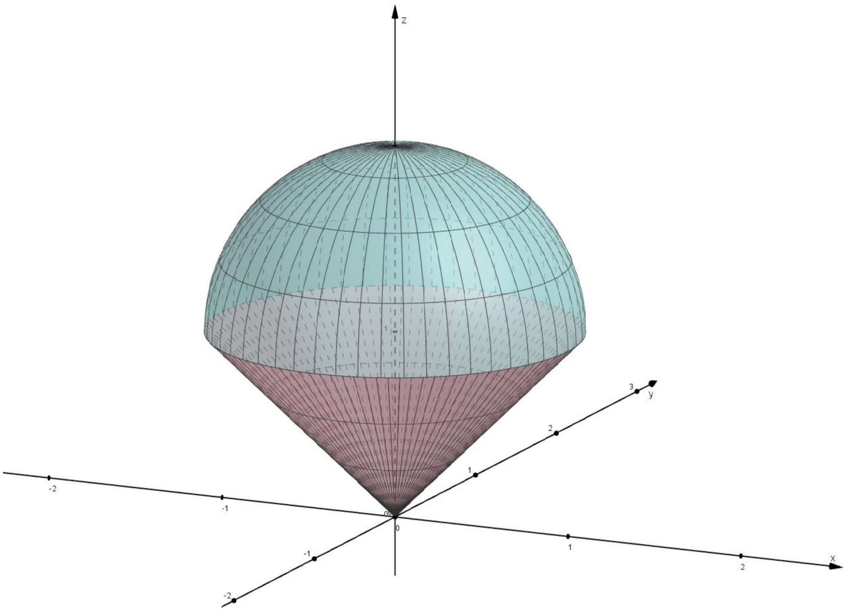
$$\mathcal{Q}=\begin{cases} 0\leq & \rho & \leq 4 \\ 0\leq & \theta & \leq 2\pi \\ \dfrac{\pi}{6}\leq & \phi & \leq \pi \end{cases}$$

$$V(\mathcal{Q})=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\int_0^4 \rho^2\operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta \;=\int_0^{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^4\operatorname{sen}\phi\,d\phi\,d\theta$$

$$=\frac{64}{3}\int_0^{2\pi}[-\cos\phi]_{\pi/6}^{\pi}\,d\theta \;=\frac{64}{3}\int_0^{2\pi}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)d\theta=\frac{64\pi}{3}\,(2+\sqrt{3})$$

INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

Ejemplo: Calcular $\iiint_Q dV$, donde Q es la región acotada por la esfera $x^2+y^2+z^2=2z$ e interior al semicono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.



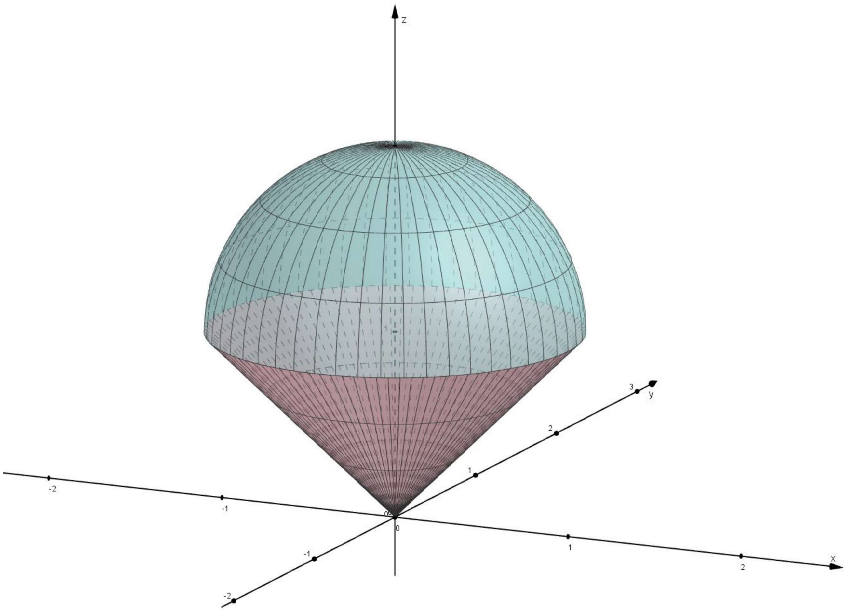
$$x^2+y^2+z^2=2z \;\Rightarrow\; \rho^2=2\rho\cos\phi \;\Rightarrow\; \rho=2\cos\phi$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; \rho\cos\phi=\rho\,\mathrm{sen}\,\phi \;\Rightarrow\; \phi=\frac{\pi}{4}$$

INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

Ejemplo: Calcular $\iiint_Q dV$, donde Q es la región acotada por la esfera $x^2+y^2+z^2=2z$ e interior al semicono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$\mathcal{Q}=\begin{cases} 0\le & \rho & \le 2\cos\phi \\ 0\le & \theta & \le 2\pi \\ 0\le & \phi & \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$



$$x^2+y^2+z^2=2z \;\Rightarrow\; \rho^2=2\rho\cos\phi \;\Rightarrow\; \rho=2\cos\phi$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; \rho\cos\phi=\rho\,\mathrm{sen}\,\phi \;\Rightarrow\; \phi=\frac{\pi}{4}$$

Ejemplo: Calcular $\iiint_Q dV$, donde Q es la región acotada por la esfera $x^2+y^2+z^2=2z$ e interior al semicono $z=\sqrt{x^2+y^2}$.

$$\mathcal{Q}=\begin{cases} 0\le & \rho & \le 2\cos\phi \\ 0\le & \theta & \le 2\pi \\ 0\le & \phi & \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

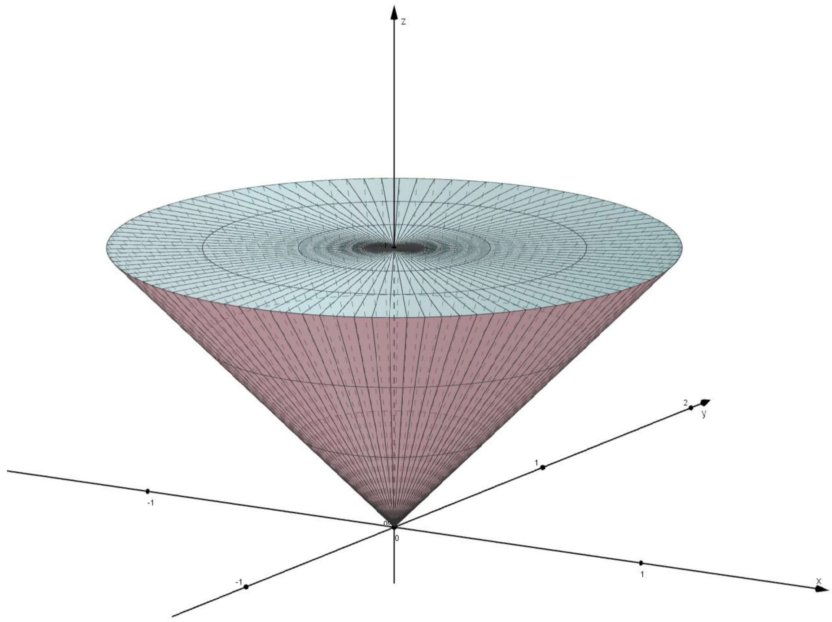
$$V(\mathcal{Q})=\int\int\int_{\mathcal{Q}} 1\,dV=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^{2\cos\phi} 1\cdot\rho^2 \operatorname{sen}\phi\,d\rho\,d\phi\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\phi\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{2\cos\phi} d\phi\,d\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\frac{8}{3}\operatorname{sen}\phi\cos^3\phi\,d\phi\,d\theta=\pi$$

INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

Ejemplo: Usando coordenadas esféricas, calcular el volumen interior del cono $z=\sqrt{x^2+y^2}$ por debajo del plano $z=1$.

$$\mathcal{Q}=\begin{cases} 0\le & \rho & \le \dfrac{1}{\cos\phi} \\ 0\le & \theta & \le 2\pi \\ 0\le & \phi & \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$



$$z=1 \Rightarrow \rho\cos\phi=1 \Rightarrow \rho=\frac{1}{\cos\phi}$$

$$z=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho\cos\phi=\rho\operatorname{sen}\phi \Rightarrow \phi=\frac{\pi}{4}$$

Ejemplo: Usando coordenadas esféricas, calcular el volumen interior del cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$ por debajo del plano $z = 1$.

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & \rho & \leq \dfrac{1}{\cos\phi} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \\ 0 \leq & \phi & \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$V(\mathcal{Q}) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\frac{1}{\cos\phi}} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta \;=\; \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{\cos\phi}} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

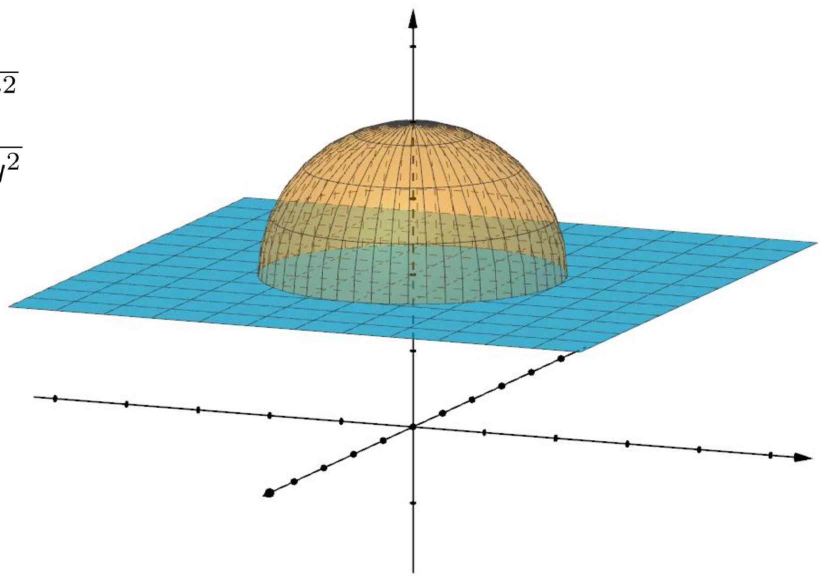
$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{sen}\phi}{3\cos^3\phi} d\phi d\theta \;=\; \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2\cos^2\phi}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{1}{2}\right) d\theta \;=\; \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}d\theta = \frac{1}{6}2\pi = \frac{1}{3}\pi$$

Ejemplo: Hacer un dibujo de la región de integración y calcular la siguiente integral en coordenadas esféricas:

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx$$

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2} \\ 1 \leq z \leq 1 + \sqrt{1-x^2-y^2} \end{cases}$$

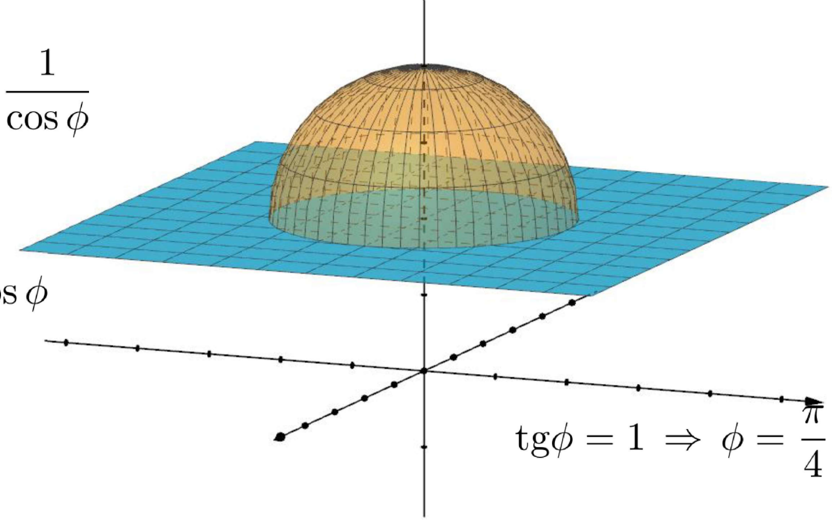


Ejemplo: Hacer un dibujo de la región de integración y calcular la siguiente integral en coordenadas esféricas:

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx$$

$$z = 1 + \sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow x^2+y^2+(z-1)^2 = 1 \Rightarrow \rho = 2\cos\phi$$

$$z = 1 \Rightarrow \rho = \frac{1}{\cos\phi}$$



$$\mathcal{Q} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\phi} \leq & \rho & \leq 2\cos\phi \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \\ 0 \leq & \phi & \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{tg}\phi = 1 \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo: Hacer un dibujo de la región de integración y calcular la siguiente integral en coordenadas esféricas:

$$I = \int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{1}^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}} dzdydx$$

$$\mathcal{Q} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\phi} \leq & \rho & \leq 2\cos\phi \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \\ 0 \leq & \phi & \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

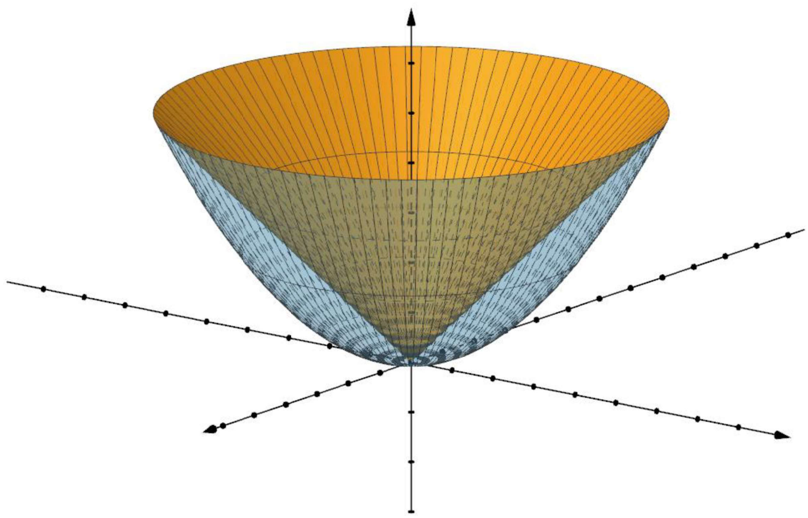
$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{1}{\cos\phi}}^{2\cos\phi} \rho^2 \operatorname{sen}\phi \, d\rho\, d\phi\, d\theta \quad = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\frac{1}{\cos\phi}}^{2\cos\phi} \operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{3}\left((2\cos\phi)^3 - \left(\frac{1}{\cos\phi}\right)^3\right)\operatorname{sen}\phi\, d\phi\, d\theta$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{2\pi}\left[-2\cos^4\phi - \frac{1}{2}\cos^{-2}\phi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \quad = \frac{1}{3}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2\pi}{3}$$

Ejemplo: Describir en coordenadas esféricas el sólido acotado inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por el cono $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

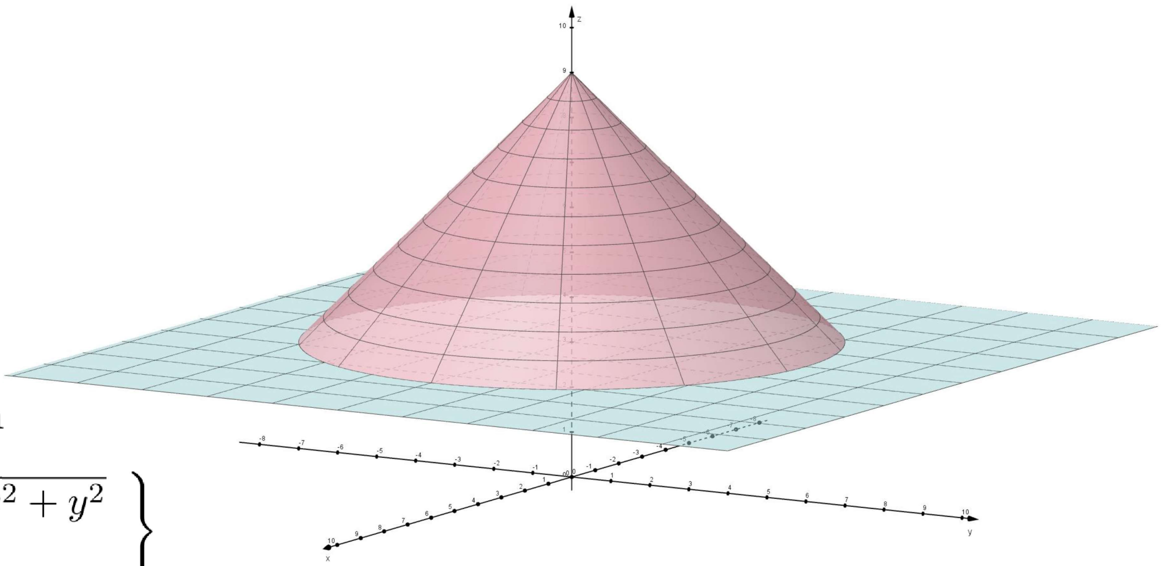
$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & \rho & \leq \dfrac{\cos\phi}{\text{sen}^2\phi} \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \\ \dfrac{\pi}{4} \leq & \phi & \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$z = x^2 + y^2 \Rightarrow \rho\cos\phi = \rho^2\text{sen}^2\phi \Rightarrow \rho = \frac{\cos\phi}{\text{sen}^2\phi}$$
$$z = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \rho\cos\phi = \rho\,\text{sen}\,\phi \Rightarrow \phi = \frac{\pi}{4}$$

Ejemplo: Describir en coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas el sólido acotado superiormente por el semicono $z = 9 - \sqrt{x^2+y^2}$ e inferiormente por el plano $z = 3$.

- Cilíndricas



Intersección

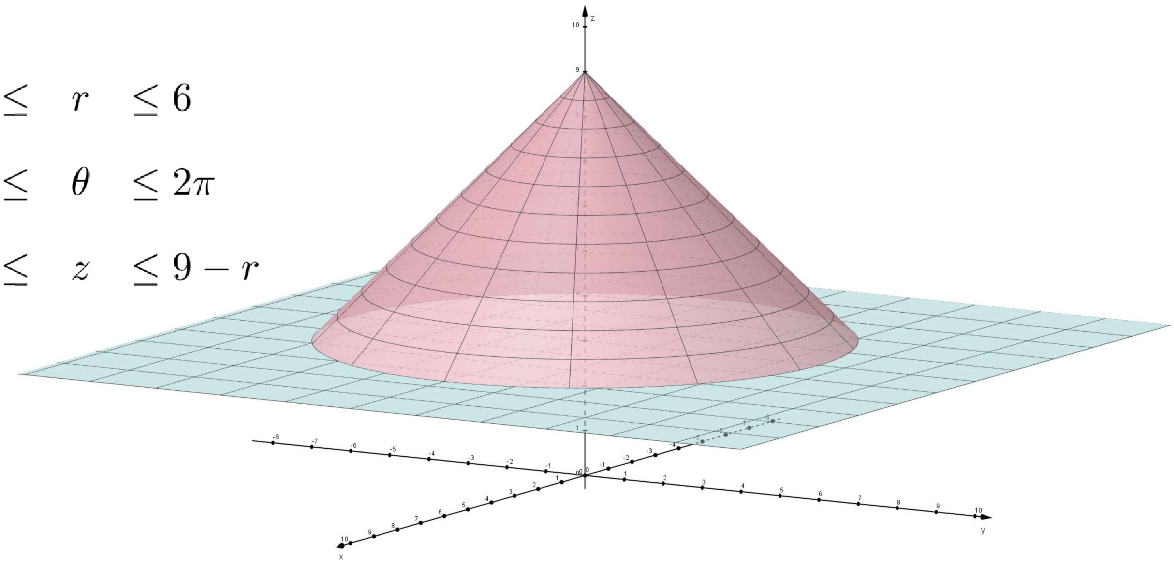
$$\left.\begin{array}{l} z = 9 - \sqrt{x^2+y^2} \\ z = 3 \end{array}\right\}$$

$$x^2 + y^2 = 36$$

Ejemplo: Describir en coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas el sólido acotado superiormente por el semicono $z = 9 - \sqrt{x^2 + y^2}$ e inferiormente por el plano $z = 3$.

- Cilíndricas

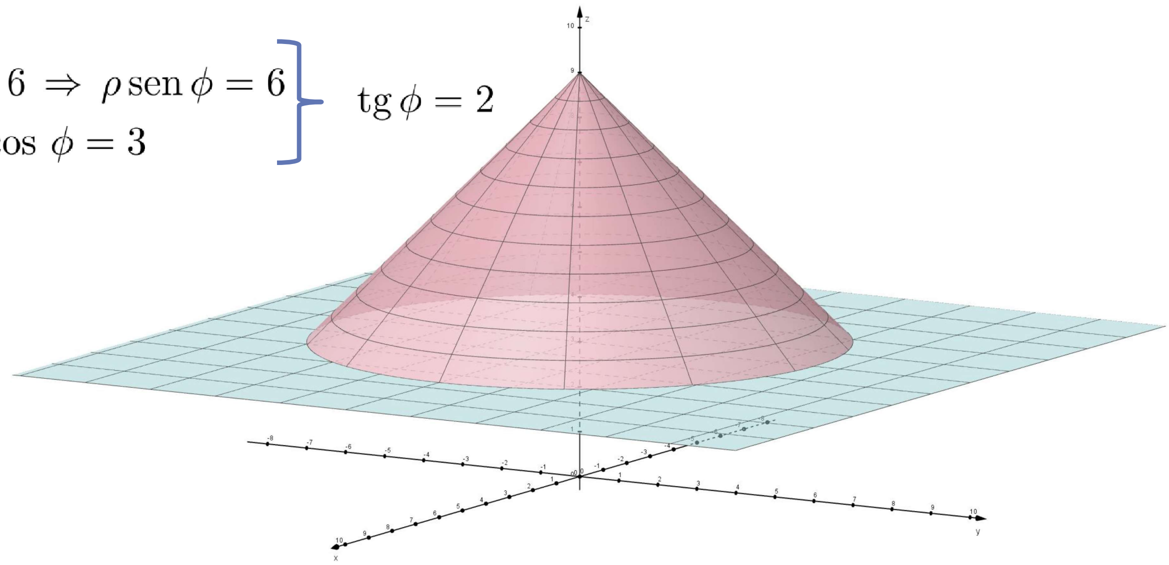
$$\mathcal{Q} = \begin{cases} 0 \leq & r & \leq 6 \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \\ 3 \leq & z & \leq 9 - r \end{cases}$$



Ejemplo: Describir en coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas el sólido acotado superiormente por el semicono $z = 9 - \sqrt{x^2 + y^2}$ e inferiormente por el plano $z = 3$.

- Esféricas

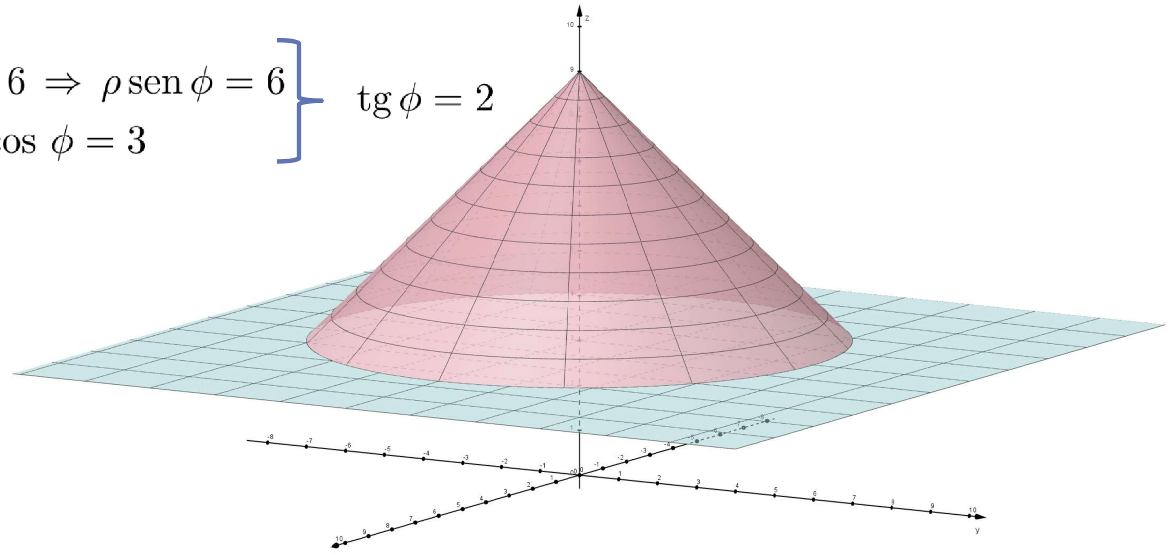
$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2 + y^2} = 6 \Rightarrow \rho \operatorname{sen} \phi = 6 \\ z = 3 \Rightarrow \rho \cos \phi = 3 \end{array}\right\} \quad \operatorname{tg} \phi = 2$$



Ejemplo: Describir en coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas el sólido acotado superiormente por el semicono $z = 9 - \sqrt{x^2+y^2}$ e inferiormente por el plano $z = 3$.

- Esféricas

$$\left.\begin{aligned} \sqrt{x^2+y^2} = 6 \;&\Rightarrow\; \rho\,\mathrm{sen}\,\phi = 6 \\ z = 3 \;&\Rightarrow\; \rho\cos\phi = 3 \end{aligned}\right\} \quad \operatorname{tg}\phi = 2$$



$$z = 9 - \sqrt{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; \rho\cos\phi = 9 - \rho\,\mathrm{sen}\phi \;\Rightarrow\; \rho = \frac{9}{\cos\phi + \mathrm{sen}\phi}$$

$$z = 3 \;\Rightarrow\; \rho\cos\phi = 3 \;\Rightarrow\; \rho = \frac{3}{\cos\phi}$$

INTEGRALES TRIPLES – Cilíndricas y Esféricas

Ejemplo: Describir en coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas el sólido acotado superiormente por el semicono $z = 9 - \sqrt{x^2+y^2}$ e inferiormente por el plano $z = 3$.

- Esféricas

$$Q = \begin{cases} 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \\ 0 \leq & \phi & \leq \operatorname{arctg} 2 \\ \dfrac{3}{\cos\phi} \leq & \rho & \leq \dfrac{9}{\cos\phi + \mathrm{sen}\,\phi} \end{cases}$$

$$z = 9 - \sqrt{x^2+y^2} \;\Rightarrow\; \rho\cos\phi = 9 - \rho\,\mathrm{sen}\phi \;\Rightarrow\; \rho = \frac{9}{\cos\phi + \mathrm{sen}\phi}$$

$$z = 3 \;\Rightarrow\; \rho\cos\phi = 3 \;\Rightarrow\; \rho = \frac{3}{\cos\phi}$$