Tema 3 –Quinta Parte

Funciones de varias variables

Extremos relativos.

Extremos relativos de funciones de dos variables

Sea f una función definida en una región $\mathcal{R}$ conteniendo al punto (x_0, y_0)

- $f(x_0, y_0)$ es un mínimo relativo de f si

$$f(x,y) \geqslant f(x_0, y_0)$$

para todo (x,y) en un disco abierto que contiene a (x_0, y_0)

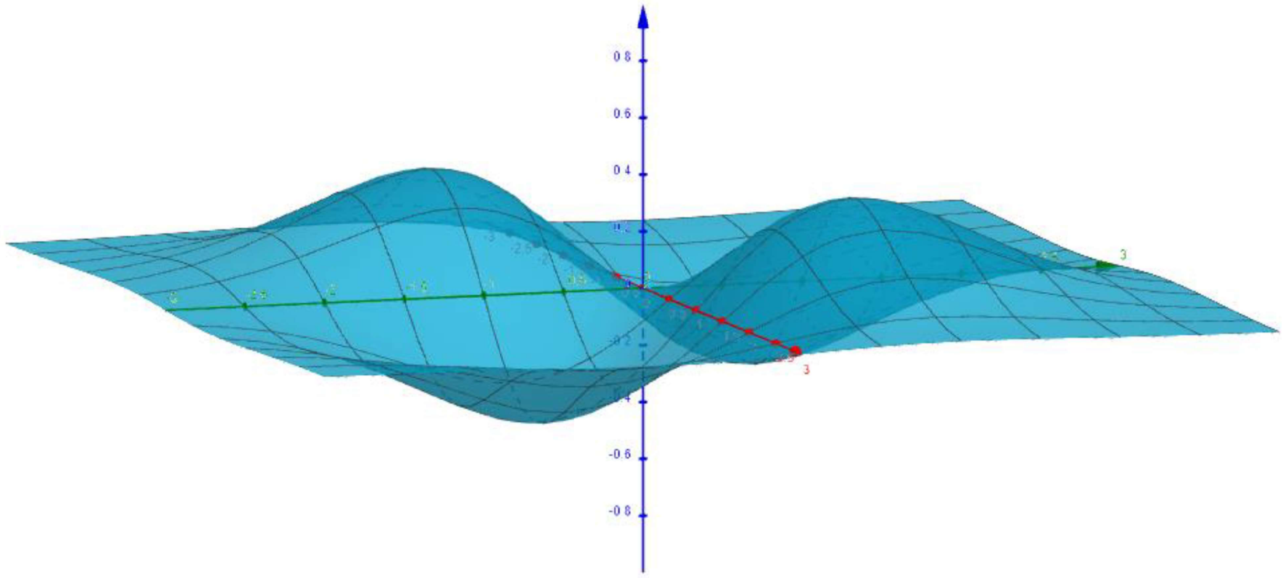
- $f(x_0, y_0)$ es un máximo relativo de f si

$$f(x,y) \leqslant f(x_0, y_0)$$

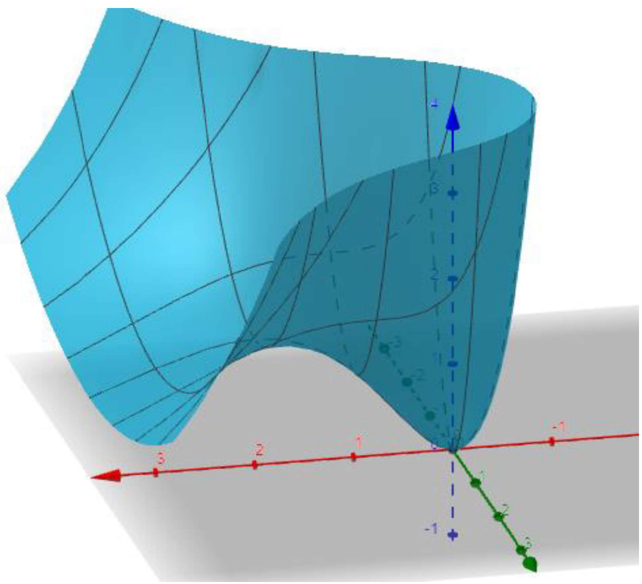
para todo (x,y) en un disco abierto que contiene a (x_0, y_0)

Extremos relativos de funciones de dos variables

La idea intuitiva y gráfica de los extremos relativos de una función de dos variables es similar a los extremos relativos de una función de una sola variable



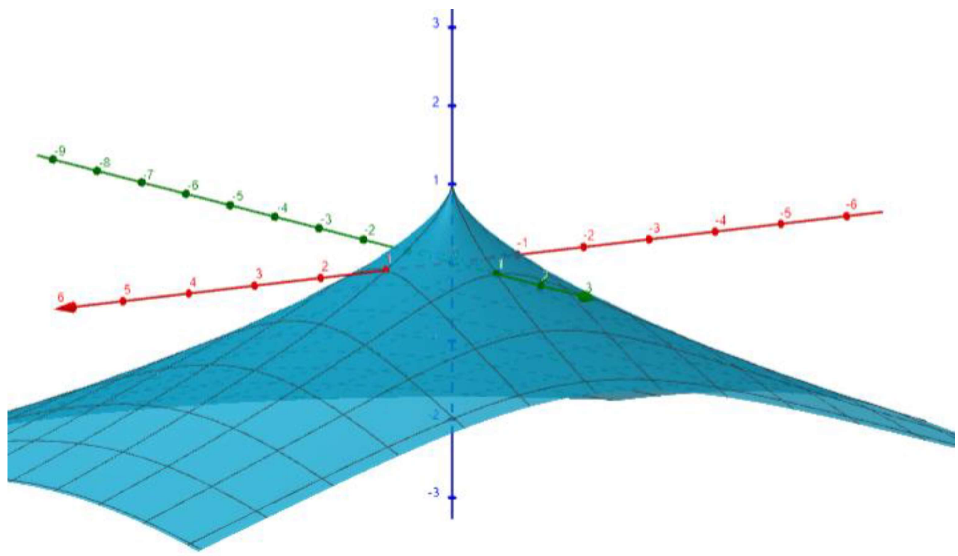
Extremos relativos de funciones de dos variables



Si f es diferenciable y $\nabla f(x_0, y_0) = (0,0)$ entonces la función tiene un plano tangente horizontal en el punto (x_0, y_0).

Es evidente que ese punto es candidato a que haya en él un extremo relativo

Extremos relativos de funciones de dos variables



Si (x_0, y_0) es un punto del dominio de f en el que no existe alguna de las derivadas parciales (o las dos), también es un candidato a que haya en él un extremo relativo

Extremos relativos de funciones de dos variables

Sea f una función definida en una región $\mathcal{R}$ conteniendo al punto (x_0, y_0). Decimos que (x_0, y_0) es un punto crítico de f si se verifica una de las afirmaciones siguientes:

- $f_x(x_0, y_0) = 0$ y $f_y(x_0, y_0) = 0$
- $f_x(x_0, y_0)$ o $f_y(x_0, y_0)$ no existen

Observemos que para que (x_0, y_0) sea un punto crítico de f tiene que ser, en primer lugar, un punto del dominio de f

Condición necesaria de extremo relativo:

f tiene un extremo relativo en (x_0, y_0) $\Longrightarrow$ (x_0, y_0) es punto crítico de f

$\not\Longleftarrow$

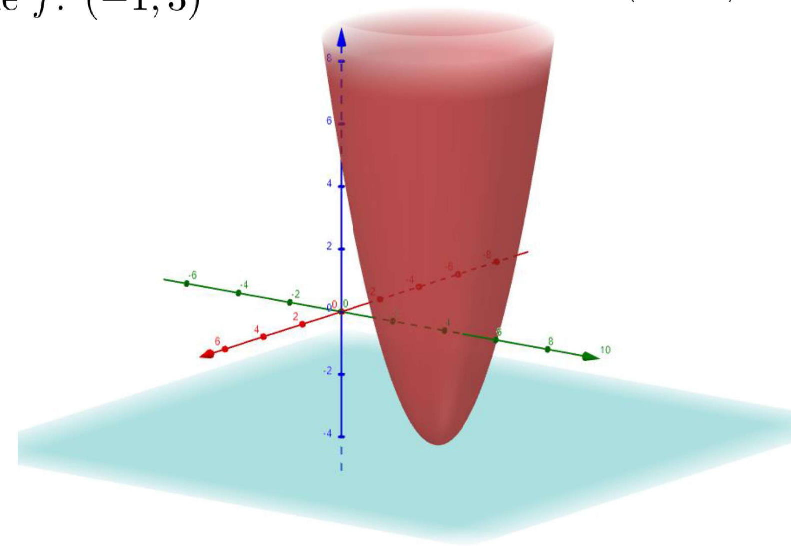
Ejemplo:

Encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2x - 6y + 6$.

$$\left.\begin{array}{ll} f_x(x,y) = 2x + 2 & 2x + 2 = 0 \\ f_y(x,y) = 2y - 6 & 2y - 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y) = (-1,3)$$

Punto crítico de f: $(-1,3)$

$z = (x+1)^2 + (y-3)^2 - 4$



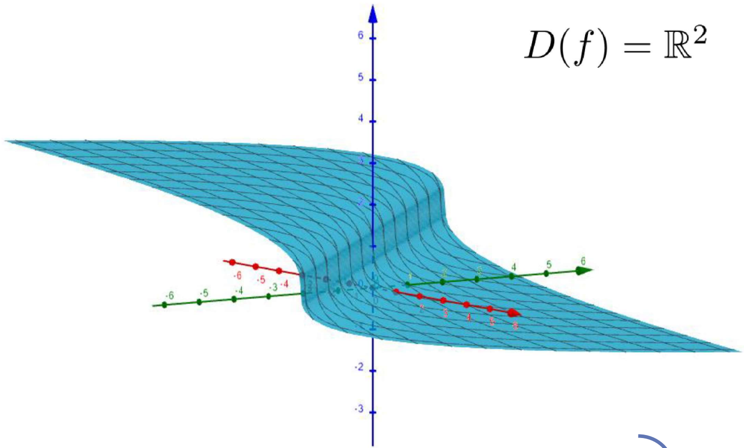
Ejemplo:

Encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y) = 1 - (x+y)^{1/3}$.

$D(f) = \mathbb{R}^2$

$$f_x(x,y) = -\frac{1}{3(x+y)^{2/3}}$$

$$f_y(x,y) = -\frac{1}{3(x+y)^{2/3}}$$

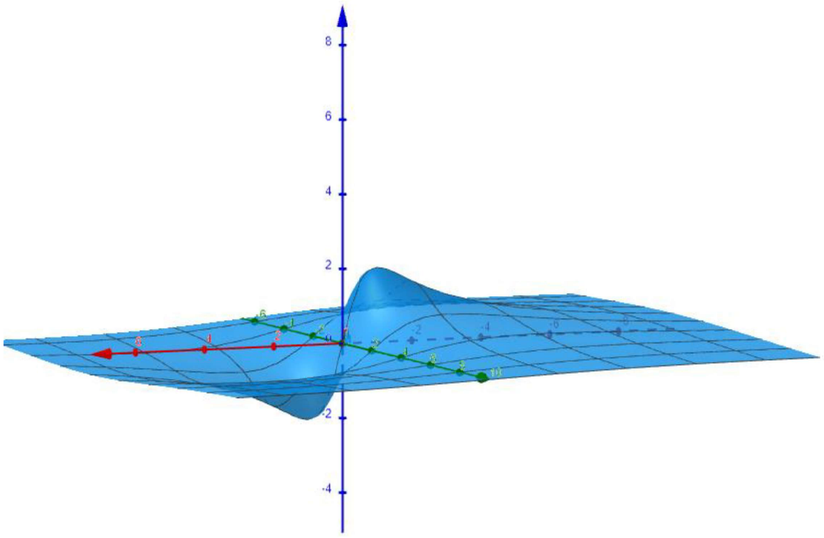


$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y),\ f_y(x,y) \text{ no existen en los puntos } (x_0,y_0) \text{ tales que } y_0 = -x_0 \\ f_x(x,y) \neq 0 \text{ y } f_y(x,y) \neq 0 \text{ para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tales que } y \neq -x \end{array}\right\}$$

Puntos críticos de f: (x_0,y_0) tales que $y_0 = -x_0$

Ejemplo:

Encontrar los puntos críticos de la función $f(x,y) = \dfrac{-4x}{x^2+y^2+1}$.



$$f_x(x,y) = 4\frac{x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2} = 0$$

$$f_y(x,y) = 8\frac{xy}{(x^2+y^2+1)^2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\left.\begin{aligned} x^2-y^2-1 &= 0 \\ xy &= 0 \end{aligned}\right\}$$

$$xy = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow -y^2-1 \quad \text{NO es posible} \\ \text{ó} \\ y = 0 \Rightarrow x^2-1 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Puntos críticos de } f \\ (1,0), (-1,0) \end{array}$$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Extremos relativos de funciones de dos variables. Criterio del Hessiano:

Sea una función f con derivadas parciales primeras y segundas continuas en una región abierta que contiene un punto (x_0, y_0) para el que $f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$.

Para determinar si en dicho punto hay un extremo relativo de f, definimos

$$H(f)(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

- Si $|H(f)(x_0,y_0)| > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ entonces f tiene en (x_0,y_0) un mínimo relativo.
- Si $|H(f)(x_0,y_0)| > 0$ y $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ entonces f tiene en (x_0,y_0) un máximo relativo.
- Si $|H(f)(x_0,y_0)| < 0$ entonces f tiene en (x_0,y_0) un punto de silla.
- Si $|H(f)(x_0,y_0)| = 0$ entonces el criterio no decide.

Extremos relativos de funciones de dos variables. Criterio del Hessiano:

Sea una función f con derivadas parciales primeras y segundas continuas en una región abierta que contiene un punto (x_0, y_0) para el que $f_x(x_0, y_0) = f_y(x_0, y_0) = 0$.

Observemos que este resultado NO se puede utilizar para estudiar los puntos críticos en los que no exista el gradiente

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9y$

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 6y - 9 = 3(y+1)(y-3)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3x(x-2) = 0 \\ 3(y+1)(y-3) = 0 \end{array}\right\}$$

Los puntos críticos de f son:

$(0,-1)$, $(0,3)$, $(2,-1)$, $(2,3)$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9y$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 - 6x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 6y - 9$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x - 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0 \qquad H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y - 6$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9y$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(0,-1) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H(f)(0,-1)| = 72 > 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,-1) = -6 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } (0,-1) \text{ un máximo relativo}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9y$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(0,3) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$|H(f)(0,3)| = -72 < 0$ $\Rightarrow$ f tiene en $(0,3)$ un punto de silla

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9y$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(2,-1) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -12 \end{pmatrix}$$

$|H(f)(2,-1)| = -72 < 0$ $\Rightarrow$ f tiene en $(2,-1)$ un punto de silla

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9y$

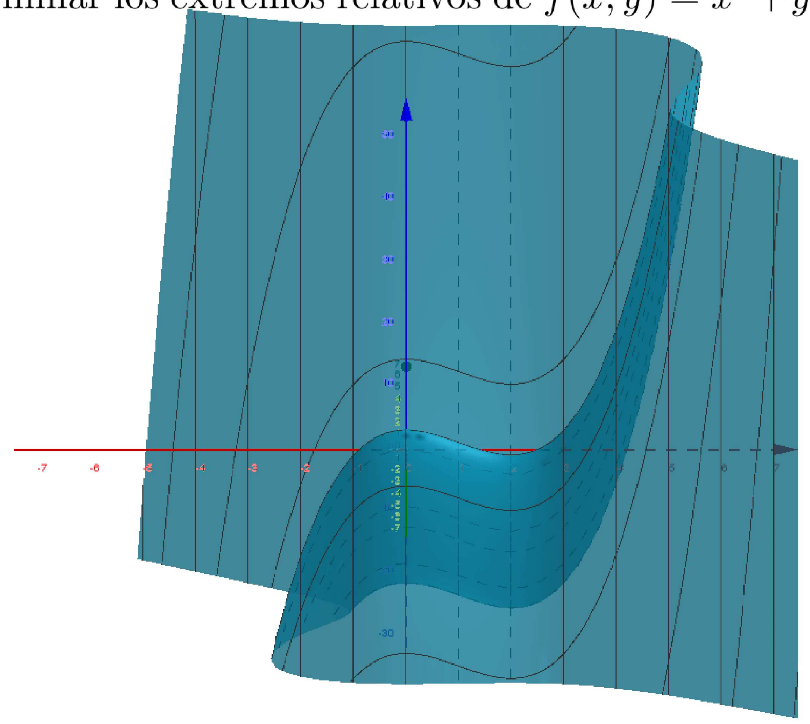
$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 6x-6 & 0 \\ 0 & 6y-6 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(2,3) = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H(f)(2,3)| = 72 > 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,3) = 6 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } (2,3) \text{ un mínimo relativo}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x^2 - 3y^2 - 9y$



f tiene en $(0,-1)$ un máximo relativo y en $(2,3)$ un mínimo relativo

f tiene en $(0,3), (2,-1)$ puntos de silla

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1$

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6xy - 6x$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x^2 - 6y$$

$$\left.\begin{array}{r} -6x(y+1) = 0 \\ 3y^2 - 3x^2 - 6y = 0 \end{array}\right\}$$

$$-6x(y+1) = 0 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \Rightarrow 3y(y-2) = 0 \Rightarrow (0,0), (0,2) \\ \text{ó} \\ y = -1 \Rightarrow 3 - 3x^2 + 6 = 0 \Rightarrow (-\sqrt{3}, -1), (\sqrt{3}, -1) \end{array}\right.$$

Puntos críticos de f: $(0,0), (0,2), (-\sqrt{3},-1), (\sqrt{3},-1)$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -6xy - 6x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 - 3x^2 - 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -6y - 6$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6y - 6$$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -6y - 6 & -6x \\ -6x & 6y - 6 \end{pmatrix}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -6y-6 & -6x \\ -6x & 6y-6 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H(f)(0,0)| = 36 > 0 \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -6 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } (0,0) \text{ un máximo relativo}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -6y-6 & -6x \\ -6x & 6y-6 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(0,2) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$|H(f)(0,2)| = -108 < 0 \Rightarrow f \text{ tiene en } (0,2) \text{ un punto de silla}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -6y-6 & -6x \\ -6x & 6y-6 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(-\sqrt{3},-1) = \begin{pmatrix} 0 & 6\sqrt{3} \\ 6\sqrt{3} & -12 \end{pmatrix}$$

$|H(f)(-\sqrt{3},-1)| = -108 < 0 \Longrightarrow$ f tiene en $(-\sqrt{3},-1)$ un punto de silla

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1$

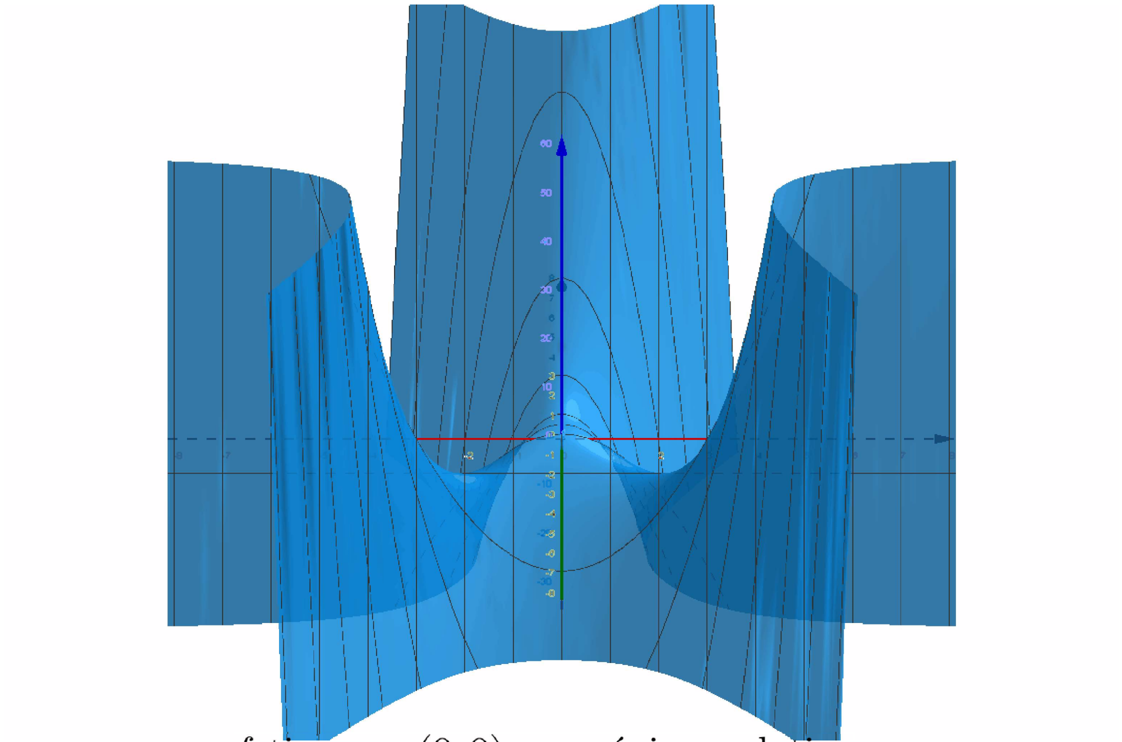
$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -6y-6 & -6x \\ -6x & 6y-6 \end{pmatrix}$$

$$H(f)(\sqrt{3},-1) = \begin{pmatrix} 0 & -6\sqrt{3} \\ -6\sqrt{3} & -12 \end{pmatrix}$$

$|H(f)(\sqrt{3},-1)| = -108 < 0 \Longrightarrow$ f tiene en $(\sqrt{3},-1)$ un punto de silla

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = y^3 - 3yx^2 - 3y^2 - 3x^2 + 1$



f tiene en $(0,0)$ un máximo relativo

f tiene en $(0,2), (\sqrt{3},-1), (-\sqrt{3},-1)$ puntos de silla

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = \dfrac{-4x}{x^2+y^2+1}$

$$f_x(x,y) = 4\frac{x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{8xy}{(x^2+y^2+1)^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2-y^2-1=0 \\ xy=0 \end{array}\right\}$$

Puntos críticos de f : $(1,0), (-1,0)$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -8x\dfrac{x^2-3y^2-3}{(x^2+y^2+1)^3} & -8y\dfrac{3x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^3} \\ -8y\dfrac{3x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^3} & 8x\dfrac{-3y^2+x^2+1}{(x^2+y^2+1)^3} \end{pmatrix}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = \dfrac{-4x}{x^2+y^2+1}$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -8x\dfrac{x^2-3y^2-3}{(x^2+y^2+1)^3} & -8y\dfrac{3x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^3} \\ -8y\dfrac{3x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^3} & 8x\dfrac{-3y^2+x^2+1}{(x^2+y^2+1)^3} \end{pmatrix}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = \dfrac{-4x}{x^2+y^2+1}$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -8x\dfrac{x^2-3y^2-3}{(x^2+y^2+1)^3} & -8y\dfrac{3x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^3} \\ -8y\dfrac{3x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^3} & 8x\dfrac{-3y^2+x^2+1}{(x^2+y^2+1)^3} \end{pmatrix}$$

$$H(f)(1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H(f)(1,0)| = 4 > 0 \\ f_{xx}(1,0) = 2 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } (1,0) \text{ un mínimo relativo}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = \dfrac{-4x}{x^2+y^2+1}$

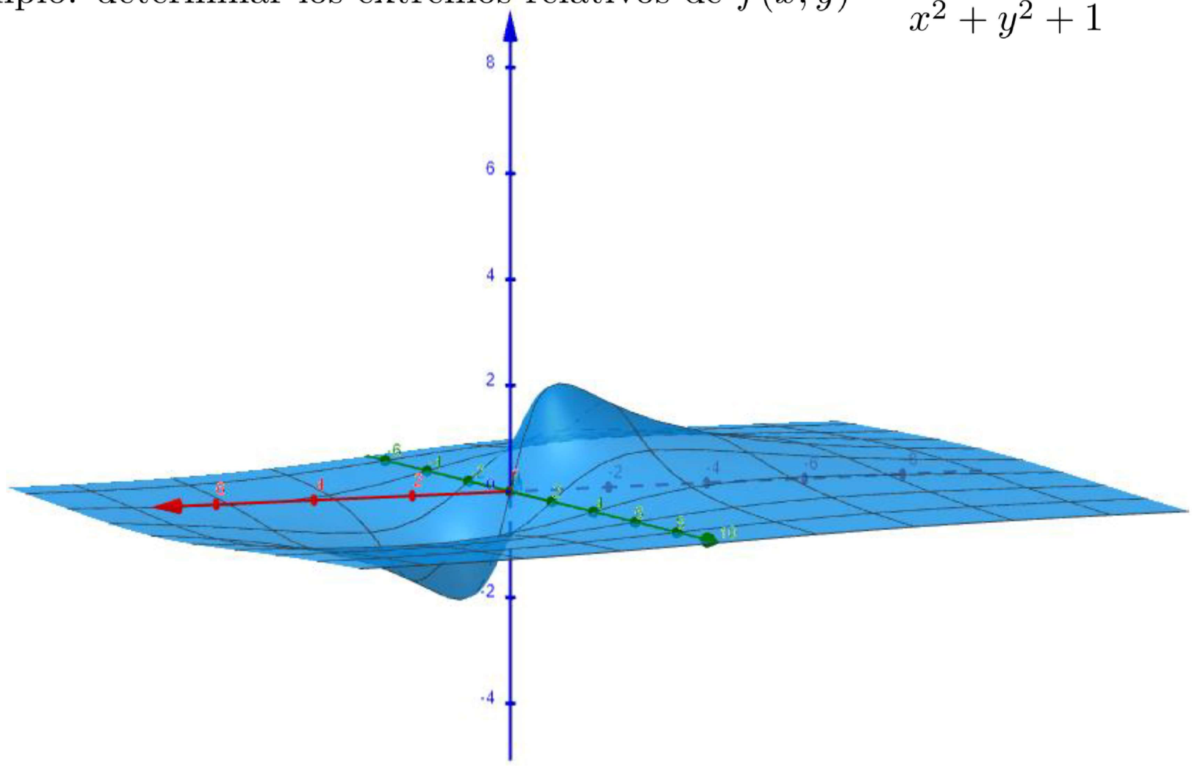
$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} -8x\dfrac{x^2-3y^2-3}{(x^2+y^2+1)^3} & -8y\dfrac{3x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^3} \\[2ex] -8y\dfrac{3x^2-y^2-1}{(x^2+y^2+1)^3} & 8x\dfrac{-3y^2+x^2+1}{(x^2+y^2+1)^3} \end{pmatrix}$$

$$H(f)(-1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H(f)(-1,0)| = 4 > 0 \\[2ex] f_{xx}(-1,0) = -2 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } (-1,0) \text{ un máximo relativo}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = \dfrac{-4x}{x^2+y^2+1}$



f tiene en $(1,0)$ un mínimo relativo y en $(-1,0)$ un máximo relativo

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f.

$$f_x(x,y) = y(1-x^2)e^{-(x^2+y^2)/2} \qquad \left.\begin{array}{l} y(1-x^2)=0 \\ x(1-y^2)=0 \end{array}\right\}$$

$$f_y(x,y) = x(1-y^2)e^{-(x^2+y^2)/2}$$

Puntos críticos de f : $(0,0),(1,1),(-1,1),(1,-1),(-1,-1)$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} yx(x^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2} & (x^2-1)(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ (x^2-1)(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2} & yx(y^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2} \end{pmatrix}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} yx(x^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2} & (x^2-1)(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ (x^2-1)(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2} & yx(y^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2} \end{pmatrix}$$

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|H(f)(0,0)| = -1 < 0 \quad \Longrightarrow \quad f \text{ tiene en } (0,0) \text{ un punto de silla}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} yx(x^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2} & (x^2-1)(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ (x^2-1)(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2} & yx(y^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2} \end{pmatrix}$$

$$H(f)(-1,-1) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H(f)(-1,-1)| = 4e^{-2} > 0 \\ f_{xx}(-1,-1) = -2e^{-1} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } (-1,-1) \text{ un máximo relativo}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} yx(x^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2} & (x^2-1)(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ (x^2-1)(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2} & yx(y^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2} \end{pmatrix}$$

$$H(f)(1,1) = \begin{pmatrix} -2e^{-1} & 0 \\ 0 & -2e^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H(f)(1,1)| = 4e^{-2} > 0 \\ f_{xx}(1,1) = -2e^{-1} < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } (1,1) \text{ un máximo relativo}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} yx(x^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2} & (x^2-1)(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ (x^2-1)(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2} & yx(y^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2} \end{pmatrix}$$

$$H(f)(-1,1) = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H(f)(-1,1)| = 4e^{-2} > 0 \\ f_{xx}(-1,1) = 2e^{-1} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } (-1,1) \text{ un mínimo relativo}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$

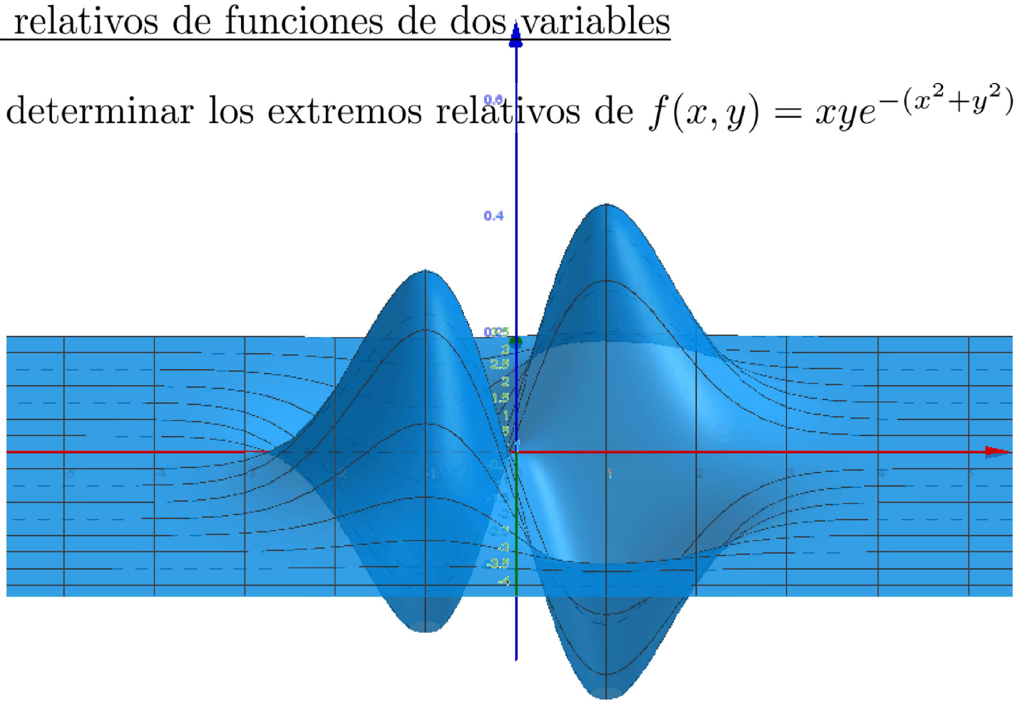
$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} yx(x^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2} & (x^2-1)(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2} \\ (x^2-1)(y^2-1)e^{-(x^2+y^2)/2} & yx(y^2-3)e^{-(x^2+y^2)/2} \end{pmatrix}$$

$$H(f)(1,-1) = \begin{pmatrix} 2e^{-1} & 0 \\ 0 & 2e^{-1} \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H(f)(1,-1)| = 4e^{-2} > 0 \\ f_{xx}(1,-1) = 2e^{-1} > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ tiene en } (1,-1) \text{ un mínimo relativo}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = xye^{-(x^2+y^2)/2}$



f tiene en $(-1,-1)$ y en $(1,1)$ máximos relativos

f tiene en $(1,-1)$ y en $(-1,1)$ mínimos relativos

f tiene en $(0,0)$ un punto de silla

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2$

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f. $D(f) = \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= 4x(x^2+y^2-1) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= 4y(x^2+y^2-1) \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} 4x(x^2+y^2-1) &= 0 \\ 4y(x^2+y^2-1) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Puntos críticos de f: $(0,0)$ y todo (x_0,y_0) tal que $x_0^2+y_0^2=1$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 4(3x^2+y^2-1) & 8xy \\ 8xy & 4(x^2+3y^2-1) \end{pmatrix}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2$

$D(f) = \mathbb{R}^2$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 4(3x^2+y^2-1) & 8xy \\ 8xy & 4(x^2+3y^2-1) \end{pmatrix}$$

$$H(f)(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{l} |H(f)(0,0)| = 16 > 0 \\ f_{xx}(0,0) = -4 < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow f \text{ tiene en } (0,0) \text{ un máximo relativo}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2+y^2-1)^2$

$D(f) = \mathbb{R}^2$

$$H(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 4(3x^2+y^2-1) & 8xy \\ 8xy & 4(x^2+3y^2-1) \end{pmatrix}$$

En los puntos (x_0,y_0) tales que $x_0^2+y_0^2=1$

$$H(f)(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 4(3x_0^2+y_0^2-1) & 8x_0y_0 \\ 8x_0y_0 & 4(x_0^2+3y_0^2-1) \end{pmatrix}$$

$$= 48(x_0^2+y_0^2-1)^2 + 32(x_0^2+y_0^2-1) = 0$$

$$|H(f)(x_0,y_0)| = 0 \Longrightarrow \text{El criterio del Hessiano no decide}$$

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$

$$D(f) = \mathbb{R}^2$$

Observamos que, en los puntos (x_0, y_0) tales que $x_0^2 + y_0^2 = 1$, se tiene que

$$0 = f(x_0, y_0) \leq f(x,y)$$

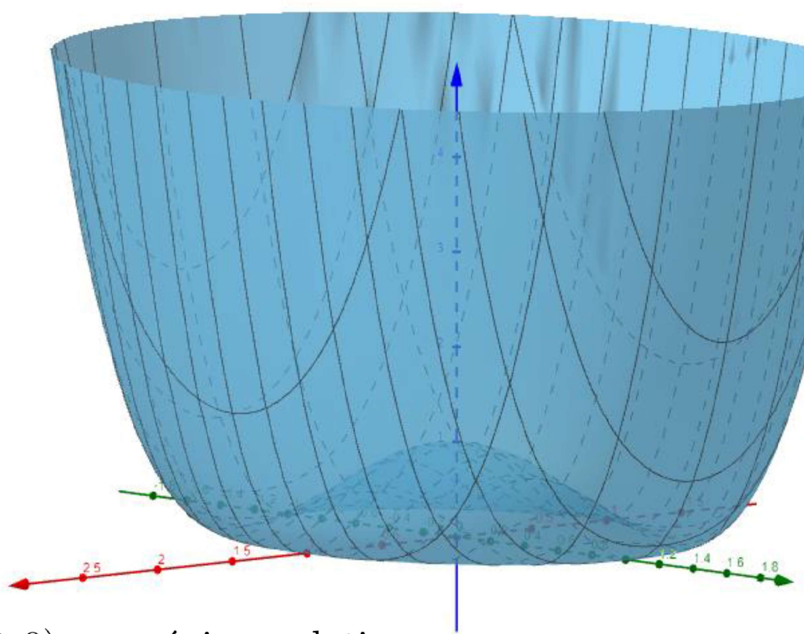
para todo (x,y) en un disco abierto que contiene a (x_0, y_0)

$\Downarrow$ Definición

f tiene en los puntos (x_0, y_0) tales que $x_0^2 + y_0^2 = 1$ mínimos relativos

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = (x^2 + y^2 - 1)^2$



f tiene en $(0,0)$ un máximo relativo

f tiene en los puntos (x_0, y_0) tales que $x_0^2 + y_0^2 = 1$ mínimos relativos

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = 1 + \dfrac{x}{y}$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$$

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f.

$$f_x(x,y) = \frac{1}{y}$$

$$f_y(x,y) = \frac{-x}{y^2}$$

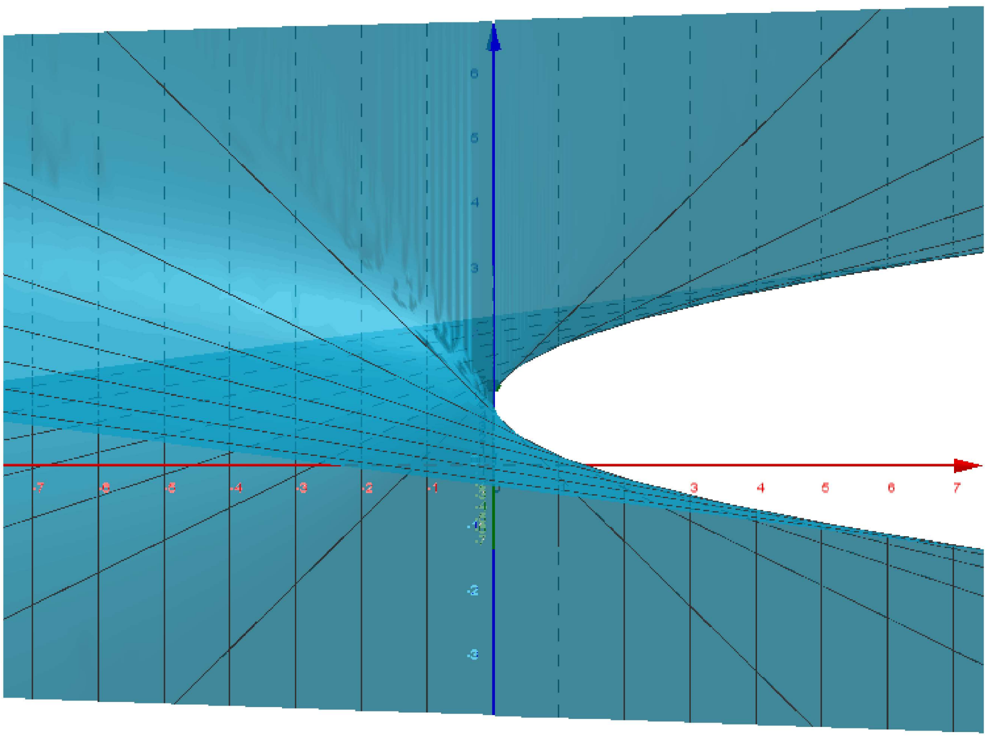
$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y),\ f_y(x,y) \text{ existen para } (x,y) \in D(f) \\ \\ f_x(x,y) \neq 0 \text{ para todo } (x,y) \in D(f) \end{array}\right\} \text{No hay punto críticos}$$

$$\Downarrow$$

No hay extremos relativos

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = 1 + \dfrac{x}{y}$



No hay extremos relativos

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f. $D(f)=\mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ f_y(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{aligned}\right\}$$

Puntos críticos de f : $(0,0)$

Como $f_x(0,0)$ y $f_y(0,0)$ no existen, no se puede usar el criterio del Hessiano

Observamos que, para todo $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

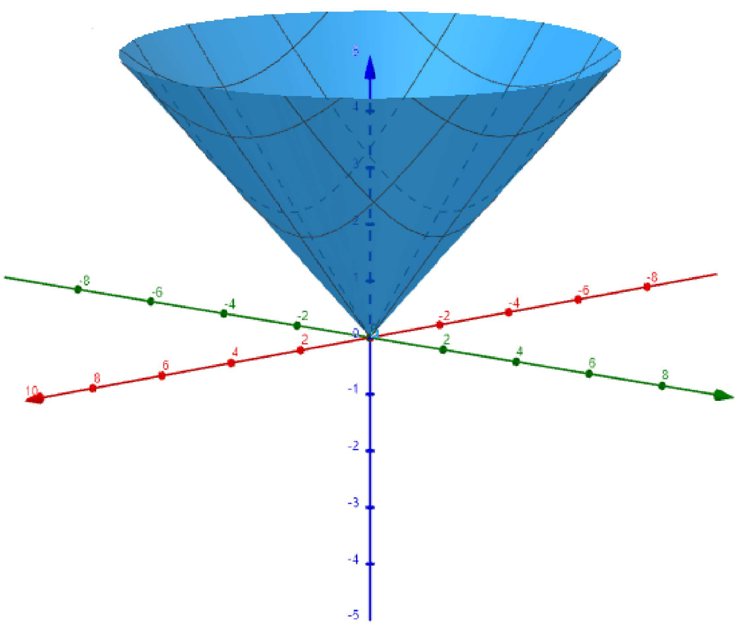
$$0=f(0,0)\leq f(x,y)$$

Definición

f tiene en $(0,0)$ un mínimo relativo

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$



f tiene en $(0,0)$ un mínimo relativo

Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = y\sqrt[3]{x^2}$

En primer lugar se calculan los puntos críticos de f. $D(f) = \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= \frac{2y}{3\sqrt[3]{x}} \\ f_y(x,y) &= \sqrt[3]{x^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{Puntos críticos de } f : (0, y_0) \text{ con } y_0 \in \mathbb{R}$$

Como $f_x(0, y_0)$ no existe, no se puede usar el criterio del Hessiano

Extremos relativos de funciones de dos variables

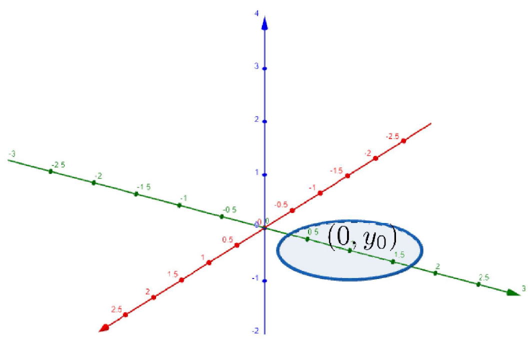
Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = y\sqrt[3]{x^2}$

Puntos críticos de $f : (0, y_0)$ con $y_0 \in \mathbb{R}$

- En un punto $(0, y_0)$ con $y_0 > 0$, se tiene que

$$0 = f(0, y_0) \leq f(x,y)$$

para todo (x,y) en un disco abierto que contiene a $(0, y_0)$



Es suficiente escoger un disco abierto D centrado en $(0, y_0)$ verificando que para todo $(x,y) \in D$ se tiene que $y > 0$

Definición

f tiene en $(0, y)$ con $y > 0$ mínimos relativos

Extremos relativos de funciones de dos variables

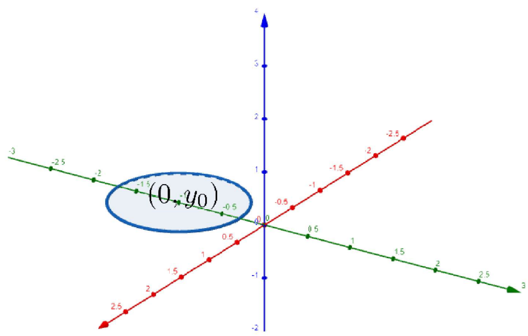
Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = y\sqrt[3]{x^2}$

Puntos críticos de f : $(0, y_0)$ con $y_0 \in \mathbb{R}$

- En un punto $(0, y_0)$ con $y_0 < 0$, se tiene que

$$0 = f(0, y_0) \geq f(x,y)$$

para todo (x,y) en un disco abierto que contiene a $(0, y_0)$



Es suficiente escoger un disco abierto D centrado en $(0, y_0)$ verificando que para todo $(x,y) \in D$ se tiene que $y < 0$

Definición

f tiene en $(0, y)$ con $y < 0$ máximos relativos

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

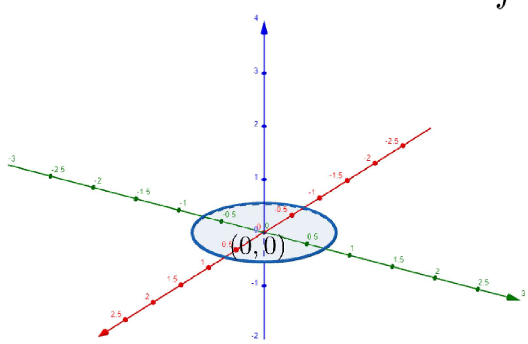
Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = y\sqrt[3]{x^2}$

Puntos críticos de f : $(0, y_0)$ con $y_0 \in \mathbb{R}$

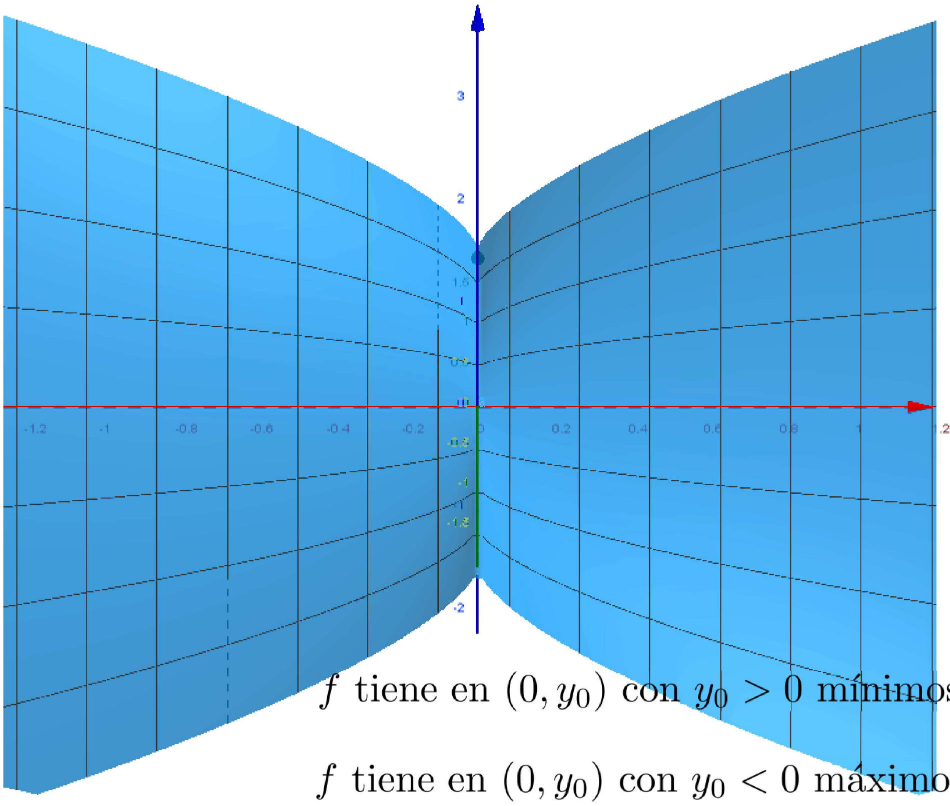
- En el punto $(0,0)$ se tiene que $f(0,0) = 0$ y cualquier disco abierto que lo contenga tiene puntos (x,y) tales que $f(x,y) < 0$ y puntos (x,y) tales que $f(x,y) > 0$

f no tiene en $(0,0)$ extremo relativo



Extremos relativos de funciones de dos variables

Ejemplo: determinar los extremos relativos de $f(x,y) = y\sqrt[3]{x^2}$



f tiene en $(0, y_0)$ con $y_0 > 0$ mínimos relativos

f tiene en $(0, y_0)$ con $y_0 < 0$ máximos relativos