Tema 4 – Tercera Parte

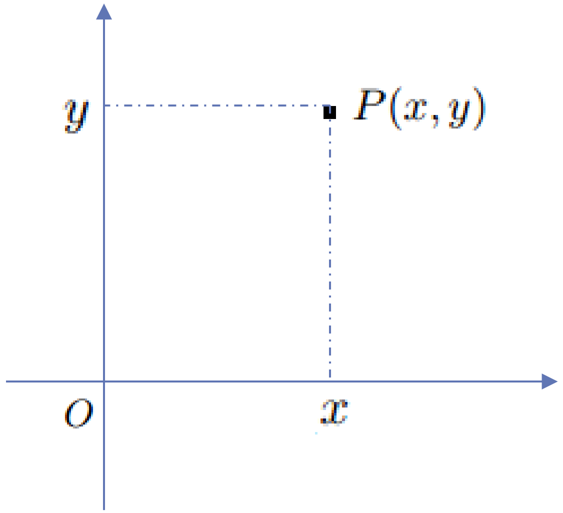
Integrales Dobles

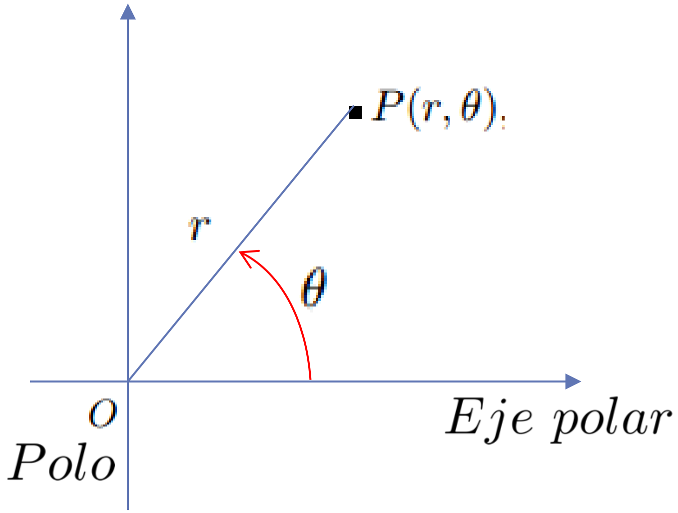
Coordenadas Polares

Coordenadas polares

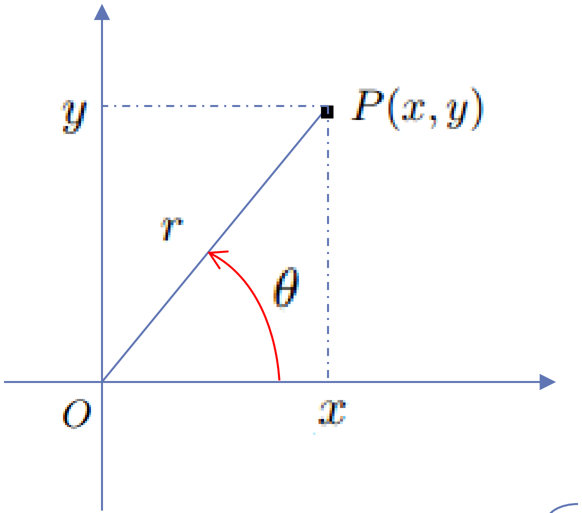
Un punto del plano puede caracterizarze mediante

- Coordenadas rectangulares: (x, y)
- Coordenadas polares: (r, θ)





- Cambiar de Coordenadas Rectangulares a Coordenadas Polares:



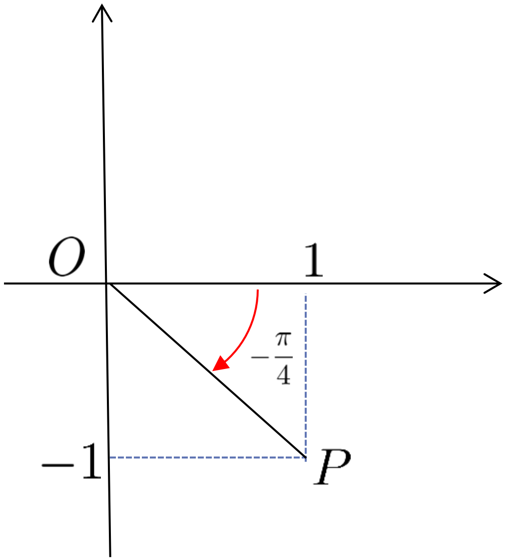
$$* \text{ si tomamos } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \cos\theta = \dfrac{x}{r} \\[2ex] \text{sen } \theta = \dfrac{y}{r} \end{array}\right\} \overset{*}{\Longrightarrow} \left\{\begin{array}{l} r = \sqrt{x^2+y^2} \\[2ex] \theta = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\[2ex] \pi + \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) & \text{si } x < 0 \\[2ex] \dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0,\ y > 0 \\[2ex] -\dfrac{\pi}{2} & \text{si } x = 0,\ y < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

La representación de un punto en coordenadas polares no es única

Ejemplo: Determinar las coordenadas polares del punto P cuyas coordenadas rectangulares son $(1, -1)$

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$



$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{-1}{1} = -\frac{\pi}{4}$$

$$\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}\right)$$

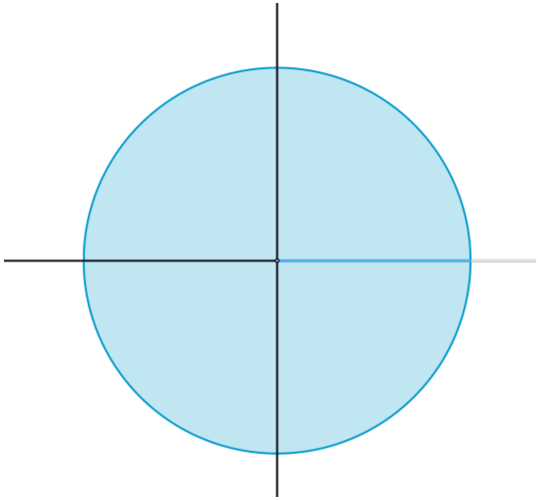
Descripción de regiones en coordenadas polares

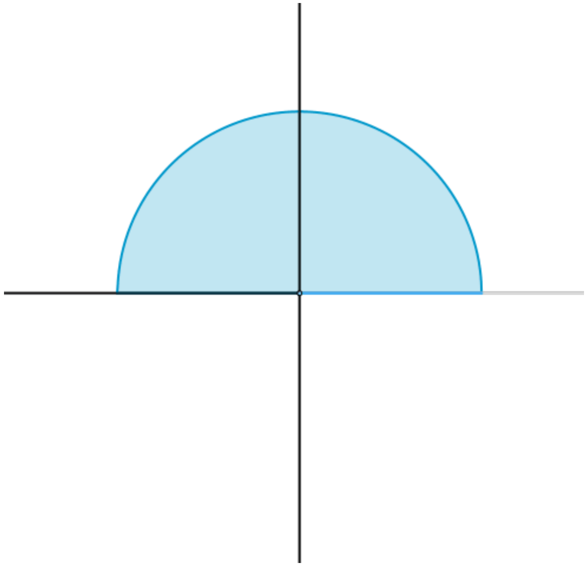
- $\mathcal{R} =$ Círculo centrado en $(0,0)$ (o sectores circulares)

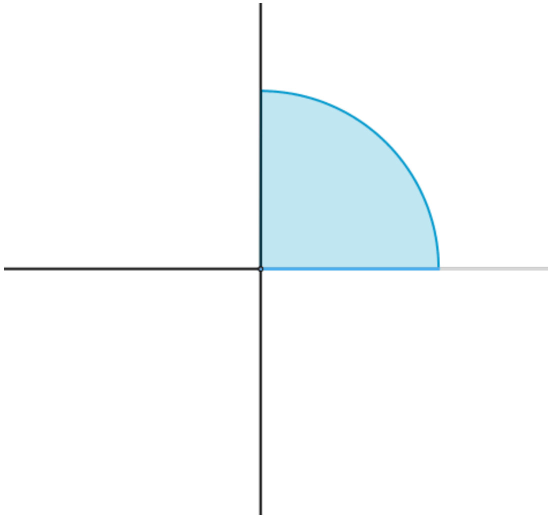
Circunferencia centrada en $(0,0)$ de radio k

$$x^2 + y^2 = k^2 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\text{sen}^2\theta = k^2 \Rightarrow r^2 = k^2 \qquad \boxed{r = k}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq k \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases} \qquad \mathcal{R}_1 = \begin{cases} 0 \leq r \leq k \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases} \qquad \mathcal{R}_2 = \begin{cases} 0 \leq r \leq k \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$







Descripción de regiones en coordenadas polares

- $\mathcal{R} =$ Círculo centrado en $(a, 0)$ y radio a

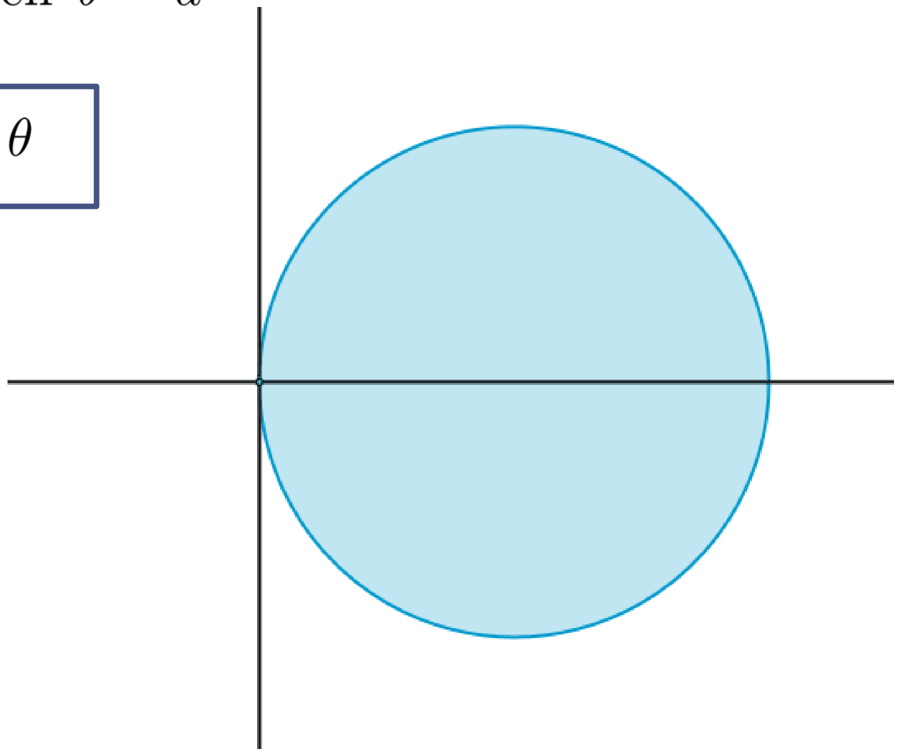
Circunferencia centrada en $(a, 0)$ de radio a

$$(x-a)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow (r\cos\theta - a)^2 + r^2\text{sen}^2\theta = a^2$$

$$\Rightarrow r^2\cos^2\theta - 2ar\cos\theta + a^2 + r^2\text{sen}^2\theta = a^2$$

$$\Rightarrow r^2 = 2ar\cos\theta \quad \Rightarrow \boxed{r = 2a\cos\theta}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 2a\cos\theta \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



Descripción de regiones en coordenadas polares

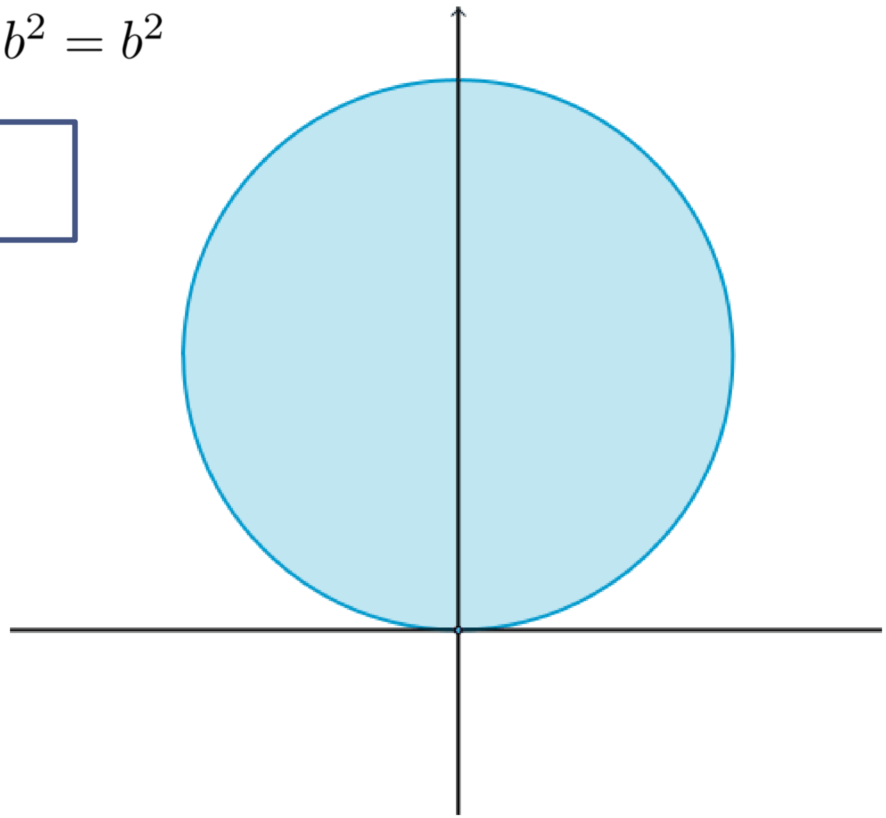
- $\mathcal{R} =$ Círculo centrado en $(0, b)$ y radio b

Circunferencia centrada en $(0, b)$ de radio b

$$x^2 + (y-b)^2 = b^2 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + (r\text{sen}\,\theta - b)^2 = b^2$$

$$\Rightarrow r^2\cos\theta + r^2\text{sen}^2\theta - 2br\text{sen}\,\theta + b^2 = b^2$$

$$\Rightarrow r^2 = 2br\text{sen}\;\theta \quad \Rightarrow \boxed{r = 2b\text{sen}\,\theta}$$



$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 2b\text{sen}\,\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

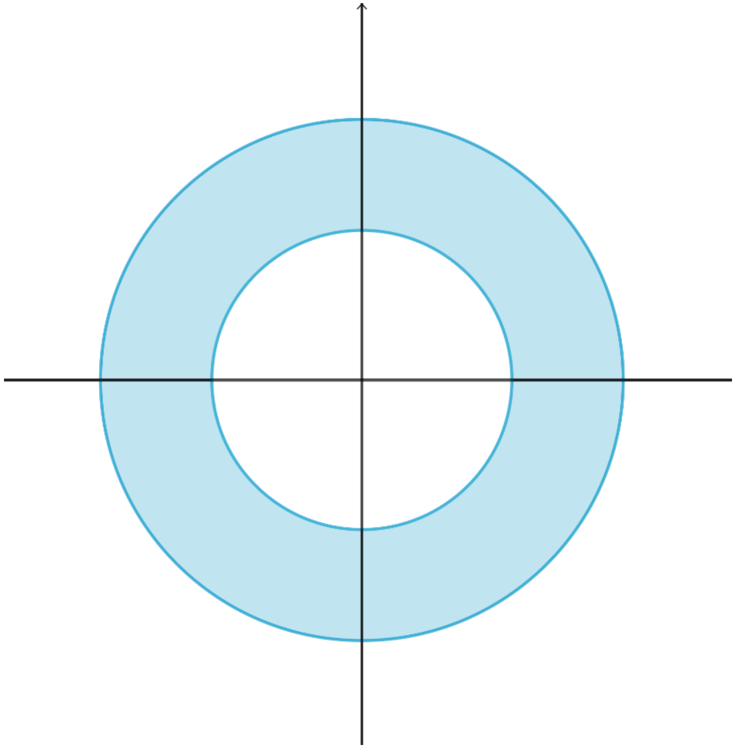
Descripción de regiones en coordenadas polares

- $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant b^2\}$

$$x^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\mathrm{sen}^2\theta = a^2 \Rightarrow r^2 = a^2 \Rightarrow r = a$$

$$x^2 + y^2 = b^2 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\mathrm{sen}^2\theta = b^2 \Rightarrow r^2 = b^2 \Rightarrow r = b$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} a \leq r \leq b \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$



Descripción de regiones en coordenadas polares

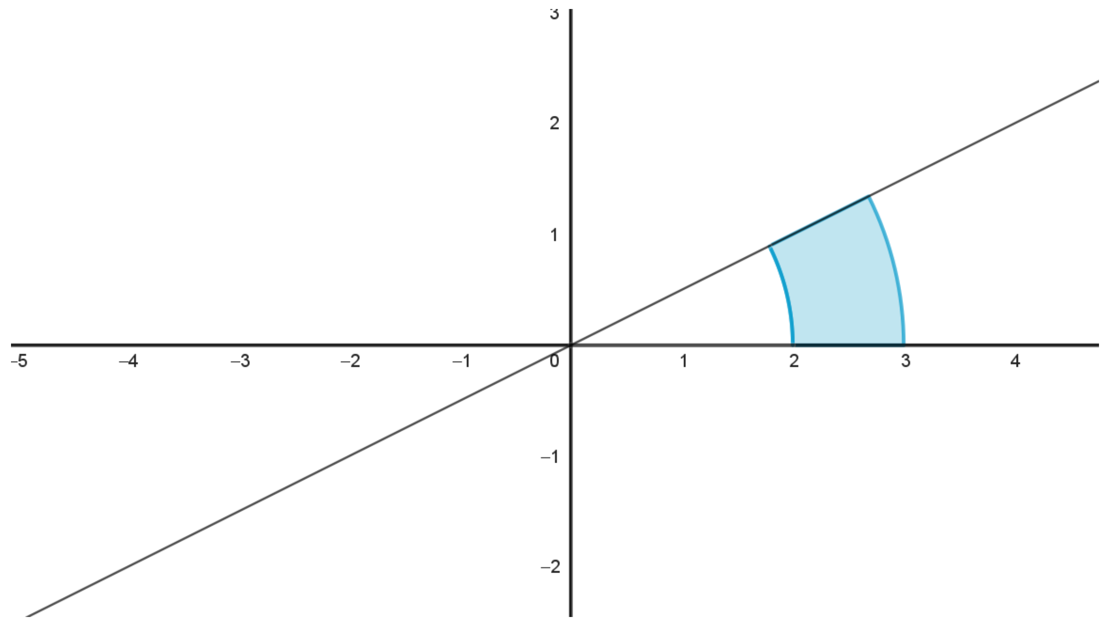
- $\mathcal{R} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \dfrac{x}{2},\ 4 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant 9\}$

$$y = \frac{x}{2} \Rightarrow r\mathrm{sen}\theta = \frac{r\cos\theta}{2} \Rightarrow \theta = \mathrm{arctg}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\mathrm{sen}^2\theta = 4 \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

$$x^2 + y^2 = 9 \Rightarrow r^2\cos^2\theta + r^2\mathrm{sen}^2\theta = 9 \Rightarrow r^2 = 9 \Rightarrow r = 3$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 2 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq \mathrm{arctg}\left(\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$



Descripción de regiones en coordenadas polares

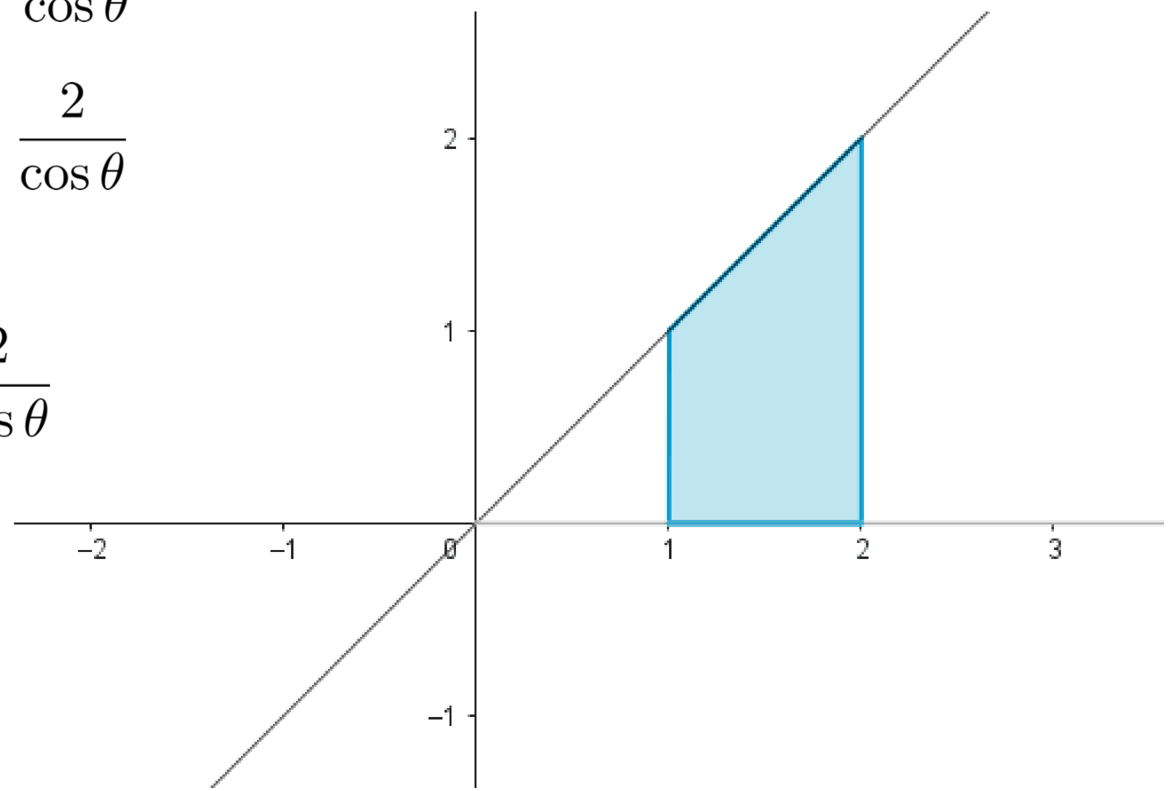
- $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2,\ 0 \leq y \leq x\}$

$$y = x \Rightarrow r\mathrm{sen}\theta = r\cos\theta \Rightarrow \mathrm{tg}\ \theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$x = 1 \Rightarrow r\cos\theta = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\cos\theta}$$

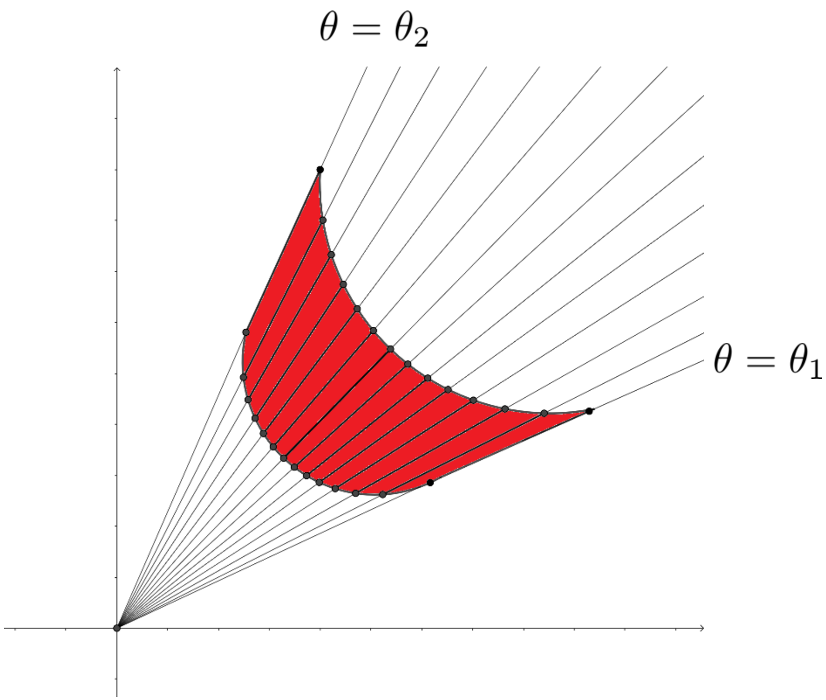
$$x = 2 \Rightarrow r\cos\theta = 2 \Rightarrow r = \frac{2}{\cos\theta}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} \dfrac{1}{\cos\theta} \leq r \leq \dfrac{2}{\cos\theta} \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$



- $\mathcal{R}$ región $r-$simple

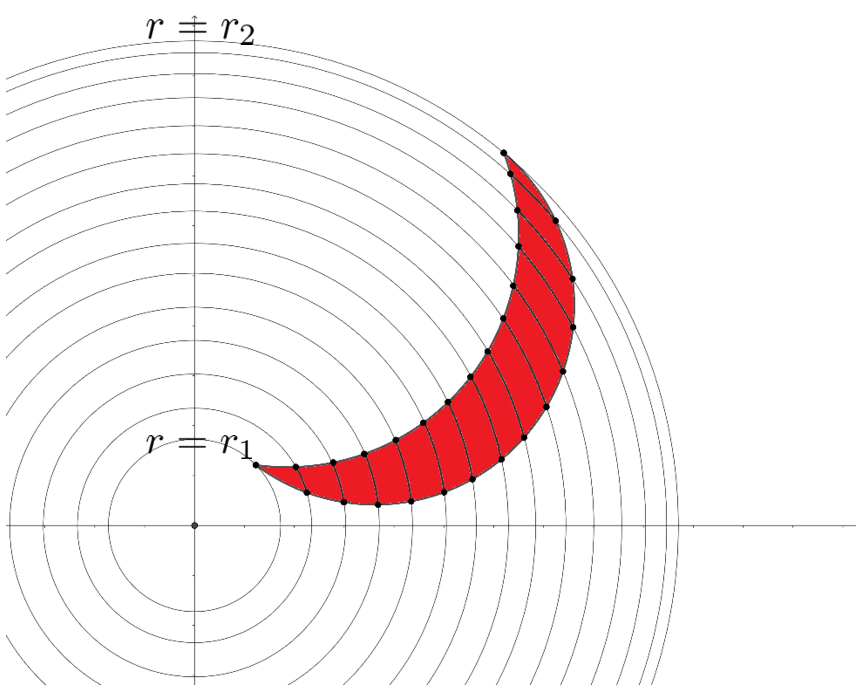
$$\mathcal{R} = \begin{cases} g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}$$



La intersección de la región con cualquier semirrecta con extremo en el origen es un segmento

- $\mathcal{R}$ región $\theta-$simple

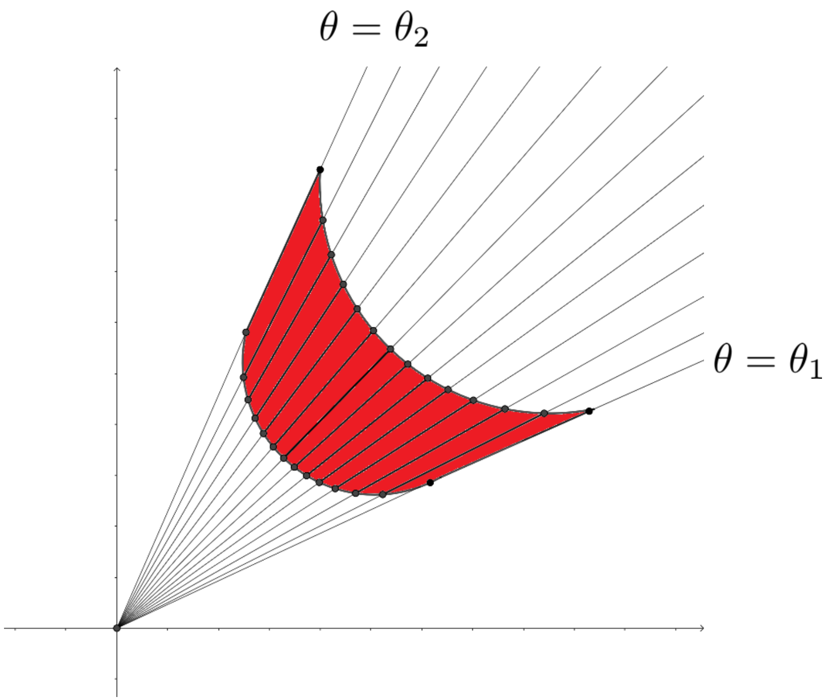
$$\mathcal{R} = \begin{cases} r_1 \leq r \leq r_2 \\ h_1(r) \leq \theta \leq h_2(r) \end{cases}$$



La intersección de la región con cualquier circunferencia centrada en el origen es un arco de circunferencia

- $\mathcal{R}$ región $r-$simple

$$\mathcal{R} = \begin{cases} g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta) \\ \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \end{cases}$$



Solo usaremos coordenadas polares para describir regiones $r-$simples

La intersección de la región con cualquier semirrecta con extremo en el origen es un segmento

El cambio a coordenadas polares se suele utilizar para calcular integrales

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x, y)dA$$

en situaciones como las siguientes:

- La región $\mathcal{R}$ es un círculo o sector circular

- El integrando $f(x, y)$ contiene expresiones donde aparece $x^2 + y^2$

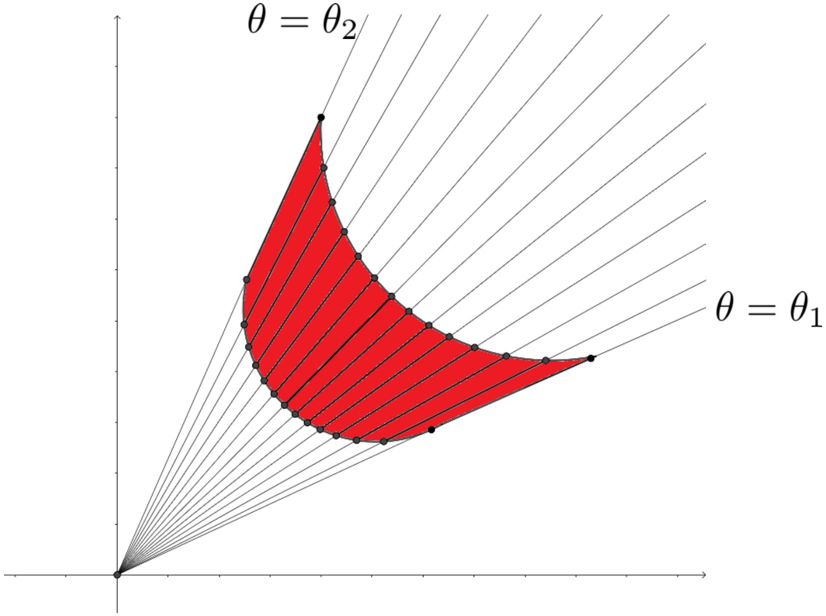
Forma polar del Teorema de Fubini

Sea f una función continua en una región plana $\mathcal{R}$.

Si $\mathcal{R}$ se define mediante $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ y $g_1(\theta) \leq r \leq g_2(\theta)$, siendo g_1 y g_2 continuas en el intervalo $[\theta_1, \theta_2]$, entonces

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{g_1(\theta)}^{g_2(\theta)} f(r,\theta)\, r\, dr d\theta$$

Jacobiano



Ejemplo: Calcular la integral doble pasando a coordenadas polares

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) dydx$$

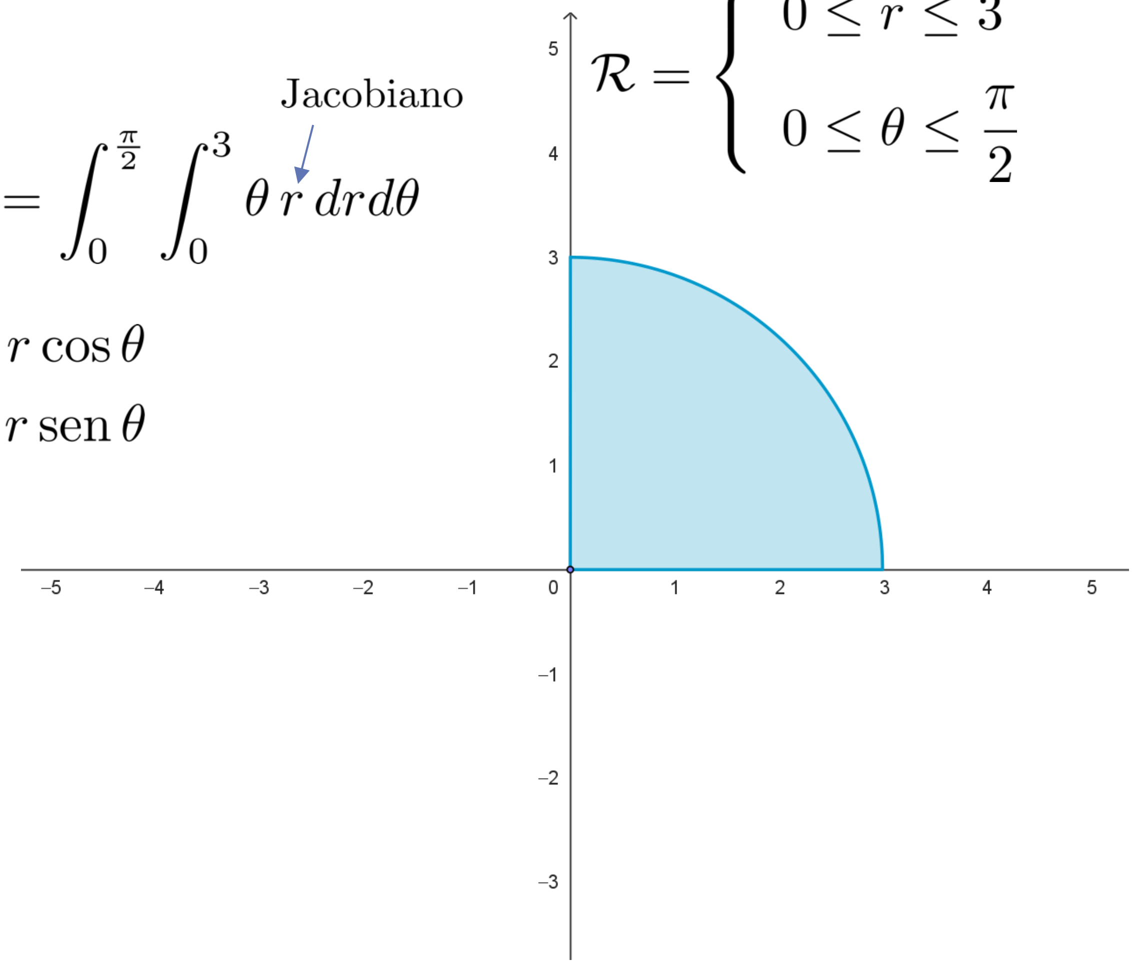
$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 3 \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) dydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^3 \theta\, \overset{\text{Jacobiano}}{r}\, drd\theta$$

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r \operatorname{sen}\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^3 \theta d\theta$$

$$= \frac{9}{2}\left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{9\pi^2}{16}$$



INTEGRALES DOBLES – COORDENADAS POLARES

Ejemplo: Expresar la suma de las dos integrales en coordenadas polares

$$\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dydx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydx$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 2\sqrt{2} \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

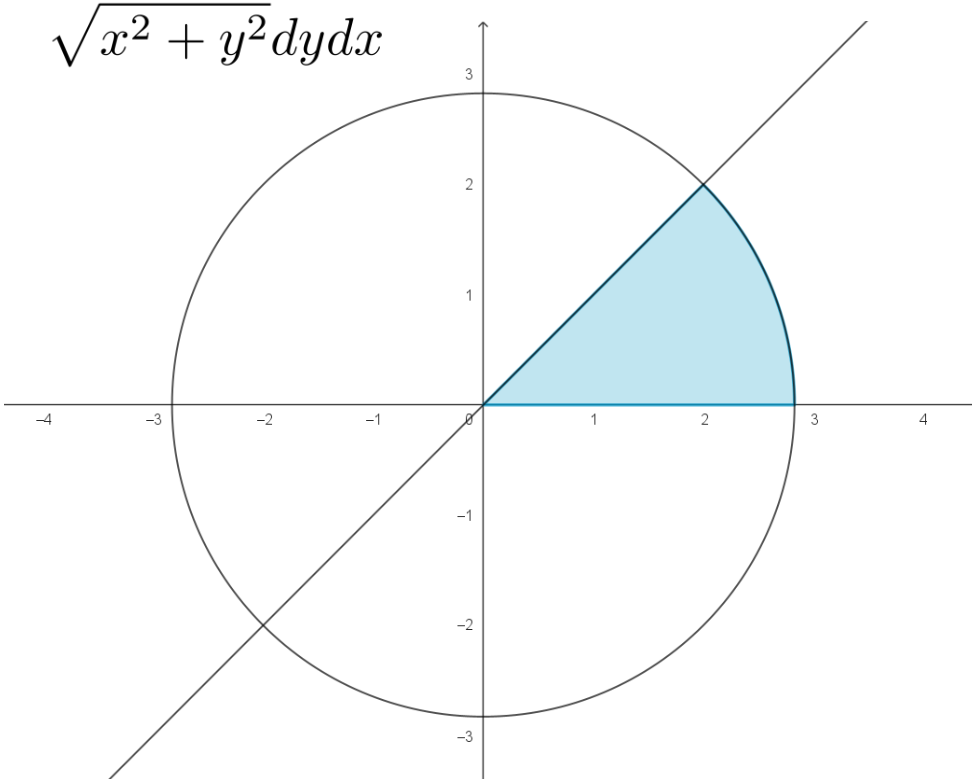
$$\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dydx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{2}} r\, r\, drd\theta$$

Jacobiano

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$



Ejemplo: Expresar la suma de las dos integrales en coordenadas polares

$$\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dydx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydx$$

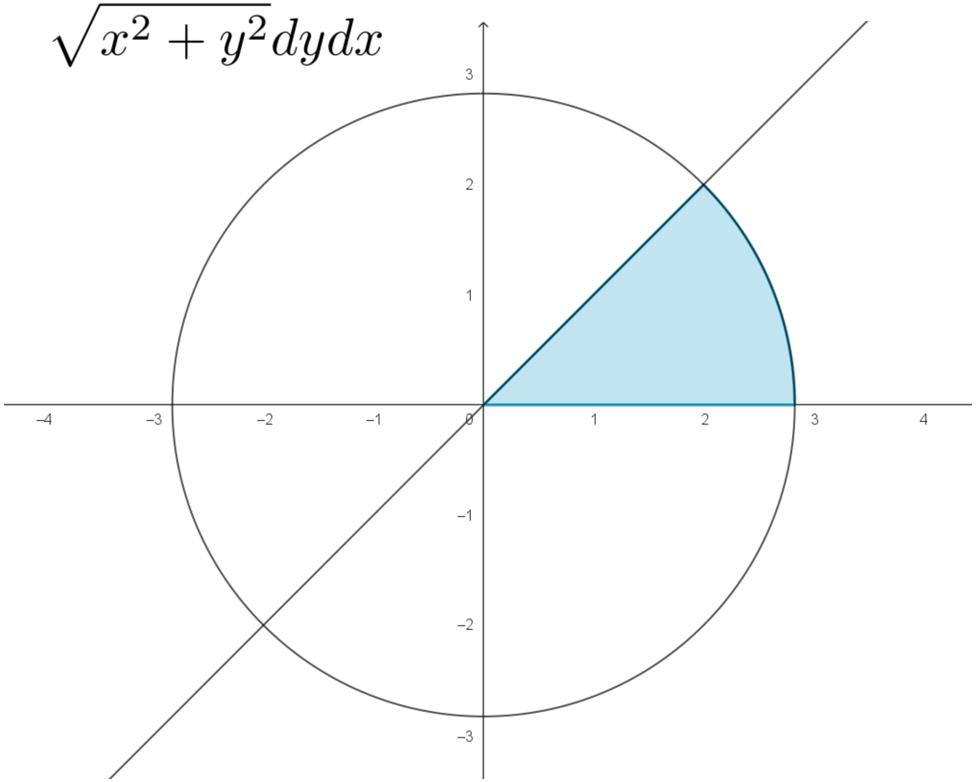
$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \le r \le 2\sqrt{2} \\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}\,dydx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}\,dydx$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{2}} r\,r\,drd\theta$$

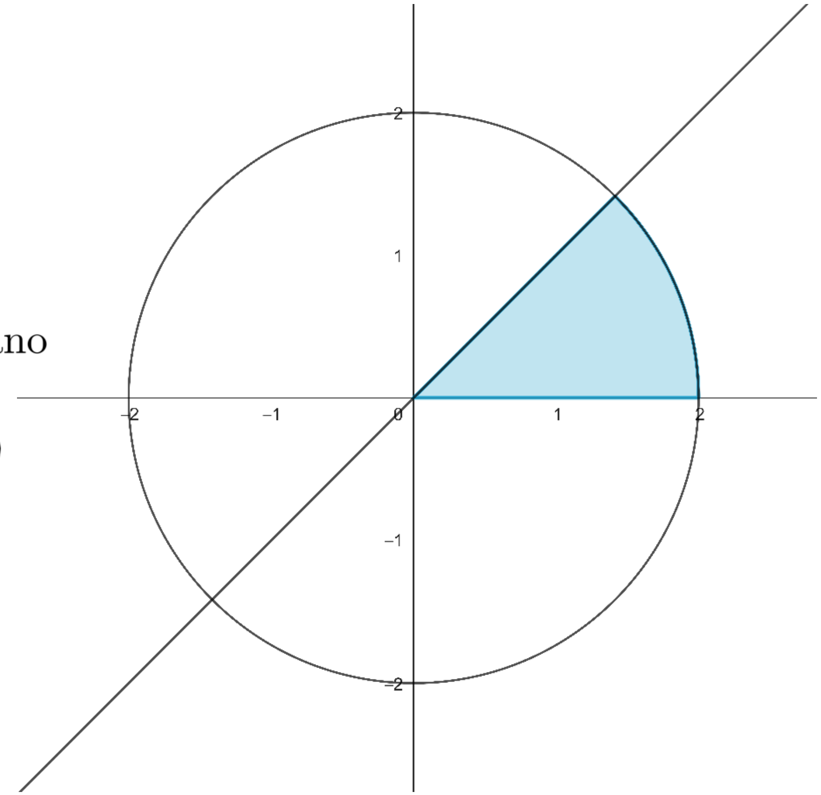
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\sqrt{2}} d\theta$$

$$= \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$$



Ejemplo: Calcular $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{4+x^2+y^2}\,dA$, donde $\mathcal{R}$ es el sector circular situado en el primer cuadrante y determinado por $x^2+y^2=4$ entre $y=0$ $y=x$.

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{4} \\ 0 \le r \le 2 \end{cases}$$



Jacobiano

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{4+x^2+y^2}\,dA = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 \frac{1}{4+r^2}\,r\,dr\,d\theta$$

$$x = r\cos\theta$$

$$y = r\,\mathrm{sen}\,\theta$$

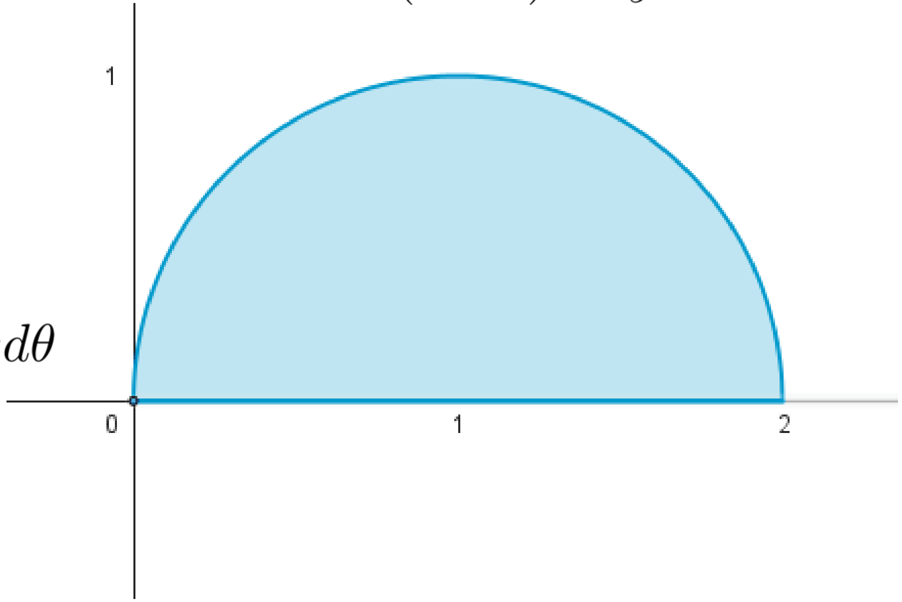
$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{1}{2}\ln(4+r^2)\right]_0^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2}(\ln 8 - \ln 4)\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \;\; = \frac{1}{2}(\ln 2)\,\frac{\pi}{4} = \frac{\pi \ln 2}{8}$$

Ejemplo: Calcular la integral $\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2+y^2}dA$, cuando $\mathcal{R}$ es la región del plano acotada por la recta $y=0$ y la semicircunferencia $y=\sqrt{2x-x^2}$

$$(x-1)^2+y^2=1$$

$$\mathcal{R}=\begin{cases} 0\le r\le 2\cos\theta \\ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2} \end{cases}$$



$$\iint_{\mathcal{R}} \sqrt{x^2+y^2}dA=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{r^2}\,r\,drd\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\cos\theta}d\theta \quad =\frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[(1-\operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta\right]d\theta$$

$$=\frac{8}{3}\left[\operatorname{sen}\theta-\frac{\operatorname{sen}^3\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{16}{9}$$

Ejemplo: Siendo $\mathcal{R} = \left\{(x,y) : x^2 + (y-2)^2 \leq 4,\ y \leq \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right\}$, calcular

$$\int\int_{\mathcal{R}} (4 - x^3)\, dA$$

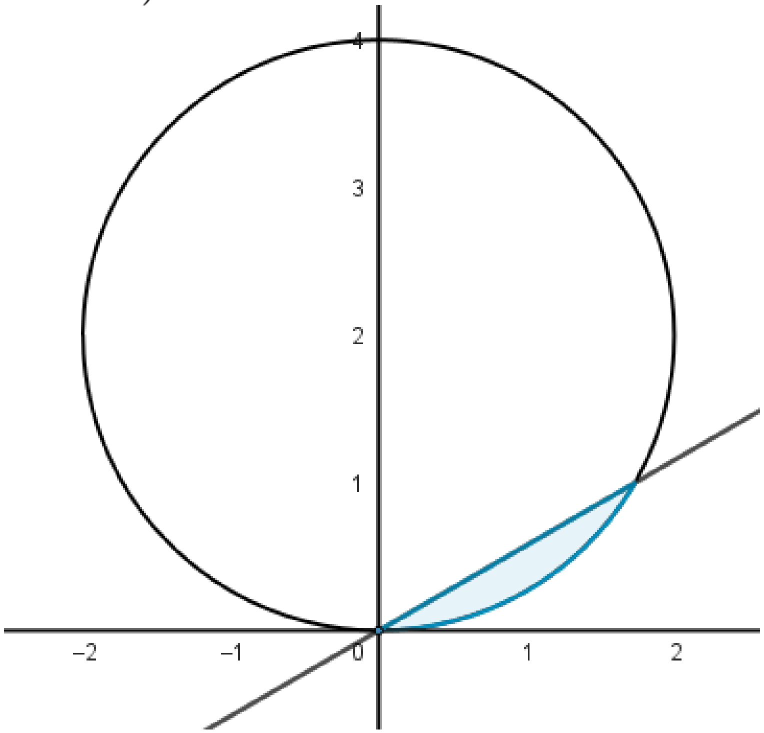
$$x^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4y = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 4r\text{sen}\theta = 0 \Rightarrow r(r - 4\text{sen}\theta) = 0 \Rightarrow r = 4\text{sen}\theta$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow r\text{sen}\theta = \frac{r\cos\theta}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{r\text{sen}\theta}{\cos\theta} = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \text{tg}\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 4\text{sen}\theta \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$



Ejemplo: Siendo $\mathcal{R} = \left\{(x, y) : x^2 + (y-2)^2 \leq 4,\ y \leq \dfrac{x}{\sqrt{3}}\right\}$, calcular

$$\int\int_{\mathcal{R}} \left(4 - x^3\right) dA$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 4\text{sen}\theta \\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{6} \end{cases}$$

$$\int\int_{\mathcal{R}} \left(4 - x^3\right) dA \quad = \int_0^{\pi/6} \int_0^{4\text{sen}\theta} \left(4 - r^3 \cos^3\theta\right) r\, dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/6} \int_0^{4\text{sen}\theta} \left(4r - r^4 \cos^3\theta\right) \, dr d\theta \quad = \int_0^{\pi/6} \left[2r^2 - \frac{r^5}{5} \cos^3\theta\right]_0^{4\text{sen}\theta} d\theta$$

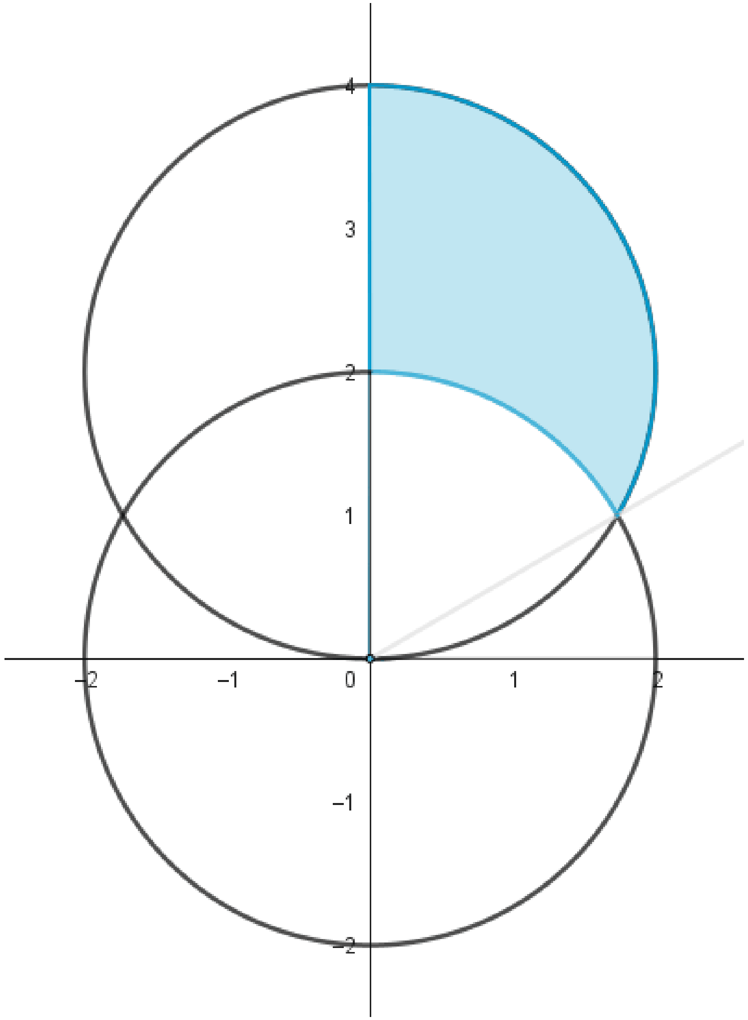
$$= \int_0^{\pi/6} \left(32\text{sen}^2\theta - \frac{1024}{5}\text{sen}^5\theta \cos^3\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/6} \left(32\frac{1-\cos 2\theta}{2} - \frac{1024}{5}\text{sen}^5\theta(1 - \text{sen}^2\theta)\cos\theta\right) d\theta \quad = \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3} - \frac{13}{30}$$

Ejemplo: Calcular el área de la región del plano

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) : x \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 4,\ x^2 + (y-2)^2 \leq 4\right\}$$

$$A(\mathcal{R}) = \int\int_{\mathcal{R}} 1 dA$$



$$x^2 + (y-2)^2 = 4 \Rightarrow r = 4\mathrm{sen}\theta$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

Intersección

$$\left.\begin{array}{r} r = 4\mathrm{sen}\theta \\ r = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \mathrm{sen}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 2 \leq r \leq 4\mathrm{sen}\theta \\ \dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular el área de la región del plano

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) : x \geq 0,\ x^2 + y^2 \geq 4,\ x^2 + (y-2)^2 \leq 4\right\}$$

$$\int\int_{\mathcal{R}} 1 dA = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \int_{2}^{4\mathrm{sen}\theta} r\, dr d\theta \qquad \mathcal{R} = \begin{cases} 2 \leq r \leq 4\mathrm{sen}\theta \\ \dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_2^{4\mathrm{sen}\theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(8\mathrm{sen}^2\theta - 2\right) d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(4(1 - \cos(2\theta)) - 2\right) d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 2 d\theta - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} 4\cos(2\theta) d\theta$$

$$= [2\theta]_{\pi/6}^{\pi/2} - [2\mathrm{sen}(2\theta)]_{\pi/6}^{\pi/2} = 2\frac{\pi}{3} + \sqrt{3}$$

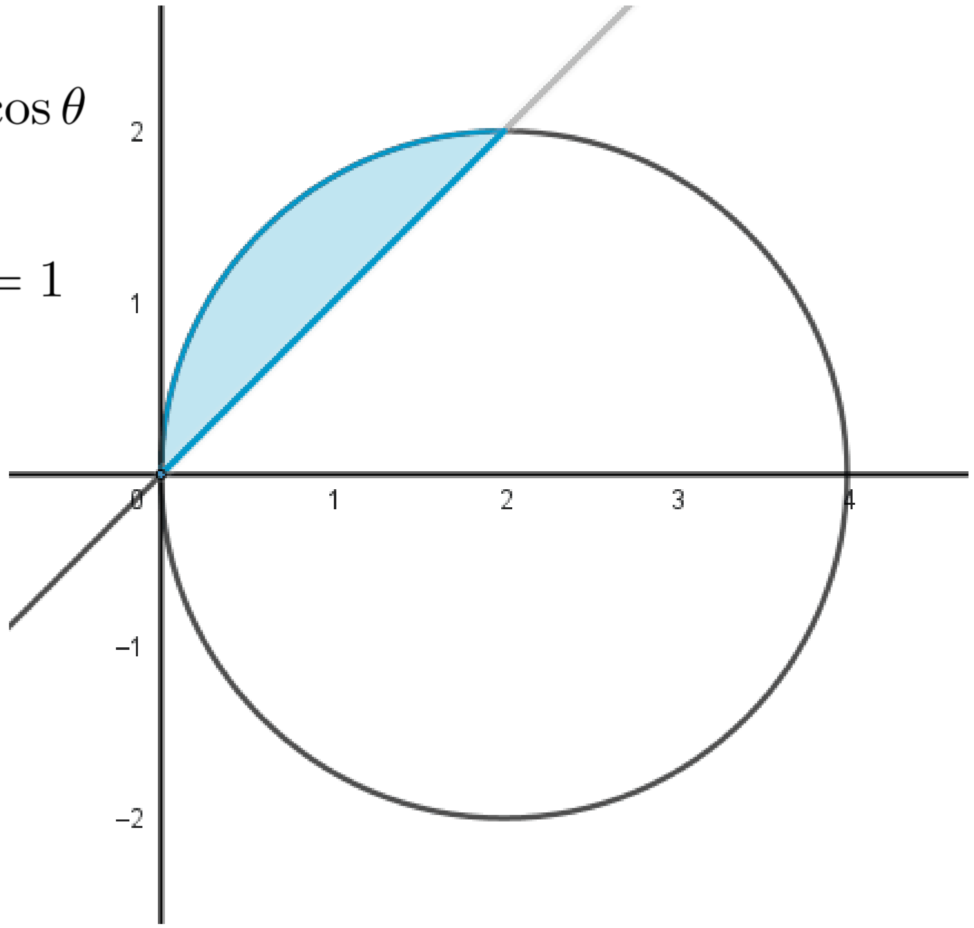
Ejemplo: Sea $\mathcal{R}$ la región del plano acotada por la semicircunferencia $y = \sqrt{4x - x^2}$ y la recta $y = x$. Calcular $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} dA$

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \iff x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 4r\cos\theta \Rightarrow r = 4\cos\theta$$

$$y = x \Rightarrow r\mathrm{sen}\theta = r\cos\theta \Rightarrow \frac{\mathrm{sen}\theta}{\cos\theta} = 1$$

$$\Rightarrow \mathrm{tg}\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$



$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 4\cos\theta \\ \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ejemplo: Sea $\mathcal{R}$ la región del plano acotada por la semicircunferencia $y=\sqrt{4x-x^2}$ y la recta $y=x$. Calcular $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}dA$

$$\mathcal{R}=\begin{cases} 0\leq r\leq 4\cos\theta \\ \dfrac{\pi}{4}\leq\theta\leq\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}dA=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{4\cos\theta}\frac{1}{\sqrt{16-r^2}}r\,drd\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left[-\sqrt{16-r^2}\right]_0^{4\cos\theta}d\theta$$

Ejemplo: Sea $\mathcal{R}$ la región del plano acotada por la semicircunferencia $y = \sqrt{4x - x^2}$ y la recta $y = x$. Calcular $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} dA$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 4\cos\theta \\ \dfrac{\pi}{4} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{\sqrt{16 - x^2 - y^2}} dA = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{16 - r^2}} r\, dr d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[-\sqrt{16 - r^2}\right]_0^{4\cos\theta} d\theta \qquad = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left[\sqrt{16} - \sqrt{16 - 16\cos^2\theta}\right] d\theta$$

$$= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (4 - 4\operatorname{sen}\theta)\, d\theta \quad = \Big[4\theta + 4\cos\theta \quad\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \pi - 2\sqrt{2}$$

Ejemplo: Calcular el área de la región $\mathcal{R}$ en el plano XY encerrada en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, por encima de la recta $y = 1$, y por abajo de $y = \sqrt{3}x$.

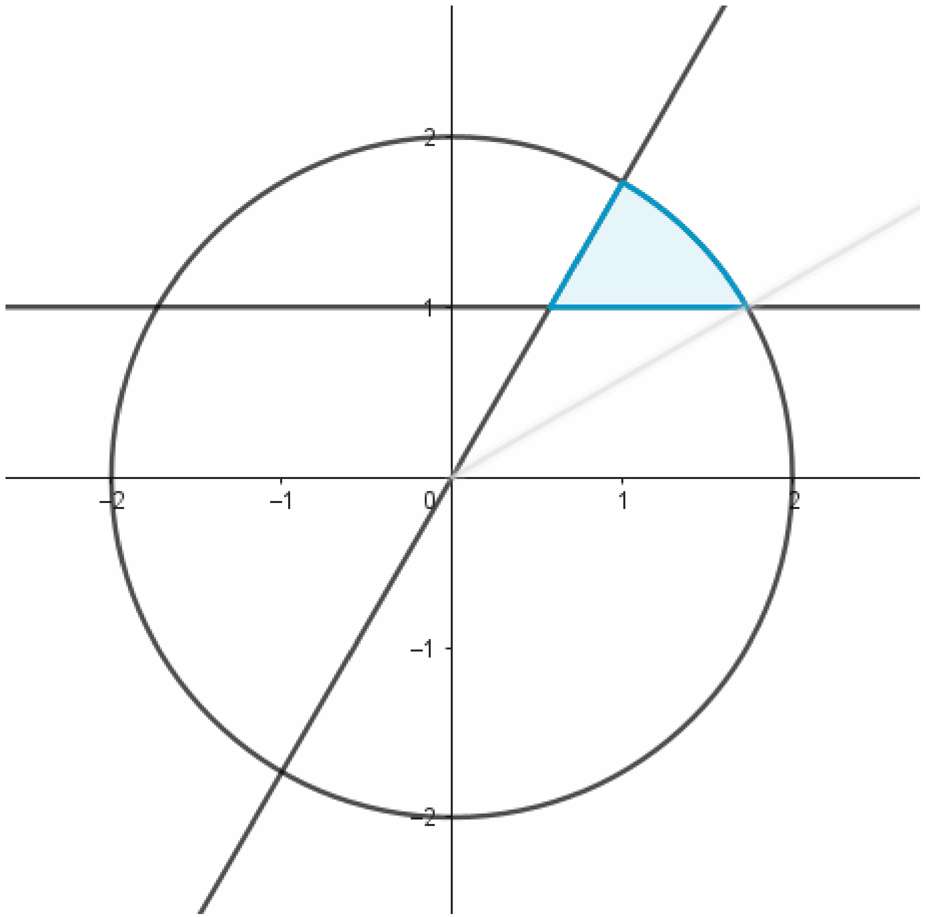
$$y = \sqrt{3}x \Rightarrow r\text{sen}\theta = \sqrt{3}r\cos\theta \Rightarrow \text{tg}\theta = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$y = 1 \Rightarrow r\text{sen}\theta = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{\text{sen}\theta}$$

$$x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

Intersección

$$\left.\begin{array}{c} r = \dfrac{1}{\text{sen}\theta} \\ r = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{sen}\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$



$$\mathcal{R} = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{sen}\theta} \leq r \leq 2 \\ \dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular el área de la región $\mathcal{R}$ en el plano XY encerrada en la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, por encima de la recta $y = 1$, y por abajo de $y = \sqrt{3}x$.

$$\mathcal{R} = \begin{cases} \dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} \leq r \leq 2 \\ \dfrac{\pi}{6} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$A(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} 1 dA = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}^{2} r\, dr d\theta \; = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^2}{2} \right]_{\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}}^{2} d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left[4 - \frac{1}{\operatorname{sen}^2\theta} \right] d\theta \; = \frac{1}{2} (4 + \operatorname{cotg}\theta) \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\pi - \sqrt{3}}{3}$$

Ejemplo: Usar integrales dobles para calcular el volumen de la región $\mathcal{Q}$ del espacio acotada por los paraboloides $z = x^2 + y^2 + 7$, $z = 3x^2 + 3y^2 + 4$

Intersección

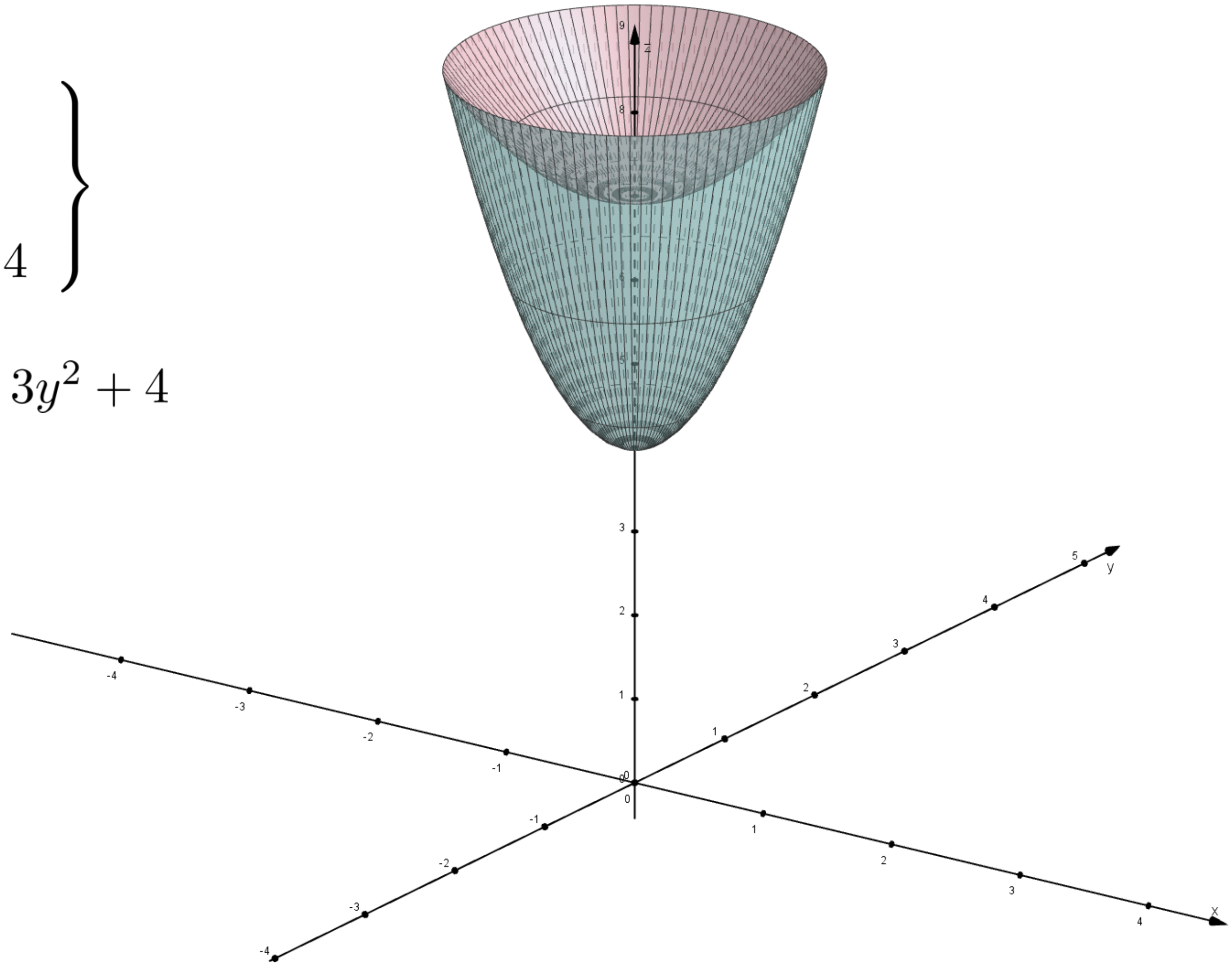
$$\left.\begin{aligned} z &= x^2 + y^2 + 7 \\ \\ z &= 3x^2 + 3y^2 + 4 \end{aligned}\right\}$$

$$x^2 + y^2 + 7 = 3x^2 + 3y^2 + 4$$

$$2x^2 + 2y^2 = 3$$

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{2}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$



Ejemplo: Usar integrales dobles para calcular el volumen de la región $\mathcal{Q}$ del espacio acotada por los paraboloides $z = x^2 + y^2 + 7$, $z = 3x^2 + 3y^2 + 4$

$$V(\mathcal{Q}) = \int\int_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2 + 7)\, dA - \int\int_{\mathcal{R}} (3x^2 + 3y^2 + 4)\, dA$$

$$= \int\int_{\mathcal{R}} \left[(x^2 + y^2 + 7) - (3x^2 + 3y^2 + 4)\right] dA = \int\int_{\mathcal{R}} \left[3 - 2x^2 - 2y^2\right] dA$$

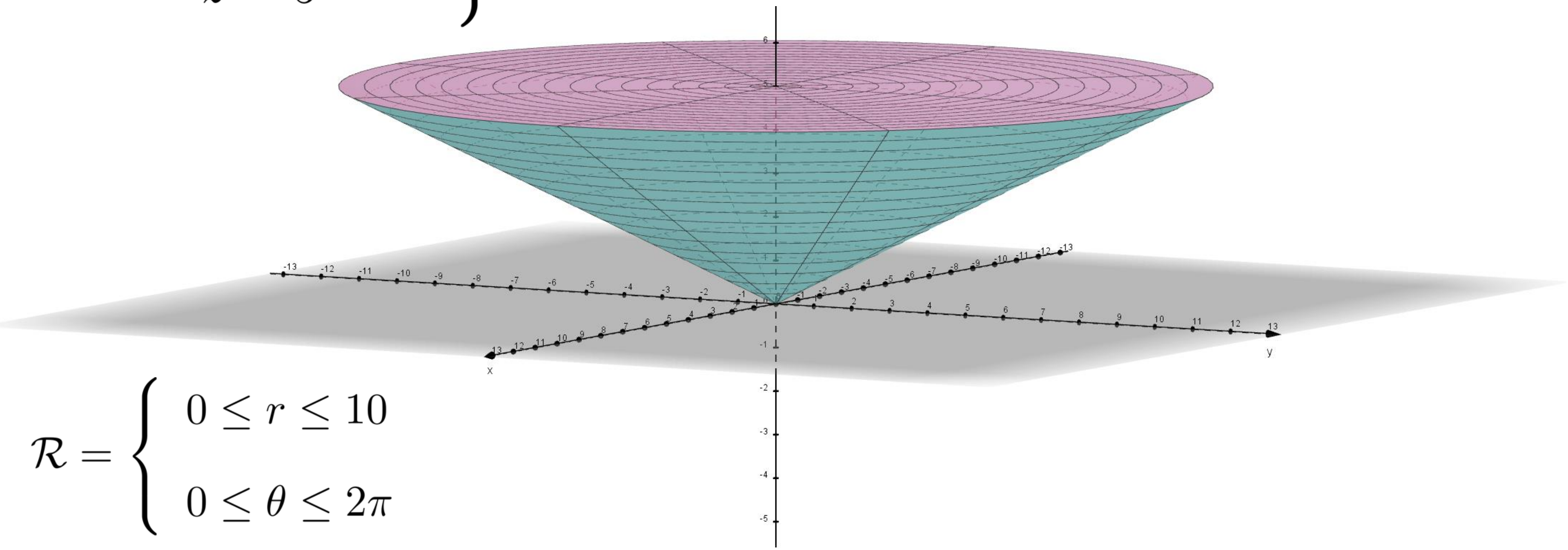
$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} (3 - 2r^2)\, r\, dr d\theta = \int_0^{2\pi} \left[3\frac{r^2}{2} - 2\frac{r^4}{4}\right]_0^{\sqrt{\frac{3}{2}}} d\theta = 2\pi\frac{9}{8} = \frac{9\pi}{4}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \le r \le \sqrt{\dfrac{3}{2}} \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

Ejemplo: Usar integrales dobles para calcular el volumen de la región $\mathcal{Q}$ del espacio acotada por el semicono $z = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, y el plano $z = 5$

Intersección

$$\left.\begin{array}{c} z = \dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} \\ z = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = 5 \Rightarrow x^2+y^2 = 100$$



$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 10 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

Ejemplo: Usar integrales dobles para calcular el volumen de la región $\mathcal{Q}$ del espacio acotada por el semicono $z = \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}$, y el plano $z = 5$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 10 \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

$$V(\mathcal{Q}) = V_1 - V_2 = \int\int_{\mathcal{R}} 5dA - \int\int_{\mathcal{R}} \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}dA = \int\int_{\mathcal{R}} \left[5 - \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}\right] dA$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{10} \left(5 - \frac{1}{2}r\right) rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \left[5\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{6}\right]_0^{10} d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{500}{6} d\theta = \frac{500\pi}{3}$$

Ejemplo: Usar integrales dobles para calcular el volumen de la región $\mathcal{Q}$ del espacio acotada por semiesfera $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ y el semicono $z=3\sqrt{x^2+y^2}$.

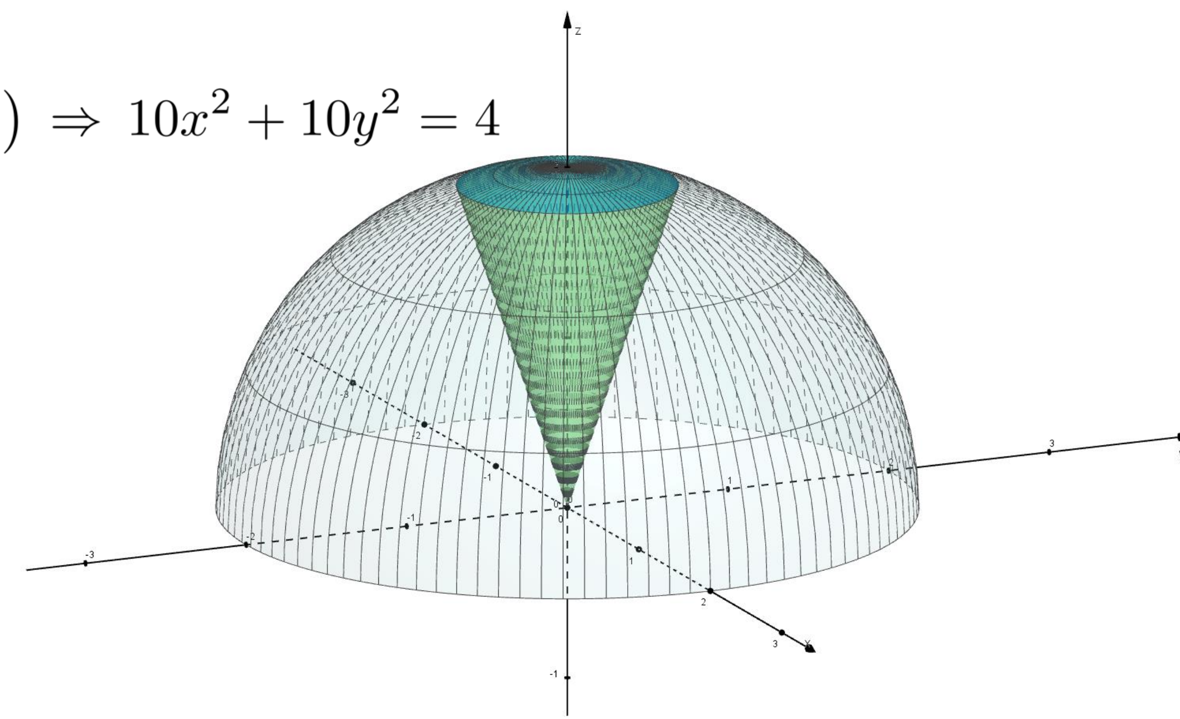
Intersección

$$\left.\begin{array}{l} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ \\ z=3\sqrt{x^2+y^2} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \sqrt{4-x^2-y^2}=3\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow\ 4-x^2-y^2=9\left(x^2+y^2\right) \Rightarrow\ 10x^2+10y^2=4$$

$$\Rightarrow\ x^2+y^2=\frac{2}{5}$$

$$\mathcal{R}=\begin{cases} 0\le r\le\sqrt{2/5} \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$



Ejemplo: Usar integrales dobles para calcular el volumen de la región $\mathcal{Q}$ del espacio acotada por semiesfera $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ y el semicono $z=3\sqrt{x^2+y^2}$.

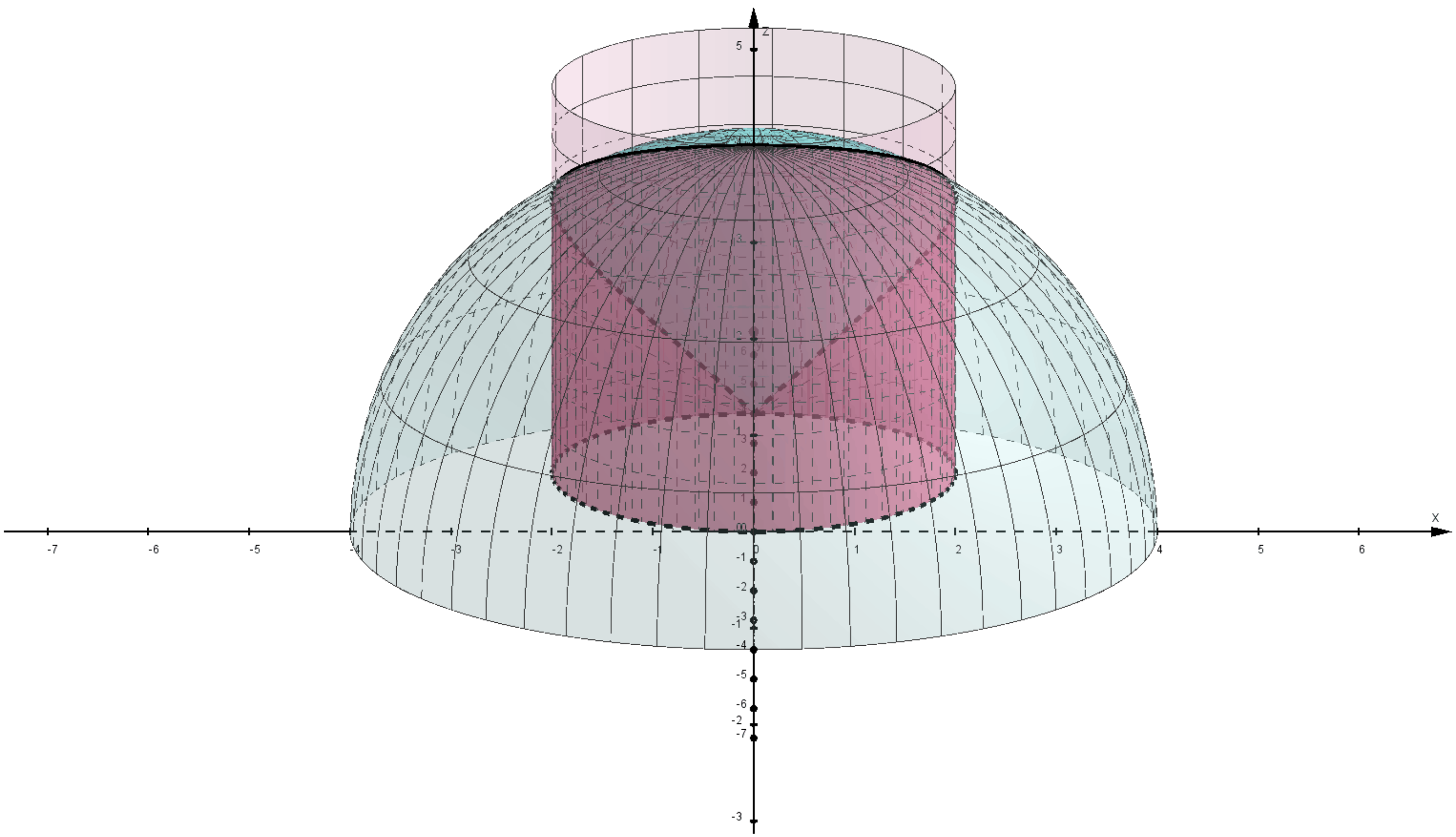
$$\mathcal{R}=\begin{cases} 0\le r\le\sqrt{2/5} \\ 0\le\theta\le 2\pi \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V(\mathcal{Q}) &= V_1-V_2=\int\int_{\mathcal{R}}\sqrt{4-x^2-y^2}dA-\int\int_{\mathcal{R}}3\sqrt{x^2+y^2}dA= \\ &= \int\int_{\mathcal{R}}\left[\sqrt{4-x^2-y^2}-3\sqrt{x^2+y^2}\right]dA \end{aligned}$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2/5}}\left(\sqrt{4-r^2}-3r\right)r\,drd\theta=\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2/5}}\left(r\sqrt{4-r^2}-3r^2\right)\,drd\theta$$

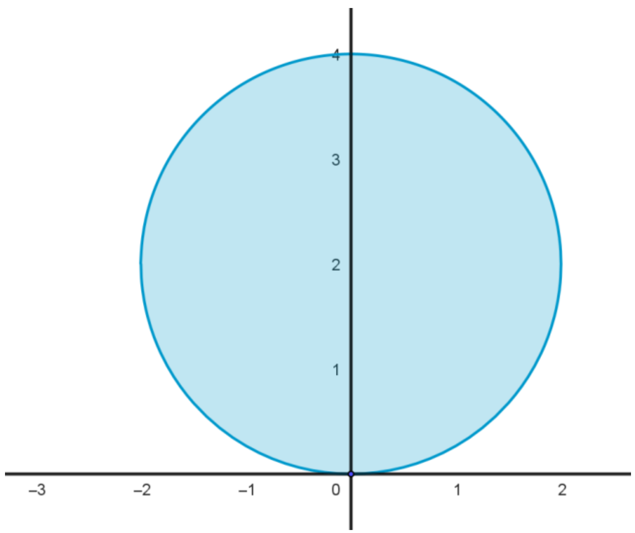
$$=\int_0^{2\pi}\left[\frac{-1}{3}(4-r^2)^{3/2}-r^3\right]_0^{\sqrt{2/5}}d\theta=2\pi\left(\frac{8}{3}-4\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$$

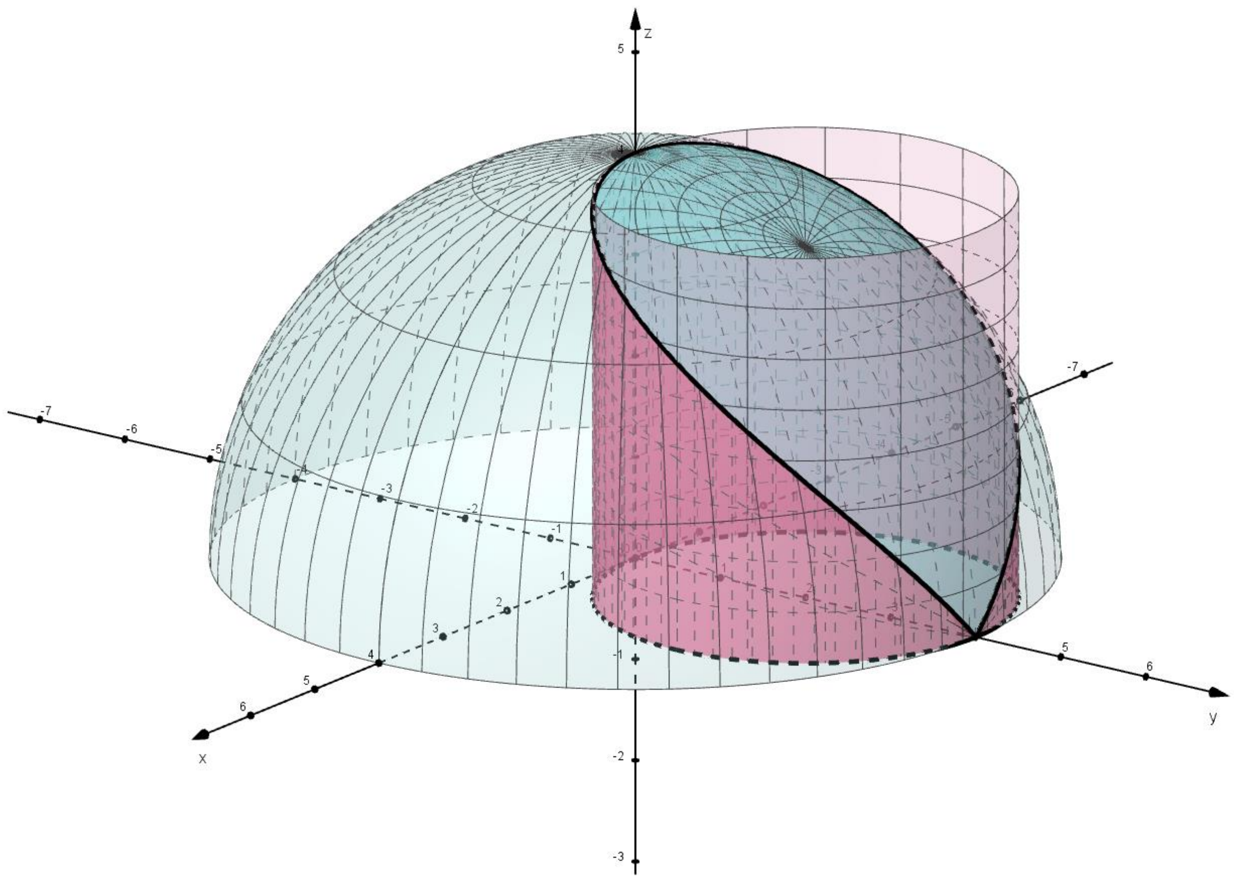
Ejemplo: Usar una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y al cilindro $x^2 + y^2 - 4y = 0$ y por encima de $z = 0$.



Ejemplo: Usar una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y al cilindro $x^2 + y^2 - 4y = 0$ y por encima de $z = 0$.

$$x^2 + y^2 - 4y = 0 \Rightarrow r^2 - 4r\text{sen}\theta \Rightarrow r = 4\text{sen}\theta$$





$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 4\,\text{sen}\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Ejemplo: Usar una integral doble en coordenadas polares para hallar el volumen del sólido interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y al cilindro $x^2 + y^2 - 4y = 0$ y por encima de $z = 0$.

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \le r \le 4\text{sen}\theta \\ 0 \le \theta \le \pi \end{cases}$$

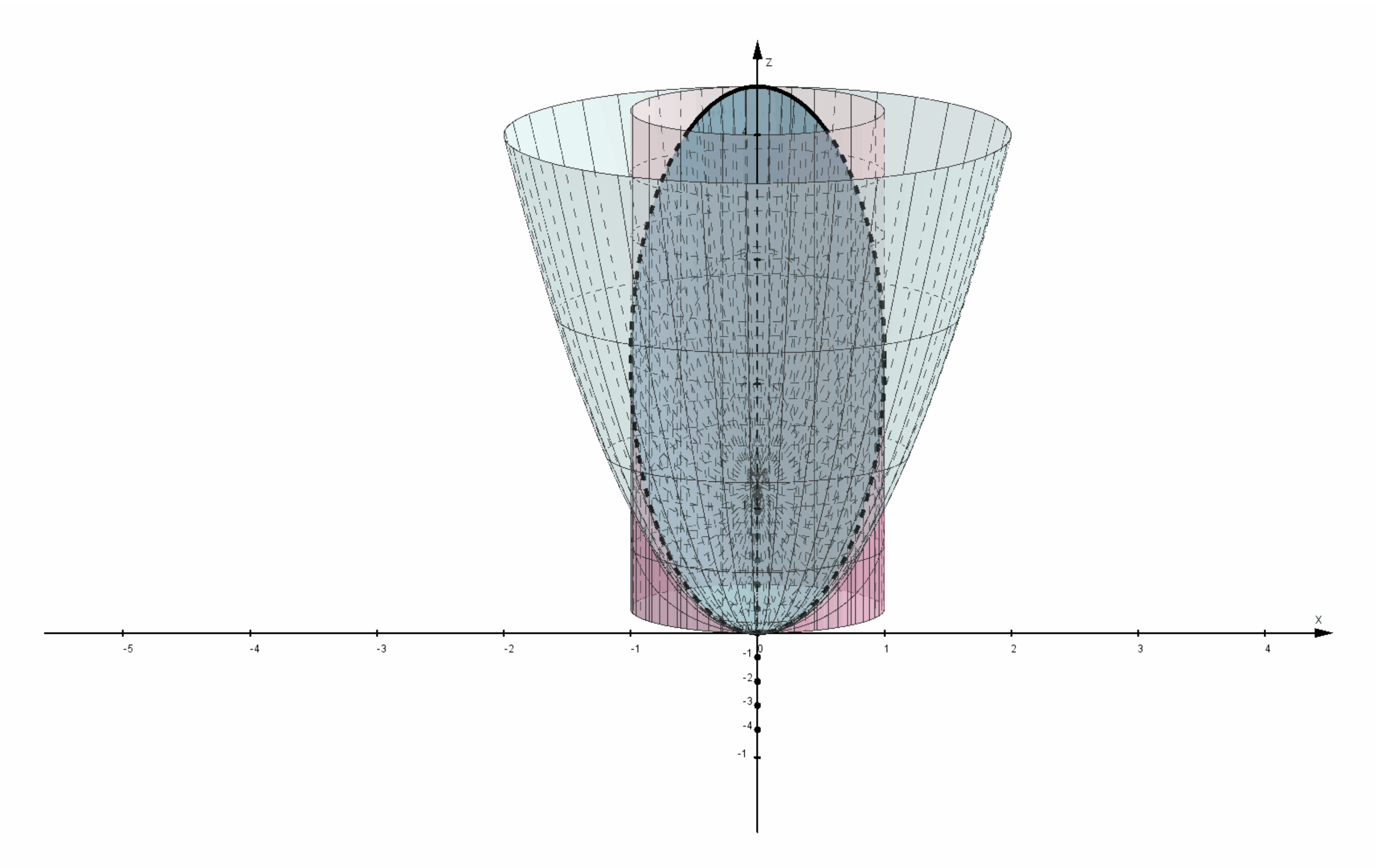
$$V = \iint_{\mathcal{R}} \sqrt{16 - x^2 - y^2}\, dA \qquad = \int_0^{\pi} \int_0^{4\,\text{sen}\,\theta} r\sqrt{16 - r^2} dr d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left[\frac{-\left(16 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3} \right]_0^{4\,\text{sen}\,\theta} d\theta \qquad = -\frac{1}{3} \int_0^{\pi} \left[\left(16 - 16\,\text{sen}^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} - 16^{\frac{3}{2}} \right] d\theta$$

$$= -\frac{1}{3} 4^3 \int_0^{\pi} \left(\cos^3\theta - 1\right) d\theta = -\frac{64}{3} \int_0^{\pi} \left((1 - \text{sen}^2\theta)\cos\theta - 1 \right) d\theta$$

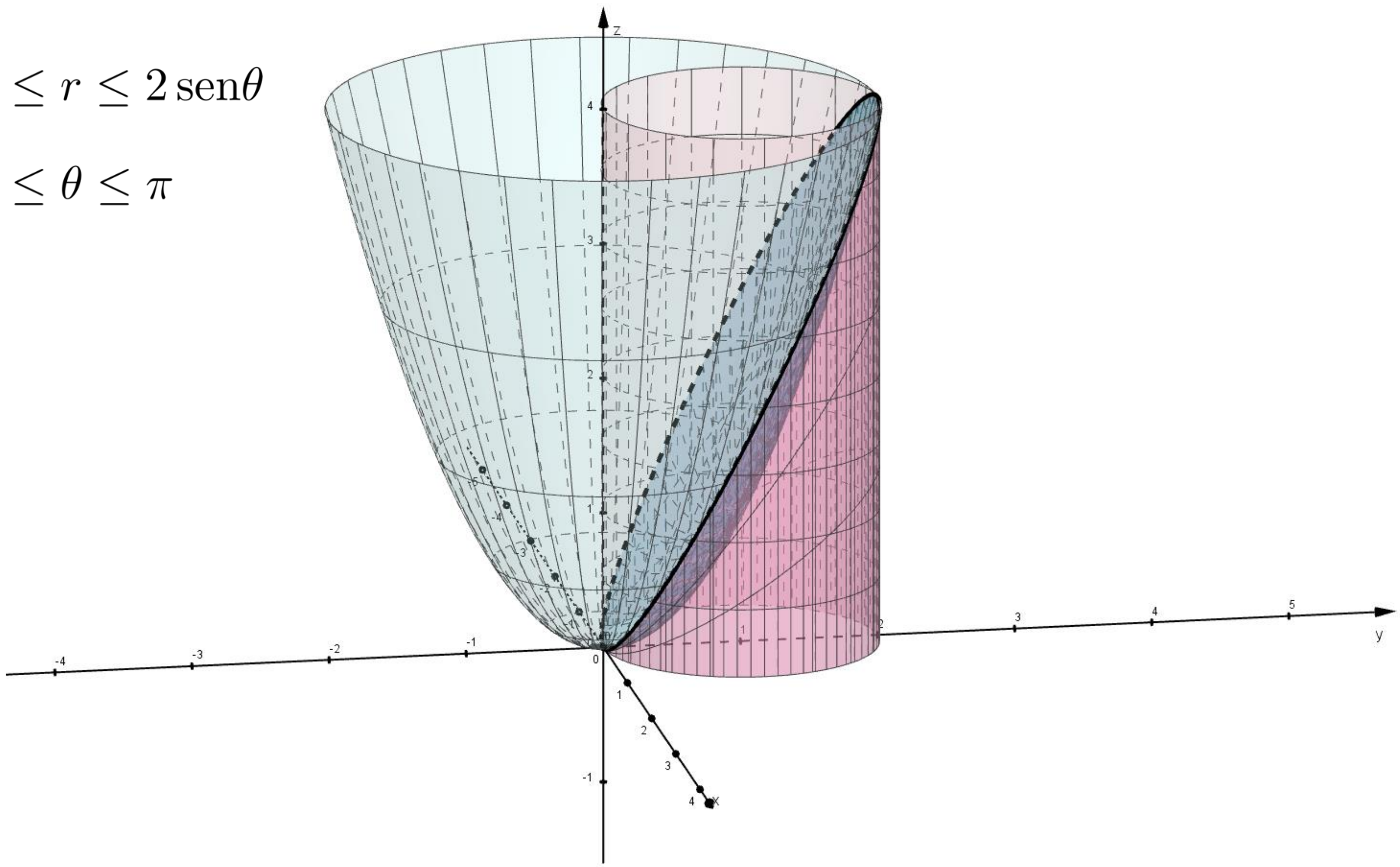
$$= -\frac{64}{3} \left[\text{sen}\,\theta - \frac{\text{sen}^3\,\theta}{3} - \theta \right]_0^{\pi} = \frac{64}{3}\pi$$

Ejemplo: Calcular el volumen del sólido interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, que está limitado superiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ e inferiormente por el plano $z = 0$.



Ejemplo: Calcular el volumen del sólido interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, que está limitado superiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ e inferiormente por el plano $z = 0$.

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 2\,\mathrm{sen}\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$



Ejemplo: Calcular el volumen del sólido interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2y$, que está limitado superiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ e inferiormente por el plano $z = 0$.

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 2\,\mathrm{sen}\theta \\ 0 \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

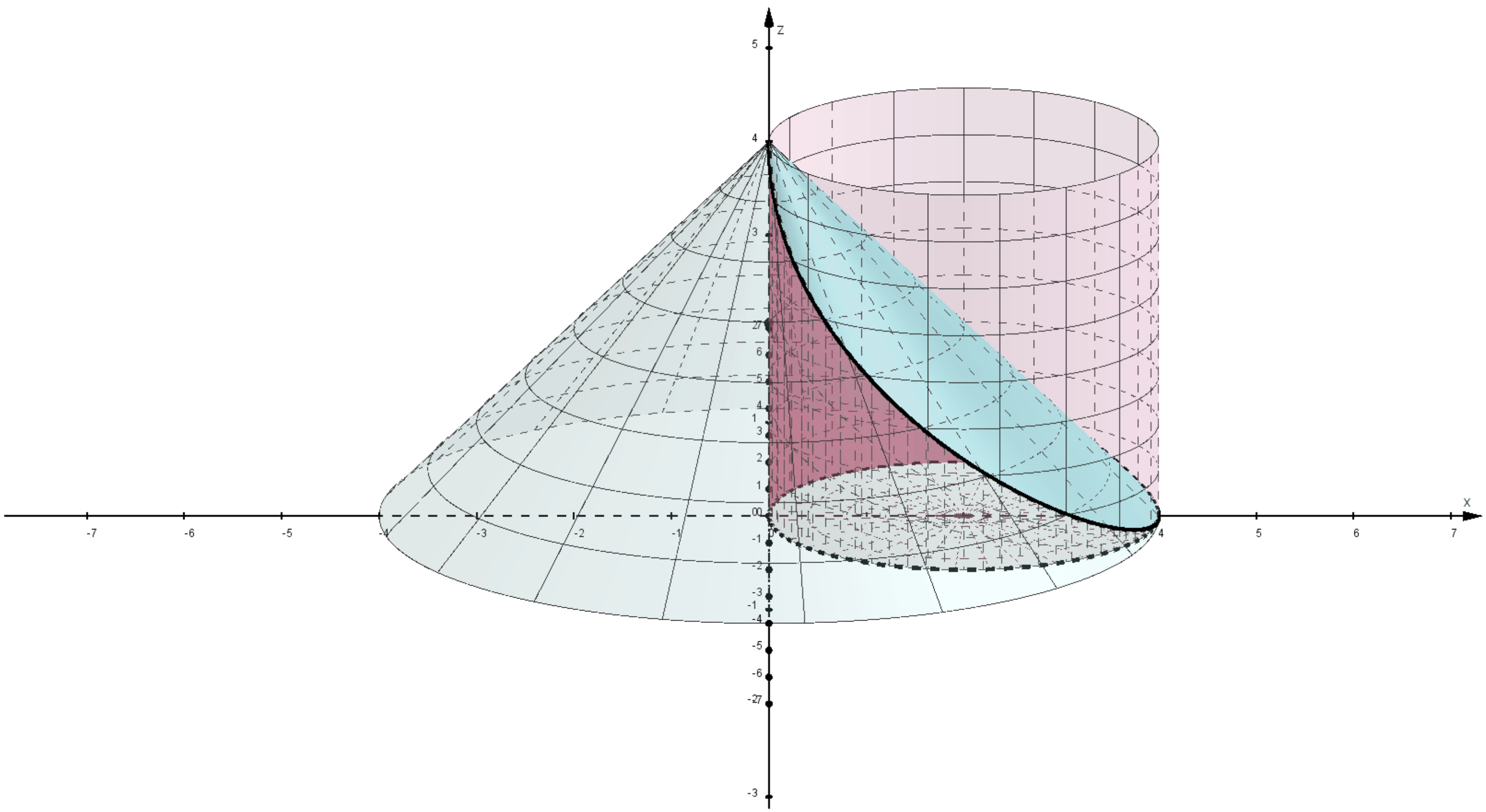
$$V = \iint_{\mathcal{R}} (x^2 + y^2)dA = \int_0^{\pi} \int_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} r^2 \cdot r dr d\theta = \int_0^{\pi} \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\,\mathrm{sen}\,\theta} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} 4\mathrm{sen}^4\theta d\theta \quad = 4\int_0^{\pi} \left(\mathrm{sen}^2\,\theta\right)^2 d\theta = 4\int_0^{\pi} \left(\tfrac{1-\cos(2\theta)}{2}\right)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(1 + \cos^2(2\theta) - 2\cos(2\theta)\right) d\theta = \int_0^{\pi} \left(1 + \tfrac{1+\cos(4\theta)}{2} - 2\cos(2\theta)\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \left(\tfrac{3}{2} + \tfrac{\cos(4\theta)}{2} - 2\cos(2\theta)\right) d\theta = \left[\tfrac{3}{2}\theta + \tfrac{\mathrm{sen}(4\theta)}{8} - \mathrm{sen}(2\theta)\right]_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi$$

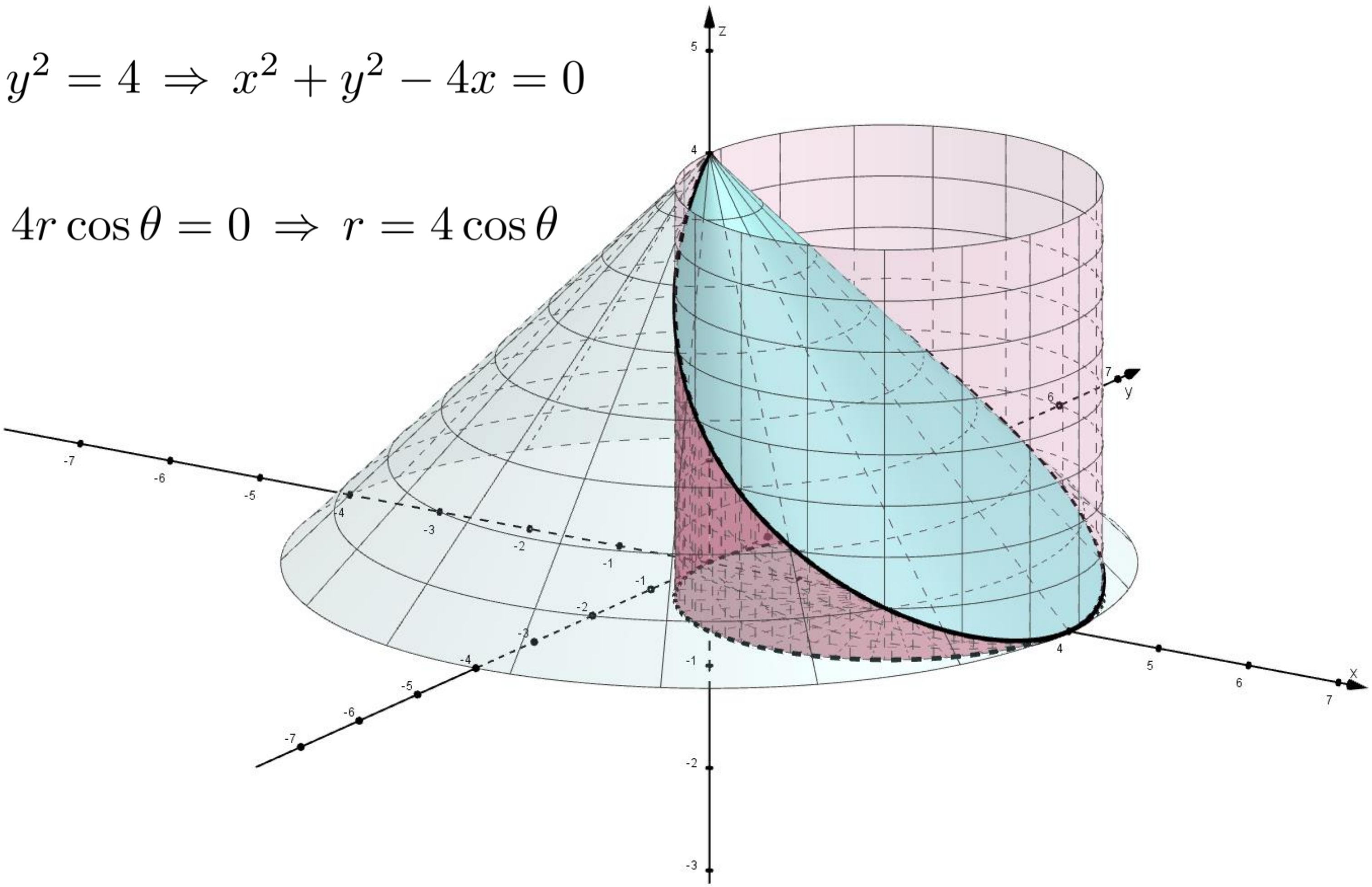
Ejemplo: Calcular el volumen de la región $\mathcal{Q}$ del espacio acotada por el plano $z = 0$ y el semicono $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ que está en el interior del cilindro $(x-2)^2 + y^2 = 4$.



Ejemplo: Calcular el volumen de la región $\mathcal{Q}$ del espacio acotada por el plano $z = 0$ y el semicono $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ que está en el interior del cilindro $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 4r\cos\theta = 0 \Rightarrow r = 4\cos\theta$$

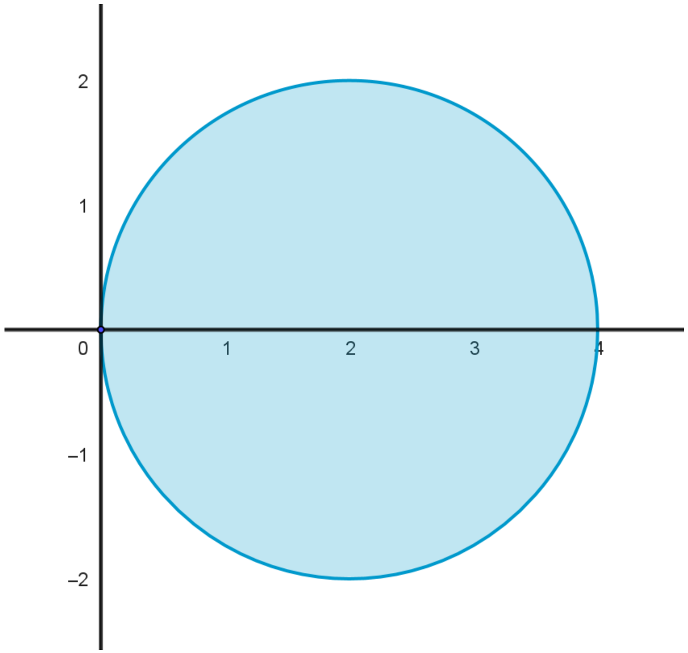


Ejemplo: Calcular el volumen de la región $\mathcal{Q}$ del espacio acotada por el plano $z = 0$ y el semicono $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ que está en el interior del cilindro $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

$$(x-2)^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x = 0$$

$$\Rightarrow r^2 - 4r\cos\theta = 0 \Rightarrow r = 4\cos\theta$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 4\cos\theta \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$



Ejemplo: Calcular el volumen de la región $\mathcal{Q}$ del espacio acotada por el plano $z = 0$ y el semicono $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$ que está en el interior del cilindro $(x-2)^2 + y^2 = 4$.

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq r \leq 4\cos\theta \\ -\dfrac{\pi}{2} \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
V(\mathcal{Q}) &= \int\int_{\mathcal{R}} \left(4 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) dA = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\theta} (4 - r)\, r\, dr d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4\cos\theta} \left(4r - r^2\right)\, dr d\theta = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[2r^2 - \frac{r^3}{3}\right]_0^{4\cos\theta} d\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(32\cos^2\theta - \frac{64\cos^3\theta}{3}\right) d\theta = 32\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta d\theta - \frac{64}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta d\theta \\
&= 32\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta - \frac{64}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 - \operatorname{sen}^2\theta)\cos\theta d\theta = \frac{32\pi}{2} - \frac{256}{9}
\end{aligned}$$