MATEMÁTICAS II

Grado en Ingeniería Eléctrica

Boletín 5 - Análisis vectorial

---

1. En los siguientes apartados, averiguar si los campos vectoriales son o no conservativos. En caso afirmativo, determinar una función potencial asociada.

a) $\mathbf{F}(x,y) = 2xy\ \mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$

b) $\mathbf{F}(x,y) = e^x(\cos y\ \mathbf{i} + \operatorname{sen}\ y\ \mathbf{j})$

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = e^z\ \mathbf{i} + \cos xy\mathbf{j} - x\mathbf{k}$

d) $\mathbf{F}(x,y,z) = \dfrac{1}{y}\mathbf{i} - \dfrac{x}{y^2}\mathbf{j} - (2z-1)\mathbf{k}$

e) $\mathbf{F}(x,y) = (2x(y+1) + e^x\cos y)\ \mathbf{i} + \big(x^2 - e^x\operatorname{sen}\ y\big)\ \mathbf{j}$

f) $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$

g) $\mathbf{F}(x,y,z) = e^z(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + xy\mathbf{k})$

h) $\mathbf{F}(x,y) = 2xy^3\mathbf{i} + 3x^2y^2\mathbf{j}$

i) $\mathbf{F}(x,y) = \dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{i} + \dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}\mathbf{j}$

j) $\mathbf{F}(x,y) = (2x-2y)\mathbf{i} - 2x\mathbf{j}$

k) $\mathbf{F}(x,y,z) = \operatorname{sen} y\mathbf{i} - x\cos y\mathbf{j} + \mathbf{k}$

l) $\mathbf{F}(x,y,z) = e^z(y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + \mathbf{k})$

m) $\mathbf{F}(x,y,z) = 3x^2y^2z\mathbf{i} + 2x^3yz\mathbf{j} + x^3y^2\mathbf{k}$

Solución:

a) $\mathbf{F}(x,y)$ es conservativo en todo el plano. Una función potencial asociada es $f(x,y) = x^2y$.

b) $\mathbf{F}(x,y)$ no es conservativo.

c) $\mathbf{F}(x,y,z)$ no es conservativo.

d) $\mathbf{F}(x,y,z)$ es conservativo en todo disco abierto que no contenga al plano $y=0$. Calculamos una función potencial $f(x,y,z)$ del campo $\tilde{\mathbf{F}}(x,y,z)$.

Como debe verificarse que $f_x(x,y) = \dfrac{1}{y}$, entonces

$$f(x,y,z) = \int \frac{1}{y}\,dx + g(y,z) = \frac{x}{y} + g(y,z)$$

Para calcular $g(y,z)$ tenemos en cuenta que ha de ser $f_y(x,y,z) = N(x,y,z) = -\dfrac{x}{y^2}$. De ahí,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x}{y} + g(y,z)\right] = -\frac{x}{y^2} \;\Rightarrow\; -\frac{x}{y^2} + g_y(y,z) = -\frac{x}{y^2} \;\Rightarrow\; g_y(y,z) = 0$$

El resultado anterior nos indica que, forzosamente, la función $g(y,z)$ depende sólo de la variable z. Es decir, $g(y,z) = h(z)$.

Para obtener $h(z)$, consideramos que $f_z(x,y,z) = P(x,y,z) = -2z+1$. De ahí,

$$\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{x}{y} + h(z)\right] = -2z+1 \;\Rightarrow\; h'(z) = -2z+1 \;\Rightarrow\; h(z) = -z^2 + z$$

Así, una función potencial $f(x,y,z)$ del campo vectorial $\mathbf{F}(x,y,z)$ es $f(x,y,z) = \dfrac{x}{y} - z^2 + z$.

e) $\mathbf{F}(x,y)$ es conservativo en todo el plano. Una función potencial es $f(x,y) = x^2(y+1) + e^x \cos y$.

f) $\mathbf{F}(x,y)$ es conservativo en todo disco abierto que no contenga al origen. Una función potencial asociada es $f(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$.

g) $\mathbf{F}(x,y,z)$ es conservativo en todo el plano. Una función potencial asociada es $f(x,y,z) = e^z xy$.

h) Sea $M(x,y) = 2xy^3$ y $N(x,y) = 3x^2y^2$. Puesto que $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 6xy^2 = \dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, el campo $\vec{F}$ es conservativo.
Ahora buscaremos una función potencial $f(x,y)$ para $\vec{F}$.
La función potencial debe verificar $f_x(x,y) = M(x,y) = 2xy^3 \Longrightarrow f(x,y) = x^2y^3 + g(y)$. Pero también debe verificarse $f_y(x,y) = N(x,y) = 3x^2y^2$, luego $3x^2y^2 + g'(y) = 3x^2y^2 \Longrightarrow g'(y) = 0 \Longrightarrow g(y) = C$.
Así, una función potencial para $\vec{F}$ es $f(x,y) = x^2y^3$.

i) Tomemos $M(x,y) = \dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}$ y $N(x,y) = \dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2}$. El campo vectorial $\vec{F}$ es conservativo pues

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{-8xy}{(x^2+y^2)^3} = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad \text{para todo}(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\,.$$

Sea $f(x,y)$ una función potencial para $\vec{F}$, entonces $f_x(x,y) = M(x,y) = \dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}$, luego

$$f(x,y) = \frac{-1}{x^2+y^2} + g(y).$$

Puesto que también se verifica $f_y(x,y) = N(x,y) = \dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2} \Longrightarrow \dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2} + g'(y) = \dfrac{2y}{(x^2+y^2)^2} \Longrightarrow$ $g'(y) = 0 \Longrightarrow g(y) = C$ y una función potencial para $\vec{F}$ viene dada por $f(x,y) = \dfrac{-1}{x^2+y^2}$.

j) Denotemos $M(x,y) = 2x - 2y$ y $N(x,y) = -2x$. El campo $\vec{F}$ es conservativo ya que $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y) = -2 = \dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y)$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Busquemos una función potencial $f(x,y)$.
De la igualdad $f_x(x,y) = M(x,y) = 2x - 2y$, obtenemos $f(x,y) = x^2 - 2xy + g(y)$. Utilizando que $f_y(x,y) = N(x,y) = -2x$, conseguimos $-2x + g'(y) = -2x \Longrightarrow g'(y) = 0 \Longrightarrow g(y) = c$ y una función potencial para $\vec{F}$ viene dada por $f(x,y) = x^2 - 2xy$.

k) $rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ seny & -x\cos y & 1 \end{vmatrix} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - 2\cos y\,\vec{k} = -2\cos y\,\vec{k} \neq \vec{0}$, luego $\vec{F}$ no es conservativo.

l) $rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xe^z & e^z \end{vmatrix} = -xe^z\,\vec{i} + ye^z\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \neq \vec{0}$, luego $\vec{F}$ no es conservativo.

m) $rot\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 3x^2y^2z & 2x^3yz & x^3y^2 \end{vmatrix} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k} = \vec{0}$, luego $\vec{F}$ es conservativo.

Sea $M(x,y,z) = 3x^2y^2z, N(x,y,z) = 2x^3yz$ y $P(x,y,z) = x^3y^2$ y busquemos una función potencial $f(x,y,z)$.
Entonces, $f_x(x,y,z) = M(x,y,z) = 3x^2y^2z$, de donde $f(x,y,z) = x^3y^2z + g(y,z)$.

Como f debe verificar $f_y(x,y,z) = N(x,y,z) = 2x^3yz \Longrightarrow 2x^3yz + g_y(y,z) = 2x^3yz \Longrightarrow g(y,z) = h(z)$ (es sólo función de z).
Como $f_z(x,y,z) = P(x,y,z) = x^3y^2 \Longrightarrow x^3y^2 + h'(z) = x^3y^2 \Longrightarrow h(z) = cte$, luego un función potencial para $\vec{F}$ viene dada por $f(x,y,z) = x^3y^2z$.

2. En los siguientes apartados, calcular $\int_C f\,ds$ a lo largo de la curva C indicada.

a) $\int_C 4xy\,ds$ $\quad C: \quad \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le 1.$

b) $\int_C (x^2+y^2+z^2)\,ds$ $\quad C: \quad \mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + 8t\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2.$

c) $\int_C (xy+y^3)\,ds$ $\quad C:$ Eje y, desde $y=1$ hasta $y=10$.

d) $\int_C (x^2+y^2)\,ds$ $\quad C:$ arco de la circunferencia $x^2+y^2=4$ que va desde $(2,0)$ a $(0,-2)$

e) $\int_C (x+3y)\,ds$ $\quad C: \quad \mathbf{r}(t) = \begin{cases} t\mathbf{i}, & 0 \le t \le 3 \\ 3\mathbf{i} + (t-3)\mathbf{j}, & 3 \le t \le 6 \\ (9-t)\mathbf{i} + (9-t)\mathbf{j}, & 6 \le t \le 9 \end{cases}$

f) $\int_C (x + 4\sqrt{y})\,ds$ $\quad C:$ el triángulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$, recorrido en sentido contrario a las agujas del reloj.

Solución:
a) Como la función $f(x,y) = 4xy$ es continua en una región que contiene a la curva $C: \quad \mathbf{r}(t) = t\,\vec{\mathbf{i}} + (1-t)\,\vec{\mathbf{j}}, \quad 0 \le t \le 1$, se tiene que

$$\int_C 4xy\,ds = \int_0^1 4t(1-t)\sqrt{1^2+(-1)^2}\,dt = 4\sqrt{2}\left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\sqrt{2}.$$

b) Como la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ es continua en una región que contiene a la curva C : $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\vec{\mathbf{i}} + \cos t\,\vec{\mathbf{j}} + 8t\,\vec{\mathbf{k}}, \quad 0 \le t \le \pi/2$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_C (x^2+y^2+z^2)\,ds &= \int_0^{\pi/2} (\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + 64t^2)\sqrt{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t + 64}\,dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (1+64t^2)\sqrt{65}\,dt = \sqrt{65}\pi\left(\frac{1}{2} + \frac{8}{3}\pi^2\right).\end{aligned}$$

c) En este caso, $C: \quad \mathbf{r}(t) = 0\,\vec{\mathbf{i}} + t\,\vec{\mathbf{j}}, \quad 1 \le t \le 10, \int_C (xy+y^3)\,ds = \int_1^{10} t^3\,dt = \frac{9999}{4}.$

d) En este caso, $C: \quad \mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\vec{\mathbf{i}} + 2\operatorname{sen} t\,\vec{\mathbf{j}}, \quad 0 \le t \le 3\pi/2, \int_C (x^2+y^2)\,ds = \int_0^{3\pi/2} 8\,dt = 12\pi.$

e) $\int_C (x+3y)\,ds = \int_{C_1} (x+3y)\,ds + \int_{C_2} (x+3y)\,ds + \int_{C_3} (x+3y)\,ds$, siendo

$$\begin{aligned} C_1 &: \quad \mathbf{r}(t) = t\,\vec{\mathbf{i}}, \quad 0 \le t \le 3 \\ C_2 &: \quad \mathbf{r}(t) = 3\,\vec{\mathbf{i}} + (t-3)\,\vec{\mathbf{j}}, \quad 3 \le t \le 6 \\ C_3 &: \quad \mathbf{r}(t) = (9-t)\,\vec{\mathbf{i}} + (9-t)\,\vec{\mathbf{j}}, \quad 6 \le t \le 9 \end{aligned}$$

Entonces,

$$\int_C (x+3y)\,ds = \int_0^3 t\,dt + \int_3^6 (3t-6)\,dt + \int_6^9 4\sqrt{2}(9-t)\,dt = 27 + 18\sqrt{2}$$

f) $\displaystyle\int_C (x+4\sqrt{y})\,ds = \int_{C_1}(x+4\sqrt{y})\,ds + \int_{C_2}(x+4\sqrt{y})\,ds + \int_{C_3}(x+4\sqrt{y})\,ds$, siendo

$$\begin{array}{ll} C_1: & \mathbf{r}(t) = t\,\vec{\mathbf{i}}, \quad 0 \le t \le 1 \\ C_2: & \mathbf{r}(t) = (1-t)\,\vec{\mathbf{i}} + t\,\vec{\mathbf{j}}, \quad 0 \le t \le 1 \\ C_3: & \mathbf{r}(t) = (1-t)\,\vec{\mathbf{j}}, \quad 0 \le t \le 1 \end{array}$$

Entonces,

$$\int_C (x+4\sqrt{y})\,ds = \int_0^1 t\,dt + \int_0^1 (1-t+4\sqrt{t})\sqrt{2}\,dt + \int_0^1 4\sqrt{1-t}\,dt = \frac{19}{6}(1+\sqrt{2})$$

3. En los siguientes apartados, calcular $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ a lo largo de la curva C indicada.

a) $\mathbf{F}(x,y) = xy\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ $\qquad C:\ \mathbf{r}(t) = 4t\vec{\mathbf{i}} + t\vec{\mathbf{j}}, \quad 0 \le t \le 1.$

b) $\mathbf{F}(x,y) = 3x\mathbf{i} + 4y\mathbf{j}$ $\qquad C:\ \mathbf{r}(t) = 2\cos t\,\vec{\mathbf{i}} + 2\mathrm{sen}\,t\,\vec{\mathbf{j}}, \quad 0 \le t \le \pi/2.$

c) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2y\mathbf{i} + (x-z)\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$ $\qquad C:\ \mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le 1.$

d) $\mathbf{F}(x,y,z) = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ $\qquad C:\ \mathbf{r}(t) = \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{i} + \cos\,t\,\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}, \quad 0 \le t \le \pi/2.$

e) $\mathbf{F}(x,y) = 2xy\mathbf{i} + (x^2+y^2)\,\mathbf{j}.$ $\qquad C:$ arco de la elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ que va desde el punto $(5,0)$ a $(0,4)$.

f) $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} + (x+y^2)\mathbf{j}$ $\qquad C:\ \mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi/2.$

g) $\mathbf{F}(x,y) = xy\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j}$ $\qquad C:$ circunferencia $x^2+y^2 = 4$

h) $\mathbf{F}(x,y) = (x^{3/2} - 3y)\mathbf{i} + (6x + 5\sqrt{y})\mathbf{j}$ $\qquad C:$ frontera del triángulo de vértices $(0,0),\ (5,0),\ (0,5).$

<u>Solución:</u>

a) Como $\mathbf{F}(x(t),y(t)) = 4t^2\,\vec{\mathbf{i}} + t\,\vec{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{r}'(t) = 4\,\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}$, con $0 \le t \le 1$, se tiene que

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (16t^2 + t)\,dt = 35/6$$

b) Como $\mathbf{F}(x(t),y(t)) = 6\cos t\,\vec{\mathbf{i}} + 8\mathrm{sen}\ t\,\vec{\mathbf{j}}$ y $\mathbf{r}'(t) = -2\mathrm{sen}\ t\,\vec{\mathbf{i}} + 2\cos t\,\vec{\mathbf{j}}$, siendo $0 \le t \le \pi/2$, entonces

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} 4\mathrm{sen}\ t\cos t\,dt = 2$$

c) $\mathbf{F}(x(t),y(t),z(t)) = t^4\,\vec{\mathbf{i}} + (t-2)\,\vec{\mathbf{j}} + 2t^3\,\vec{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{r}'(t) = \vec{\mathbf{i}} + 2t\,\vec{\mathbf{j}}$, con $0 \le t \le 1$. Entonces,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 (t^4 + 2t^2 - 4t)\,dt = -\frac{17}{15}$$

d) $\mathbf{F}(x(t),y(t),z(t)) = sen^2t\,\vec{\mathbf{i}} + \cos^2 t\,\vec{\mathbf{j}} + t^4\,\vec{\mathbf{k}}$ y $\mathbf{r}'(t) = \cos t\,\vec{\mathbf{i}} - \mathrm{sen}t\,\vec{\mathbf{j}} + 2t\,\vec{\mathbf{k}}$,con $0 \le t \le \pi/2$. De ahí,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} (\mathrm{sen}^2 t\ \cos t - \cos^2 t\mathrm{sen}t + 2t^5)\,dt = \frac{\pi^6}{192}$$

e) Puesto que el campo vectorial es conservativo y una función potencial asociada es $f(x,y) = x^2y + \dfrac{y^3}{3}$, se tiene que

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = f(0,4) - f(5,0) = \frac{64}{3}$$

f) El campo $\mathbf{F}(x,y) = x\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (x+y^2)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$ no es conservativo. Entonces,

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} (t, t+\cos^2 t)\cdot(1, -\text{sen } t)\,dt = \int_0^{\pi/2} (t - t\text{sen } t - \text{sen } t\cos^2 t)\,dt = \frac{\pi^2}{8} - \frac{3}{4}.$$

g) $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\int_{\mathcal{R}} (1-x)\,dA = \int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (1-x)\,dy\,dx = 4\pi.$

h) $\displaystyle\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int\int_{\mathcal{R}} (6+3)\,dA = 9\int\int_{\mathcal{R}} dA = 9.\frac{25}{2} = \frac{225}{2}.$

4. Calcular $\displaystyle\int_C (2x-y)dx + (x+3y)dy$, siendo C:

a) el arco de parábola $y = 2x^2$ que va desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(2,8)$.
b) Eje x, desde $x = 0$ hasta $x = 5$.
c) Segmentos rectos de $(0,0)$ a $(0,-3)$ y de $(0,-3)$ a $(2,-3)$.
d) El arco elíptico $x = 4\text{sen } t$, $y = 3\cos t$, desde $(0,3)$ hasta $(4,0)$.

<u>Solución:</u>

a) <u>1ª Forma:</u> Parametrizamos el arco de parábola $y = 2x^2$ que va desde el punto $(0,0)$ hasta el $(2,8)$.

$$x(t) = t, \quad y(t) = 2t^2, \quad 0 \le t \le 2 \longrightarrow \mathbf{r}(t) = t\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2t^2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad 0 \le t \le 2.$$

Entonces, $\displaystyle\int_C (2x-y)dx + (x+3y)dy = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, siendo $\mathbf{F}(x,y) = (2x-y)\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + (x+3y)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$,
y $\mathbf{r}(t) = t\,\overrightarrow{\mathbf{i}} + 2t^2\,\overrightarrow{\mathbf{j}}$, con $0 \le t \le 2$. Luego,

$$\int_C (2x-y)dx + (x+3y)dy = \int_0^2 \Big(2t - 2t^2, t + 6t^2)\cdot(1, 4t)\,dt = \int_0^2 (2t + 2t^2 + 24t^3)\,dt = \frac{316}{3}$$

<u>2ª Forma:</u> La curva C es el arco de parábola $y = 2x^2$, que va desde el punto $(0,0)$ hasta el punto $(2,8)$; por tanto $dy = 4xdx$ y $0 \le x \le 2$. De ahí,

$$\int_C (2x-y)dx + (x+3y)dy = \int_0^2 (2x - 2x^2)\,dx + (x+6x^2)4x\,dx = \int_0^2 (x^2 + \frac{2}{3}x^3 + 6x^4)\,dx = \frac{316}{3}$$

b) El eje x, desde $x = 0$ hasta $x = 5$, se caracteriza por: $y = 0$, $0 \le x \le 5$. De ahí,

$$\int_C (2x-y)dx + (x+3y)dy = \int_0^5 2x\,dx = 25$$

c) En este caso

$$\int_C (2x-y)dx + (x+3y)dy = \int_{C_1} (2x-y)dx + (x+3y)dy + \int_{C_2} (2x-y)dx + (x+3y)dy$$

siendo C_1 el segmento recto que va desde el punto $(0,0)$ al punto $(0,-3)$, y C_2 el segmento recto que va desde el punto $(0,-3)$ a $(2,-3)$. Como,

$$C_1: \quad \mathbf{r}(t) = -(t+3)\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad -3 \le t \le 0\,; \qquad C_2: \quad \mathbf{r}(t) = t\,\overrightarrow{\mathbf{i}} - 3\,\overrightarrow{\mathbf{j}}, \quad 0 \le t \le 2,$$

entonces,

$$\begin{aligned}
\int_{C_1} (2x-y)dx + (x+3y)dy &= \int_{-3}^{0} (t+3, -3(t+3))\cdot(0,-1)\,dt = \int_{-3}^{0} 3(t+3)\,dt = 27/2 \\
\int_{C_2} (2x-y)dx + (x+3y)dy &= \int_0^2 (2t+3, t-9)\cdot(1,0)\,dt = \int_0^2 (2t+3)\,dt = 10
\end{aligned}$$

En consecuencia, $\int_C (2x-y)dx+(x+3y)dy = \int_{C_1} (2x-y)dx+(x+3y)dy+\int_{C_2} (2x-y)dx+(x+3y)dy = 47/2$

d) Si C es el arco elíptico $x = 4$ sen t, $y = 3\cos t$, desde $(0,3)$ hasta $(4,0)$, entonces

$$C: \quad \mathbf{r}(t) = 4\text{sen } t\,\vec{\mathbf{i}} + 3\cos \vec{\mathbf{j}}, \quad 0 \le t \le \pi/2,$$

De ahí,

$$\begin{aligned} \int_C (2x-y)dx + (x+3y)dy &= \int_0^{\pi/2} (8\text{sen } t - 3\cos t, 4\text{sen } t + 9\cos t) \cdot (4\cos t, -3\text{sen } t)\, dt \\ &= \int_0^{\pi/2} (5\text{sen } t\cos t - 12)\, dt = \frac{5}{2} - 6\pi \end{aligned}$$

5. Calcular la integral de línea del campo vectorial, $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, en los siguientes casos:

a) $\mathbf{F}(x,y) = (x^4 + 4xy^3)\mathbf{i} + (6x^2y^2 - 5y^4)\mathbf{j}$ $\quad C: \quad \mathbf{r}(t) = \cos t\mathbf{i}+\text{sen } t\mathbf{j}, \quad 0 \le t \le \pi/2.$

b) $\mathbf{F}(x,y) = e^x\text{sen } y\mathbf{i} + (e^x \cos y + 3y)\mathbf{j}$ $\quad C$: segmento de recta que va desde el punto $(0,-\pi)$ al punto $(0,\pi)$.

<u>**Solución:**</u>

a) El campo $\mathbf{F}(x,y) = (x^4 + 4xy^3)\,\vec{\mathbf{i}} + (6x^2y^2 - 5y^4)\,\vec{\mathbf{j}}$ es conservativo ya que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = 12xy^2$$

Buscamos una función potencial del campo. Como debe verificarse que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = x^4 + 4xy^3, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6x^2y^2 - 5y^4,$$

entonces, $f(x,y) = \int (x^4 + 4xy^3)\, dx + g(y)$ y, por tanto, $f(x,y) = \dfrac{x^5}{5} + 2x^2y^3 + g(y)$. De ahí,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{x^5}{5} + 2x^2y^3 + g(y)\right] = 6x^2y^2 - 5y^4 \;\Rightarrow\; g'(y) = -5y^4 \;\Rightarrow\; g(y) = -y^5.$$

Es decir, $f(x,y) = \dfrac{x^5}{5} + 2x^2y^3 - y^5$ es una función potencial asociada al campo $\mathbf{F}(x,y)$, con lo que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(0,1) - f(1,0) = \frac{4}{5}.$$

b) El campo $\mathbf{F}(x,y) = e^x\text{sen } y\,\vec{\mathbf{i}} + (e^x \cos y + 3y)\,\vec{\mathbf{j}}$ es un campo conservativo ya que

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = e^x \cos y$$

Buscamos una función potencial del campo. Como debe verificarse que

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = e^x\text{sen } y, \qquad \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^x \cos y + 3y,$$

entonces, $f(x,y) = \int e^x\text{sen } y\, dx + g(y)$ y, por tanto, $f(x,y) = e^x \cos y + g(y)$. De ahí,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[e^x\text{sen } y + g(y)\right] = e^x \cos y + 3y \;\Rightarrow\; g'(y) = 3y \;\Rightarrow\; g(y) = \frac{3}{2}y^2.$$

es decir, $f(x,y) = e^x\text{sen } y + \dfrac{3}{2}y^2$ es una función potencial asociada al campo $\mathbf{F}(x,y)$, con lo que

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = f(0,\pi) - f(0,-\pi) = 0.$$