MATEMÁTICAS II

Boletín 4 - Integración múltiple

1. Calcular las siguientes integrales iteradas:

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)dydx.$ (b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}dxdy.$

2. Dibuja la región R cuya área representa la integral iterada. Calcular dicha área, cambiando previamente el orden de integración.

   (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} dxdy.$ (b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^x dydx + \int_2^4 \int_0^{4-x} dydx.$

3. Usar una integral iterada para calcular el área de la región acotada por las gráficas de $2x - 3y = 0,\ x + y = 5,\ y = 0.$

4. Para calcular las siguientes integrales iteradas es necesario cambiar previamente el orden de integración:

   (a) $\displaystyle\int_0^2 \int_x^2 x\sqrt{1+y^3}dydx$ (b) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 \operatorname{sen} x^2 dxdy.$

5. Realizar un esbozo de la región $\mathcal{R}$ y calcular la integral doble :

   a) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{R}} xdA$ y $\mathcal{R}$ es el sector circular en el primer cuadrante acotado por $y = \sqrt{25-x^2},\ 3x-4y = 0,\ y = 0.$

   b) $\displaystyle\int\int_{\mathcal{R}} (x^2+y^2)dA$ y $\mathcal{R}$ es el semicírculo acotado por $y = \sqrt{4-x^2},\ y = 0.$

6. Calcular el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones:

   a) $z = xy,\ z = 0,\ y = x,\ x = 1$, primer octante.

   b) $x^2 + z^2 = 1,\ y^2 + z^2 = 1$, primer octante.

7. Calcular las siguientes integrales dobles, pasando previamente a coordenadas polares.

   a) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xydydx$

   b) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}dydx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx.$

8. Calcular el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones

   a) $z = \sqrt{x^2+y^2},\ z = 0,\ x^2 + y^2 = 25.$

   b) $z = \ln(x^2+y^2),\ z = 0,\ x^2 + y^2 \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 4.$

9. Calcular el volumen del sólido que es interior al hemisferio $z = \sqrt{16-x^2-y^2}$ y al cilíndro $x^2 + y^2 - 4y = 0.$

10. Determinar a, de modo que el volumen interior al hemisferio $z = \sqrt{16-x^2-y^2}$ y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ sea la mitad del volumen de hemisferio.

11. Calcular las siguientes integrales triple:

    (a) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x\ dz\ dy\ dx$ (b) $\displaystyle\int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\ dz\ dx\ dy.$

12. Esbozar la región sólida cuyo volumen representa la integral triple $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_0^{10-x-y} dz\ dy\ dx$ y reescribirla en el orden que se indica $dz\ dx\ dy$.

13. Calcular el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones:

    (a) $z = 9 - x^2 - y^2,\ z = 0$ (b) $z = 4 - x^2,\ y = 4 - x^2$, primer octante.

14. Pasar la integral a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas. Evaluar la que resulte más sencilla:

    (a) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{\sqrt{16-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\ dz\ dy\ dx$ (b) $\displaystyle\int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_a^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x\ dz\ dy\ dx.$

15. Hallar el volumen del sólido interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y por encima del semicono $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

16. Calcular el volumen del sólido comprendido entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ e interior al cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$.

17. Calcular el volumen del sólido comprendido entre las gráficas de $z = x + y,\ z = 0,\ y = 0, y = x,\ x = 0$ y $x = 3$.

18. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráficas $z = 0$ y $z = 3$, exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e interior al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

19. Calcular el volumen de la región sólida interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, limitada inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

20. Dada la siguiente integral triple

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2}\, dzdydx$$

    1) Hacer un esbozo de la región de integración y expresar la integral en coordenadas cilíndricas.

    2) Calcular la integral.

21. Calcular el volumen del sólido Q limitado inferiormente por el paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ y superiormente por el paraboloide $z = 6 - 2x^2 - 2y^2$.

22. Calcular $\displaystyle\int\int\int_Q z\, dV$ siendo Q la región limitada superiormente por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el plano $z = 1$.

Soluciones

1. a) $\dfrac{2}{3}$ b) 4
2. a) $\dfrac{1}{3}$ b) 4
3. 5
4. a) $\dfrac{26}{9}$ b) $\dfrac{1}{2}(1-\cos 1)$
5. a) 25 b) 4π
6. a) $\dfrac{1}{8}$ b) $\dfrac{2}{3}$
7. a) $\dfrac{2}{3}$ b) $\dfrac{4\sqrt{2}\pi}{3}$
8. a) $\dfrac{250\pi}{3}$ b) $2\pi\left(4\ln 2-\dfrac{3}{2}\right)$
9. $\dfrac{64}{3}\pi$
10. $a=\sqrt{16-8\sqrt[3]{2}}$
11. a) $\dfrac{1}{10}$ b) $\dfrac{729}{4}$
12. $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-y^2}}\int_0^{10-x-y} dz\ dx\ dy$
13. a) $\dfrac{81\pi}{2}$ b) $\dfrac{256}{15}$
14. a) $8\pi^2$ b) 0
15. $\dfrac{16\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
16. $\dfrac{76\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
17. $\dfrac{27}{2}$.
18. 9π.
19. 7,587
20. $\dfrac{8\pi^2}{3}-2\sqrt{3}\pi$
21. 3π
22. $\frac{2}{3}\pi$