Tema 5 – Primera Parte

Campos vectoriales

Campo vectorial (o campo de vectores)

- Campo vectorial en un abierto del plano: $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{F}(x,y) = (M(x,y), N(x,y)) \qquad \text{para todo } (x,y) \in U$$

$$\mathbf{F}(x,y) = M(x,y)\,\mathbf{i} + N(x,y)\,\mathbf{j} \qquad \text{para todo } (x,y) \in U$$

- Campo vectorial en un abierto del espacio: $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (M(x,y,z), N(x,y,z), P(x,y,z)) \qquad \text{para todo } (x,y,z) \in U$$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = M(x,y,z)\,\mathbf{i} + N(x,y,z)\,\mathbf{j} + P(x,y,z)\,\mathbf{k} \qquad \text{para todo } (x,y,z) \in U$$

Campo vectorial (o campo de vectores)

Ejemplos

- Campo vectorial en el plano: $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

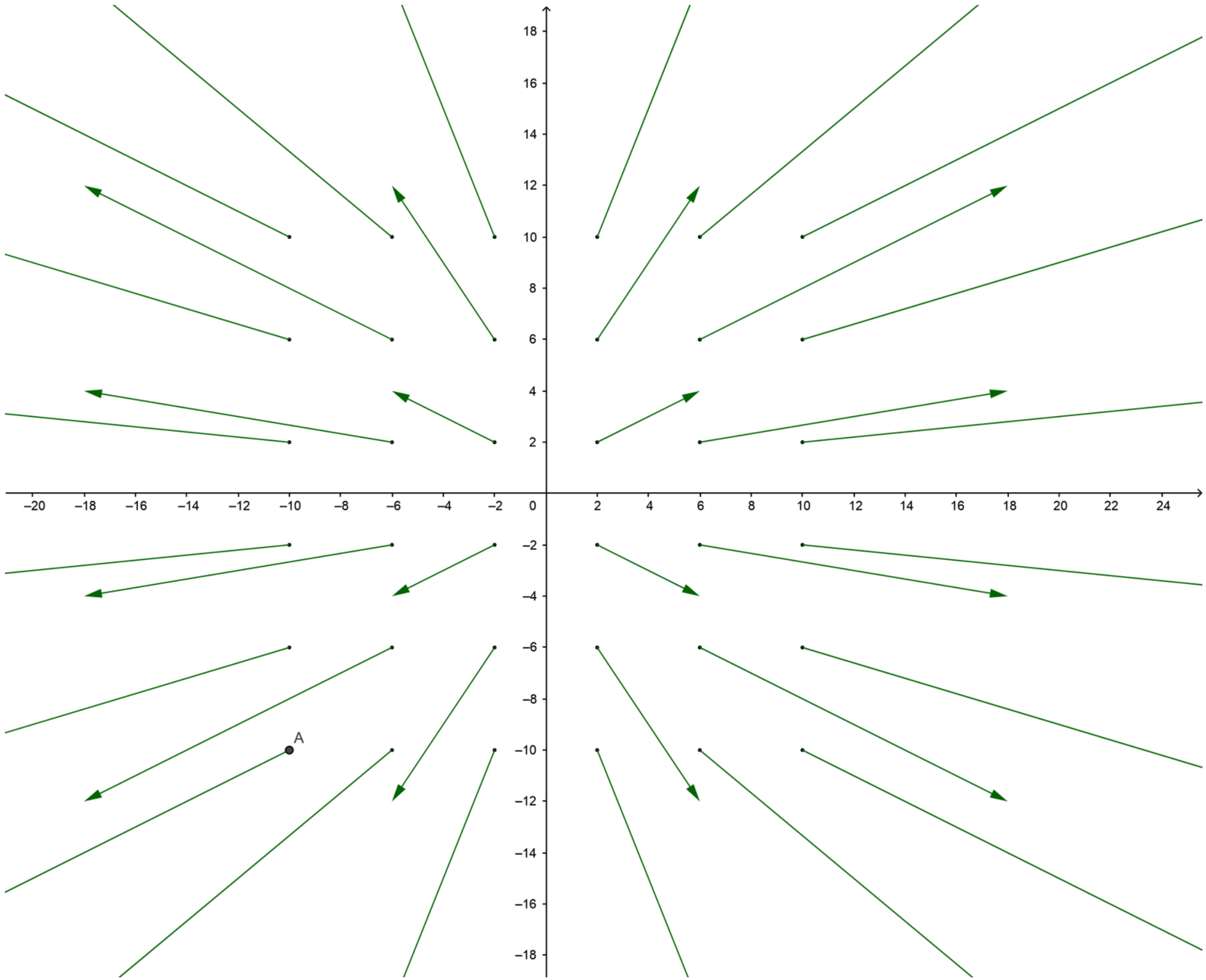
$$\mathbf{F}(x,y) = (2x, y) \iff \mathbf{F}(x,y) = 2x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{G}(x,y) = (2xy, x^2 - y) \iff \mathbf{G}(x,y) = 2xy\,\mathbf{i} + (x^2 - y)\,\mathbf{j}$$

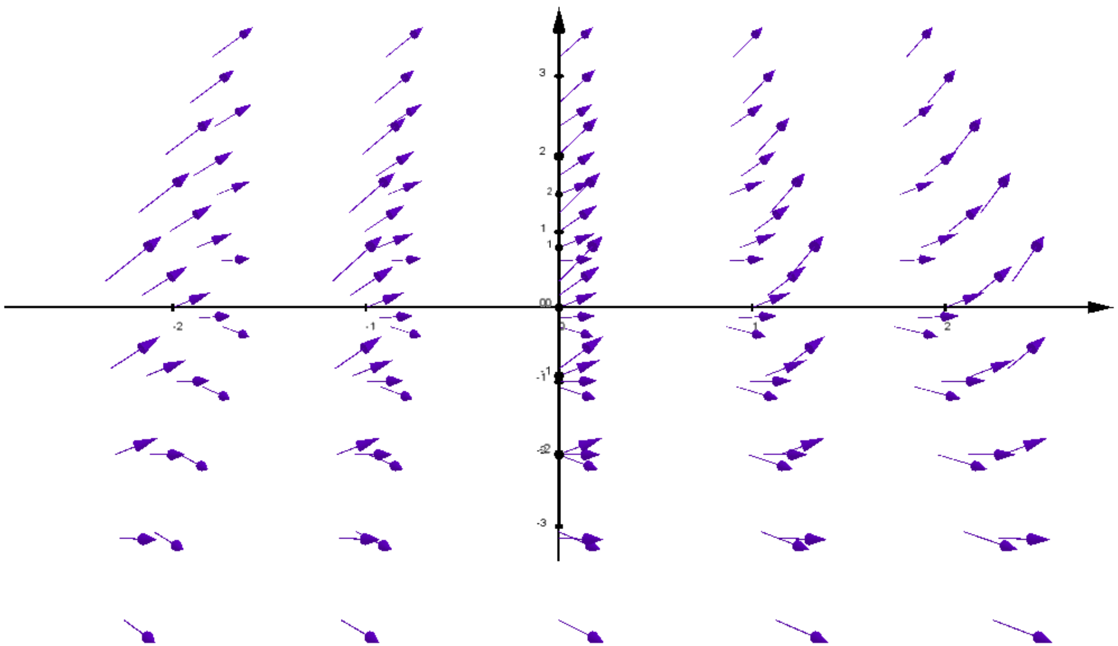
- Campo vectorial en el espacio: $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2x, y, x+z) \iff \mathbf{F}(x,y,z) = 2x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (x+z)\,\mathbf{k}$$

$$\mathbf{G}(x,y,z) = (-y, zy, x) \iff \mathbf{G}(x,y,z) = -y\,\mathbf{i} + zy\,\mathbf{j} + x\,\mathbf{k}$$


A
−20 −18 −16 −14 −12 −10 −8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24
18 16 14 12 10 8 6 4 2 −2 −4 −6 −8 −10 −12 −14 −16 −18

$$F(x,y) = (2x, y)$$



$$F(x,y,z) = (1, z, 1)$$

Ejemplos

- Dada una función diferenciable $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

es un campo vectorial en $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

- Dada una función diferenciable $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

es un campo vectorial en $U \subseteq \mathbb{R}^3$.

Ejemplo: Sea $f(x,y) = x^2\cos(xy)$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x,y) &= \nabla f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\mathbf{j} \\ &= (2x\cos(xy) - yx^2\operatorname{sen}(xy))\mathbf{i} - x^3\operatorname{sen}(xy)\mathbf{j}\end{aligned}$$

es un campo vectorial en el plano

Ejemplo: Sea $f(x,y,z) = x^2y + z^3$

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(x,y,z) &= \nabla f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\mathbf{k} \\ &= 2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + 3z^2\mathbf{k}\end{aligned}$$

es un campo vectorial en el espacio

Un campo vectorial $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ se dice que es **conservativo** (en U) si existe alguna función diferenciable $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y) \qquad \text{para todo } (x, y) \in U$$

La función f se llama **función potencial** de $\mathbf{F}$.

Ejemplo: El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y) = 2x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}$ es conservativo (en $\mathbb{R}^2$).

$$\text{La función } \underbrace{f(x, y) = x^2 + \frac{y^2}{2}}_{\text{función potencial de } \mathbf{F}} \text{ verifica que } \nabla f = \mathbf{F}.$$

Un campo vectorial $\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ se dice que es **conservativo** (en U) si existe alguna función diferenciable $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z) \qquad \text{para todo } (x, y, z) \in U$$

La función f se llama **función potencial** de $\mathbf{F}$.

Ejemplo: El campo vectorial $\mathbf{F}(x, y, z) = 2xyz\,\mathbf{i} + x^2 z\,\mathbf{j} + x^2 y\,\mathbf{k}$ es conservativo (en $\mathbb{R}^3$).

La función $\underbrace{f(x, y, z) = x^2 yz}_{\text{función potencial de } \mathbf{F}}$ verifica que $\nabla f = \mathbf{F}$.

Nos planteamos dos cuestiones:

- ¿Cómo identificar si un determinado campo vectorial $\mathbf{F}$ es, o no, un campo vectorial conservativo?
- En caso afirmativo, ¿cómo podemos encontrar la función potencial del campo vectorial?

Criterio de campo vectorial conservativo en el plano

$\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo vectorial

$\mathbf{F}(x, y) = (M(x, y), N(x, y))$, donde M, N tienen derivadas parciales continuas

$\boxed{\mathbf{F} \text{ es conservativo}}$

$\Updownarrow$

Existe una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que

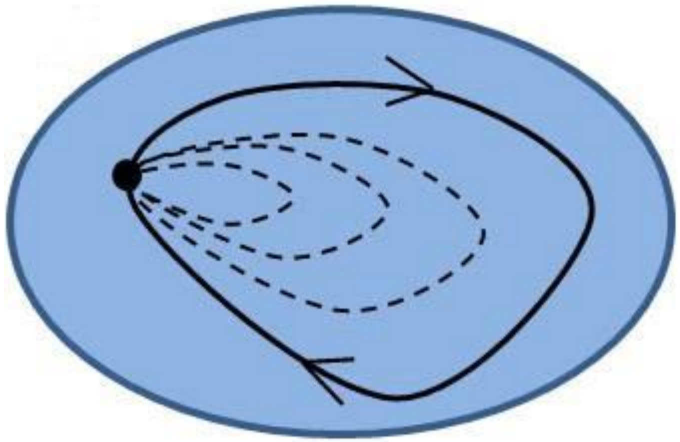
$\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$ para todo $(x, y) \in U$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \Downarrow$$

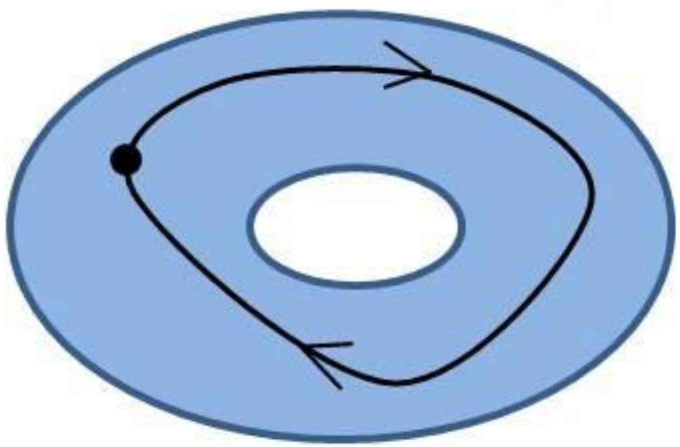
$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

Si U es simplemente conexo

Un conjunto conexo $U \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice simplemente conexo si toda curva cerrada simple contenida en U puede contraerse (dentro de U) de forma continua a un punto



es simplemente conexo



no es simplemente conexo

Ejemplo: Determinar si el campo de vectores $F(x,y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + 3y^2(x^2+1)\,\mathbf{j}$ es un campo conservativo.

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y) = 2xy^3 \\ \\ N(x,y) = 3y^2(x^2+1) \end{array}\right\}$$ son continuas con derivadas primeras parciales continuas en $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6xy^2 \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 6xy^2$$

$\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$

El **rotacional** de $\mathbf{F} = M\mathbf{i} + N\mathbf{j} + P\mathbf{k}$ es

$$\begin{aligned}\textbf{rot } \mathbf{F}\ (x,y,z) &= \nabla \times \mathbf{F}(x,y,z) \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\textbf{rot } \mathbf{F}\ (x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ N & P \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & P \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ M & N \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

Criterio de campo vectorial conservativo en el espacio

$\mathbf{F} : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial

$\mathbf{F}(x, y, z) = (M(x, y, z), N(x, y, z), P(x, y, z))$, donde M, N, P tienen derivadas parciales continuas

$$\boxed{\mathbf{F} \text{ es conservativo}}$$

$$\Updownarrow$$

Existe una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que

$\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$ para todo $(x, y, z) \in U$

$f_{xy} = f_{yx}, f_{xz} = f_{zx}, f_{yz} = f_{zy}$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \qquad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}}$$

Si U es simplemente conexo

Ejemplo: Determinar si el campo de vectores $F(x,y,z) = e^{2z}\,\mathbf{i} + 3y^2\,\mathbf{j} + 2xe^{2z}\,\mathbf{k}$ es un campo conservativo.

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y,z) = e^{2z} \\ \\ N(x,y,z) = 3y^2 \\ \\ P(x,y,z) = 2xe^{2z} \end{array}\right\}$$

son continuas con derivadas primeras parciales son continuas en $\mathbb{R}^3$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 0 \qquad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} = 2e^{2z} \qquad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

$\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo: Averiguar para qué valores reales del parametro β es conservativo el campo vectorial $F(x,y,z) = 2xyz\,\mathbf{i} + (x^2z + z)\,\mathbf{j} + (x^2y + \beta^2 y)\,\mathbf{k}$.

$$\left.\begin{array}{l} M(x,y,z) = 2xyz \\[2em] N(x,y,z) = x^2z + z \\[2em] P(x,y,z) = x^2y + \beta^2 y \end{array}\right\} \text{ son continuas con derivadas primeras continuas en } \mathbb{R}^3$$

F es conservativo si y sólo si se verifican

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2xz, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} = 2xy, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = x^2 + 1, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = x^2 + \beta^2$$

El campo F es conservativo cuando $\beta = \pm 1$.

Ejemplo: Estudiar si el campo vectorial $\mathbf{F}$ es conservativo

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \frac{1}{y}\mathbf{i} - \frac{x}{y^2}\mathbf{j} + (2z - x)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{1}{y} & -\dfrac{x}{y^2} & 2z - x \end{vmatrix}$$

$$= 0 \cdot \mathbf{i} - (-1)\mathbf{j} + \left(-\frac{1}{y^2} - \left(-\frac{1}{y^2}\right)\right)\mathbf{k} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{rot}\;\mathbf{F}(x,y,z) \neq 0 \implies \mathbf{F}(x,y,z) \text{ no es conservativo}$$

Cálculo de una función potencial para un campo conservativo en el plano

Si $\mathbf{F}(x, y) = M(x, y)\,\mathbf{i} + N(x, y)\,\mathbf{j}$ es un campo conservativo, entonces existe una función $f(x, y)$ tal que $\mathbf{F}(x, y) = \nabla f(x, y)$.

Por tanto, la función $f(x, y)$ debe verificar las condiciones

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = M(x, y)$$

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = N(x, y)$$

Utilizando estas condiciones, determinaremos una función potencial del campo $\mathbf{F}(x, y)$.

Cálculo de una función potencial para un campo conservativo en el espacio

Si $\mathbf{F}(x, y, z) = M(x, y, z)\,\mathbf{i} + N(x, y, z)\,\mathbf{j} + P(x, y, z)\,\mathbf{k}$ es un campo conservativo, entonces, existe una función $f(x, y, z)$ tal que $\mathbf{F}(x, y, z) = \nabla f(x, y, z)$.

Por tanto, la función $f(x, y, z)$ de verificar las condiciones

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = M(x, y, z)$$

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = N(x, y, z)$$

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = P(x, y, z)$$

Se utilizarán estas condiciones para determinar una función potencial del campo $\mathbf{F}(x, y, z)$.

Ejemplo: Determinar una función potencial del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + 3y^2(x^2+1)\,\mathbf{j}$$

Ya comprobamos antes que es conservativo.

Buscamos una función potencial de $\mathbf{F}$, es decir, una función $f(x, y)$ tal que

$$\nabla f(x, y) = \mathbf{F}(x, y)$$

Se tienen que verificar las dos condiciones siguientes:

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy^3$$

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3y^2(x^2+1)$$

Ejemplo: Determinar una función potencial del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y) = 2xy^3\,\mathbf{i} + 3y^2(x^2+1)\,\mathbf{j}$$

Integramos con respecto a x

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy^3 \Rightarrow$

$$\boxed{f(x,y) = \int \left(2xy^3\right)\, dx = x^2y^3 + g(y) \quad \text{verifica (1)}}$$

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2(x^2+1) \Rightarrow$

$$\boxed{f(x,y) = x^2y^3 + y^3 + C \quad \text{verifica (1) y (2)}}$$

$$f(x,y) = x^2y^3 + g(y) \text{ verifica (2)} \iff 3x^2y^2 + g'(y) = 3x^2y^2 + 3y^2$$

$$g'(y) = 3y^2 \iff g(y) = \int 3y^2\, dy \iff g(y) = y^3 + C$$

Ejemplo: Determinar una función potencial del campo vectorial

$$\mathbf{F}(x, y, z) = e^{2z}\,\mathbf{i} + 3y^2\,\mathbf{j} + 2xe^{2z}\,\mathbf{k}$$

Ya comprobamos antes que es conservativo.

Buscamos una función potencial de $\mathbf{F}$, es decir, una función $f(x, y, z)$ tal que

$$\nabla f(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$$

Se tienen que verificar las tres condiciones siguientes:

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^{2z}$$

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3y^2$$

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2xe^{2z}$$

Integramos con respecto a x

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = e^{2z}$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(x,y,z) = \int e^{2z}\,dx = xe^{2z} + g(y,z)}$

verifica (1)

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 3y^2$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(x,y,z) = xe^{2z} + y^3 + h(z)}$

verifica (1) y (2)

$$f(x,y,z) = xe^{2z} + g(y,z) \text{ verifica } (2) \iff \frac{\partial}{\partial y}\left[xe^{2z} + g(y,z)\right] = 3y^2$$

$$\iff \frac{\partial g}{\partial y}(y,z) = 3y^2 \iff g(y,z) = \int 3y^2\,dy = y^3 + h(z)$$

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = 2xe^{2z}$ $\Rightarrow$ $\boxed{f(x,y,z) = xe^{2z} + y^3 + C}$

verifica (1), (2) y (3)

$$f(x,y,z) = xe^{2z} + y^3 + h(z) \text{ verifica } (3) \iff \frac{\partial}{\partial z}\left[xe^{2z} + y^3 + h(z)\right] = 2xe^{2z}$$

$$\Leftrightarrow h'(z) = 0 \iff h(z) = C$$

Ejemplo: Determinar si el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y) = (2x(y+1) + e^x \cos y)\,\mathbf{i} + \left(x^2 - e^x \operatorname{sen} y + y\right)\mathbf{j}$$

es conservativo y, en caso afirmativo, hallar una función potencial del mismo.

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = 2x - e^x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = 2x - e^x \operatorname{sen} y$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo: Determinar si el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y) = (2x(y+1) + e^x \cos y)\,\mathbf{i} + \left(x^2 - e^x \operatorname{sen} y + y\right)\mathbf{j}$$

es conservativo y, en caso afirmativo, hallar una función potencial del mismo.

Buscamos una función potencial de $\mathbf{F}$, es decir una $f(x,y)$ tal que $\nabla f(x,y) = \mathbf{F}$.

Se tienen que verificar las condiciones siguientes:

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(y+1) + e^x \cos y$$

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - e^x \operatorname{sen} y + y$$

$$(1)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x(y+1) + e^x \cos y \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} f(x,y) = x^2(y+1) + e^x \cos y + \dfrac{y^2}{2} + C \\ \text{verifica (2) y (1)} \end{array}}$$

$$f(x,y) = x^2 y + e^x \cos y + \frac{y^2}{2} + g(x) \text{ verifica (1)}$$

$$\Longleftrightarrow\ 2xy + e^x \cos y + g'(x) = 2x(y+1) + e^x \cos y$$

$$\Longleftrightarrow\ g'(x) = 2x \Longleftrightarrow g(x) = x^2 + C$$

Integramos con respecto a y

$$(2)\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^2 - e^x \text{sen } y + y \Rightarrow f(x,y) = \int \left(x^2 - e^x \text{sen } y + y\right) dy$$

$$\boxed{\begin{array}{c} f(x,y) = x^2 y + e^x \cos y + \dfrac{y^2}{2} + g(x) \\ \text{verifica (2)} \end{array}}$$

Ejemplo: Calcular una función potencial del campo vectorial conservativo

$$\mathbf{F}(x,y) = e^x\left(-\cos(x-y) + \operatorname{sen}(x-y)\right)\ \mathbf{i} + \left(2y - e^x \operatorname{sen}(x-y)\right)\mathbf{j}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = e^x\left(-\operatorname{sen}(x-y) - \cos(x-y)\right)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x}(x,y) = e^x\left(-\operatorname{sen}(x-y) - \cos(x-y)\right)$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial N}{\partial x}(x,y) \quad \text{para todo } (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo: Calcular una función potencial del campo vectorial conservativo

$$\mathbf{F}(x,y) = e^x\left(-\cos(x-y)+\operatorname{sen}(x-y)\right)\ \mathbf{i} + \left(2y - e^x \operatorname{sen}(x-y)\right)\mathbf{j}$$

Buscamos una función potencial de $\mathbf{F}$, es decir una $f(x,y)$ tal que

$$\nabla f(x,y) = \mathbf{F}$$

Se tienen que verificar las dos condiciones siguientes:

$$(1) \qquad f_x(x,y) = e^x\left(-\cos(x-y)+\operatorname{sen}(x-y)\right)$$

$$(2) \qquad f_y(x,y) = 2y - e^x \operatorname{sen}(x-y)$$

$$(1)\ f_x(x,y) = e^x\left(-\cos(x-y) + \operatorname{sen}(x-y)\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{array}{r} f(x,y) = y^2 - e^x\cos(x-y) + C \\ \text{verifica (2) y (1)} \end{array}}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= y^2 - e^x\cos(x-y) + g(x) \text{ verifica (1)} \\ \iff & -e^x\cos(x-y) + e^x\operatorname{sen}(x-y) + g'(x) = e^x\left(-\cos(x-y) + \operatorname{sen}(x-y)\right) \\ \iff & g'(x) = 0 \iff g(x) = C \end{aligned}$$

Integramos con respecto a y

$$(2)\ f_y(x,y) = 2y - e^x\operatorname{sen}(x-y) \Rightarrow f(x,y) = \int \left(2y - e^x\operatorname{sen}(x-y)\right) dy$$

$$\boxed{\begin{array}{r} f(x,y) = y^2 - e^x\cos(x-y) + g(x) \\ \text{verifica (2)} \end{array}}$$

Ejemplo: Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F} = y \operatorname{sen} z \mathbf{i} + x \operatorname{sen} z \mathbf{j} + xy \cos z \mathbf{k}$$

Estudiar si es conservativo y calcular, en su caso, una función de potencial.

$$\mathbf{rot}\ \ \mathbf{F}(x, y, z) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ M & N & P \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = x \cos z = \frac{\partial N}{\partial z} \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = y \cos z = \frac{\partial M}{\partial z} \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = \operatorname{sen} z = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo: Dado el campo vectorial

$$\mathbf{F} = y \operatorname{sen} z\mathbf{i} + x \operatorname{sen} z\mathbf{j} + xy \cos z\mathbf{k}$$

Estudiar si es conservativo y calcular, en su caso, una función de potencial.

Buscamos una función potencial de $\mathbf{F}$, es decir, una función $f(x, y, z)$ tal que

$$\nabla f(x, y, z) = \mathbf{F}(x, y, z)$$

Se tienen que verificar las tres condiciones siguientes:

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y\text{sen } z$$

$$(2) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = x\text{sen } z$$

$$(3) \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = xy \cos z$$

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = y\operatorname{sen} z \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x,y,z) = xy\operatorname{sen} z + g(z) \quad \text{verifica (2) y (1)}}$

$$f(x,y,z) = xy\operatorname{sen} z + h(x,z) \text{ verifica (1)} \iff y\operatorname{sen} z + h_x(x,z) = y\operatorname{sen} z$$

$$h_x(x,z) = 0 \implies h(x,z) = g(z)$$

Integrando con respecto a y

(2) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = x\operatorname{sen} z \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x,y,z) = \int x\operatorname{sen} z\, dy = xy\operatorname{sen} z + h(x,z) \quad \text{verifica (2)}}$

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = xy\cos z \quad \Rightarrow \quad \boxed{f(x,y,z) = xy\operatorname{sen} z + C \quad \text{verifica (2), (1) y (3)}}$

$f(x,y,z) = xy\operatorname{sen} z + g(z)$ verifica (3)

$$\iff \frac{\partial}{\partial z}(xy\operatorname{sen} z + g(z)) = xy\cos z + g'(z) \implies g'(z) = 0 \implies g(z) = C$$

Ejemplo: Comprobar que el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left[2xyz^3 + ye^{xy}\right]\mathbf{i} + \left[x^2z^3 + xe^{xy}\right]\mathbf{j} + \left[3yx^2z^2 + \cos z\right]\mathbf{k}$$

es conservativo y, en su caso, encontrar una función potencial.

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 3x^2z^2 = \frac{\partial N}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial x} = 6xyz^2 = \frac{\partial M}{\partial z}$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xz^3 + e^{xy} + xye^{xy} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

$\mathbf{F}$ es conservativo en $\mathbb{R}^3$

Ejemplo: Comprobar que el campo vectorial

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \left[2xyz^3 + ye^{xy}\right]\mathbf{i} + \left[x^2z^3 + xe^{xy}\right]\mathbf{j} + \left[3yx^2z^2 + \cos z\right]\mathbf{k}$$

es conservativo y, en su caso, encontrar una función potencial.

Buscamos una función potencial de $\mathbf{F}$, es decir una $f(x,y,z)$ tal que

$$\nabla f(x,y,z) = \mathbf{F}$$

Se tienen que verificar las tres condiciones siguientes:

$$(1) \qquad f_x(x,y,z) = 2xyz^3 + ye^{xy}$$

$$(2) \qquad f_y(x,y,z) = x^2z^3 + xe^{xy}$$

$$(3) \qquad f_z(x,y,z) = 3yx^2z^2 + \cos z$$

$(1)\ f_x(x,y,z) = 2xyz^3 + ye^{xy}$ $\Rightarrow$ $f(x,y,z) = x^2yz^3 + e^{xy} + \operatorname{sen} z + C$ verifica (3), (2) y (1)

$f(x,y,z) = x^2yz^3 + \operatorname{sen} z + e^{xy} + h(x)$ verifica (1)

$$\iff 2xyz^3 + ye^{xy} + h'(x) = 2xyz^3 + ye^{xy} \iff h'(x) = 0 \iff h(x) = C$$

$(2)\ f_y(x,y,z) = x^2z^3 + xe^{xy}$ $\Rightarrow$ $f(x,y,z) = x^2yz^3 + \operatorname{sen} z + e^{xy} + h(x)$ verifica (3) y (2)

$f(x,y,z) = x^2yz^3 + \operatorname{sen} z + g(x,y)$ verifica (2) $\iff x^2z^3 + g_y(x,y) = x^2z^3 + xe^{xy}$

$$\iff g_y(x,y) = xe^{xy} \Leftrightarrow g(x,y) = e^{xy} + h(x)$$

Integramos con respecto a z

$(3)\ f_z(x,y,z) = 3yx^2z^2 + \cos z$ $\Rightarrow$ $f(x,y,z) = \int (3yx^2z^2 + \cos z)\,dz$

$f(x,y,z) = x^2yz^3 + \operatorname{sen} z + g(x,y)$ verifica (3)