MATEMÁTICAS II

Boletín 1 - Aplicaciones de la integral

1. Calcular las siguientes integrales definidas

   a) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x(x^2+1)^3 dx$ b) $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{(2x+1)}}dx$ c) $\displaystyle\int_0^{2\pi} x \text{ sen } x dx$

   d) $\displaystyle\int_1^2 (x-1)\sqrt{2-x}\, dx$ e) $\displaystyle\int_0^{\pi} \cos^2 x\, dx$ f) $\displaystyle\int_1^4 \frac{\ln x}{x} dx$

   g) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{3 \text{ sen}x \cos x}{1+\text{sen}^2 x}\, dx$ h) $\displaystyle\int_0^{\pi} \text{sen}\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)\cos(2x)\, dx$

2. En cada uno de los siguientes apartados, hacer un esbozo de la región acotada por las gráficas y calcular su área:

   a) $f(x) = -x^2+4x+2, \quad g(x) = x+2$
   b) $y = \dfrac{1}{x^2}, \quad y=0, \quad x=1, \quad x=5$
   c) $f(y) = y(2-y), \quad g(y) = -y$
   d) $g(x) = \dfrac{4}{2-x}, \quad y=4, \quad x=0$
   e) $y = 2\text{sen}x, \;\; y = \text{tg}x, \;\; x = \dfrac{-\pi}{3}, \;\; x = \dfrac{\pi}{3}$
   f) $y = xe^{-x^2}, \quad y=0, \quad x=0, \quad x=1$
   g) $y = x^3-6x^2+8x$ y el eje OX
   h) $x = -y^2-y+2$, ambos ejes de coordenadas y la recta $y=-1$
   i) $x = y^2+4y$ y el eje OY
   j) $y^2 = 4x, \;\; x^2 = 4y$
   k) $y = -x^2+6x, \;\; y = x^2-2x$
   l) $x = y^2, \;\; x = 2-y^2$

3. Calcular el área de la región plana comprendida

   a) Entre la curva $y = \dfrac{1}{x^3-x}$, el eje OX en el intervalo $[2,3]$
   b) Entre las curvas $y = 2\,\text{sen}\,x$, $y = 4\cos x$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

4. Usar el método de los discos o el de las capas para calcular el volumen del sólido generado, al girar en torno de la recta dada, la región acotada por las gráficas de las ecuaciones

   a) $y = x^3, y=0, x=2$ a1) Alrededor del eje OX a2) Alrededor del eje OY a3) Alrededor de la recta $x=4$.
   b) $y = 2x^2, y=0, x=2$ b1) Alrededor del eje OX b2) Alrededor del eje OY b3) Alrededor de la recta $y=8$.
   c) $y = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}, y=0, x=0, x=3$ c1) Alrededor del eje OX c2) Alrededor del eje OY

5. Sea la región del plano del primer cuadrante limitada por la circunferencia de ecuación $x^2+y^2=1$, el eje OX y la recta $y=\sqrt{3}\,x$. Calcular el volumen del sólido generado al girar dicha región alrededor del eje OX.

6. Sea $\mathcal{R}$ la región limitada por las gráficas de las funciones $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Calcular:
   a) El área de la región $\mathcal{R}$
   b) El volumen del sólido que se genera al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje OY
   c) El volumen del sólido que se genera al girar $\mathcal{R}$ alrededor de la recta $y = 2$.

7. Calcular el volumen que se obtiene cuando la región limitada por la gráfica de la función $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^3+1}}$, el eje OX y la recta $x = 1$, gira en torno del eje OY.

8. Sea $\mathcal{R}$ la región limitada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = e$. Determinar el volumen que se engendra al girar dicha región:
   a) Alrededor del eje OX
   b) Alrededor del eje OY
   c) Alrededor de la recta $x = e$
   d) Alrededor de la recta $y = 1$.

9. Sea $\mathcal{R}$ la región del primer cuadrante limitada por las curvas $x = 0$, $y = 0$, $y = x^3 + 1$ y la recta tangente a esta última en el punto de abscisa $x = 1$. Calcular:
   a) El área de $\mathcal{R}$.
   b) El volumen generado al girar $\mathcal{R}$, alrededor del eje OX.

10. Sea $\mathcal{R}$ la región del plano limitada por las gráficas de las funciones $y = x^2 - x$ e $y = x$. Calcular el volumen que genera dicha región cuando $\mathcal{R}$ gira
    a) Alrededor de la recta $x = 2$
    b) Alrededor de la recta $y = 3$.

11. Sea la región del primer cuadrante acotada por las curvas de ecuaciones $x^2 + y^2 = 9$, $y = \sqrt{3}\,x$ e $y = 0$. Calcular el volumen del sólido que se genera al hacer girar esta región alrededor del eje *OY*.

12. Sea $f(x) = \cos^2 x$, calcular el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar en torno al eje OX, la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje OX en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$.

13. El semicirculo superior acotado por $y = \sqrt{4 - x^2}$ y el eje OX se hace girar alrededor de la recta $y = -1$. Expresar, mediante una integral, el volumen del sólido de revolución que se obtiene.

14. Sea $\mathcal{R}$ la región acotada por la gráfica de la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$, la recta $y = \dfrac{\pi}{4}$ y el eje de ordenadas. Expresar mediante integrales:
    a) El volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región $\mathcal{R}$ alrededor de la recta $y = 5$.
    b) El volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región $\mathcal{R}$ alrededor del eje de ordenadas.

15. Sea $\mathcal{R}$ la región del plano acotada por las parábolas $y = x^2$, $y = 6x - x^2$. Expresar mediante integrales:
    a) El volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar $\mathcal{R}$ alrededor de la recta $y = 9$.
    b) El volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar $\mathcal{R}$ alrededor del eje de ordenadas.

16. Sea $\mathcal{R}$ la región del plano acotada por la parábola $y = x^2 + 1$ y la recta $y = 5$. Expresar mediante integrales:
    a) El volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar $\mathcal{R}$ alrededor de la recta $y = -1$.
    b) El área de la región $\mathcal{R}$.

17. Sea R la región del plano acotada por la gráfica de $y = \ln x$, y las rectas $y = 0$, $x = e$ y considérese el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región R alrededor de la recta $y = 1$.
    a) Expresar el volumen del sólido mediante una integral, usando el método de discos
    b) Expresar el volumen del sólido mediante una integral, usando el método de capas
    c) Calcular el volumen realizando alguna de las integrales anteriores

18. Expresar, mediante integrales, el volumen del sólido de revolución que se genera al girar la región en el primer cuadrante acotada por las gráficas de las funciones $y = x^3$, $y = 4x$

    a) Alrededor del eje OX

    b) Alrededor de la recta $y = 8$.

19. Sea R la región del plano acotada por la gráfica de $y = 4 - x^2$, y las rectas $x = 0$, $y = 1$. Dibujar la región R y expresar mediante una integral, utilizando el método de las capas, el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región R alrededor de la recta $x = 5$.

20. El semicirculo superior acotado por $y = \sqrt{4 - x^2}$ y el eje OX se hace girar alrededor de la recta $y = -1$. Expresar, mediante una integral, el volumen del sólido de revolución que se obtiene.

21. Hallar el volumen del cuerpo que se genera al girar, alrededor de la recta $x = -1$, la región limitada por la parábola $y^2 = 4x$ y por la recta $x = 1$.

22. Considérese el sólido que se forma cuando la región acotada por las curvas $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x$, $y = 0$, $x = 2$ gira alrededor de la recta $x = 2$. Expresar el volumen del sólido utilizando el método de discos o utilizando el método de capas.

23. Sea S el sólido de revolución que se obtiene al girar, alrededor de la recta $x = 2$, la región del plano limitada por la parábola $y = 4 - x^2$, y las rectas $y = 3x$ e $x = 2$. Se pide:

    a) Expresar el volumen de S utilizando el método de los discos.

    b) Expresar el volumen de S utilizando el método de las capas.

24. Sea $\mathcal{R}$ la región del plano acotada por la gráfica de $x = y^2 + 1$ y las rectas $y = 0$, $y = \dfrac{x}{2}$. Sea S el sólido de revolución que se obtiene cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor de la recta $x = 2$. Se pide:

    a) Expresar el volumen de S utilizando el método de los discos.

    b) Expresar el volumen de S utilizando el método de las capas.

SOLUCIONES

1. a) 0, b) 2, c) -2π, d) $\frac{-4}{15}$, e) $\frac{\pi}{2}$, f) $\frac{\ln^2 4}{2}$, g) $\frac{3\ln 2}{2}$, h) $\frac{\sqrt{3}\pi}{4}$

2. a) $\frac{9}{2}$, b) $\frac{4}{5}$, c) $\frac{9}{2}$, d) $4-4\ln 2$, e) $2-2\ln 2$, f) $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-1}$,

   g) 8, h) $\frac{13}{6}$, i) $\frac{32}{3}$, j) $\frac{16}{3}$, k) $\frac{64}{3}$, l) $\frac{8}{3}$

3. a) $\frac{5}{2}\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3$, b) $8\sqrt{5}$

4. a1) $\frac{128\pi}{7}$, a2) $\frac{64\pi}{5}$, a3) $\frac{96\pi}{5}$

   b1) $\frac{128}{5}\pi$, b2) 16π, b3) $\frac{896\pi}{15}$

   c1) $2\pi\ln 2$, c2) $\frac{16\pi}{3}$

5. $\frac{\pi}{3}$.

6. a) $1-e^{-2}$, b) $2\pi - 6\pi e^{-2}$, c) $\frac{7\pi}{2}+\frac{\pi}{2}e^{-4}-4\pi e^{-2}$

7. $\frac{4\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$

8. a) $\pi(e-2)$, b) $\frac{\pi}{2}(1+e^2)$, c) $2\pi e - \frac{\pi(1+e^2)}{2}$ d) $(4-e)\pi$

9. a) $\frac{7}{12}$, b) $\frac{95}{126}\pi$

10. a) $\frac{8}{3}\pi$, b) $\frac{32}{5}$

11. $9\pi\sqrt{3}$

12. $\frac{3}{16}\pi^2$

13. $11{,}6165\pi$

14. a) $4{,}14296\pi$, b) $\frac{1}{2}\pi(\pi-2)$