Tema 3 – Primera Parte

Funciones de varias variables

Gráficas. Limites. Continuidad

Función de una variable

$$x \in S \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x) \in \mathbb{R}$$

Ejemplo: $f(x) = x^2$

$$5 \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(5) = 25$$

Función de n variables

$$(x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}$$

Ejemplo: $f(x, y) = x - y$

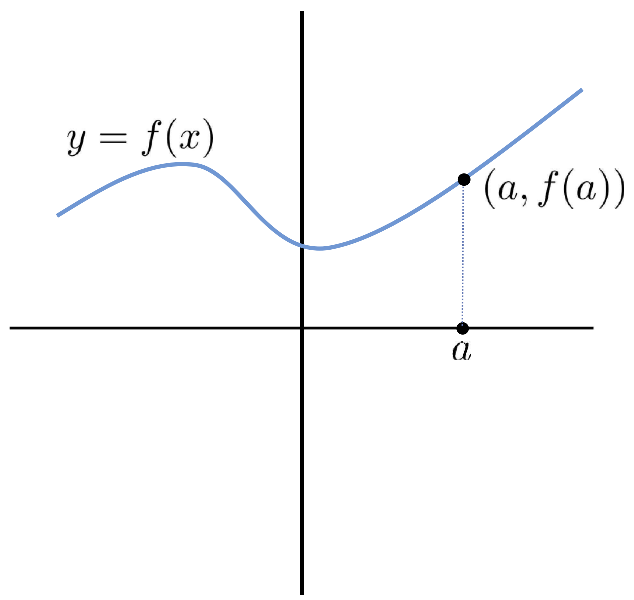
$$(-4, 3) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(-4, 3) = -7$$

Ejemplo: $f(x, y, z) = xz + y$

$$(2, -1, 3) \longrightarrow \boxed{f} \longrightarrow f(2, -1, 3) = 5$$

¿Cómo se representan gráficamente las funciones de n variables?

Si f es una función de una variable:

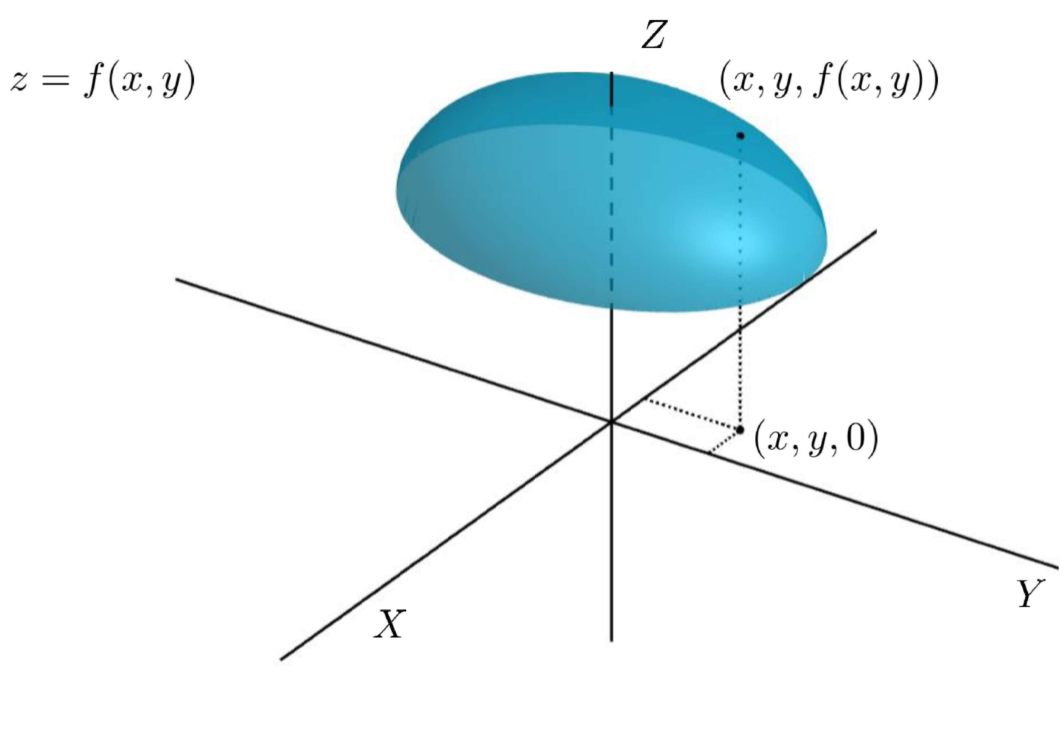


La función se representa en un espacio de dimensión 2

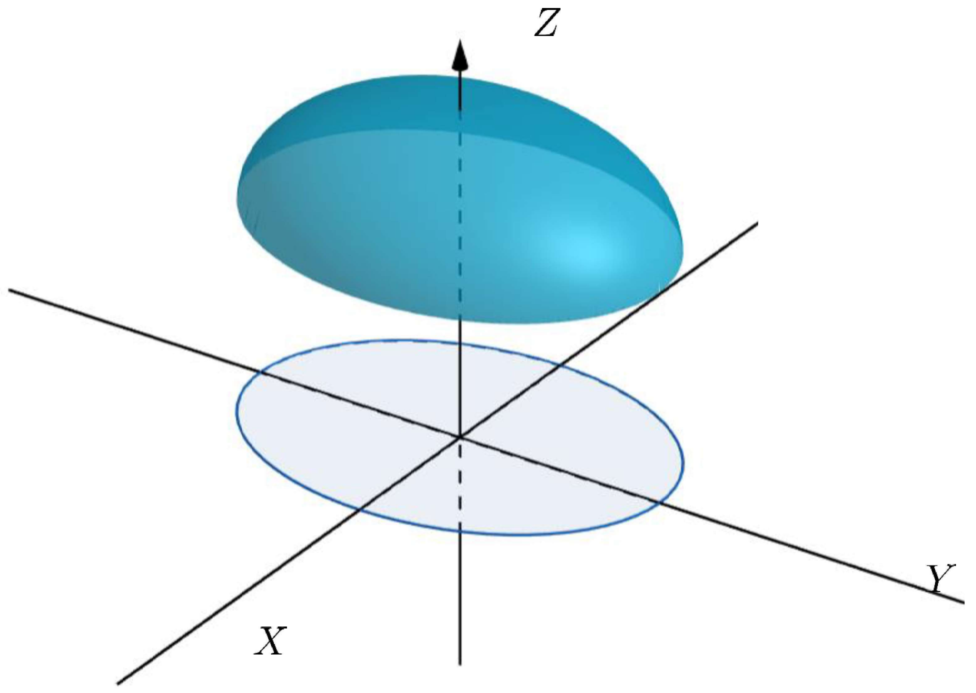
¿Cómo se representan gráficamente las funciones de n variables?

Si f es una función de n variables, se representaría en un espacio de dimensión $n+1$. Por ello, solo pueden representarse gráficamente funciones de hasta 2 variables.

¿Cómo se representan gráficamente las funciones de 2 variables?



Una función de n variables no tiene por qué estar definida en todo $\mathbb{R}^n$



Una función de n variables no tiene por qué estar definida en todo $\mathbb{R}^n$

$$f(x,y) = \frac{1}{xy}$$

f no está definido en todo $\mathbb{R}^2$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 0, y \neq 0\}$$

Ejemplo: calcular los dominios de las siguientes funciones

a) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

b) $f(x,y) = \ln(y^2 - x - 3)$

c) $f(x,y) = y + \operatorname{arcsen} x$

d) $f(x,y) = \ln(x+y)$

e) $f(x,y) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y-2}$

f) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$

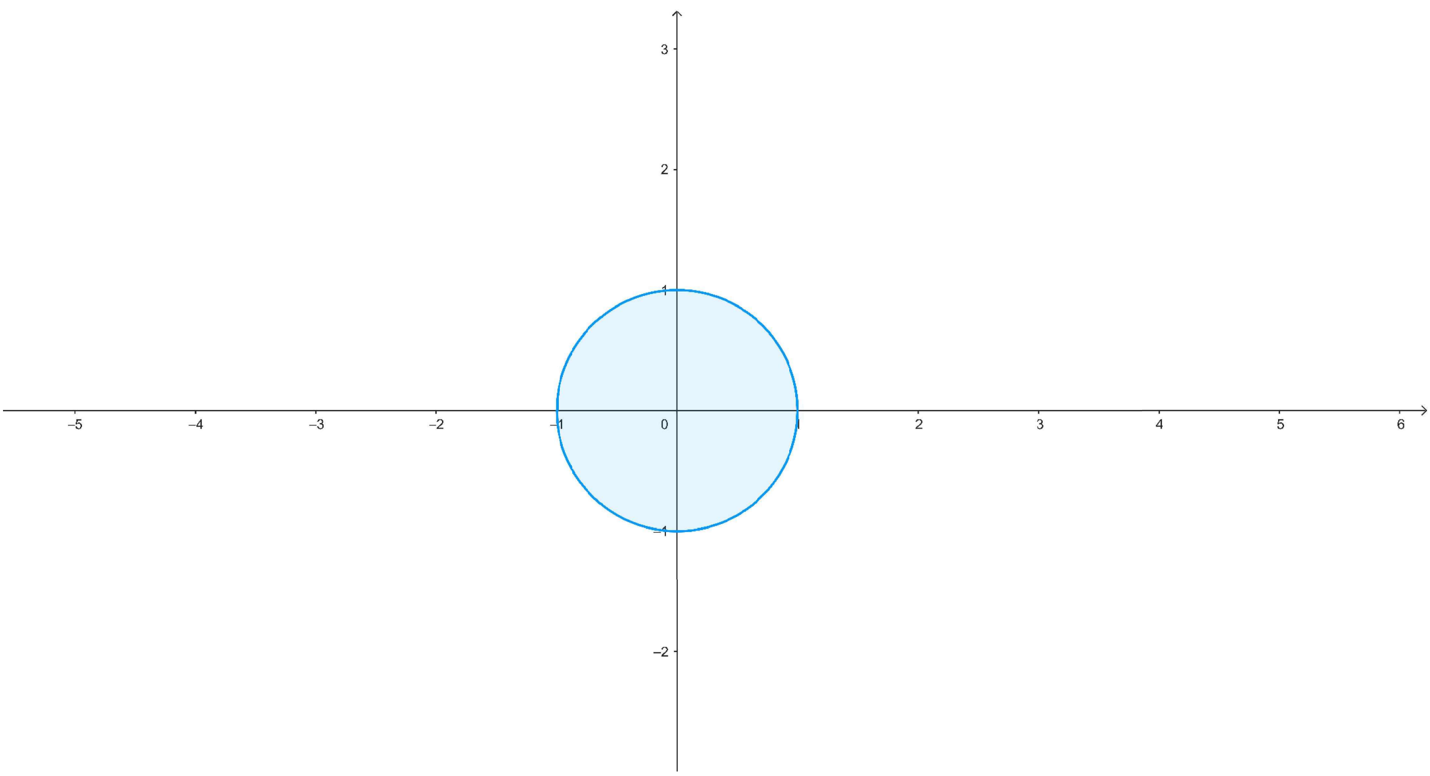
g) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$

h) $f(x,y) = \ln(x^2 + y)$

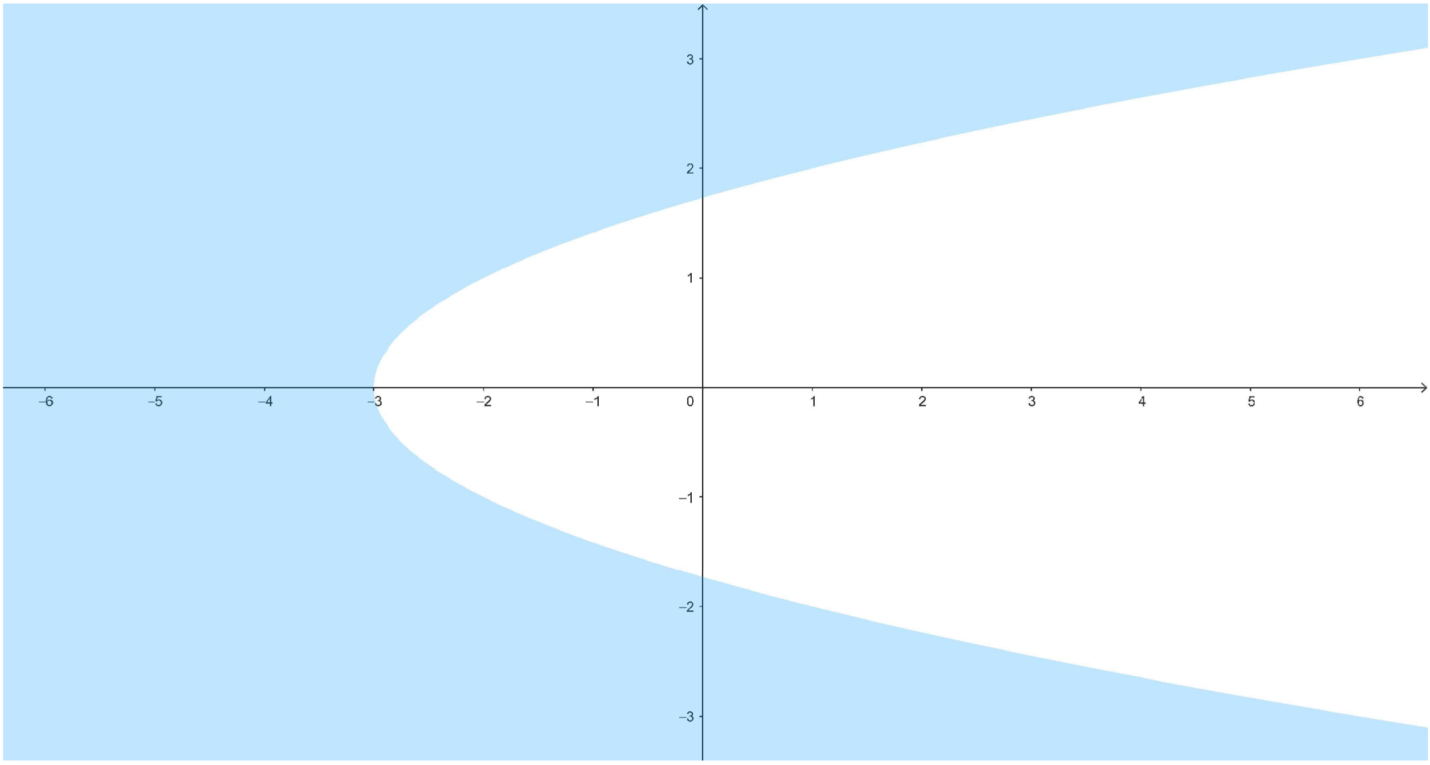
i) $f(x,y) = \sqrt{x - \sqrt{y}}$

a) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

$$D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leqslant 1\}$$

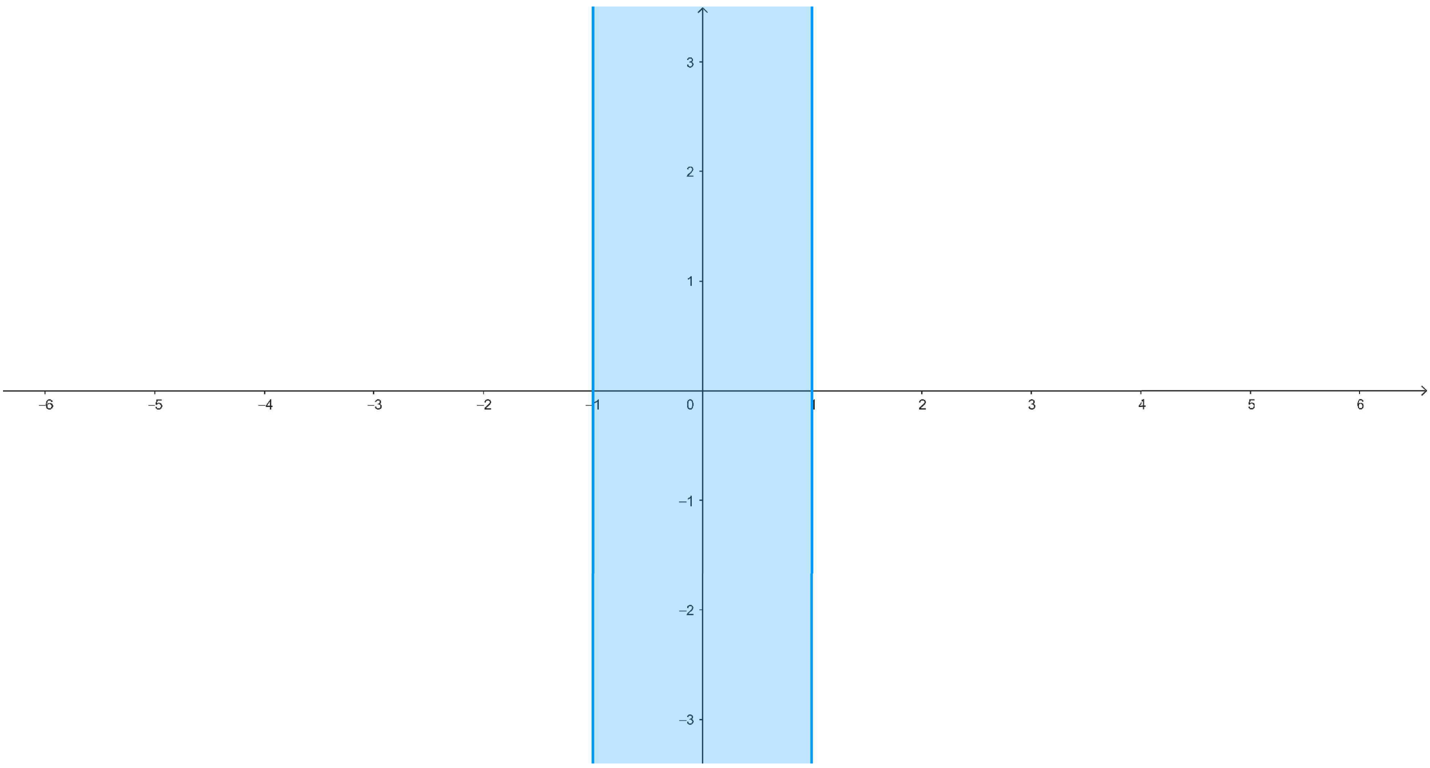


b) $f(x,y) = \ln(y^2 - x - 3)$ $\qquad$ $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon y^2 - x - 3 > 0\}$

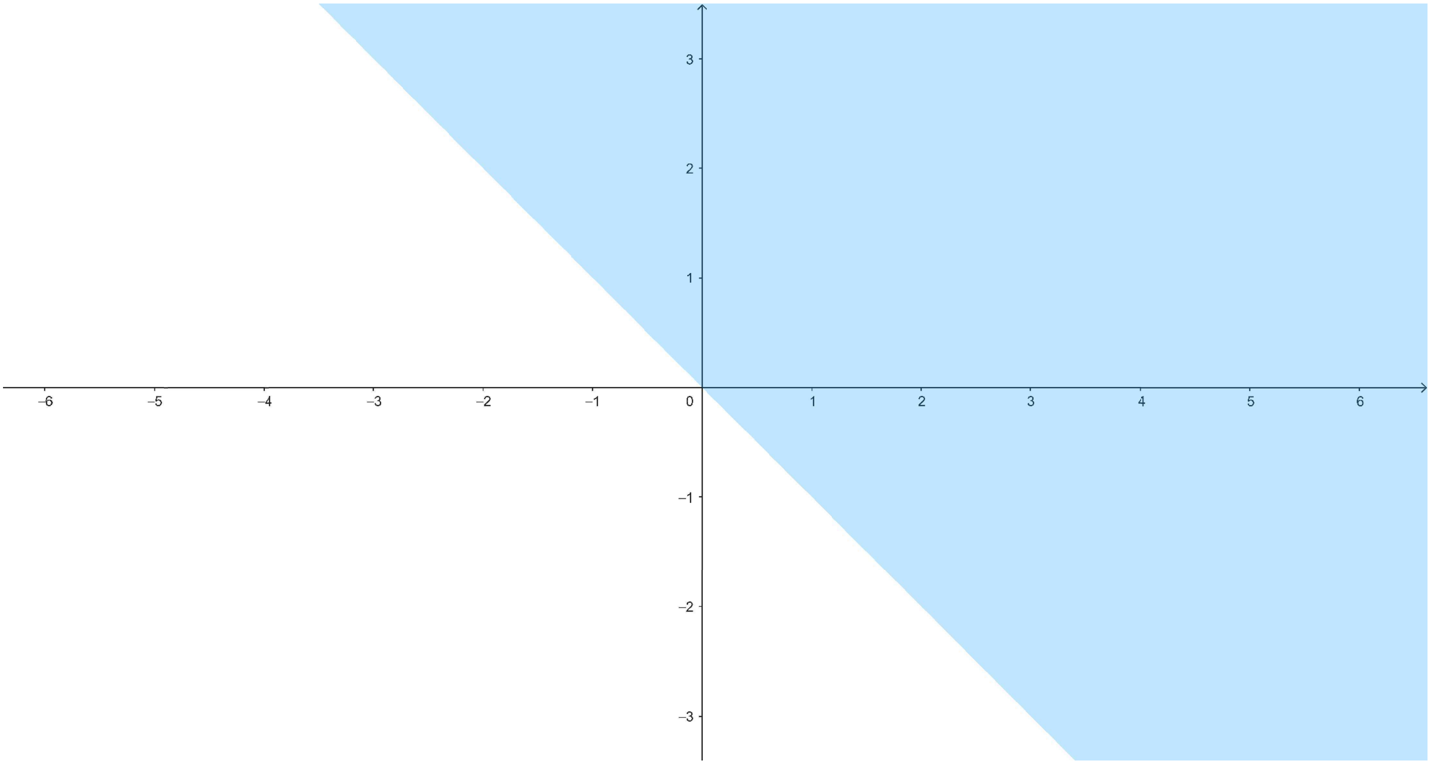


FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

c) $f(x,y) = y + \operatorname{arcsen} x$ $\qquad$ $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \in [-1,1]\}$

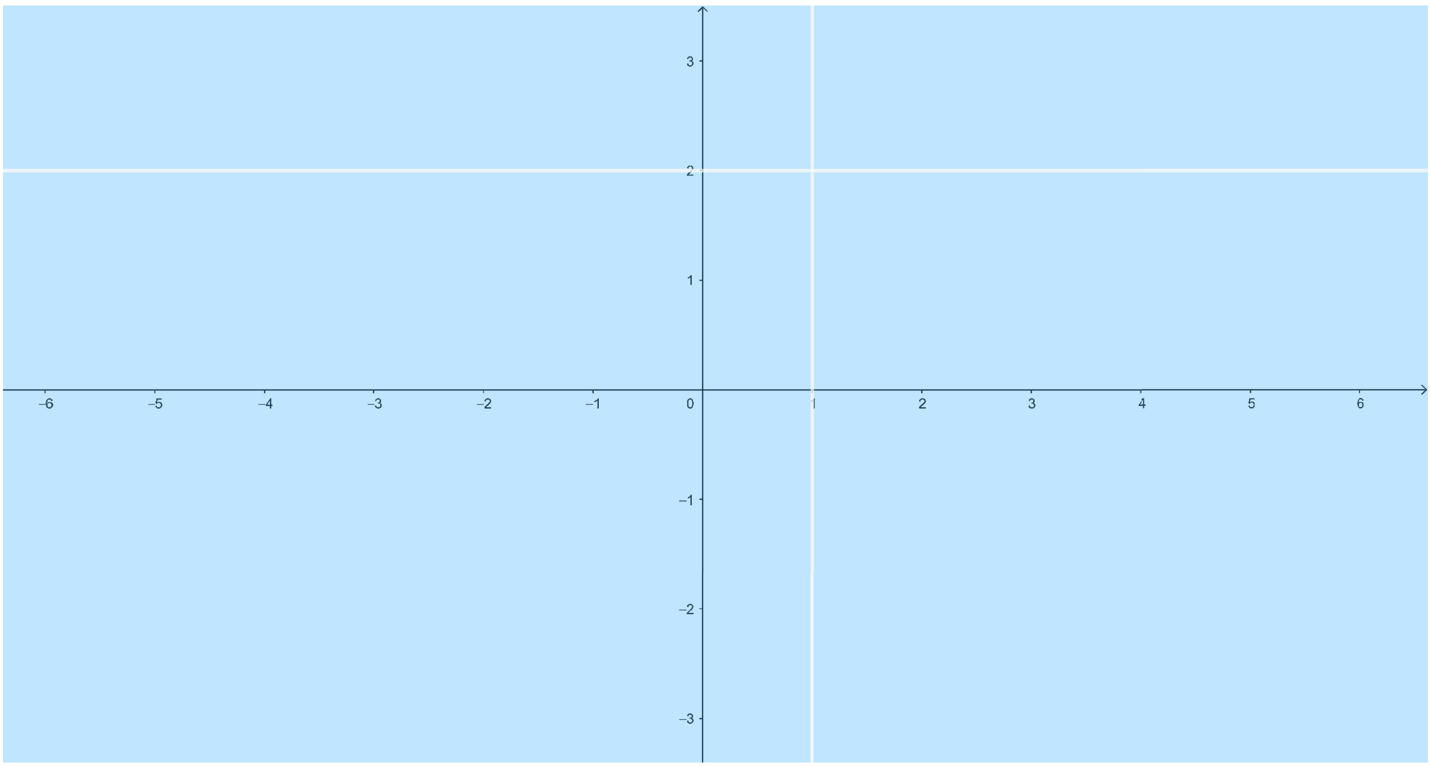


d) $f(x,y) = \ln(x+y)$ $\qquad$ $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x + y > 0\}$

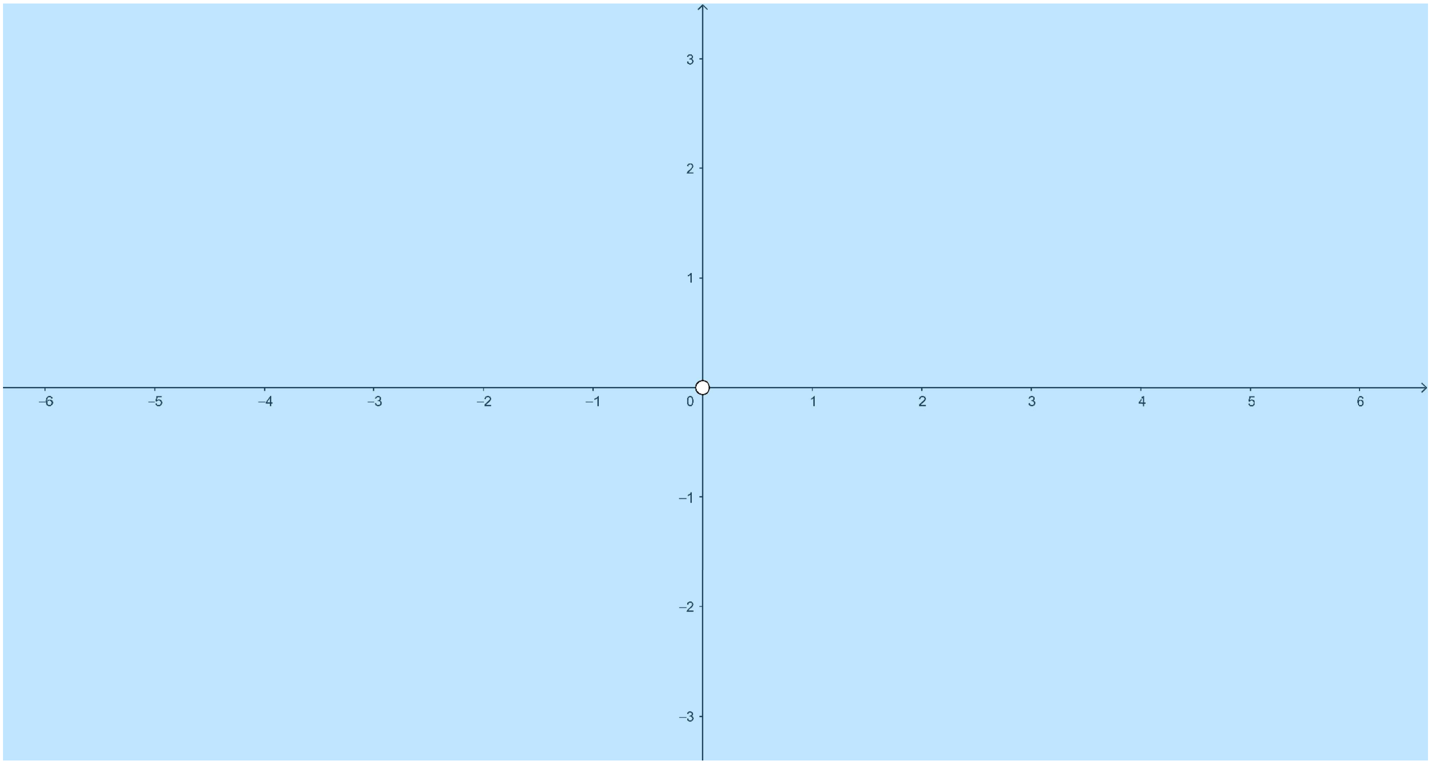


FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

e) $f(x,y) = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{y-2}$ $\qquad$ $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \neq 1, y \neq 2\}$

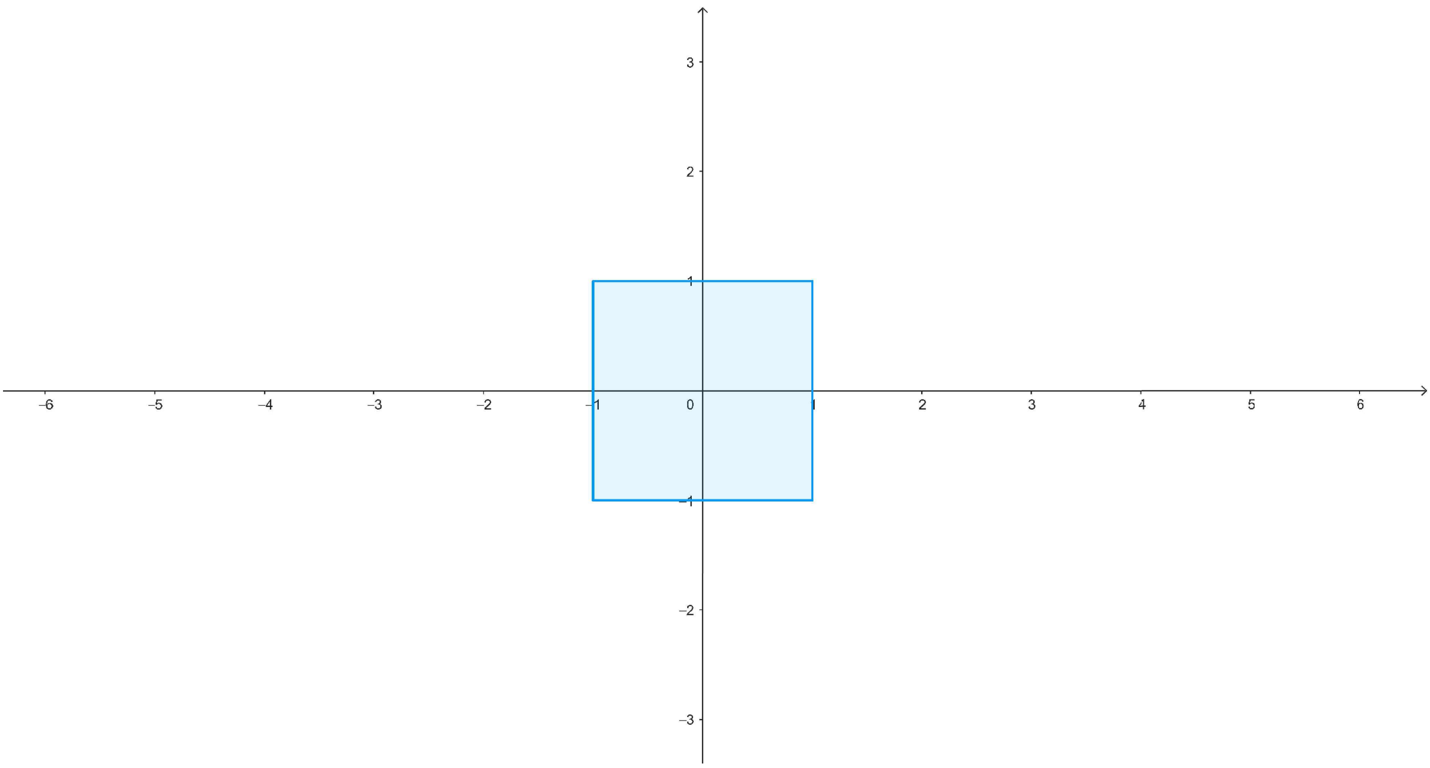


f) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$ $D(f) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

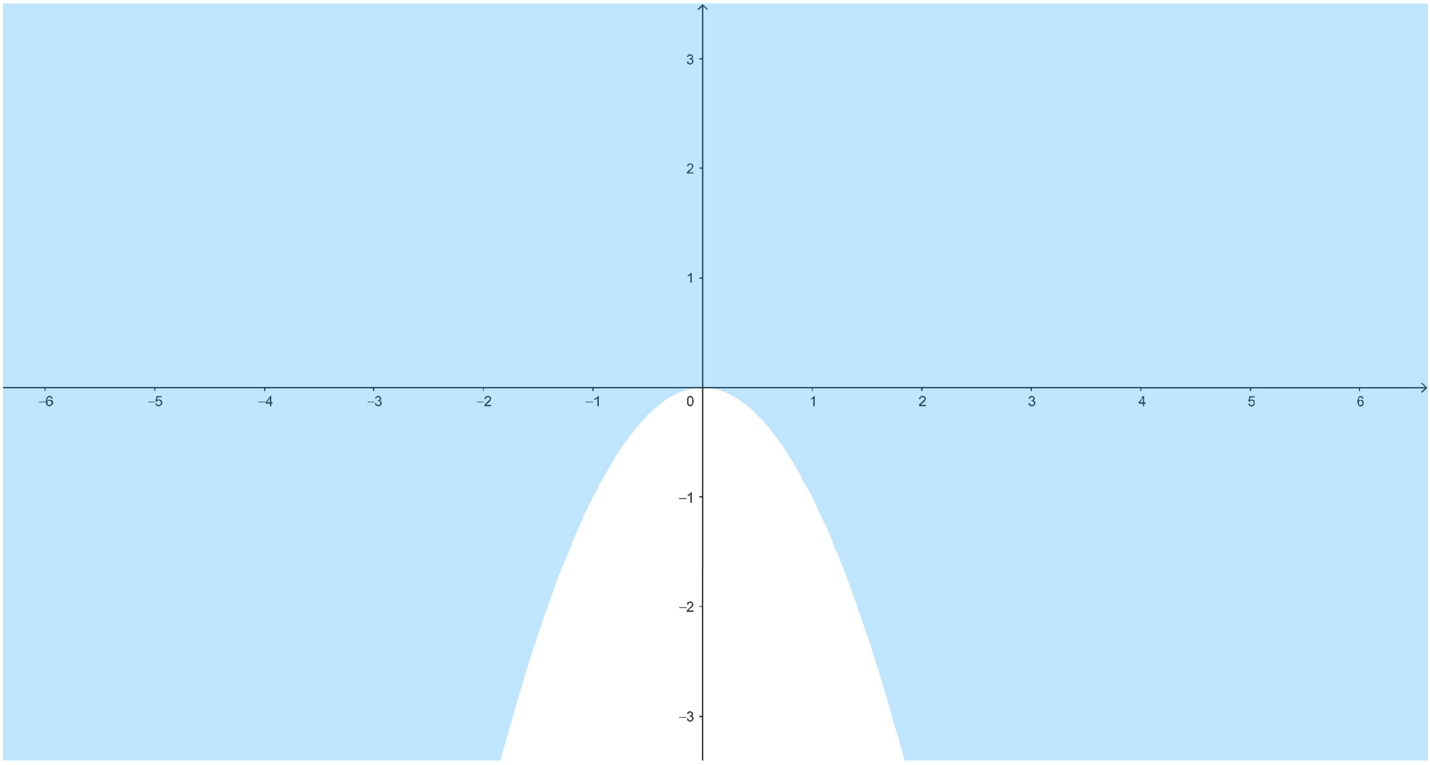


FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

g) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{1-y^2}$ $D(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon x, y \in [-1,1]\}$



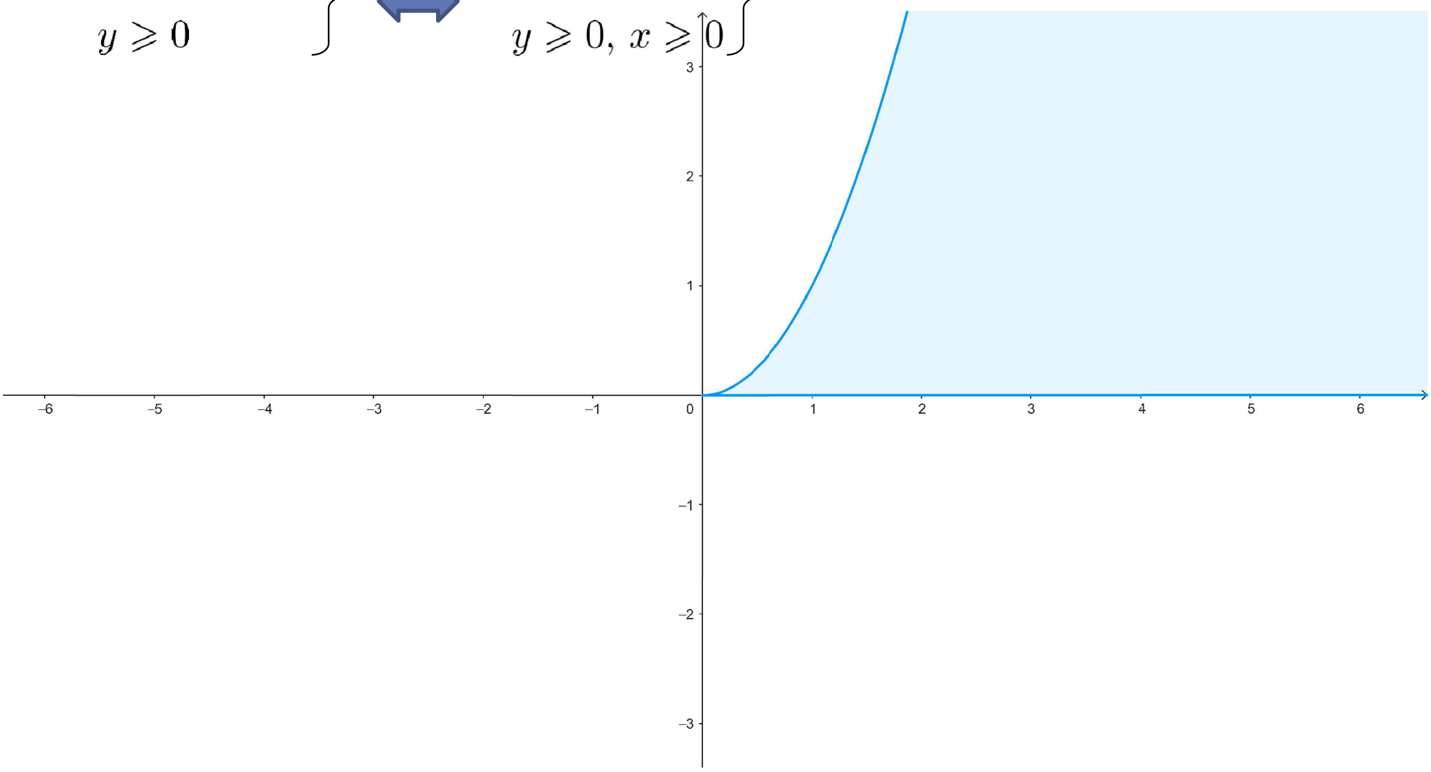
h) $f(x,y)=\ln(x^2+y)$ $\qquad$ $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon y>-x^2\}$



FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

i) $f(x,y)=\sqrt{x-\sqrt{y}}$ $\qquad$ $D(f)=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon x,y\geqslant 0, x^2\geqslant y\}$

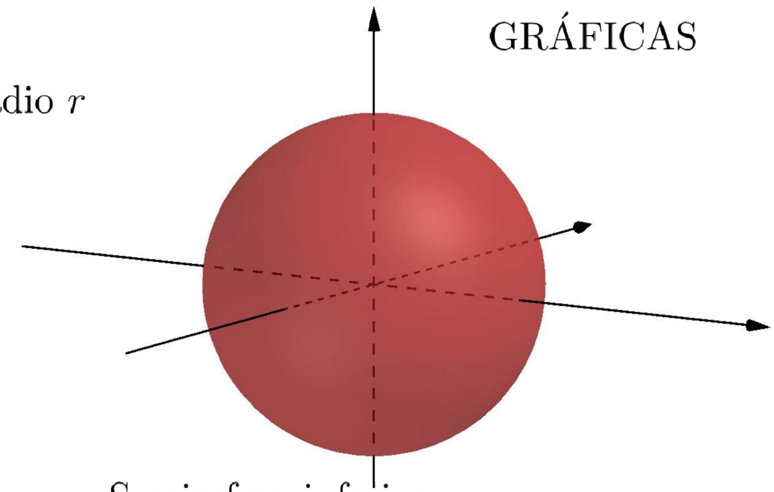
$$\left.\begin{array}{l} x-\sqrt{y}\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^2\geqslant y \\ y\geqslant 0,\ x\geqslant 0 \end{array}\right\}$$



GRÁFICAS

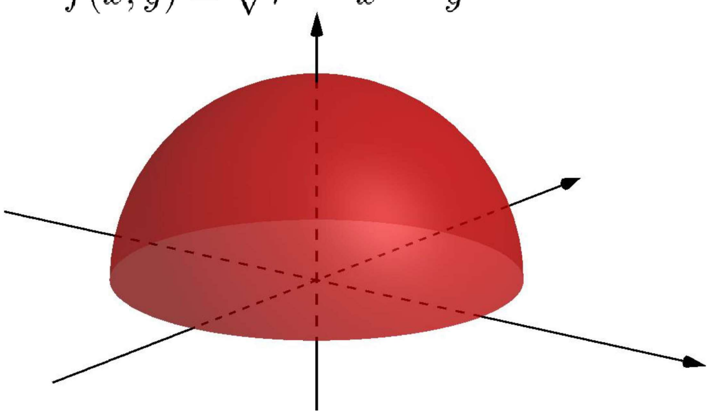
Esfera centrada en $(0,0,0)$ y radio r

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$



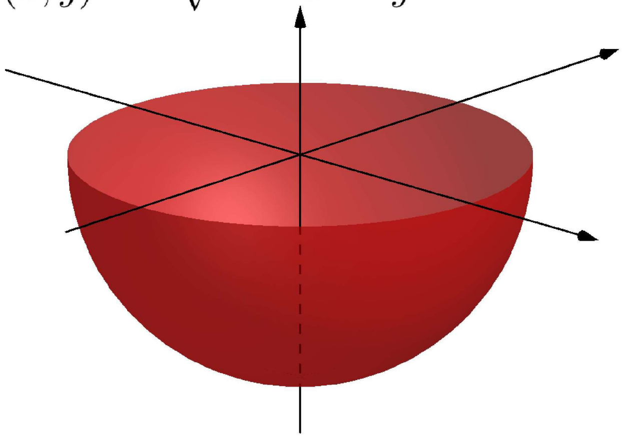
Semiesfera superior

$$f(x,y) = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$



Semiesfera inferior

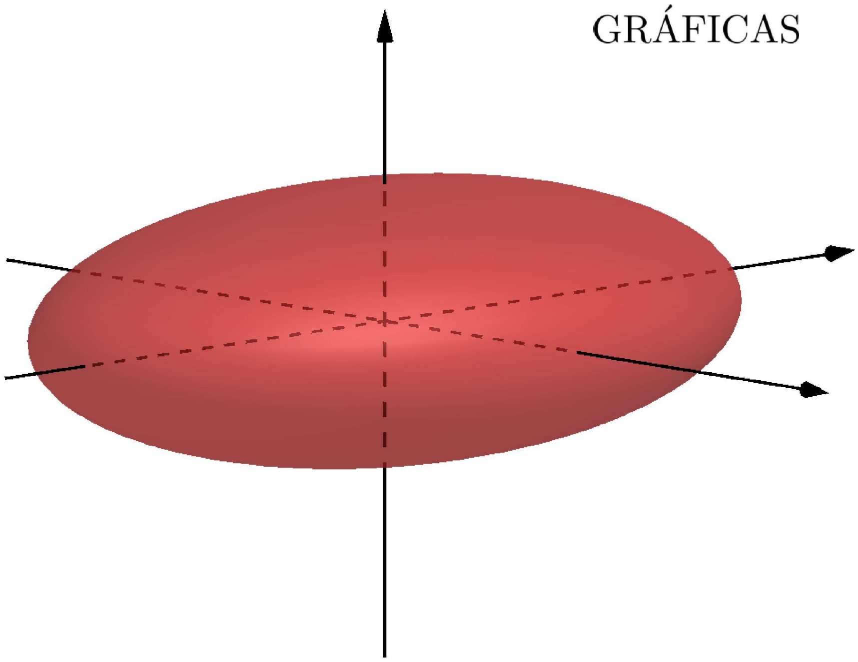
$$f(x,y) = -\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$$



GRÁFICAS

Elipsoide

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$



Semielipsoide superior

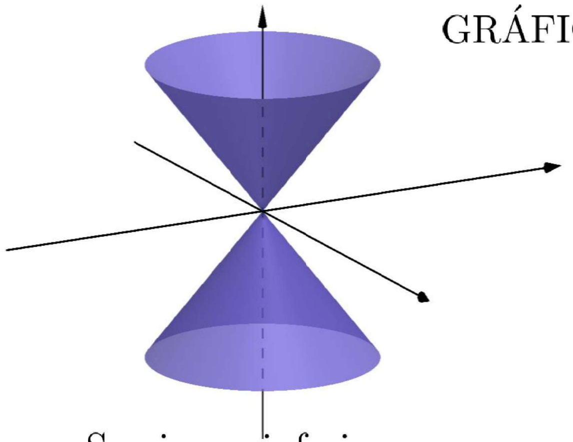
$$f(x,y) = \sqrt{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

Semielipsoide inferior

$$f(x,y) = -\sqrt{c^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

GRÁFICAS

Cono circular con vértice en $(0,0,0)$

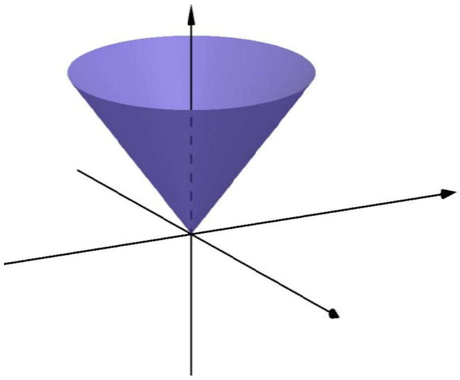


$$ax^2 + ay^2 - z^2 = 0$$

$$a > 0$$

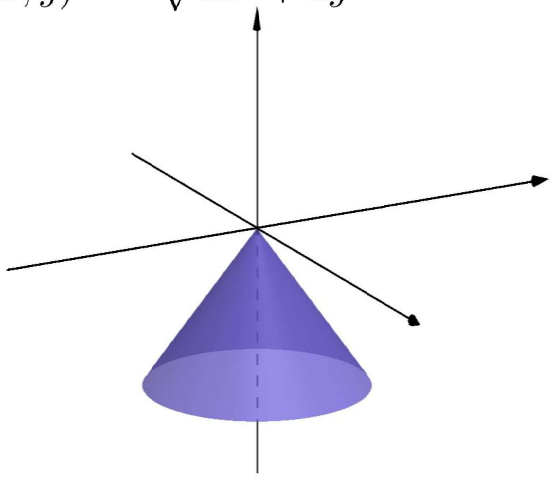
Semicono superior

$$f(x,y) = \sqrt{ax^2 + ay^2}$$



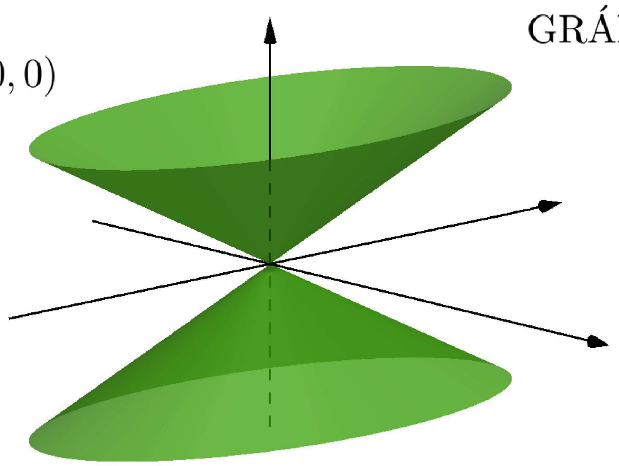
Semicono inferior

$$f(x,y) = -\sqrt{ax^2 + ay^2}$$



GRÁFICAS

Cono elíptico con vértice en $(0,0,0)$

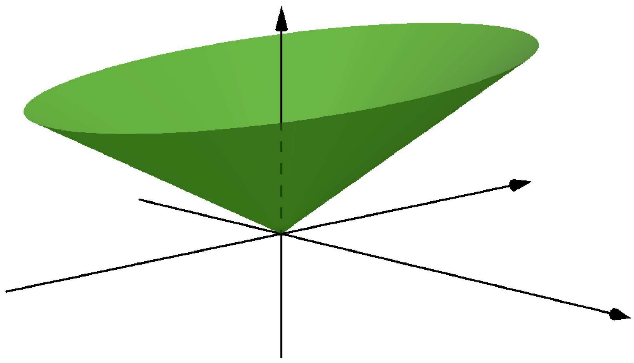


$$ax^2 + by^2 - z^2 = 0$$

$$a, b > 0 \qquad a \neq b$$

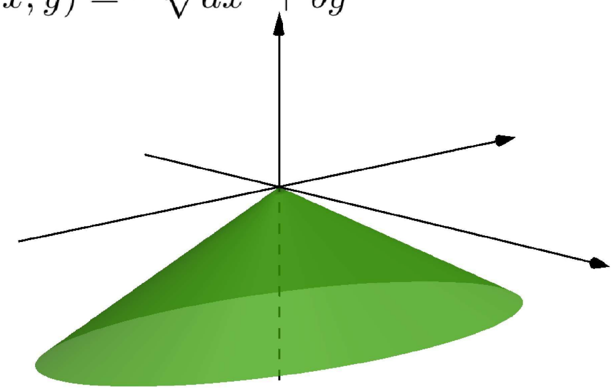
Semicono superior

$$f(x,y) = \sqrt{ax^2 + by^2}$$



Semicono inferior

$$f(x,y) = -\sqrt{ax^2 + by^2}$$

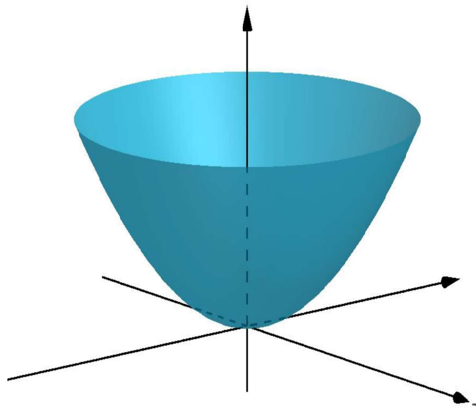


$a, b > 0 \qquad a \neq b$

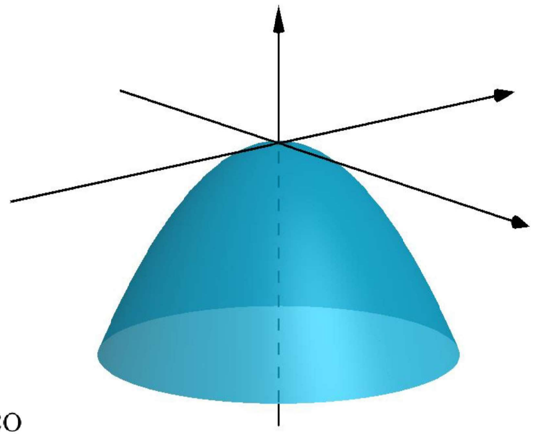
Paraboloide circular

GRÁFICAS

$f(x,y) = ax^2 + ay^2$

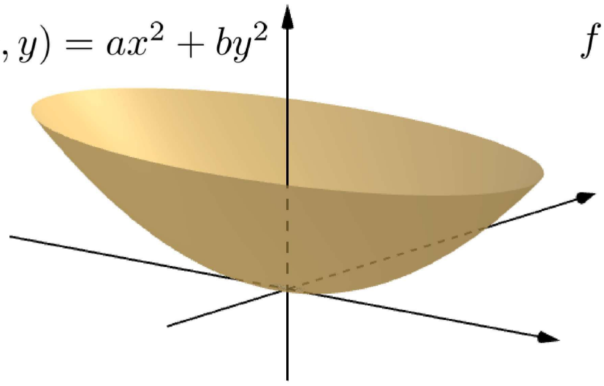


$f(x,y) = -(ax^2 + ay^2)$

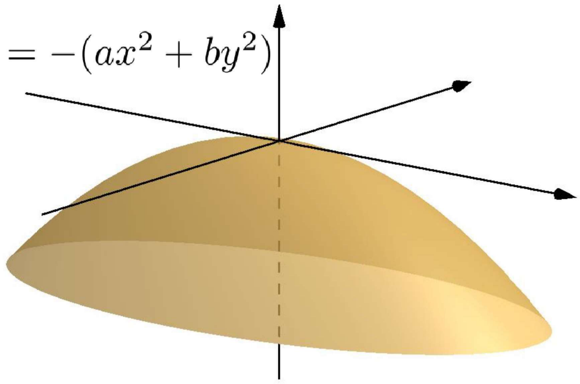


Paraboloide elíptico

$f(x,y) = ax^2 + by^2$



$f(x,y) = -(ax^2 + by^2)$

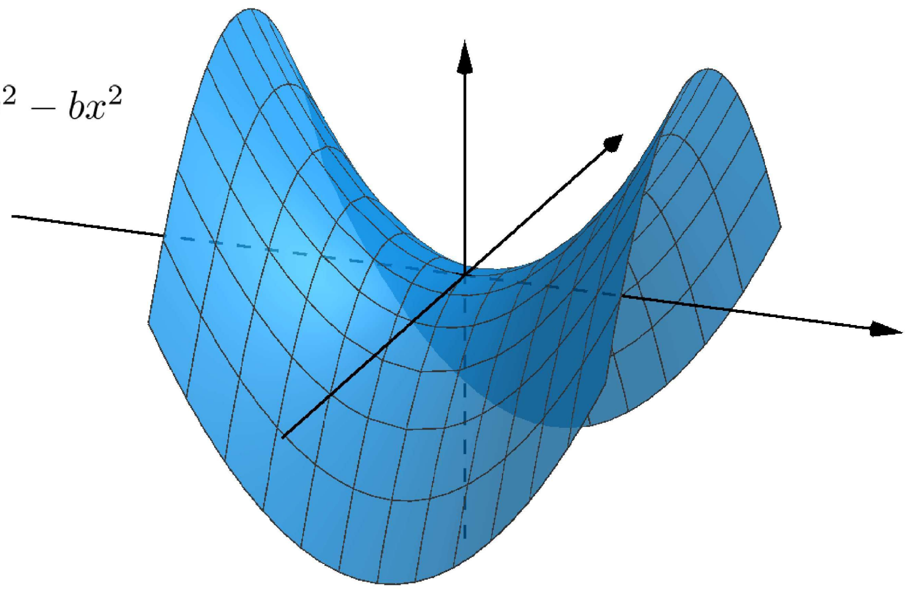


GRÁFICAS

$a, b > 0$

Paraboloide hiperbólico

$f(x,y) = ay^2 - bx^2$

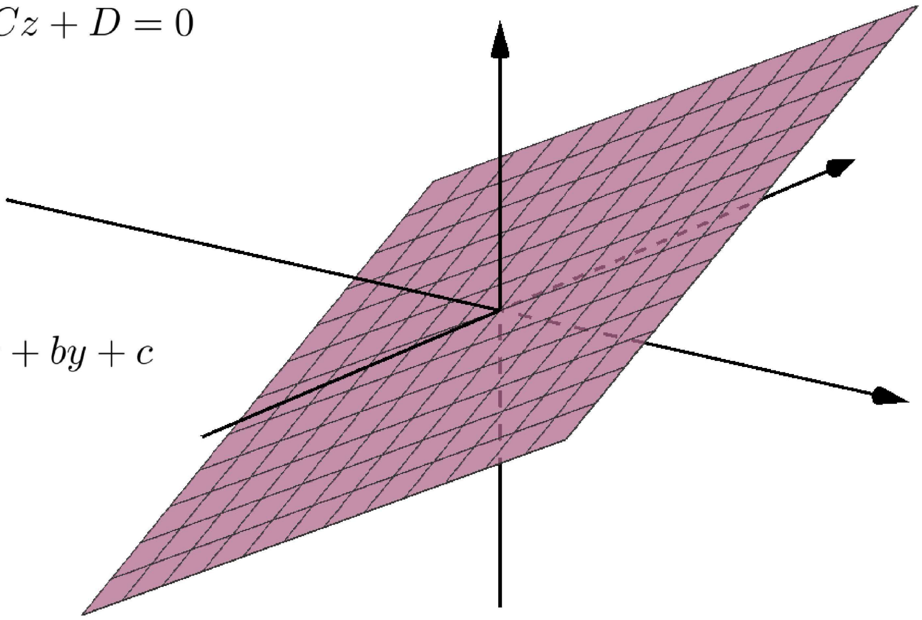


GRÁFICAS

Plano

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

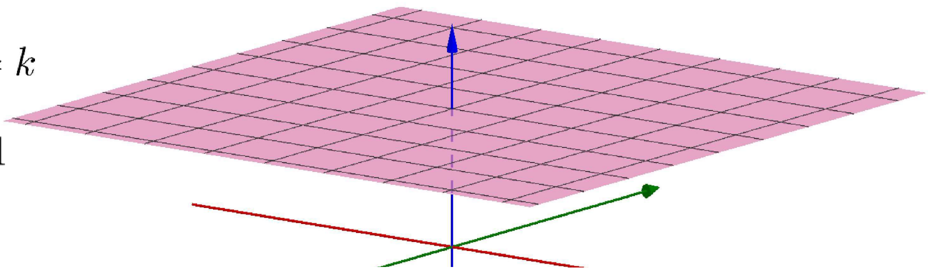
$$f(x, y) = ax + by + c$$



GRÁFICAS

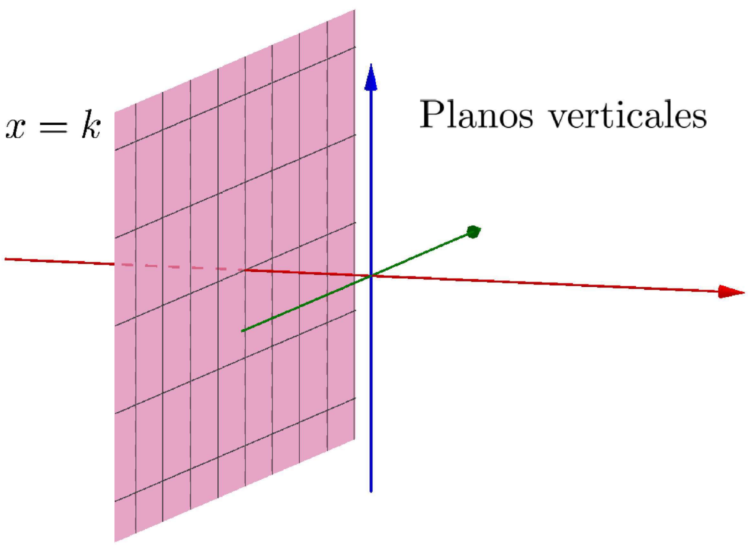
$z = k$

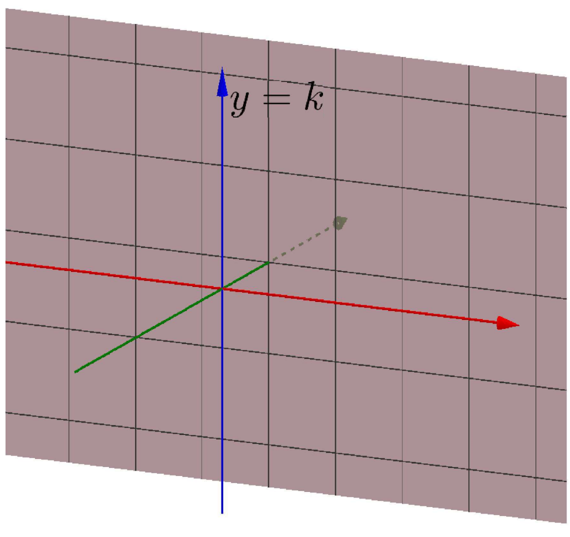
Plano horizontal



$x = k$

Planos verticales

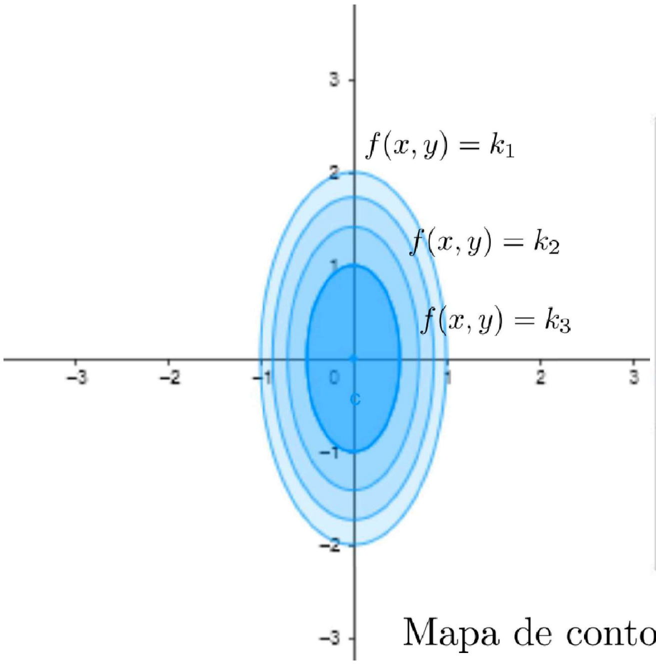




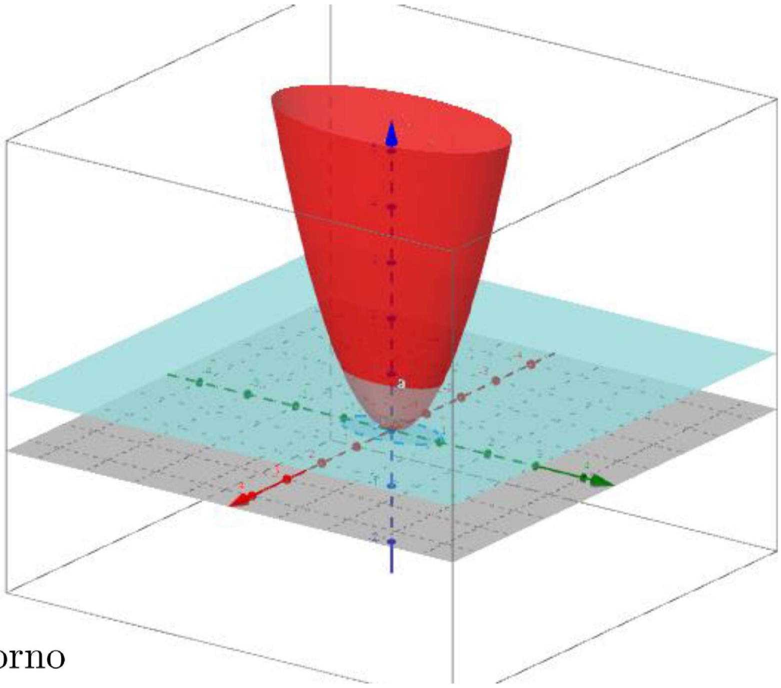
Sea f un función de dos variables cuya gráfica es una superficie $z = f(x,y)$

Cada plano horizontal $z = k$ que corte a la superficie $z = f(x,y)$ determina una curva $f(x,y) = k$ sobre la superficie

La proyección de esta curva sobre el plano XY es una curva de nivel



Mapa de contorno

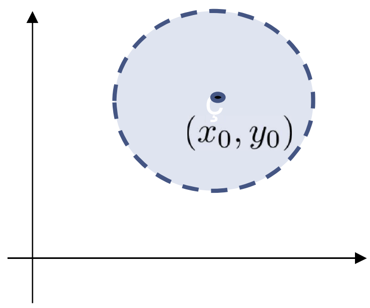


Sea $f(x,y)$ una función definida al menos en un disco abierto centrado en (x_0, y_0) excepto quizás en (x_0, y_0).

La expresión

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

tiene un significado análogo al del límite de una función en un punto de una variable



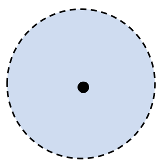
Disco abierto centrado en (x_0, y_0)

- Para saber si una función de una variable tiene límite, basta observar qué sucede al tender hacia el punto por su izquierda y por su derecha. Si la función tiende al mismo número por la izquierda que por la derecha, el límite existe.

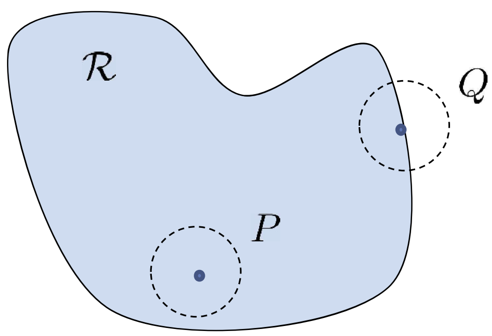
$$\lim_{x \to {x_0}^-} f(x) \qquad\qquad \lim_{x \to {x_0}^+} f(x)$$

- Para funciones de dos variables hay más de dos formas ("caminos") para acercarnos a un punto, ya que ahora nos movemos en un plano. Por ello, si ocurre que el límite de la función no es el mismo para todas las formas en que (x, y) puede acercarse a (x_0, y_0), el límite no existe.

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x, y)$$



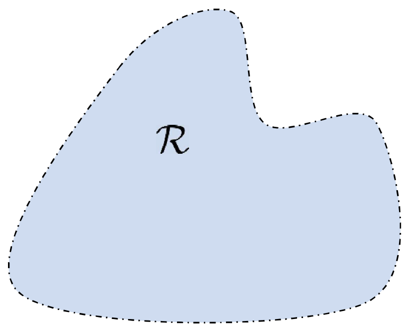
Entorno de un punto (x_0, y_0)
Disco abierto centrado en (x_0, y_0)



$P(x_0, y_0)$ es un punto interior de una región $\mathcal{R}$ cuando $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ y, además $\mathcal{R}$ contiene al algún entorno de (x_0, y_0)

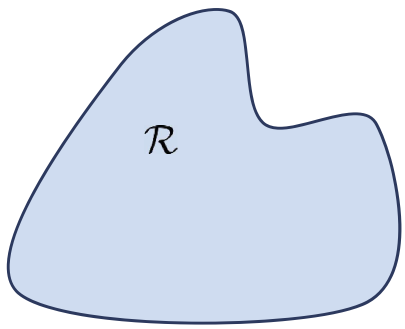
$Q(x_0, y_0)$ es un punto frontera de una región $\mathcal{R}$ cuando cada entorno de $(x_0, y_0) \in \mathcal{R}$ contiene puntos de $\mathcal{R}$ y puntos que no son de $\mathcal{R}$

La región $\mathcal{R}$ es abierta cuando contiene un entorno de cada uno de sus puntos (todos sus puntos son interiores)



La frontera no forma parte del conjunto

La región $\mathcal{R}$ es cerrada cuando contiene a todos sus puntos frontera



La frontera forma parte del conjunto

Sea (x_0, y_0) un punto interior del dominio de la función f. Se dice que f es continua en (x_0, y_0) cuando

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0, y_0)$$

Se dice que f es continua en un conjunto abierto $\mathcal{R}$ cuando f es continua en todo punto de $\mathcal{R}$

- La suma de dos funciones es una función continua en todos los puntos en los que, simultáneamente, ambas son continuas
- El producto de dos funciones es una función continua en todos los puntos en los que, simultáneamente, ambas son continuas
- El cociente de dos funciones es una función continua en todos los puntos, que no anulen el denominador, en los que, simultáneamente, ambas son continuas
- Si h es una función de dos variables, continua en el punto (x_0, y_0), y g es una función de una variable continua en el número $h(x_0, y_0)$, entonces la función compuesta $f(x,y) = g(h(x,y))$ es continua en (x_0, y_0)

Ejemplos: Las siguientes funciones son continuas en su dominio

$$f(x,y) = x^2y + y^3 - 2x + 5 \qquad f(x,y) = \operatorname{sen}\frac{1}{x} + \cos\frac{1}{y}$$

$$f(x,y) = \frac{x^2+y}{x^2+y^2+1} \qquad f(x,y) = \frac{\operatorname{arcsen}\frac{x}{y}}{1+xy}$$

$$f(x,y) = e^{xy}\cos(3x) \qquad f(x,y) = \frac{1}{2}(e^{-y} - e^{y})\operatorname{sen}x$$

$$f(x,y) = \sqrt{x^3 - 5y^2} \qquad f(x,y) = \frac{\cos(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$$

$$f(x,y) = \ln(x^2+y^2) \qquad f(x,y) = \ln\sqrt{xy}$$