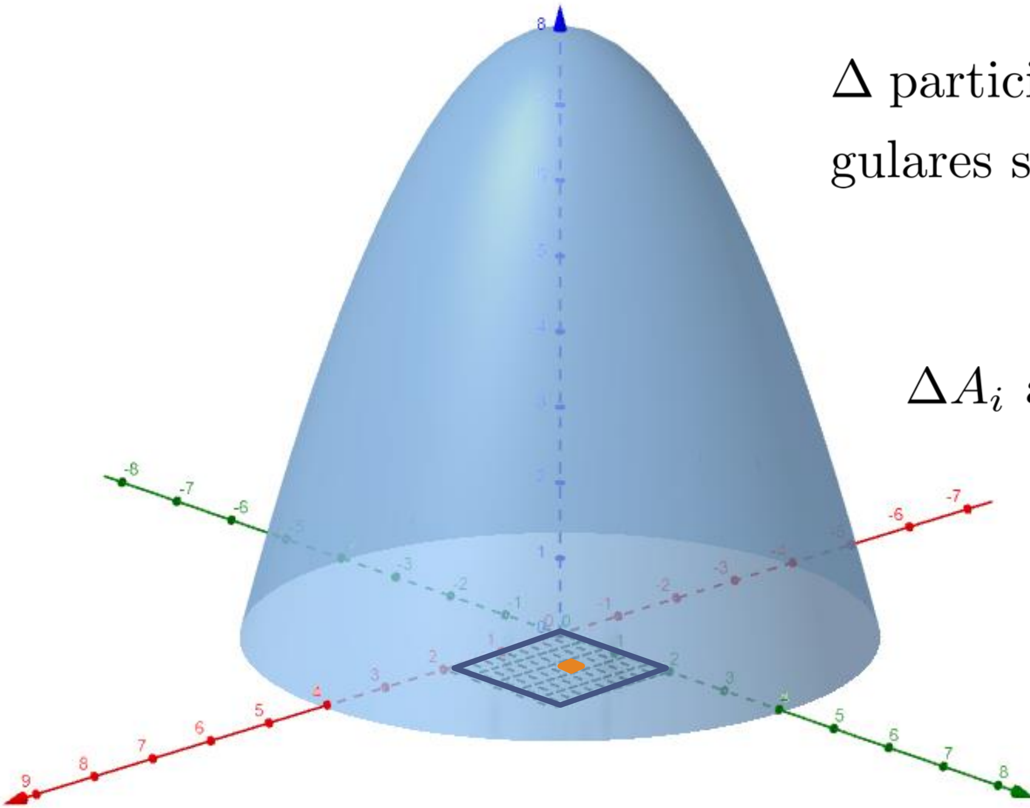
Tema 4 – Segunda Parte

Integrales Dobles

Volúmenes

Vamos a calcular el volumen del sólido situado entre la superficie $z = f(x, y)$ y el plano XY por encima de la región $\mathcal{R}$



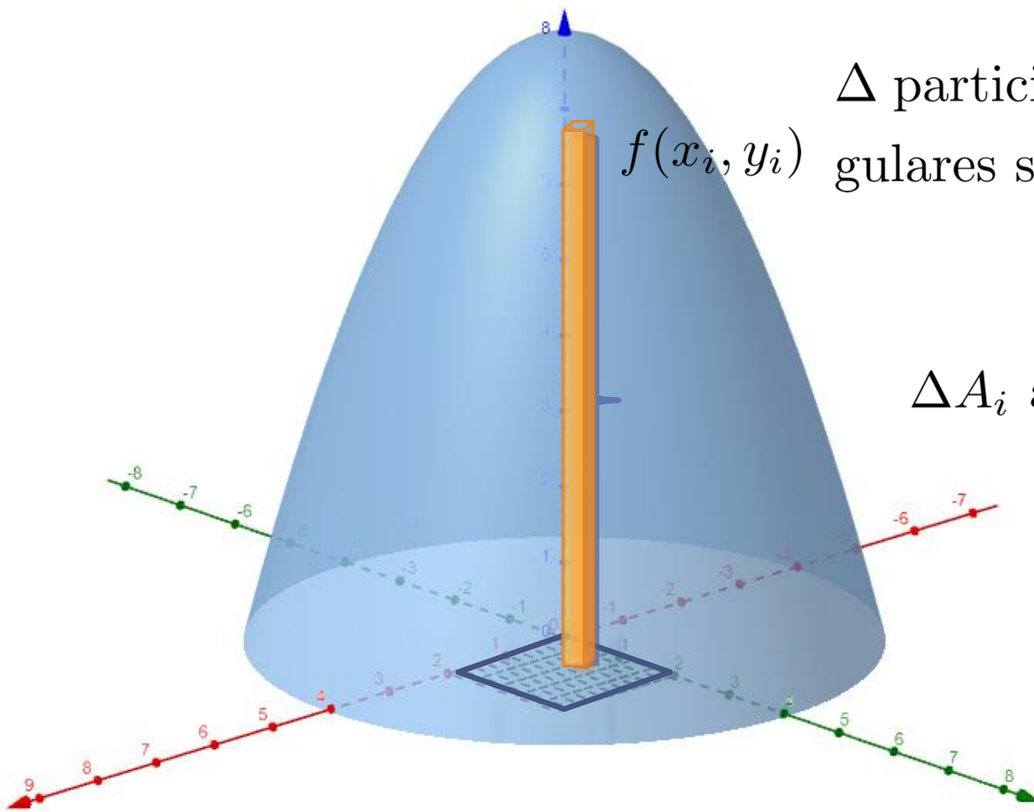
Δ partición de $\mathcal{R}$ en subregiones rectangulares sin solapamiento

$$\Delta = \{R_1, \ldots, R_n\}$$

ΔA_i área del i-ésimo rectángulo R_i

$||\Delta||$ =longitud de la diagonal más larga de todos los rectángulos

Vamos a calcular el volumen del sólido situado entre la superficie $z = f(x, y)$ y el plano XY por encima de la región $\mathcal{R}$



Δ partición de $\mathcal{R}$ en subregiones rectangulares sin solapamiento

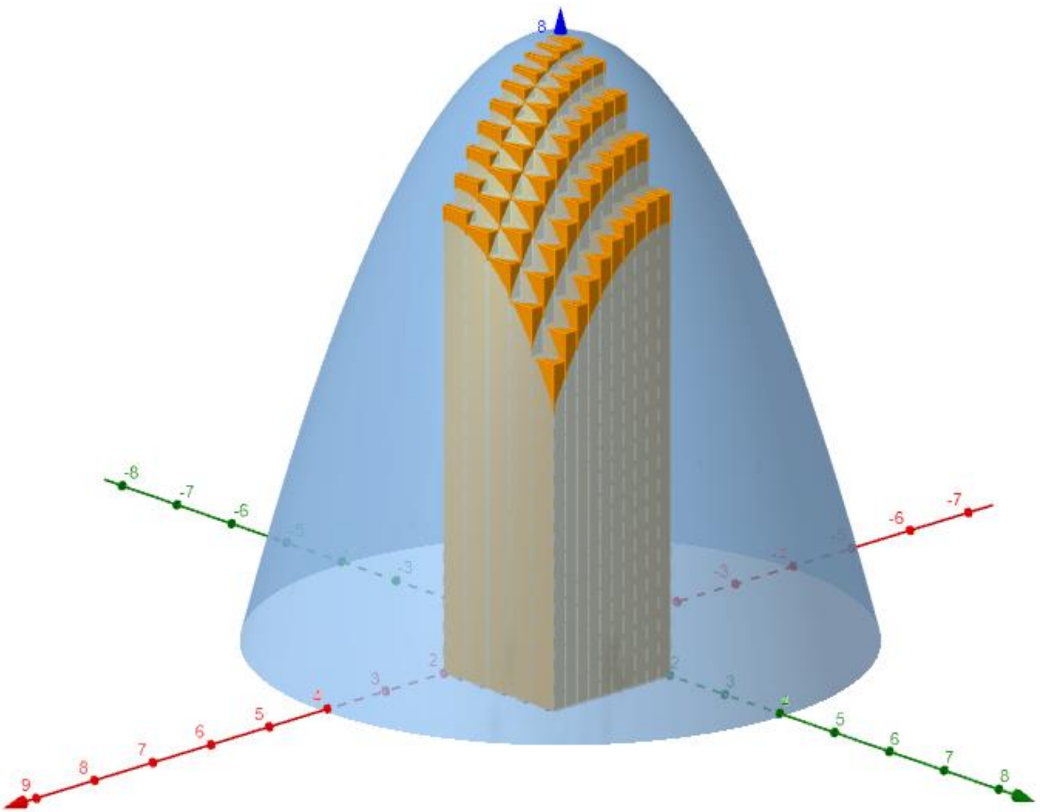
$$\Delta = \{R_1, \ldots, R_n\}$$

ΔA_i área del i-ésimo rectángulo R_i

(x_i, y_i) punto de R_i

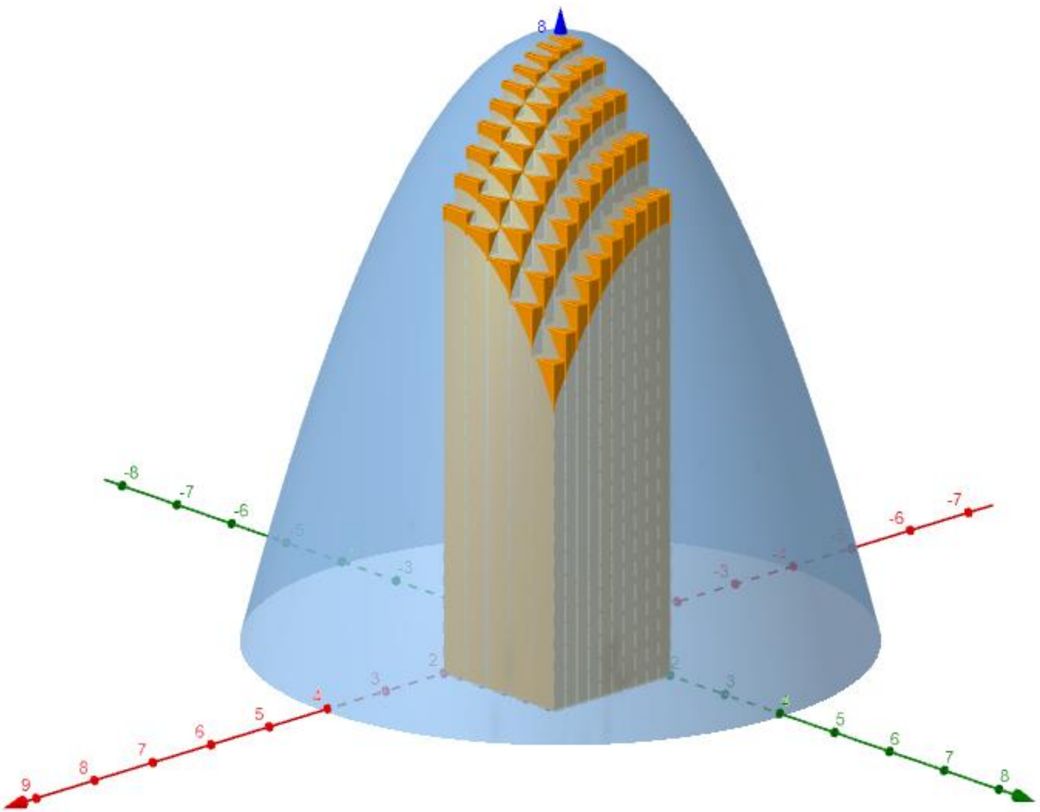
Volumen del i-ésimo prisma $\qquad V_i = f(x_i, y_i)\Delta A_i$

Vamos a calcular el volumen del sólido situado entre la superficie $z = f(x, y)$ y el plano XY por encima de la región $\mathcal{R}$



$$V \simeq \sum_{i=1}^{n} (\text{volumen prisma } i\text{-ésimo}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta A_i$$

Vamos a calcular el volumen del sólido situado entre la superficie $z = f(x, y)$ y el plano XY por encima de la región $\mathcal{R}$



$$V = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \Delta A_i$$

Sea f una función definida en una región cerrada y acotada $\mathcal{R}$ del plano XY

Se llama **integral doble** de la función f sobre la región $\mathcal{R}$ a

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta A_i$$

cuando el límite existe

Por tanto, el volumen anterior es

$$V = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA$$

Propiedades de la integral doble

a) Si f y g son funciones continuas en una región cerrada y acotada $\mathcal{R}$ del plano XY, se verifica:

$$\iint_{\mathcal{R}} [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA \pm \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)dA$$

b) Si f es una función continua en una región cerrada y acotada $\mathcal{R}$ del plano XY y $c \in \mathbb{R}$ se verifica:

$$\iint_{\mathcal{R}} cf(x,y)dA = c\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA$$

c) Si f es una función continua en una región cerrada y acotada $\mathcal{R}$ del plano XY, se verifica:

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA \geq 0$$

cuando $f(x,y) \geq 0$ para todo $(x,y) \in \mathcal{R}$

Propiedades de la integral doble

d) Si f y g son funciones continuas en una región cerrada y acotada $\mathcal{R}$ del plano XY, se verifica:

$$\text{Si } f(x,y) \geq g(x,y), \text{ entonces } \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA \geq \iint_{\mathcal{R}} g(x,y)dA$$

e) Si f es una función continua en una región cerrada y acotada $\mathcal{R}$ del plano XY, se verifica:

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA = \iint_{\mathcal{R}_1} f(x,y)dA + \iint_{\mathcal{R}_2} f(x,y)dA$$

siendo $\mathcal{R}$ la unión de dos subregiones $\mathcal{R}_1$ y $\mathcal{R}_2$ que no se solapan

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)\,dA = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta x_i \Delta y_i$$

- ¿Cuándo existe la integral doble?
- ¿Cómo se puede calcular sin recurrir a las sumas de Riemann?

TEOREMA DE FUBINI

- Si $f(x,y)$ es continua en una región $\mathcal{R}$ verticalmente simple

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\right\}$$

con g_1 y g_2 continuas en $[a,b]$, entonces existe $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA$ y

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\,dx$$

- Si $f(x,y)$ es continua en una región $\mathcal{R}$ horizontalmente simple

$$\mathcal{R} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\ c \leq y \leq d\right\}$$

con h_1 y h_2 continuas en $[c,d]$, entonces existe $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA$ y

$$\iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\,dy$$

CASO PARTICULAR

- Si $\mathcal{R}$ es verticalmente simple

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\,\right\}$$

entonces

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} 1 dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} dy\, dx$$

- Si $\mathcal{R}$ es horizontalmente simple

$$\mathcal{R} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : h_1(y) \leq x \leq h_2(y),\ c \leq y \leq d\right\}$$

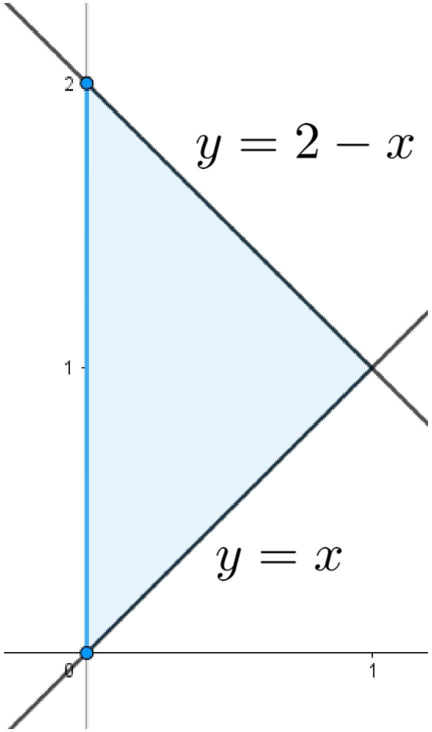
entonces

$$\text{Área}(\mathcal{R}) = \iint_{\mathcal{R}} 1 dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} dx\, dy$$

Ejemplo: Calcular la integral doble

$$\iint_{\mathcal{R}} (x+2y)\,dA$$

donde $\mathcal{R}$ es la región del plano acotada por las rectas $x=0,\ y=x,\ x+y=2$



Región verticalmente simple

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le 2-x \end{cases}$$

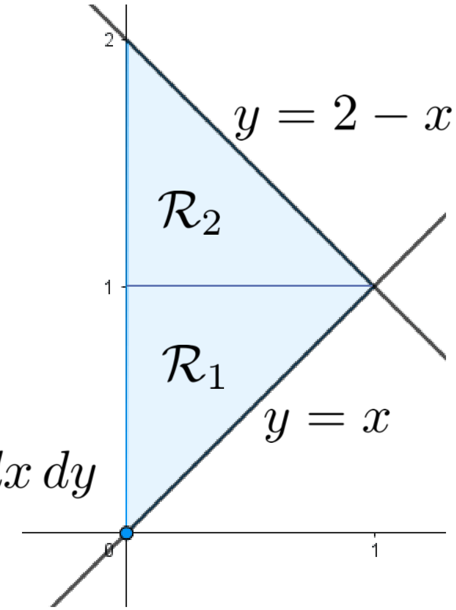
$$\iint_{\mathcal{R}} (x+2y)\,dA = \int_0^1 \int_x^{2-x} (x+2y)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy + y^2\right]_x^{2-x} dx \qquad = \int_0^1 \left(-2x^2 - 2x + 4\right) dx = \frac{7}{3}$$

Ejemplo: Calcular la integral doble

$$\iint_{\mathcal{R}} (x+2y)\,dA$$

donde $\mathcal{R}$ es la región del plano acotada por las rectas $x=0,\ y=x,\ x+y=2$



Región horizontalmente simple

$$\mathcal{R}_1 = \begin{cases} 0 \le x \le y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases} \qquad \mathcal{R}_2 = \begin{cases} 0 \le x \le 2-y \\ 1 \le y \le 2 \end{cases}$$

$$\iint_{\mathcal{R}} (x+2y)\,dA = \int_0^1 \int_0^y (x+2y)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x+2y)\,dx\,dy$$

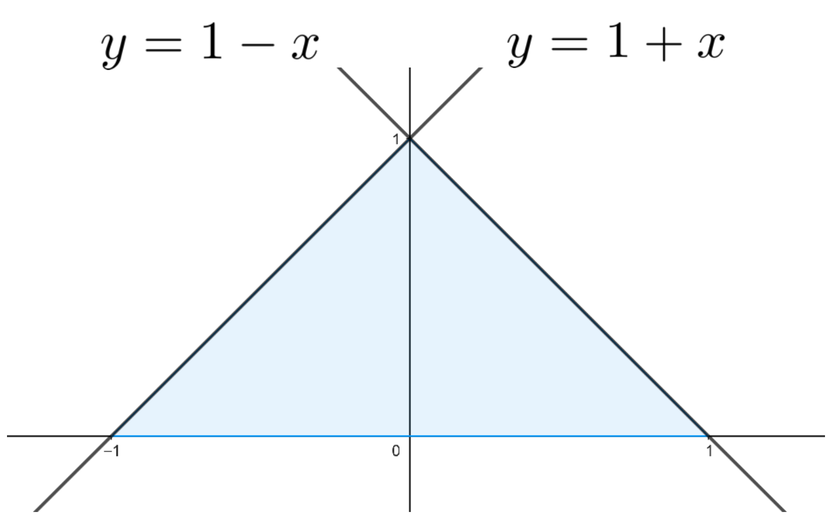
$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + 2yx\right]_0^y dy + \int_1^2 \left[\frac{x^2}{2} + 2yx\right]_0^{2-y} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{y^2}{2} + 2y^2\right) dy + \int_1^2 \left(\frac{(2-y)^2}{2} + 2y(2-y)\right) dy = \frac{7}{3}$$

Ejemplo: Calcular la integral doble

$$\iint_{\mathcal{R}} (3x - y)dA$$

donde $\mathcal{R}$ es la región del plano acotada por las rectas $y = 0,\ y = 1+x,\ y = 1-x$



Ejemplo: Calcular la integral doble

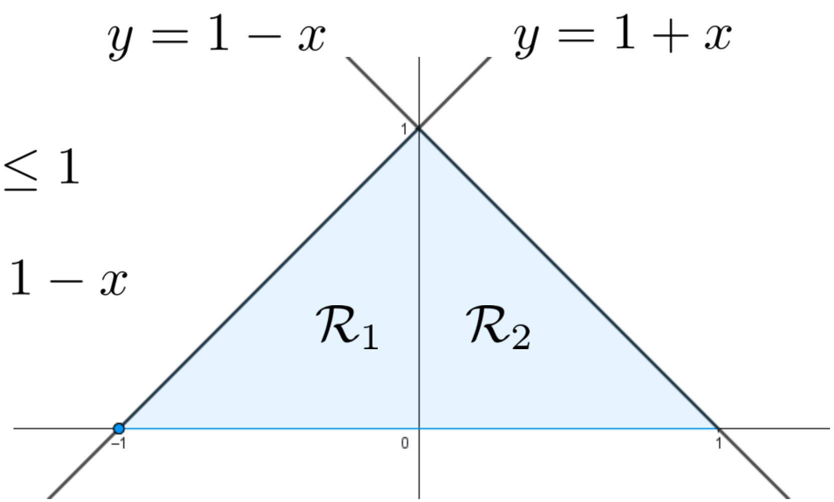
$$\iint_{\mathcal{R}} (3x - y)dA$$

donde $\mathcal{R}$ es la región del plano acotada por las rectas $y = 0$, $y = 1 + x$, $y = 1 - x$

Región verticalmente simple

$$\iint_{\mathcal{R}} (3x - y)dA = \int_{-1}^{0} \int_{0}^{1+x} (3x - y)dy\,dx + \int_{0}^{1} \int_{0}^{1-x} (3x - y)dy\,dx = -\frac{1}{3}$$

$$\mathcal{R}_1 = \begin{cases} -1 \leq x \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 1 + x \end{cases} \qquad \mathcal{R}_2 = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 - x \end{cases}$$



Ejemplo: Calcular la integral doble

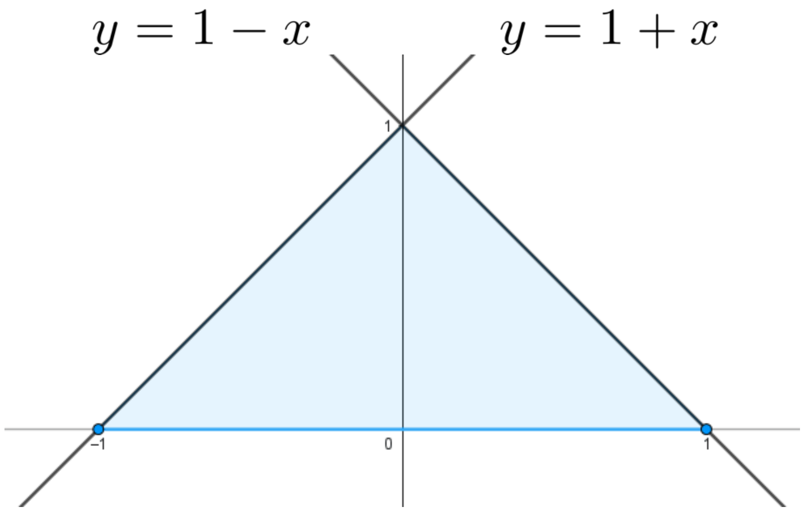
$$\iint_{\mathcal{R}} (3x - y)\,dA$$

donde $\mathcal{R}$ es la región del plano acotada por las rectas $y = 0$, $y = 1 + x$, $y = 1 - x$

Región horizontalmente simple

$$\iint_{\mathcal{R}} (3x - y)\,dA = \int_0^1 \int_{y-1}^{1-y} (3x - y)\,dx\,dy = -\frac{1}{3}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} y - 1 \leq x \leq 1 - y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



Ejemplo: Calcular la integral doble

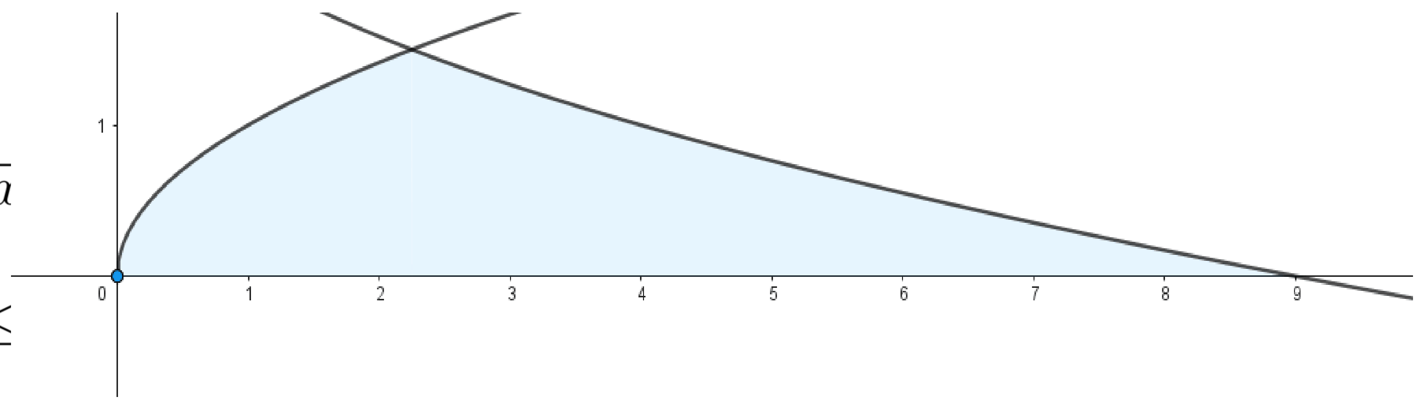
$$\iint_{\mathcal{R}} 1\, dA$$

donde $\mathcal{R}$ es la región del plano acotada por $y = \sqrt{x},\ y = 3 - \sqrt{x},\ y = 0$

Región verticalmente simple

$$\iint_{\mathcal{R}} 1\, dA = \int_0^{\frac{9}{4}} \int_0^{\sqrt{x}} 1\, dy\, dx + \int_{\frac{9}{4}}^{9} \int_0^{3-\sqrt{x}} 1\, dy\, dx = \frac{27}{4}$$

$$\mathcal{R}_1 = \begin{cases} 0 \le x \le \frac{9}{4} \\ 0 \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$$



$$\mathcal{R}_2 = \begin{cases} \frac{9}{4} \le x \le \\ 0 \le y \le 3 - \sqrt{x} \end{cases}$$

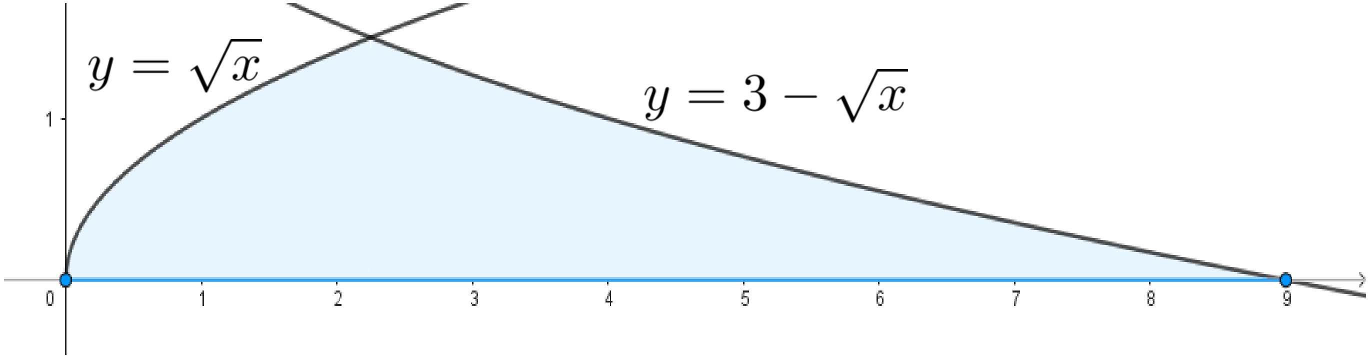
Ejemplo: Calcular la integral doble

$$\iint_{\mathcal{R}} 1\, dA$$

donde $\mathcal{R}$ es la región del plano acotada por $y = \sqrt{x},\ y = 3 - \sqrt{x},\ y = 0$

Región horizontalmente simple $\qquad \mathcal{R} = \begin{cases} y^2 \leq x \leq (3-y)^2 \\ 0 \leq y \leq \frac{3}{2} \end{cases}$

$$\iint_{\mathcal{R}} 1\, dA = \int_0^{\frac{3}{2}} \int_{y^2}^{(3-y)^2} 1\, dx\, dy = \frac{27}{4}$$



Ejemplo: Calcular la integral doble

$$\iint_{\mathcal{R}} x\,dA$$

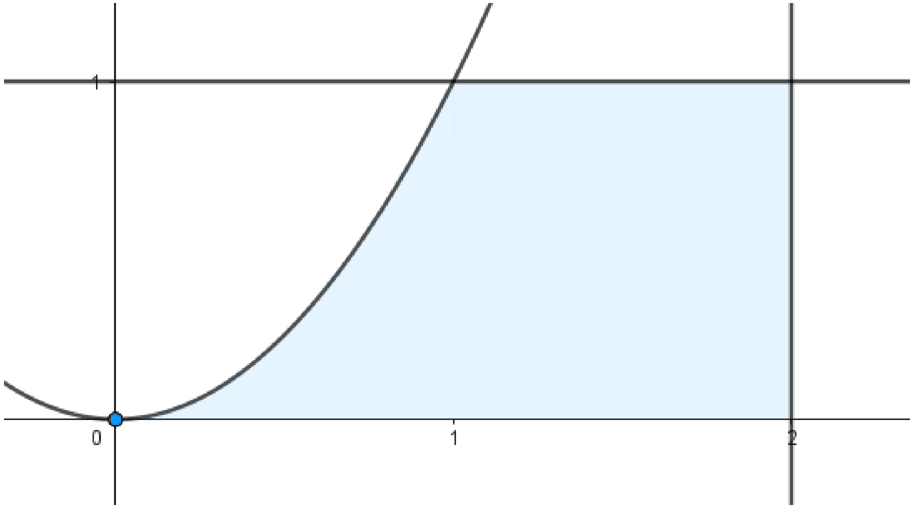
donde $\mathcal{R}$ es la región del plano acotada por $y = x^2,\ y = 0,\ y = 1,\ x = 2$

Región verticalmente simple

$$\iint_{\mathcal{R}} x\,dA = \int_0^1 \int_0^{x^2} x\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^1 x\,dy\,dx = \frac{7}{4}$$

$$\mathcal{R}_1 = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x^2 \end{cases}$$

$$\mathcal{R}_2 = \begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



Ejemplo: Calcular la integral doble

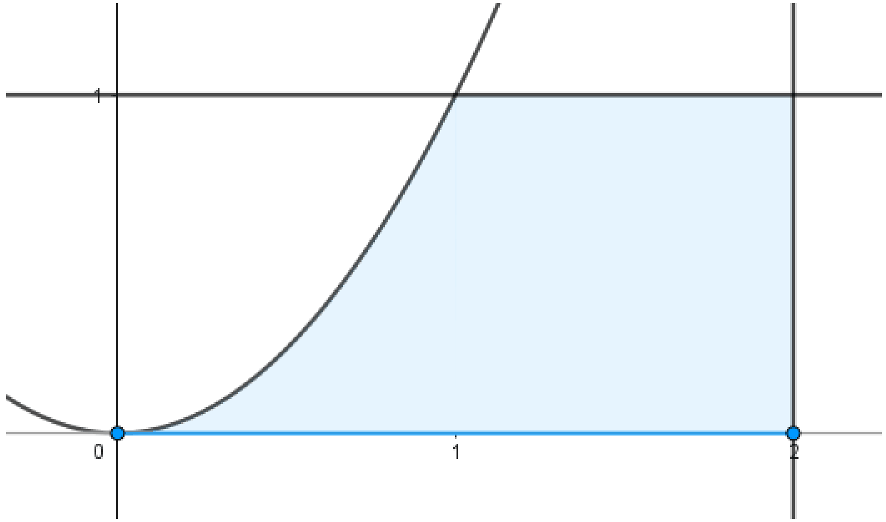
$$\iint_{\mathcal{R}} x\,dA$$

donde $\mathcal{R}$ es la región del plano acotada por $y = x^2,\ y = 0,\ y = 1,\ x = 2$

Región horizontalmente simple

$$\iint_{\mathcal{R}} x\,dA = \int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^2 x\,dx\,dy = \frac{7}{4}$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} \sqrt{y} \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$



Ejemplo: Siendo $\mathcal{R}$ la región del plano acotada por las rectas $y = x$, $y = 2x$, $x = 2$, calcular

$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{2x - y + 5} dA$$

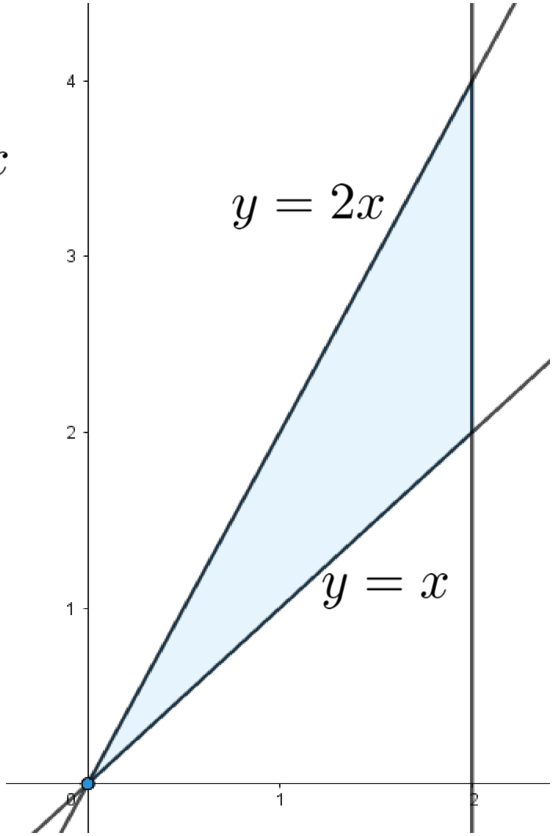
$$\iint_{\mathcal{R}} \frac{1}{2x - y + 5} dA = \int_0^2 \int_x^{2x} \frac{1}{2x - y + 5} dy dx = \int_0^2 -[\ln|2x - y + 5|]_x^{2x} dx$$

$$= \int_0^2 (-\ln 5 + \ln|x + 5|)\, dx = -2\ln 5 + \int_0^2 \ln(x + 5) dx$$

$$= -2\ln 5 + (7\ln 7 - 5\ln 5 - 2) = 7\ln 7 - 7\ln 5 - 2$$

$$= 7\ln\left(\frac{7}{5}\right) - 2$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ x \leq y \leq 2x \end{cases}$$



Ejemplo: Siendo $\mathcal{R}$ la región del plano acotada por las rectas $y = x$, $y = -x$, $y = 1$, calcular

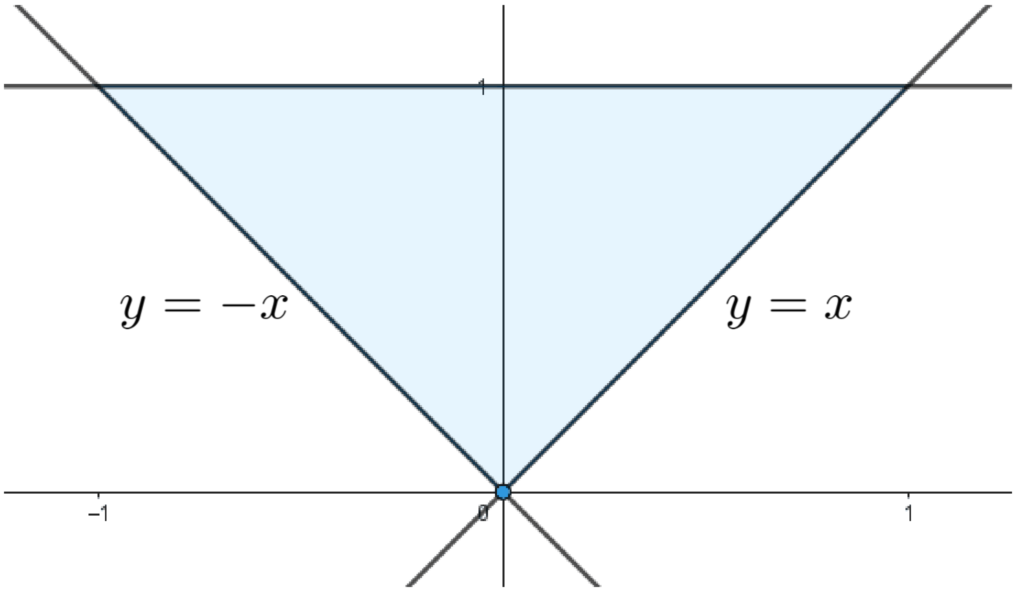
$$\iint_{\mathcal{R}} \cos(\pi(x+y))dA$$

$$\iint_{\mathcal{R}} \cos(\pi(x+y))dA = \int_0^1 \int_{-y}^{y} \cos(\pi(x+y))dxdy = \int_0^1 \frac{1}{\pi}[\operatorname{sen}(\pi(x+y))]_{-y}^{y} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\pi}[\operatorname{sen}(2\pi y) - \operatorname{sen} 0]dy$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-1}{2\pi}\right)[\cos(2\pi y)]_0^1 = 0$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} -y \le x \le y \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$$



Ejemplo: Evaluar la siguiente integral iterada cambiando previamente el orden de integración

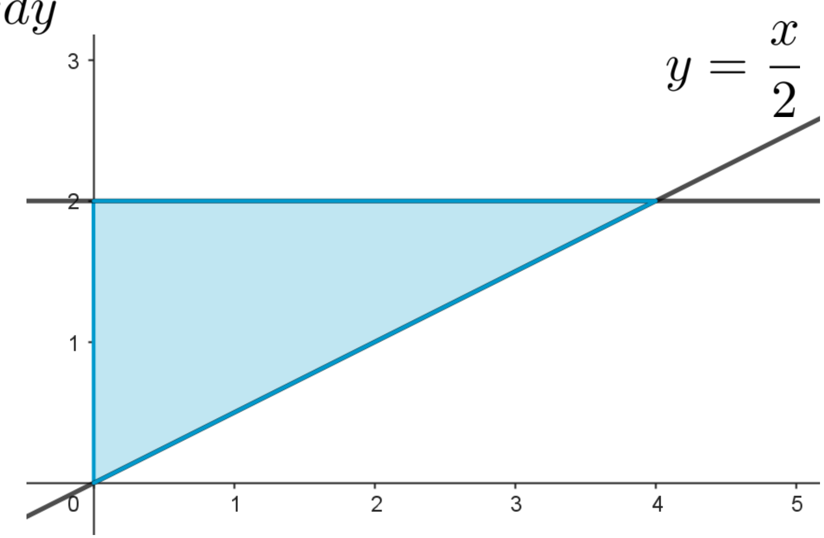
$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 \operatorname{sen}(y^2)\,dy\,dx$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ \dfrac{x}{2} \le y \le 2 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{R} = \begin{cases} 0 \le x \le 2y \\ 0 \le y \le 2 \end{cases}$$

$$\int_0^4 \int_{x/2}^2 \operatorname{sen}(y^2)\,dy\,dx = \int_0^2 \int_0^{2y} \operatorname{sen}(y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^2 \operatorname{sen}(y^2)\,[x]_0^{2y}\,dy \quad = \int_0^2 2y\ \operatorname{sen} y^2\,dy$$

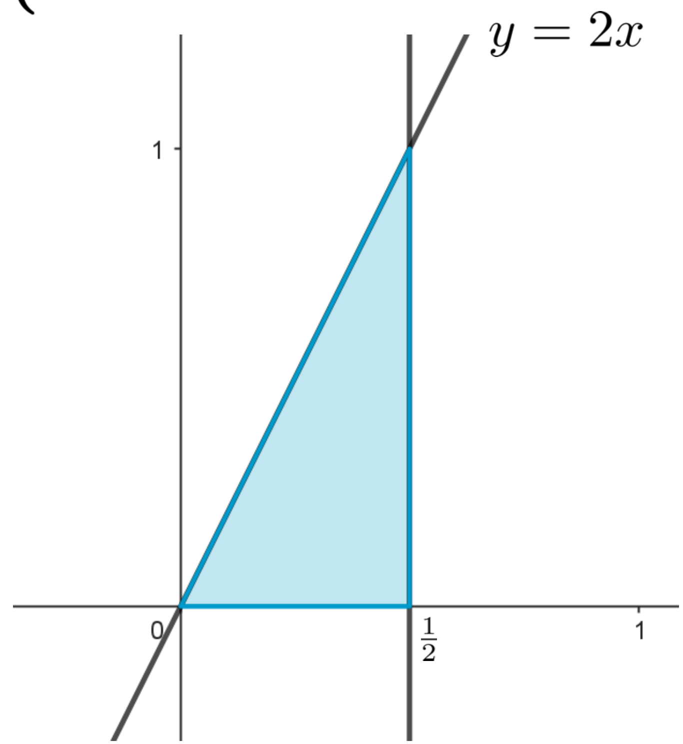
$$= \left[-\cos y^2\right]_0^2 = 1 - \cos 4$$



Ejemplo: Analizar si es conveniente cambiar el orden de integración y calcula la integral iterada

$$\int_0^1 \int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2}\,dx\,dy$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} \dfrac{y}{2} \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ 0 \leq y \leq 2x \end{cases}$$



$$\int_0^1 \int_{y/2}^{1/2} e^{-x^2}\,dx\,dy = \int_0^{1/2} \int_0^{2x} e^{-x^2}\,dy\,dx$$

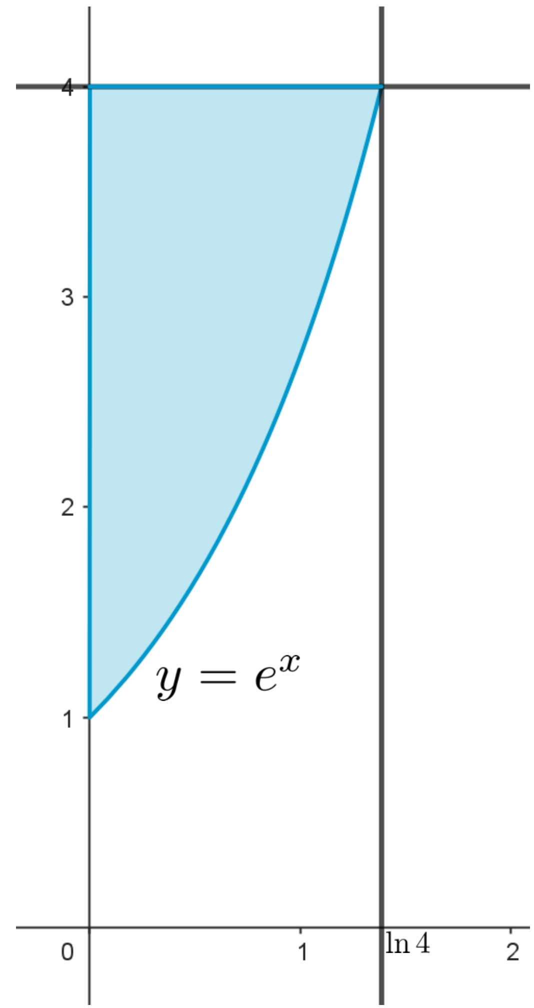
$$= \int_0^{1/2} e^{-x^2}\,[y]_0^{2x}\,dx = \int_0^{1/2} 2xe^{-x^2}\,dx$$

$$= \left[-e^{-x^2}\right]_0^{1/2} = 1 - e^{-1/4}$$

Ejemplo: Analizar si es conveniente cambiar el orden de integración y calcula la integral iterada

$$\int_0^{\ln 4}\int_{e^x}^{4}\frac{1}{\ln y}\,dydx$$

$$\mathcal{R}=\begin{cases} 0\leq x\leq \ln 4 \\ e^x\leq y\leq 4\end{cases} \iff \mathcal{R}=\begin{cases} 0\leq x\leq \ln y \\ 1\leq y\leq 4\end{cases}$$



$$\int_0^{\ln 4}\int_{e^x}^{4}\frac{1}{\ln y}\,dydx = \int_1^{4}\int_0^{\ln y}\frac{1}{\ln y}\,dxdy$$

$$=\int_1^4 \frac{1}{\ln y}\left[x\right]_0^{\ln y} dy \quad = \int_1^4 1dy = 3$$

Ejemplo: Calcular la integral iterada

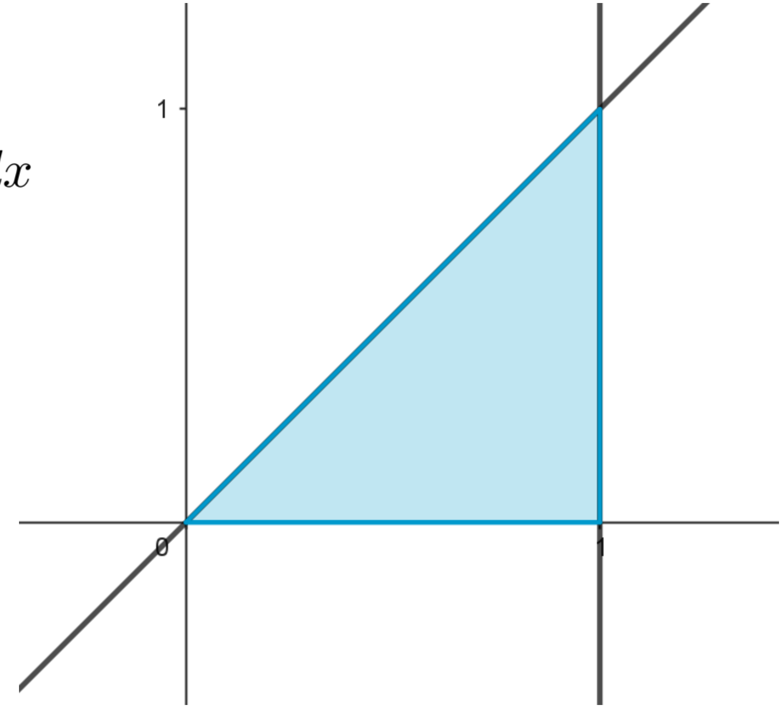
$$\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1-x^2}dxdy$$

$$\mathcal{R} = \begin{cases} y \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

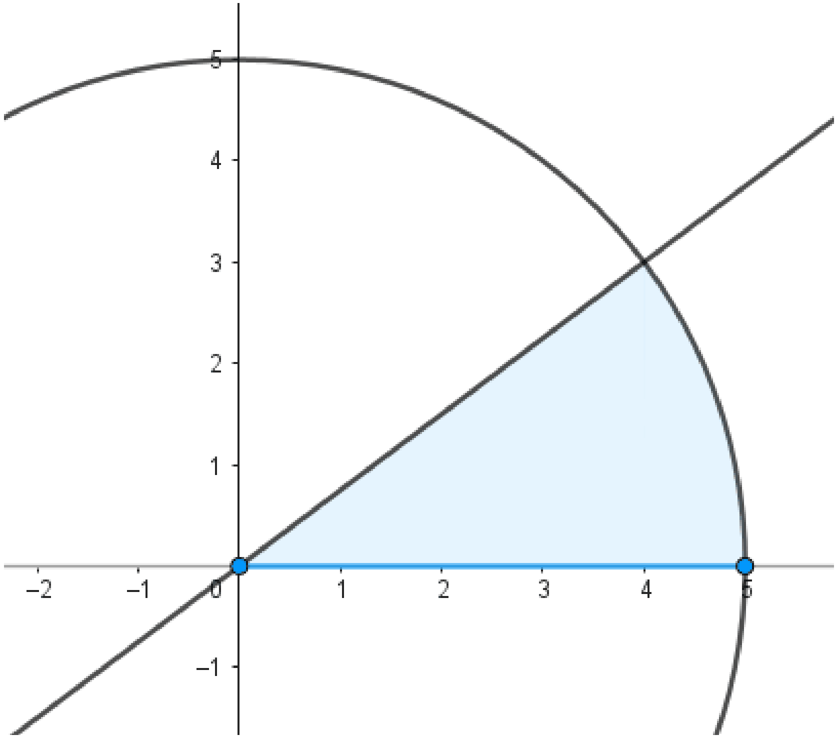
$$\int_0^1 \int_y^1 \sqrt{1-x^2}dxdy \quad = \int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2}dydx$$

$$= \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,[y]_0^x\,dx \; = \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$



Ejemplo: Realizar un esbozo de la región $\mathcal{R}$ y calcular la integral doble $\displaystyle\iint_{\mathcal{R}} x\,dA$ donde $\mathcal{R}$ es el sector circular en el primer cuadrante acotado por $y=\sqrt{25-x^2}$, $3x-4y=0$, $y=0$.



$$\mathcal{R}=\begin{cases}\dfrac{4}{3}y\le x\le\sqrt{25-y^2}\\[2ex] 0\le y\le 3\end{cases}$$

$$\iint_{\mathcal{R}} x dA=\int_0^3\int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} x dx dy$$

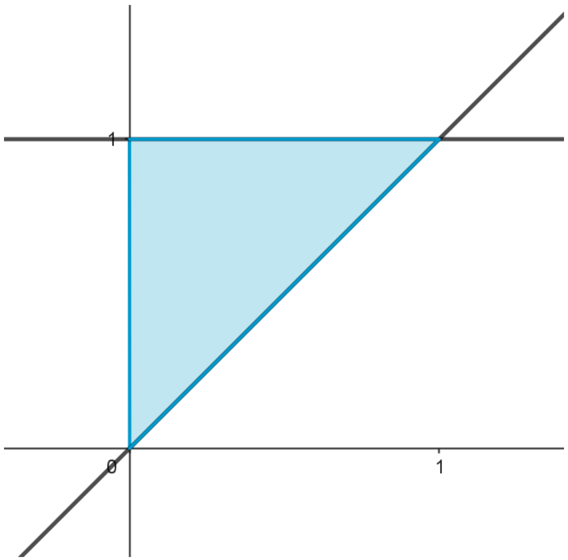
$$=\frac{1}{2}\int_0^3\left[x^2\right]_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}}dy \quad =\frac{1}{2}\int_0^3\left(25-y^2-\frac{16}{9}y^2\right)dy$$

$$=\frac{25}{2}\int_0^3\left(1-\frac{1}{9}y^2\right)dy=\ \frac{25}{2}\left[y-\frac{1}{27}y^3\right]_0^3=25$$

Ejemplo: Calcular el volumen del sólido limitado superiormente por la superficie $z = x\sqrt{1+y^3}$ e inferiormente por el plano $z = 0$, sobre la región plana $\mathcal{R}$ limitada por las gráficas de las ecuaciones $x = 0$, $y = x$, $y = 1$.

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq y \\ 0 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

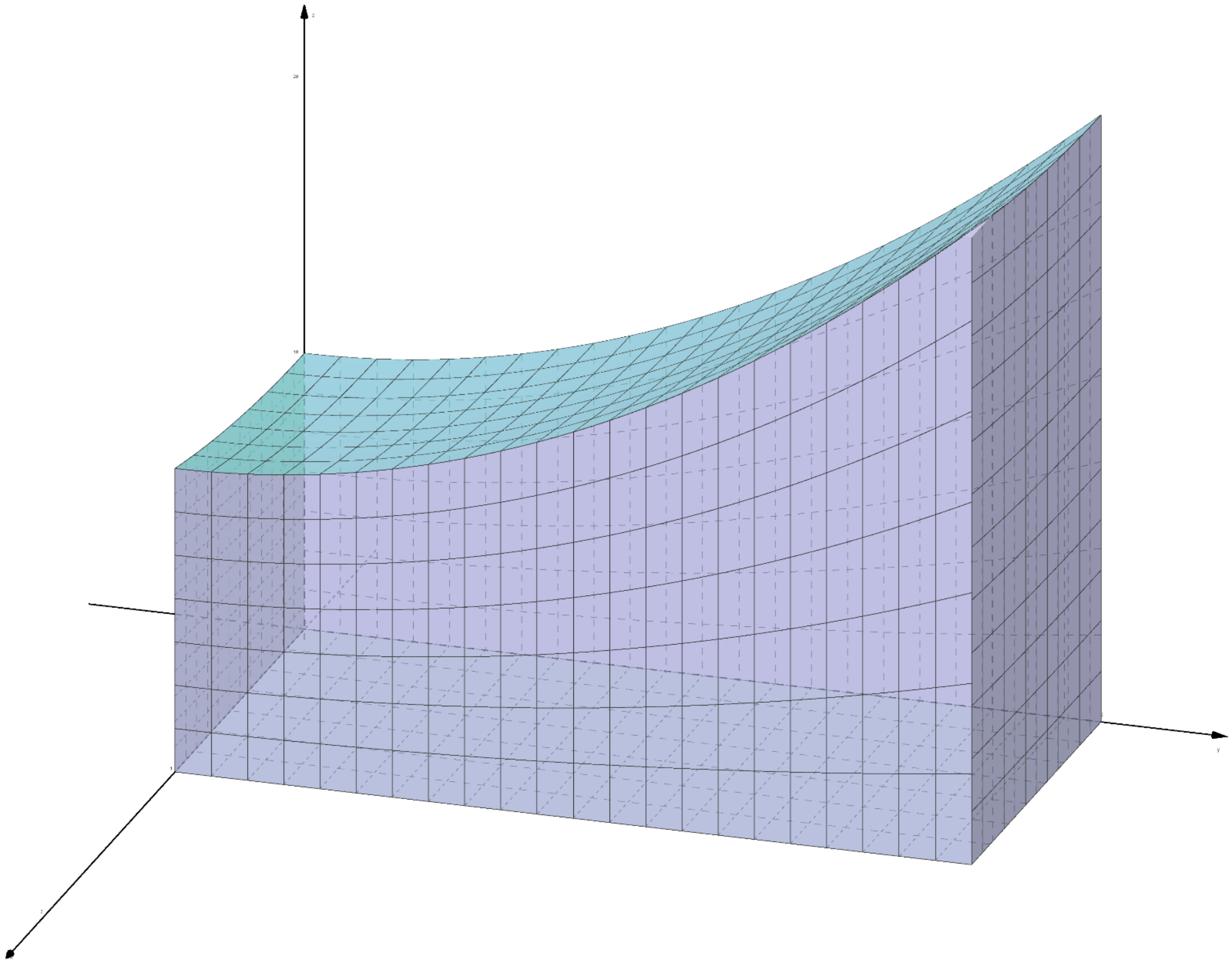
$$V = \iint_{\mathcal{R}} x\sqrt{1+y^3}dA \quad = \int_0^1 \int_0^y x\sqrt{1+y^3}dxdy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^y \sqrt{1+y^3}dy$$



$$= \int_0^1 \frac{y^2}{2}\sqrt{1+y^3}dy \quad = \frac{1}{6}\int_0^1 3y^2\sqrt{1+y^3}dy$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{\left(1+y^3\right)^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 \quad = \frac{1}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$$

Ejemplo: Determinar el volumen de la región acotada arriba por el paraboloide elíptico $z = 10 + x^2 + 3y^2$ y abajo por el rectángulo $\mathcal{R} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.



Ejemplo: Determinar el volumen de la región acotada arriba por el paraboloide elíptico $z = 10 + x^2 + 3y^2$ y abajo por el rectángulo $\mathcal{R} = \{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 2\}$.

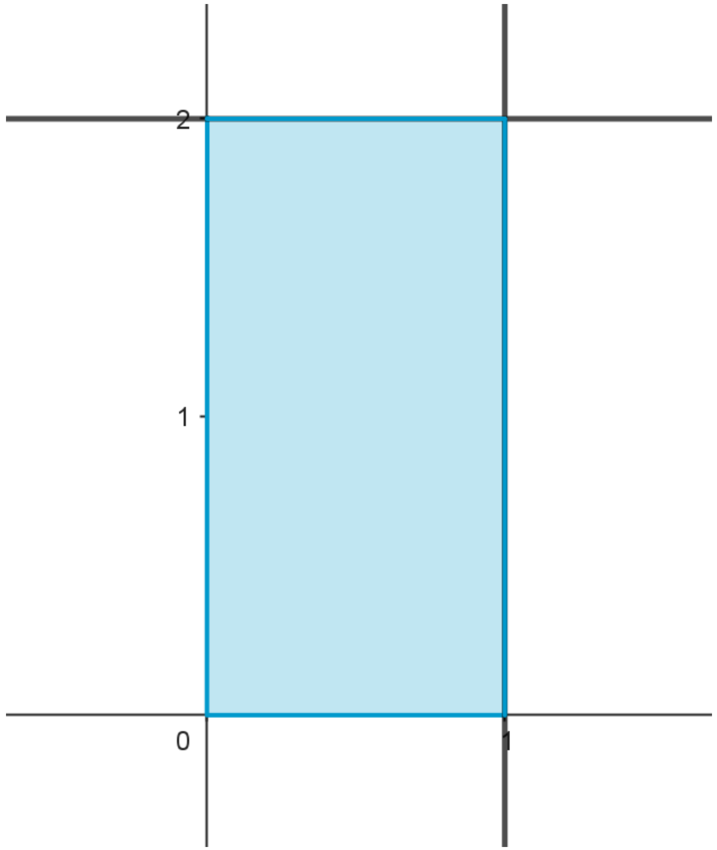
$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$V = \iint_{\mathcal{R}} (10 + x^2 + 3y^2)dA$$

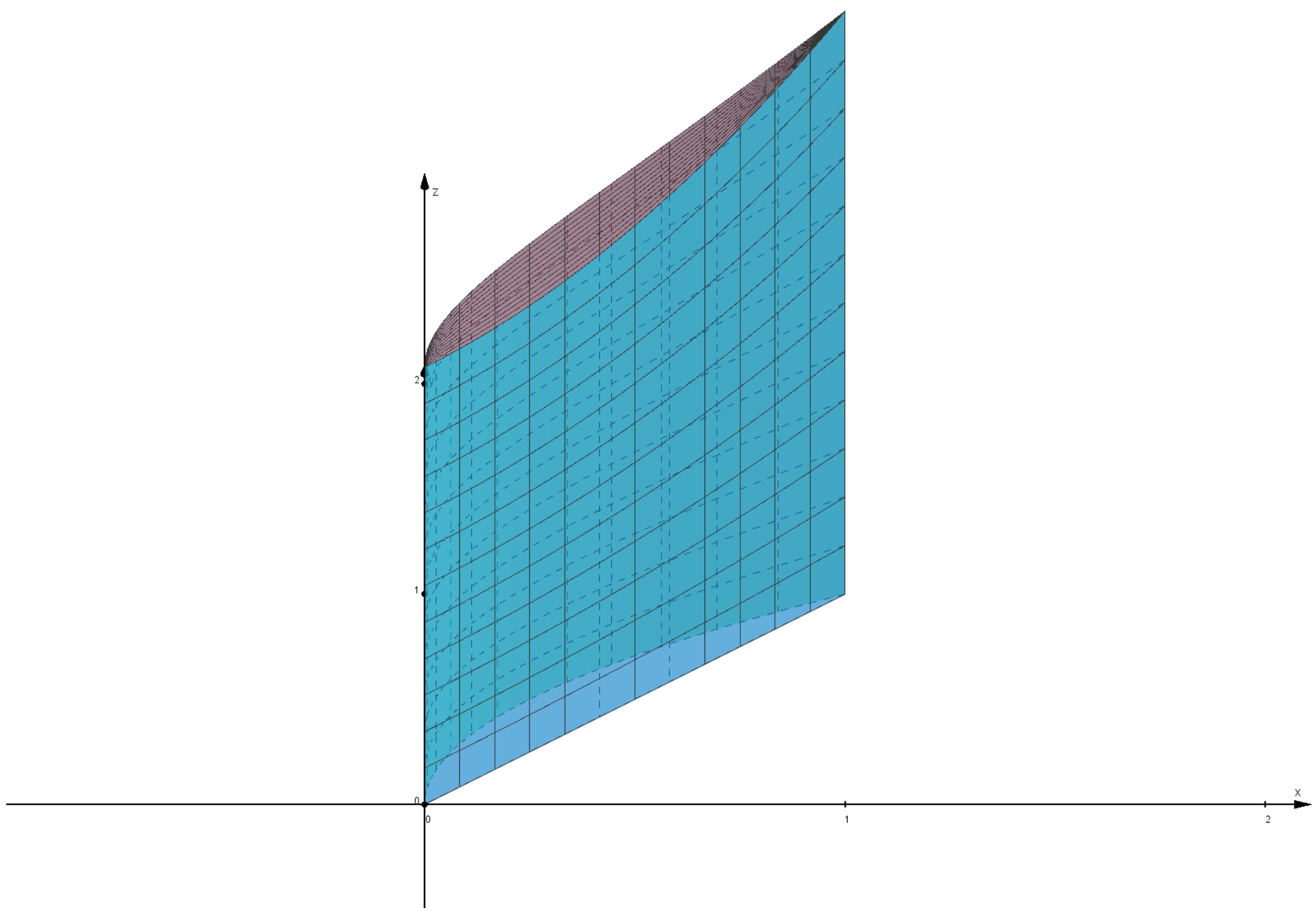
$$= \int_0^1 \int_0^2 (10 + x^2 + 3y^2)dydx$$

$$= \int_0^1 \left[10y + x^2y + y^3\right]_0^2 dx$$

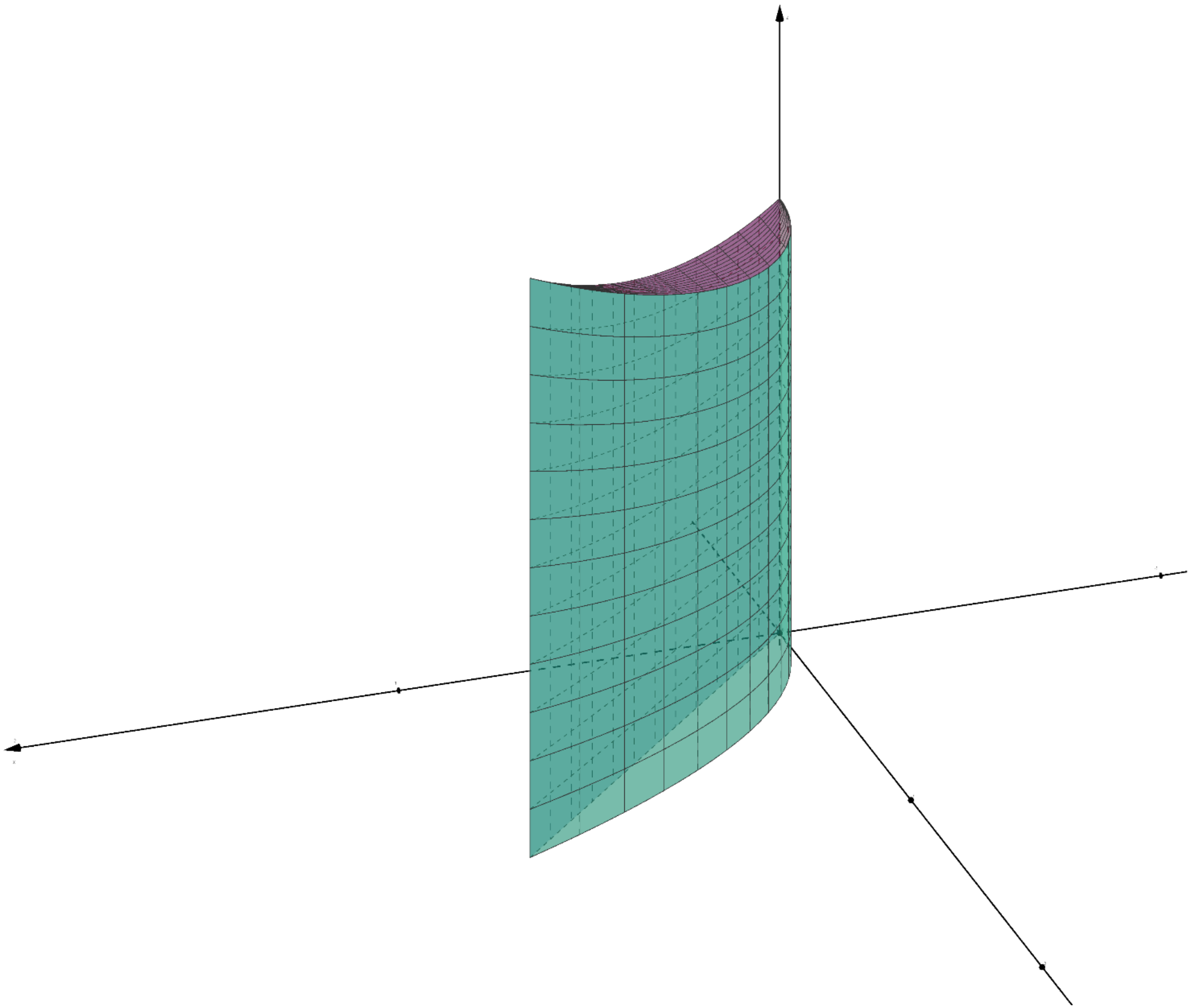
$$= \int_0^1 \left(20 + 2x^2 + 8\right) dx = \frac{86}{3}$$



Ejemplo: Calcular el volumen de la región del espacio limitada superiormente por la superficie $z = xy + 3$ e inferiormente por el plano $z = 0$, sobre la región plana $\mathcal{R}$ acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x$ e $y = \sqrt{x}$.



Ejemplo: Calcular el volumen de la región del espacio limitada superiormente por la superficie $z = xy + 3$ e inferiormente por el plano $z = 0$, sobre la región plana $\mathcal{R}$ acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x$ e $y = \sqrt{x}$.



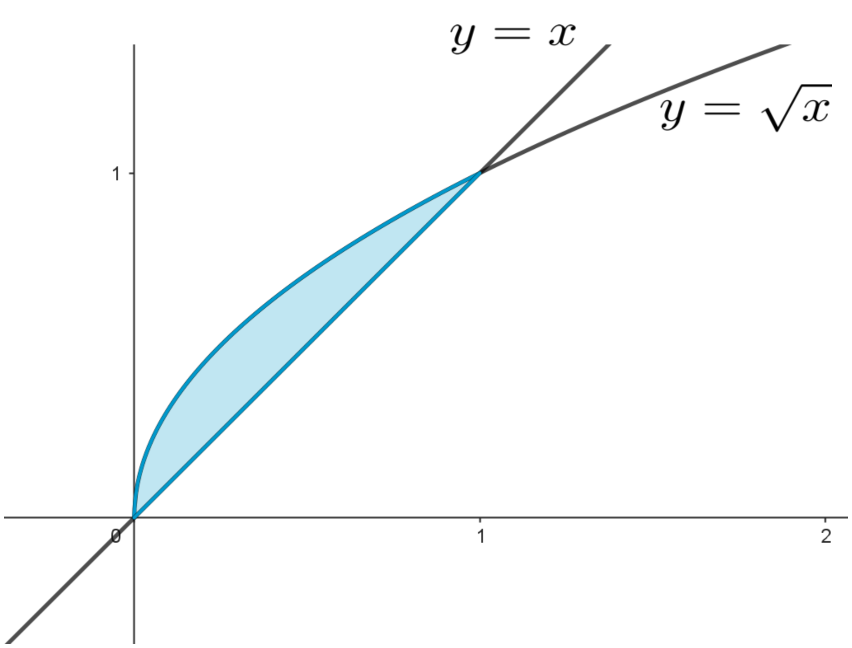
Ejemplo: Calcular el volumen de la región del espacio limitada superiormente por la superficie $z = xy + 3$ e inferiormente por el plano $z = 0$, sobre la región plana $\mathcal{R}$ acotada por las gráficas de las ecuaciones $y = x$ e $y = \sqrt{x}$.

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ x \le y \le \sqrt{x} \end{cases}$$

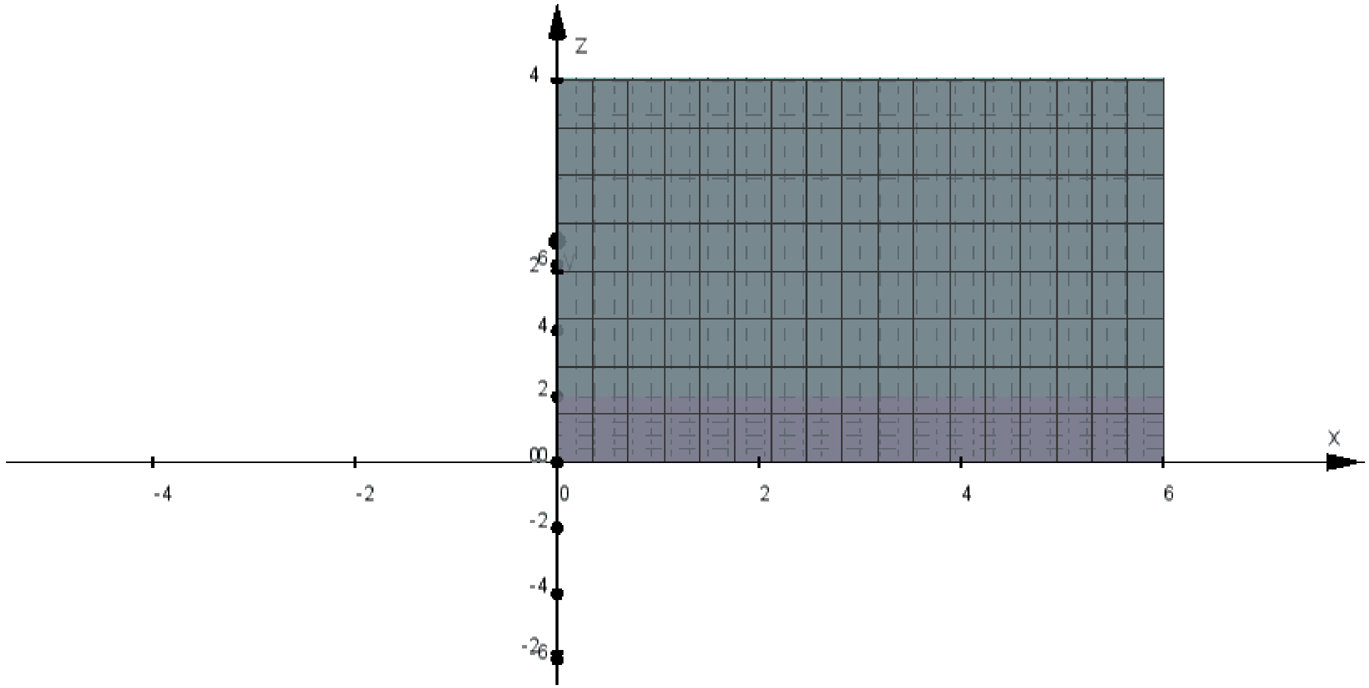
$$V = \iint_{\mathcal{R}} (xy + 3)\,dA = \int_0^1 \int_x^{\sqrt{x}} (xy + 3)\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1 \left[x\frac{y^2}{2} + 3y \right]_x^{\sqrt{x}} dx$$

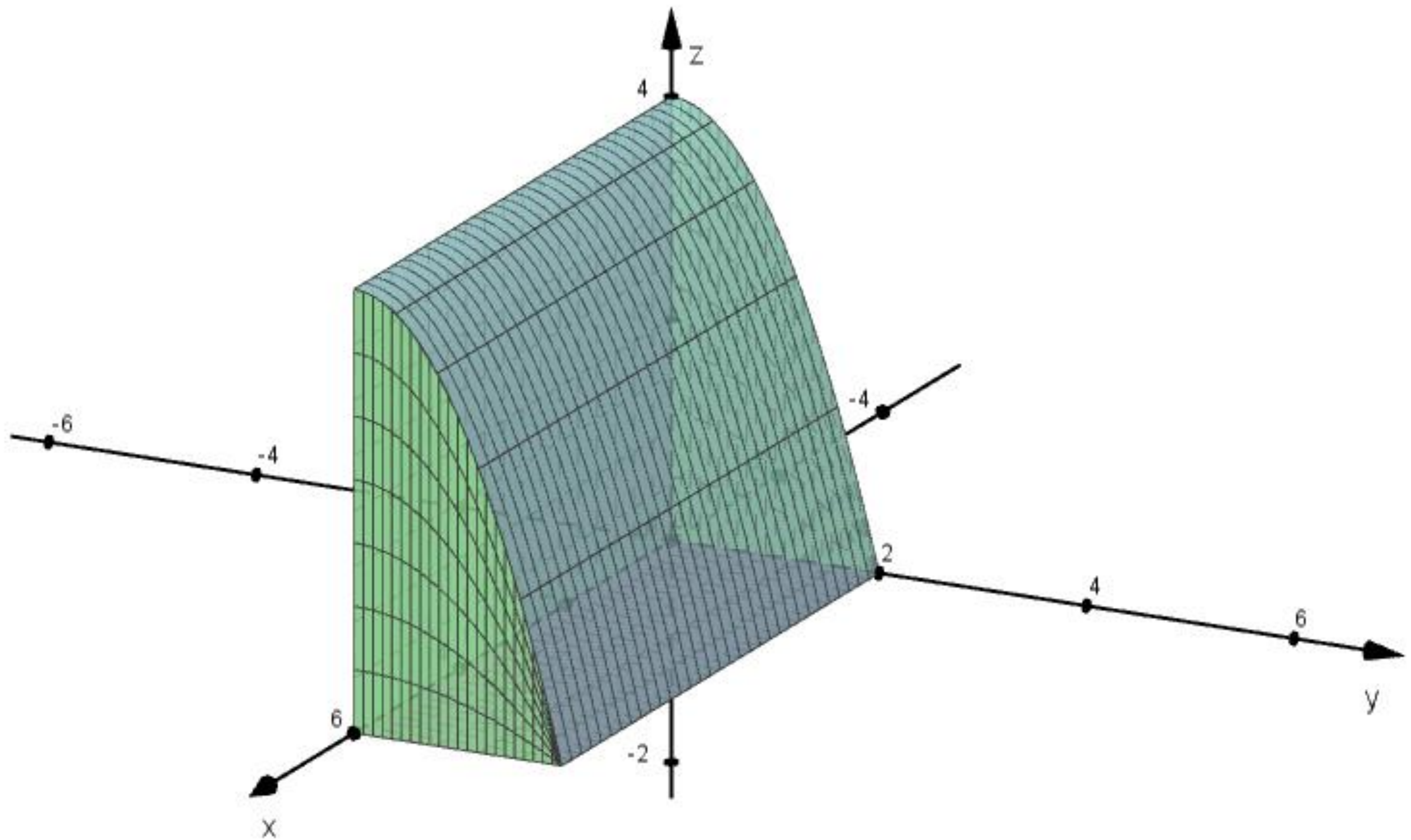
$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + 3\sqrt{x} - \frac{x^3}{2} - 3x \right] dx = \frac{13}{24}$$



Ejemplo: Calcular el volumen de la región del primer octante acotada por la superficie $z = 4 - y^2$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x = 6$.



Ejemplo: Calcular el volumen de la región del primer octante acotada por la superficie $z = 4 - y^2$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x = 6$.



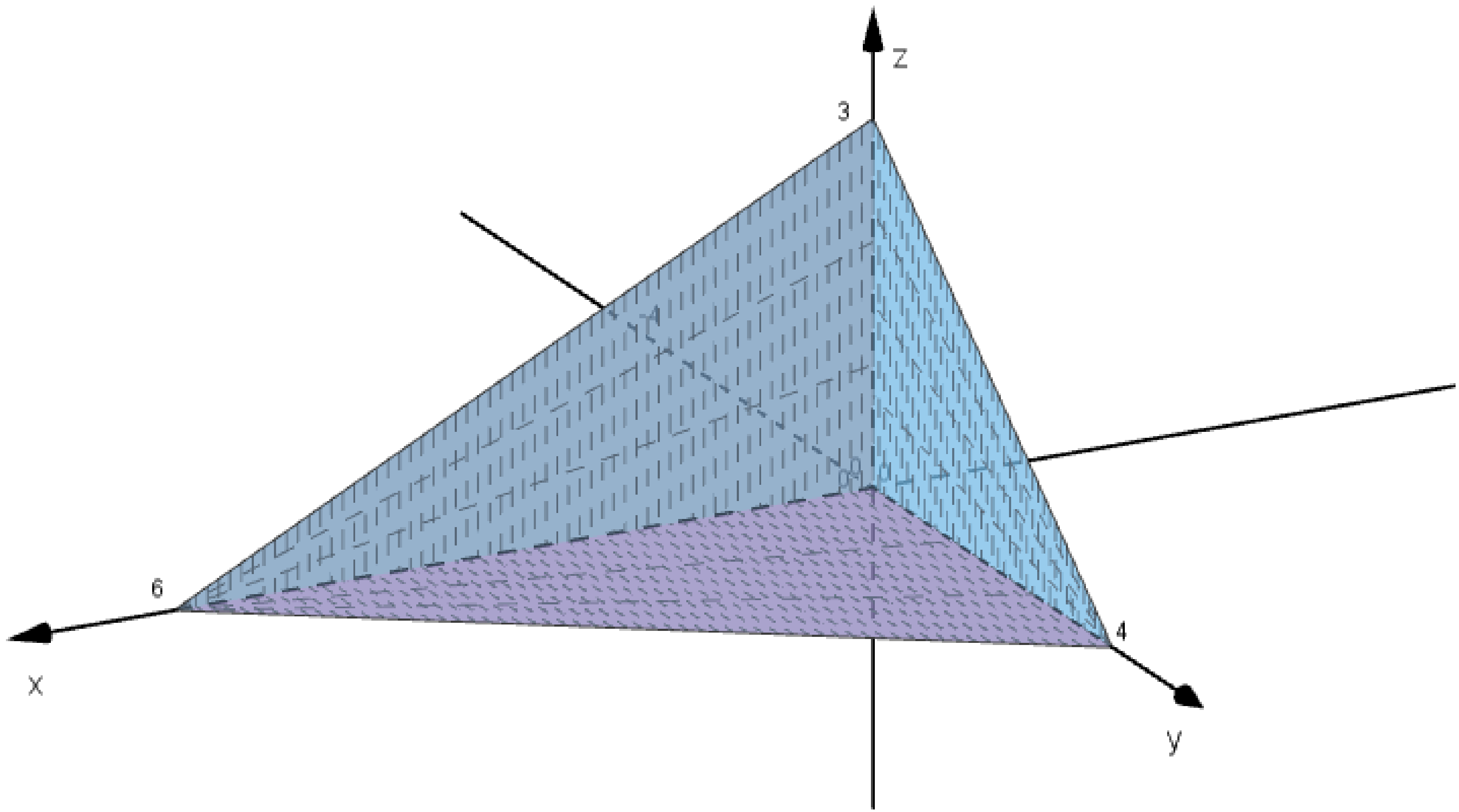
Ejemplo: Calcular el volumen de la región del primer octante acotada por la superficie $z = 4 - y^2$ y los planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ y $x = 6$.

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{cases}$$

$$V = \iint_{\mathcal{R}} (4 - y^2) dA = \int_0^6 \int_0^2 (4 - y^2) dy dx$$

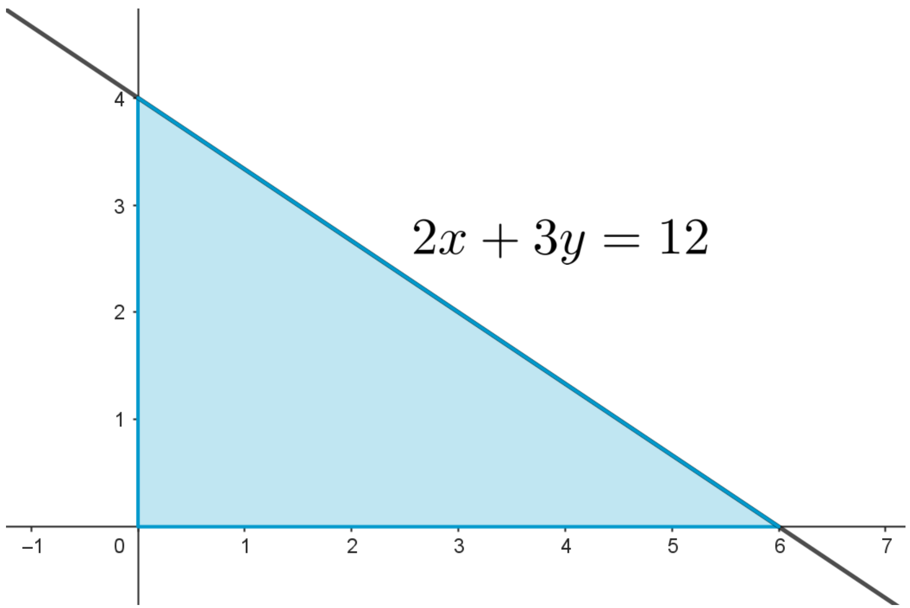
$$= \int_0^6 \left[4y - \frac{y^3}{3} \right]_0^2 dx = \int_0^6 \frac{16}{3} dx = 32$$

Ejemplo: Usar una integral doble para calcular el volumen del sólido del primer octante acotado por el plano $2x + 3y + 4z = 12$ y los planos coordenados $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$.



Ejemplo: Usar una integral doble para calcular el volumen del sólido del primer octante acotado por el plano $2x + 3y + 4z = 12$ y los planos coordenados $z = 0$, $x = 0$, $y = 0$.

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq 6 \\ 0 \leq y \leq 4 - \dfrac{2}{3}x \end{cases}$$

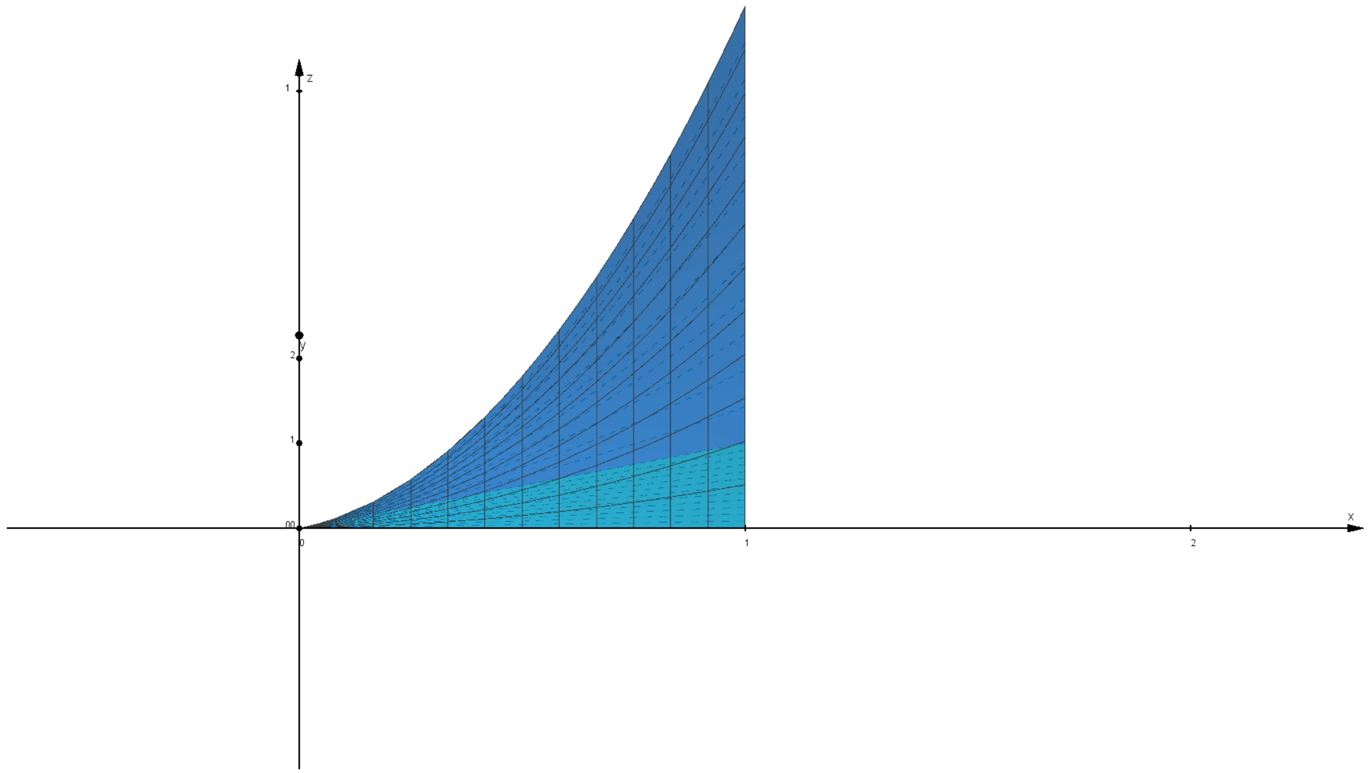


$$V = \iint_{\mathcal{R}} f(x, y)dA =$$

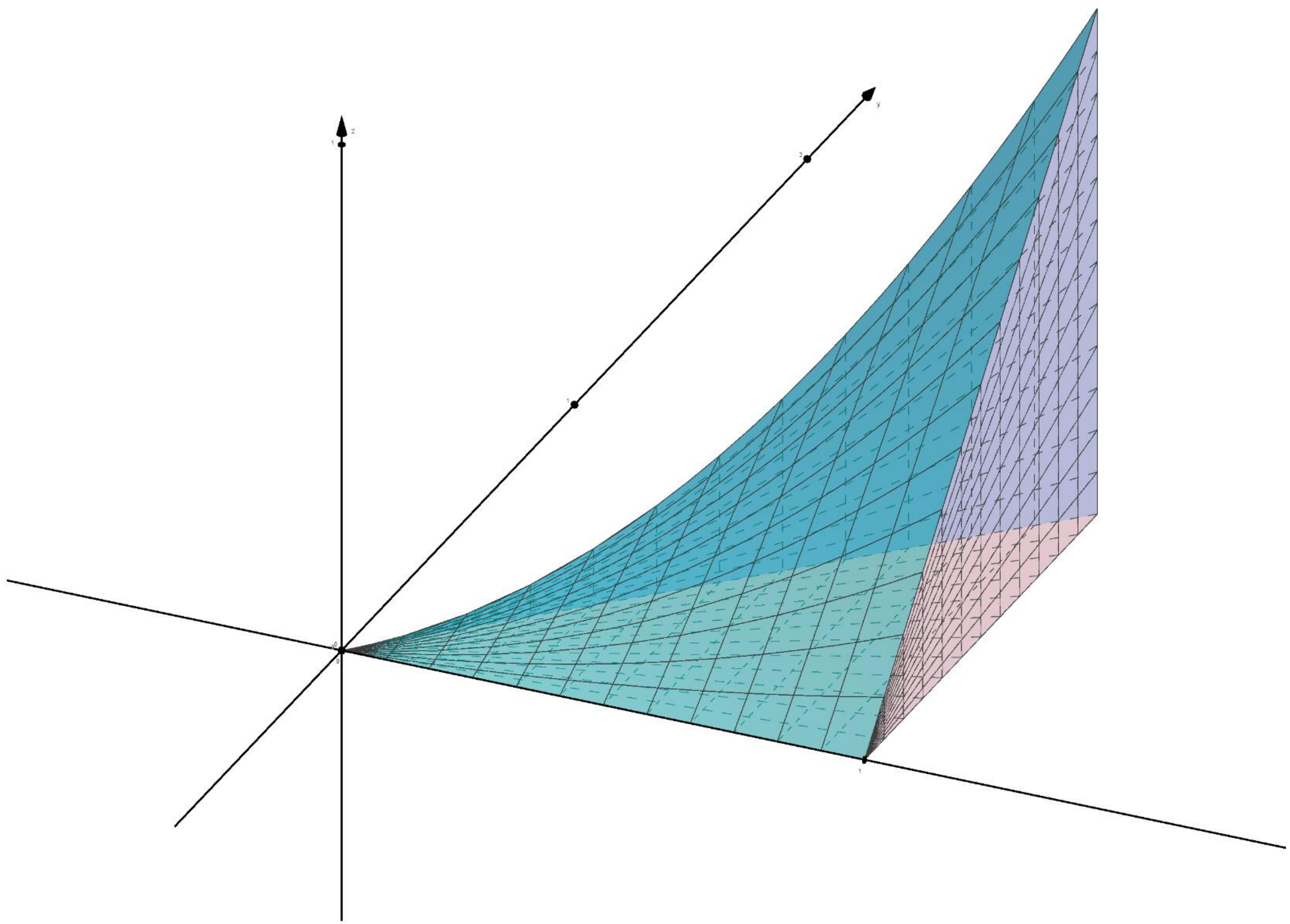
$$= \int_0^6 \int_0^{4-\frac{2}{3}x} \left(3 - \frac{x}{2} - \frac{3}{4}y\right) dydx \ = \int_0^6 \left[3y - \frac{x}{2}y - \frac{3}{8}y^2\right]_0^{4-\frac{2}{3}x} dx$$

$$= \frac{1}{6}\int_0^6 (6-x)^2 dx = \left[\frac{-(6-x)^3}{18}\right]_0^6 = 12$$

Ejemplo: Calcular el volumen del sólido del primer octante acotado por las gráficas de las ecuaciones $z = xy,\ z = 0,\ y = x,\ x = 1.$

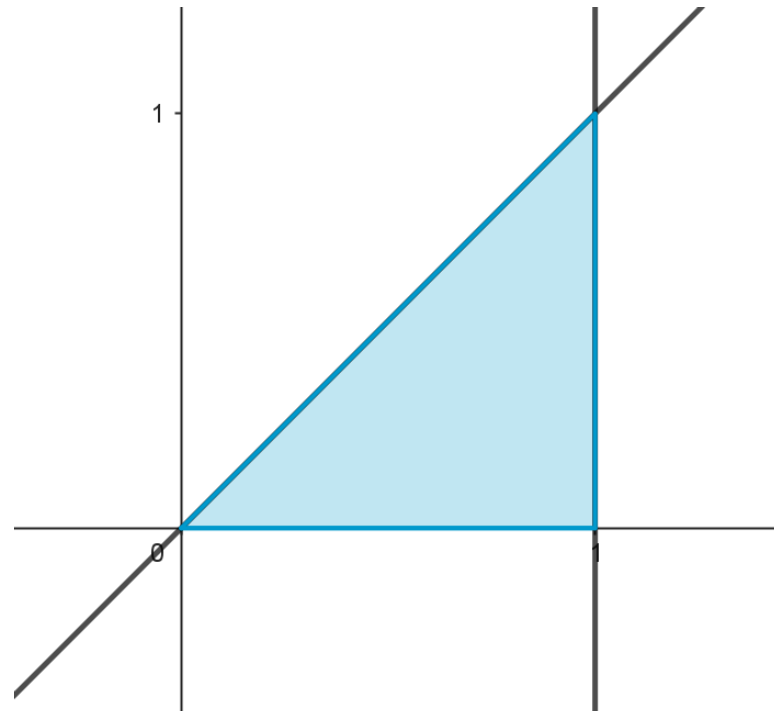


Ejemplo: Calcular el volumen del sólido del primer octante acotado por las gráficas de las ecuaciones $z = xy,\ z = 0,\ y = x,\ x = 1$.



Ejemplo: Calcular el volumen del sólido del primer octante acotado por las gráficas de las ecuaciones $z = xy$, $z = 0$, $y = x$, $x = 1$.

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

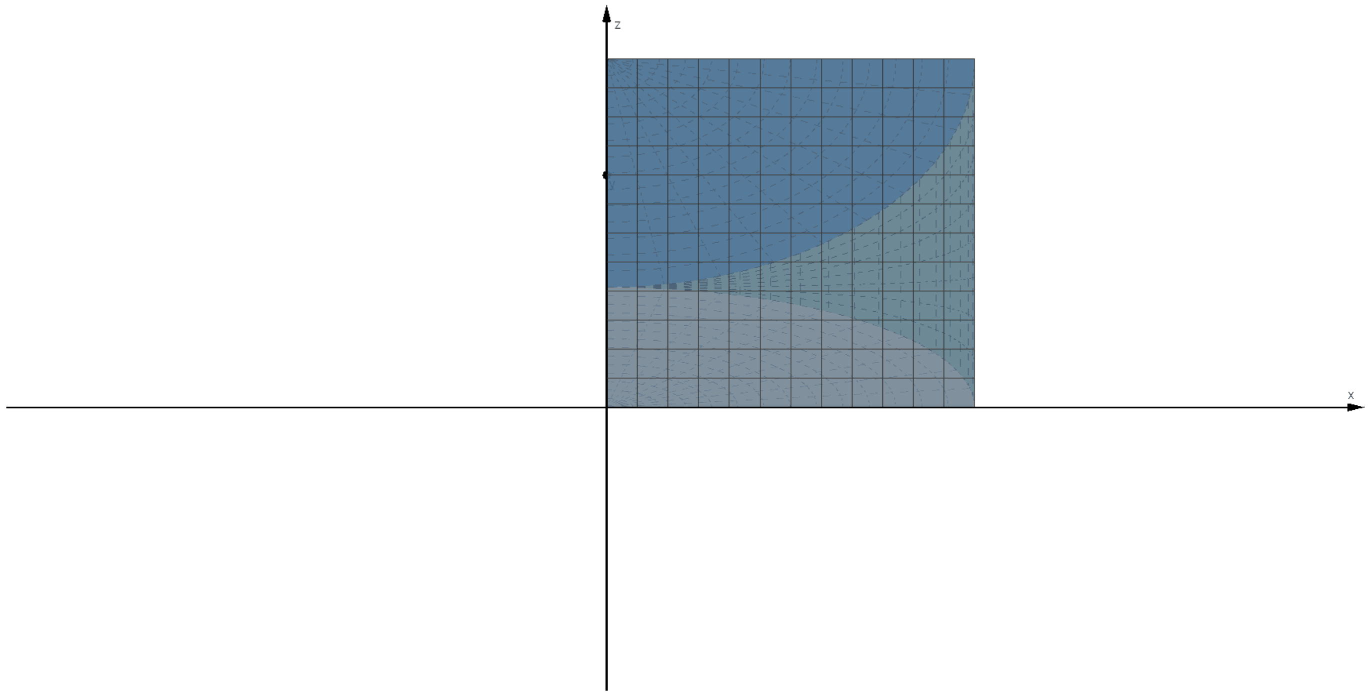


$$V = \iint_{\mathcal{R}} f(x,y)dA = \int_0^1 \int_0^x xydydx =$$

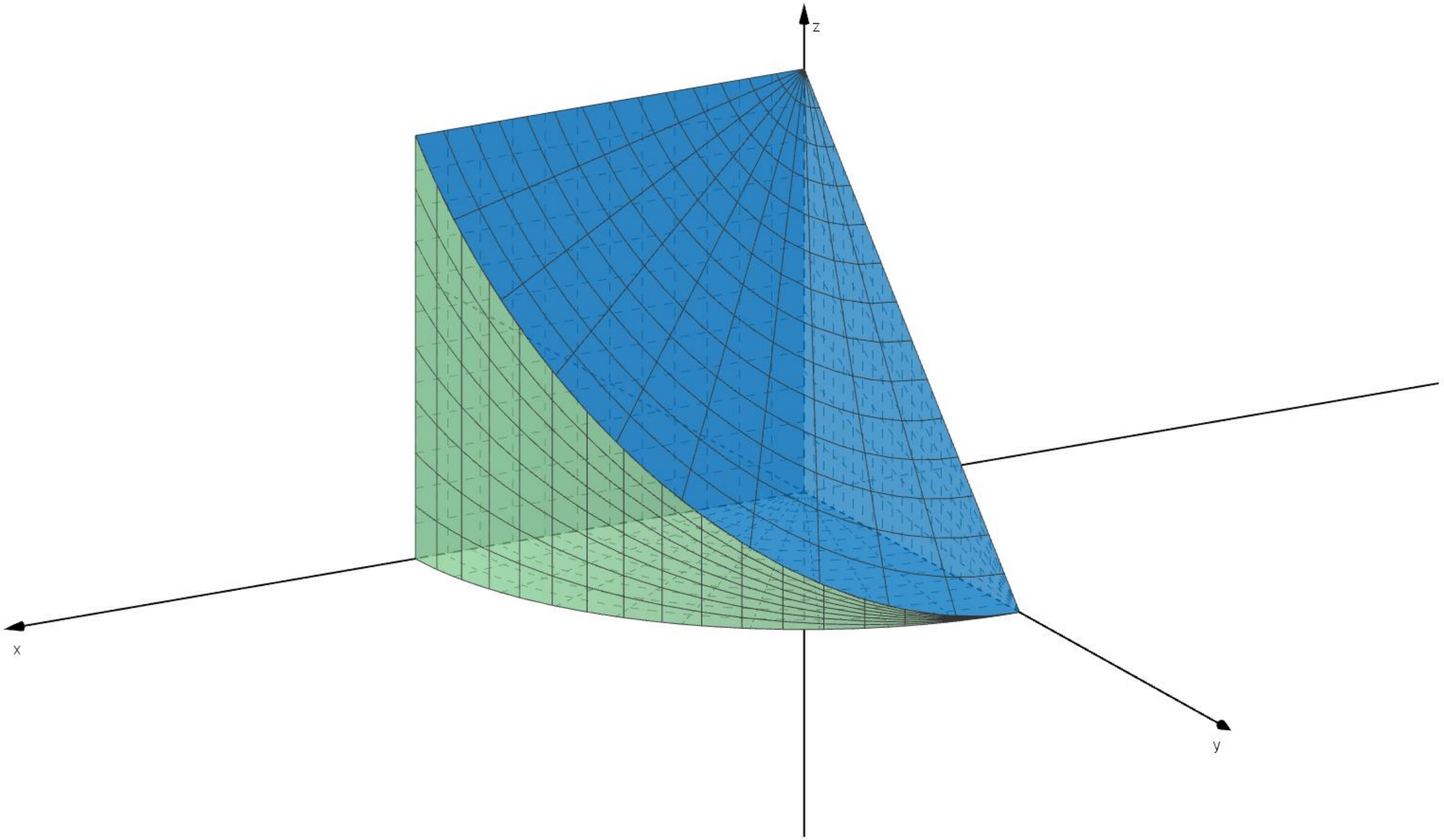
$$= \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_0^x dx =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{2}\right] dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

Ejemplo: Usando integrales dobles, calcular el volumen de la región del espacio que, en el primer octante, delimitan los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z + y = 2$.



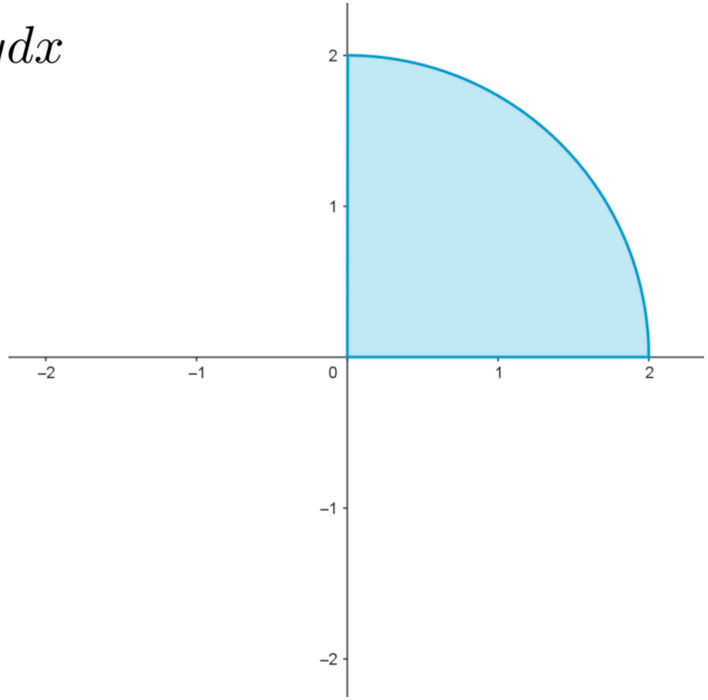
Ejemplo: Usando integrales dobles, calcular el volumen de la región del espacio que, en el primer octante, delimitan los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z + y = 2$.



Ejemplo: Usando integrales dobles, calcular el volumen de la región del espacio que, en el primer octante, delimitan los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z + y = 2$.

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$

$$V = \iint_{\mathcal{R}} (2 - y) dA \quad = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (2 - y)\, dy dx$$



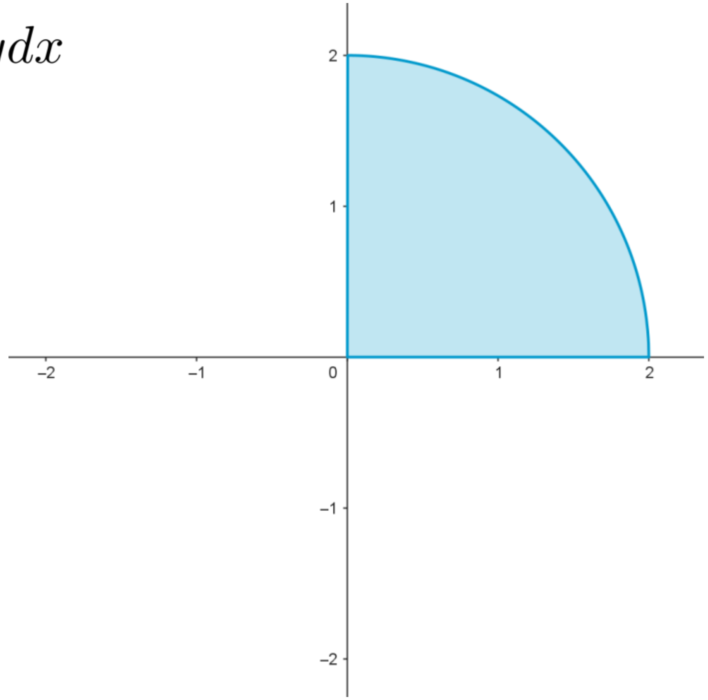
$$= \int_0^2 \left(2\sqrt{4 - x^2} - \frac{4 - x^2}{2} \right) dx$$

$$= 2 \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx - \frac{16}{3} =$$

Ejemplo: Usando integrales dobles, calcular el volumen de la región del espacio que, en el primer octante, delimitan los planos coordenados $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, el cilindro $x^2 + y^2 = 4$ y el plano $z + y = 2$.

$$\mathcal{R} = \begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \end{cases}$$

$$V = \iint_{\mathcal{R}} (2 - y) dA \quad = \int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (2 - y)\, dy dx$$

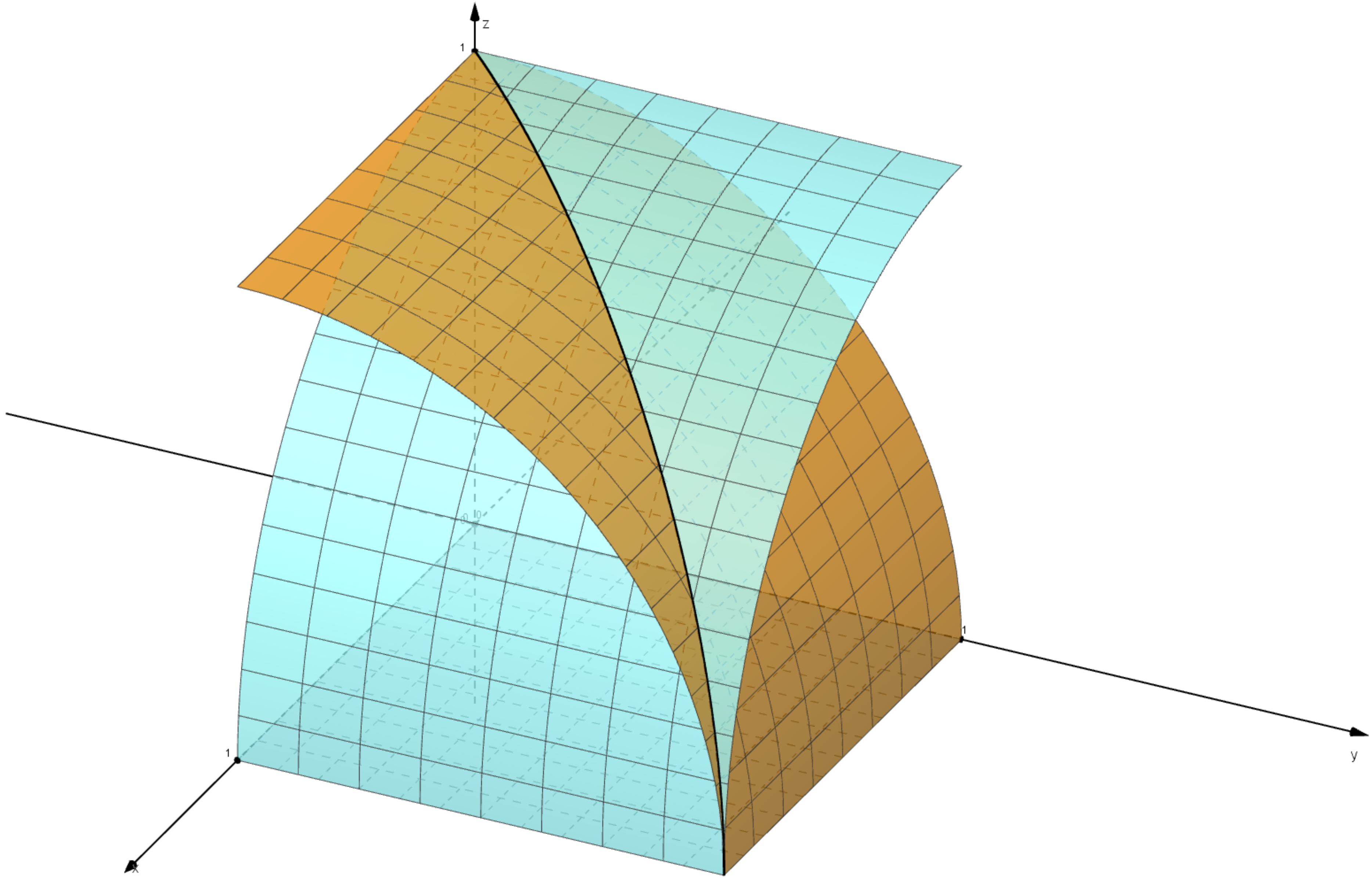


$$= \int_0^2 \left(2\sqrt{4 - x^2} - \frac{4 - x^2}{2} \right) dx$$

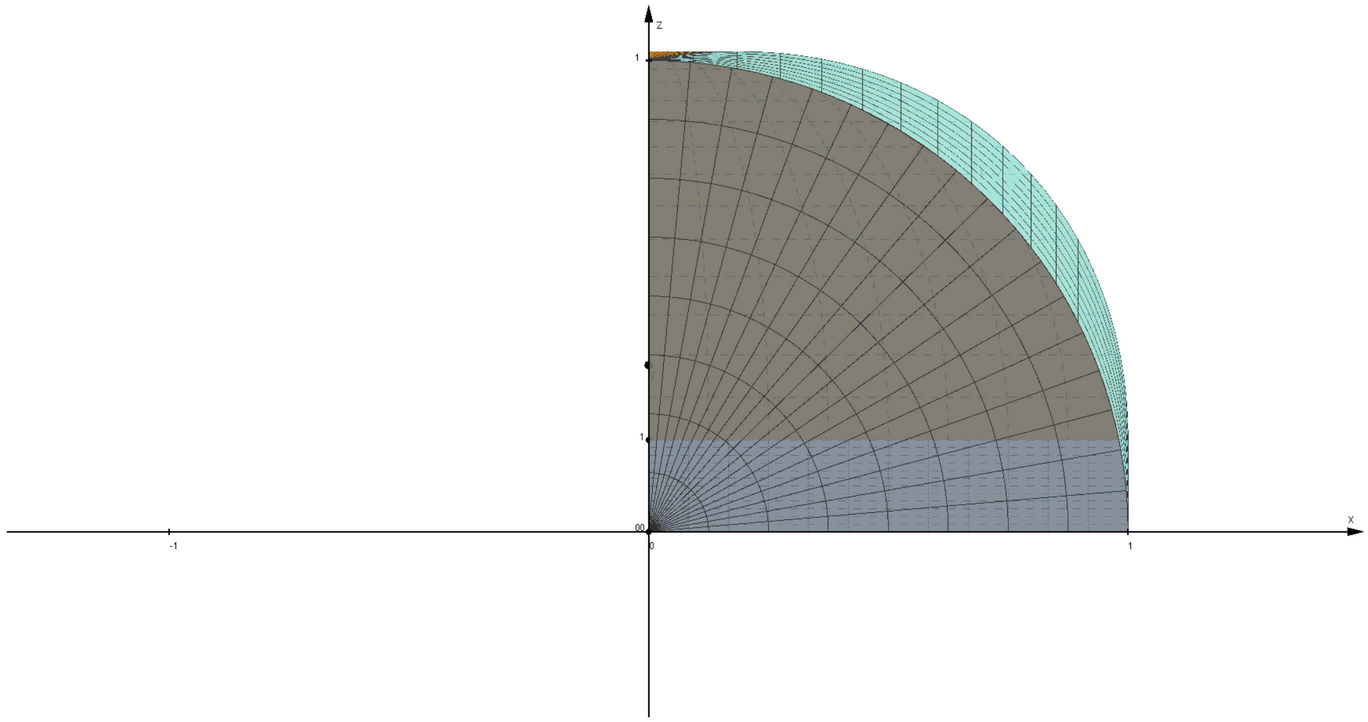
$$= \underbrace{2 \int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx}_{\text{Área de un cuarto de círculo de radio 2}} - \frac{16}{3} = 2\pi - \frac{16}{3}$$

Área de un cuarto de círculo de radio 2

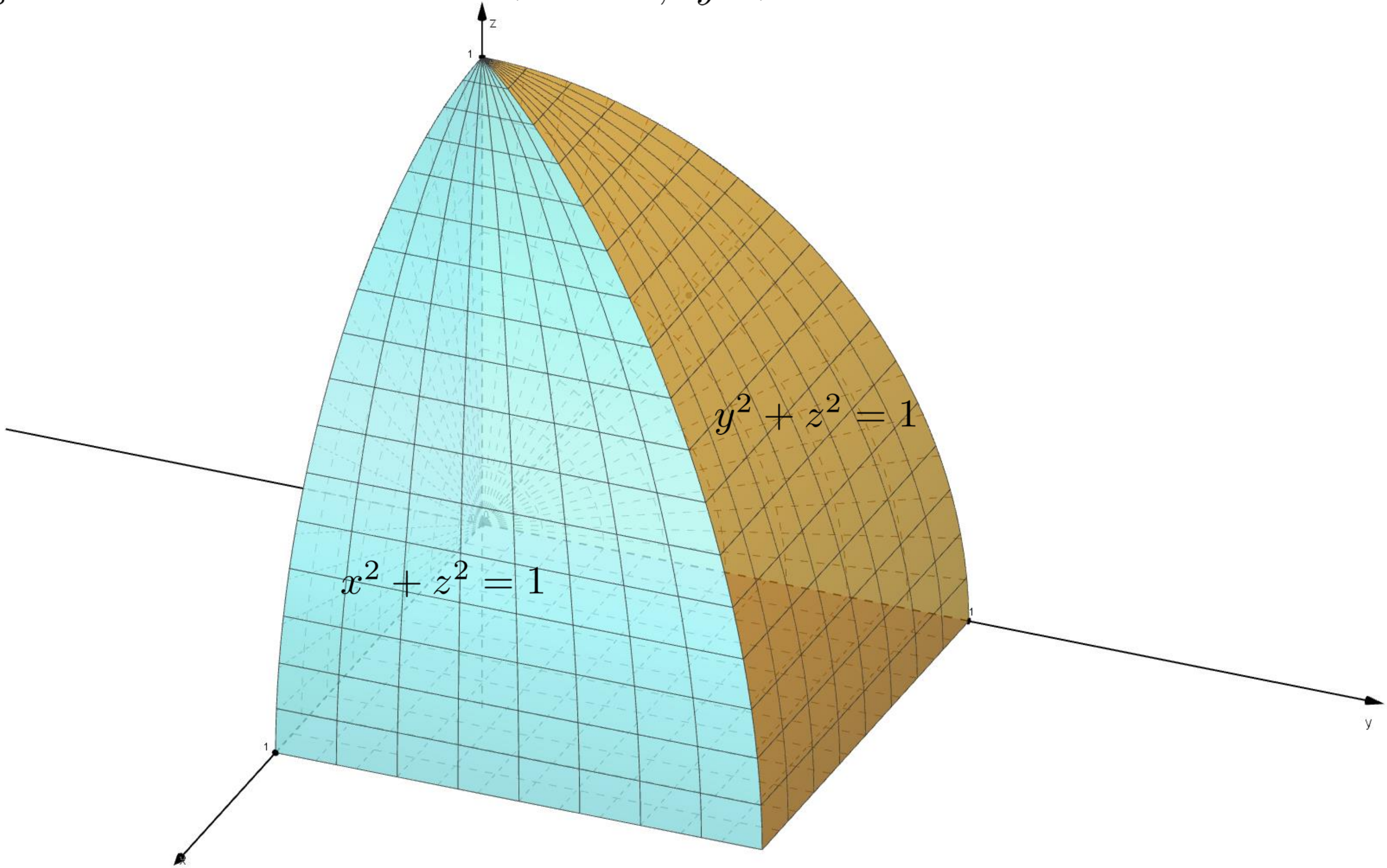
Ejemplo: Calcular el volumen del sólido del primer octante acotado por las gráficas de las ecuaciones $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$.



Ejemplo: Calcular el volumen del sólido del primer octante acotado por las gráficas de las ecuaciones $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$.



Ejemplo: Calcular el volumen del sólido del primer octante acotado por las gráficas de las ecuaciones $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$.



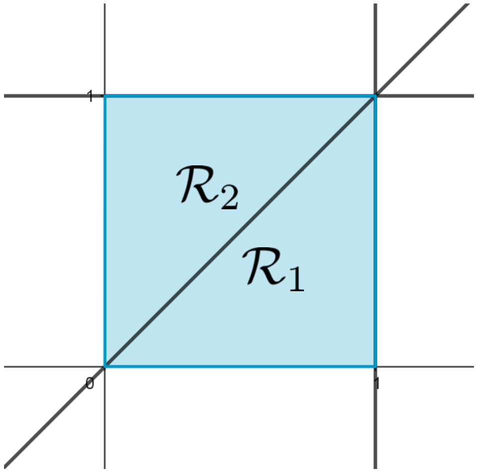
Ejemplo: Calcular el volumen del sólido del primer octante acotado por las gráficas de las ecuaciones $x^2+z^2=1$, $y^2+z^2=1$.

Intersecciones

$$\left.\begin{array}{l} x^2+z^2=1 \\ y^2+z^2=1 \end{array}\right\} \quad x^2-y^2=0 \Longrightarrow y=\pm x \xRightarrow{\text{primer octante}} y=x$$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+z^2=1 \\ z=0 \end{array}\right\} \quad x=\pm 1 \xRightarrow{\text{primer octante}} x=1$$

$$\left.\begin{array}{l} y^2+z^2=1 \\ z=0 \end{array}\right\} \quad y=\pm 1 \xRightarrow{\text{primer octante}} y=1$$



$$\mathcal{R}_1=\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ 0\le y\le x \end{cases} \qquad \mathcal{R}_2=\begin{cases} 0\le x\le 1 \\ x\le y\le 1 \end{cases}$$

Ejemplo: Calcular el volumen del sólido del primer octante acotado por las gráficas de las ecuaciones $x^2 + z^2 = 1$, $y^2 + z^2 = 1$.

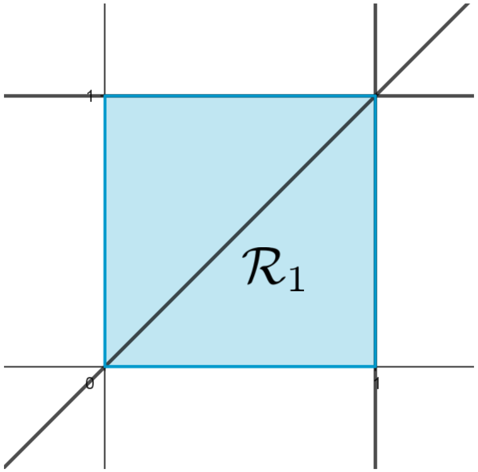
$$\mathcal{R}_1 = \begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq x \end{cases}$$

Simetría

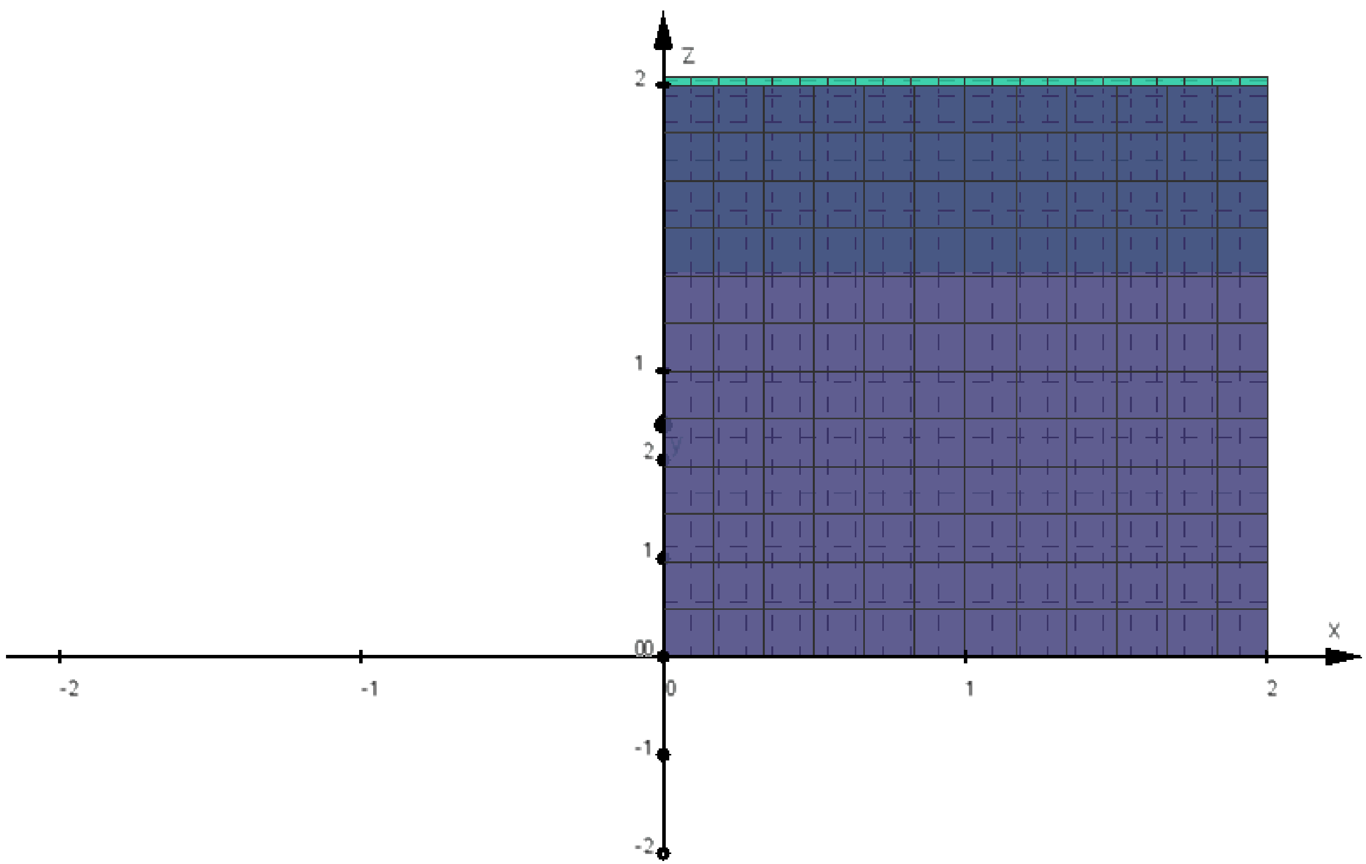
$$V = 2\int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2}\,dy\,dx$$

$$= 2\int_0^1 \left[y\sqrt{1-x^2}\right]_0^x dx$$

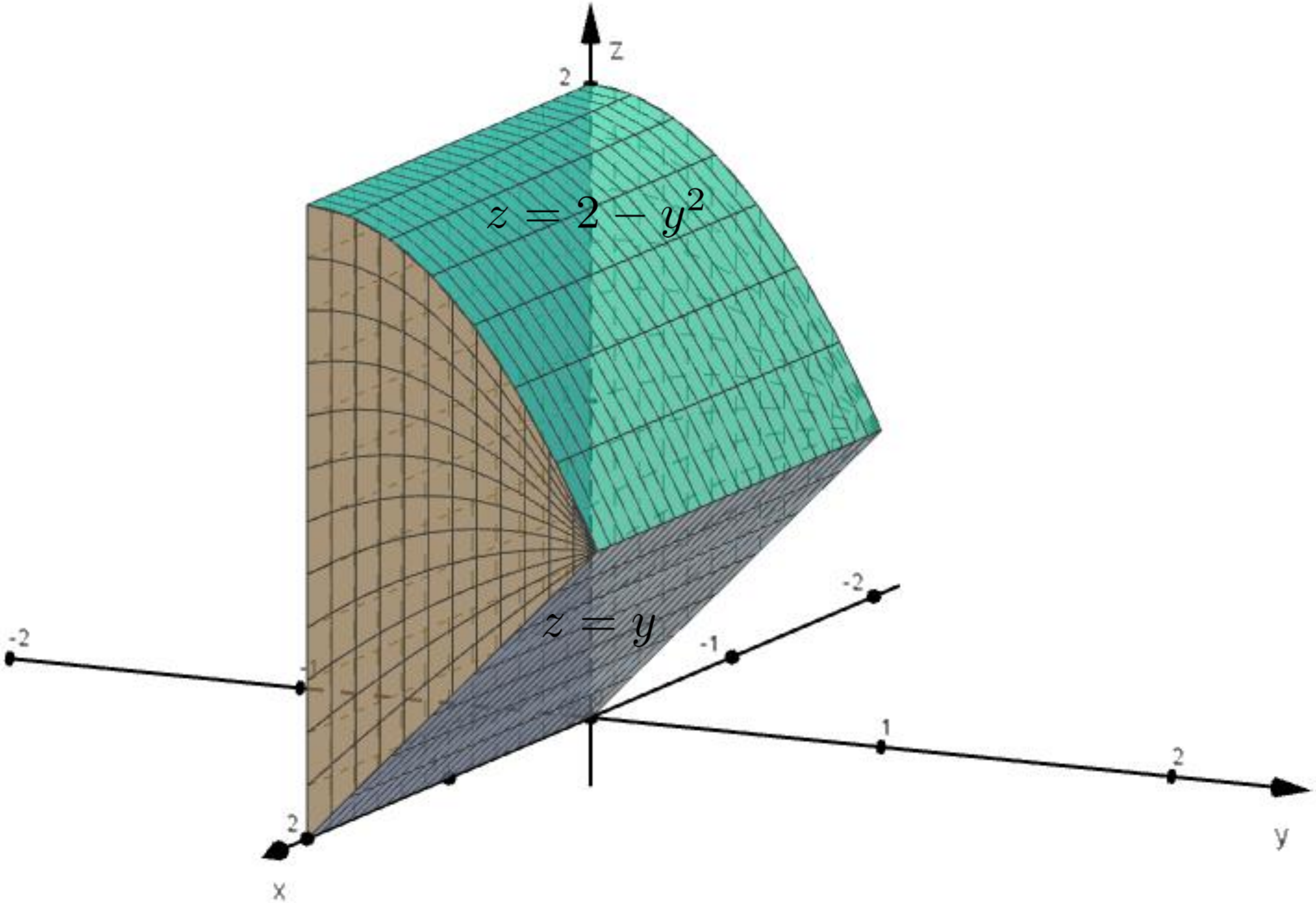
$$= 2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx \quad = \left[-\frac{2}{3}\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$



Ejemplo: Calcular el volumen del sólido en el primer octante acotado por las superficies $z = 2 - y^2$, y los planos $z = y$, $x = 2$, $x = 0$, $y = 0$.



Ejemplo: Calcular el volumen del sólido en el primer octante acotado por las superficies $z = 2 - y^2$, y los planos $z = y$, $x = 2$, $x = 0$, $y = 0$.



Intersección

$$\left.\begin{aligned} z &= 2 - y^2 \\ z &= y \end{aligned}\right\}$$

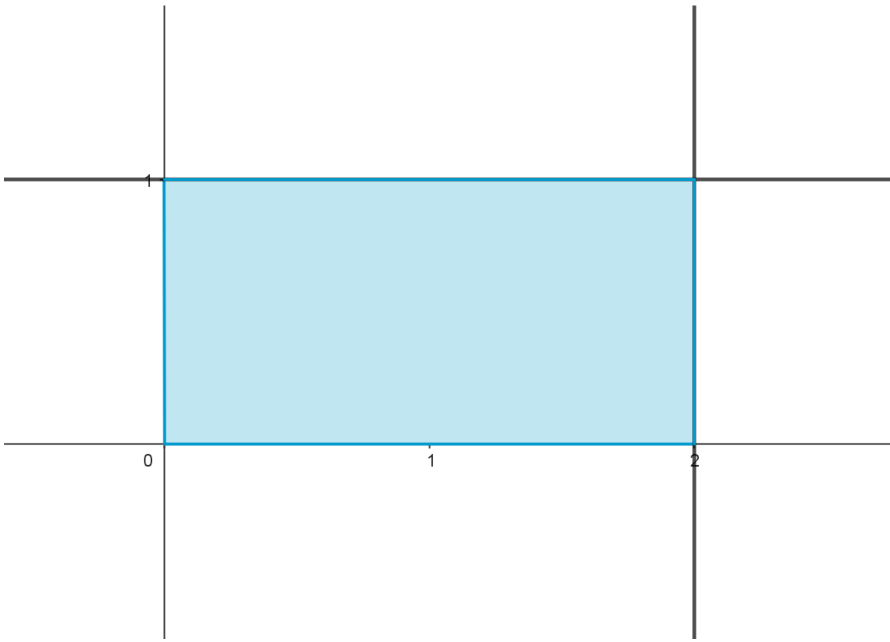
$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$y = -2 \qquad y = 1$$

Ejemplo: Calcular el volumen del sólido en el primer octante acotado por las superficies $z = 2 - y^2$, y los planos $z = y$, $x = 2$, $x = 0$, $y = 0$.

$$V = \iint_{\mathcal{R}} (2 - y^2)dA - \iint_{\mathcal{R}} ydA$$

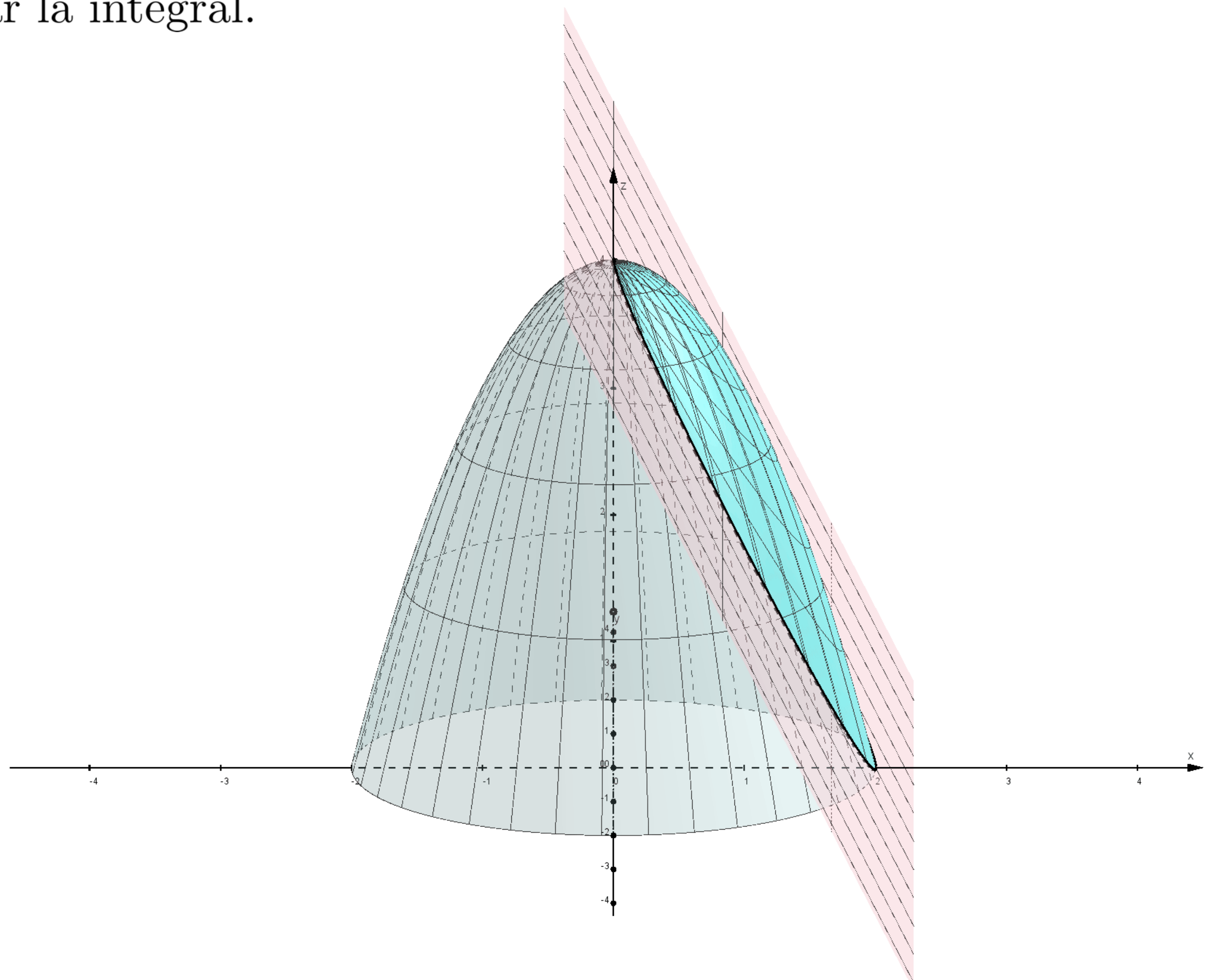
$$= \int_0^2 \int_0^1 (2 - y^2)dydx - \int_0^2 \int_0^1 ydydx \qquad = \frac{7}{3}$$



Ejemplo: Establecer una integral doble para encontrar el volumen del sólido limitado por las gráficas de ecuaciones $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 4 - 2x$.

No evaluar la integral.

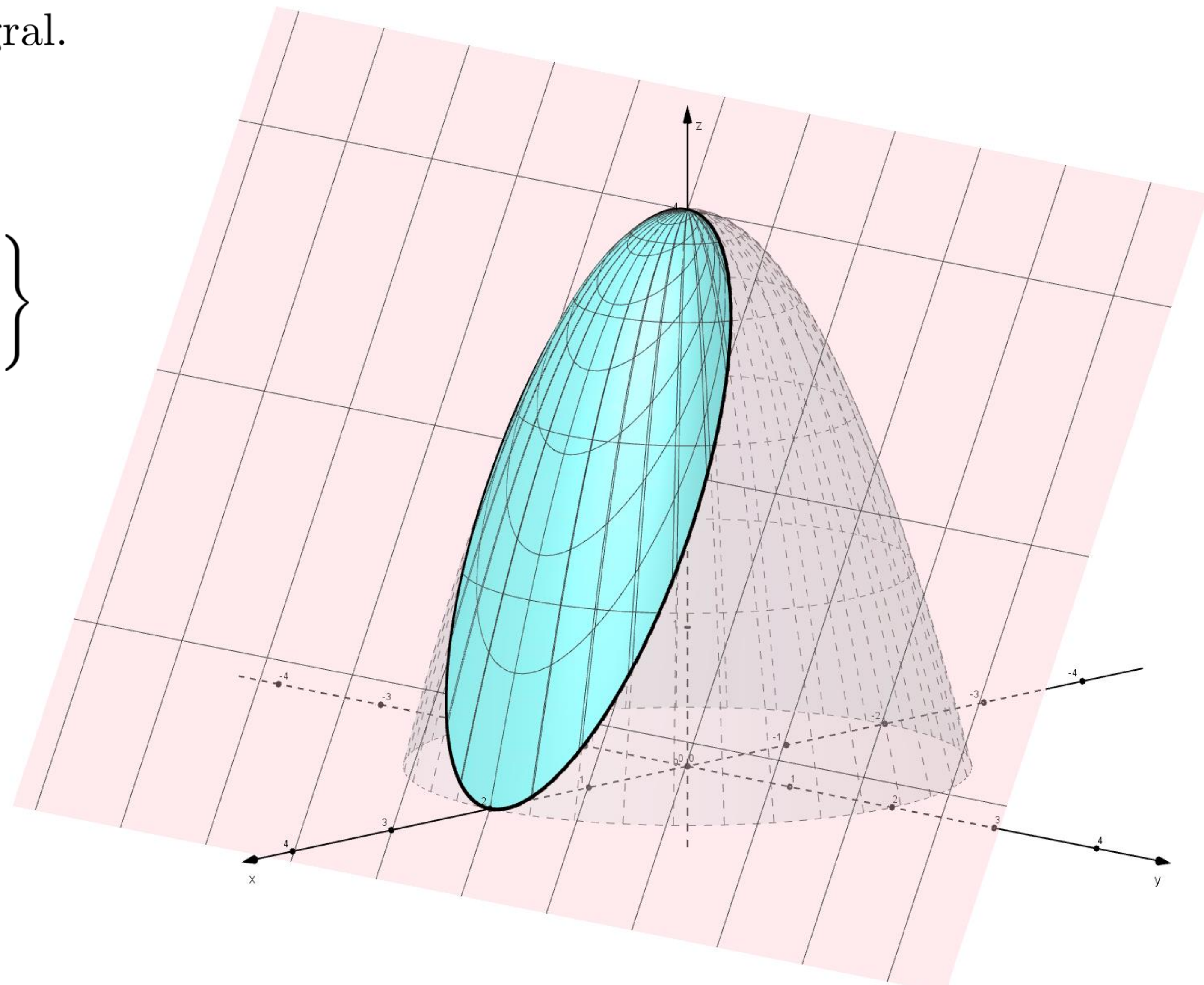
Ejemplo: Establecer una integral doble para encontrar el volumen del sólido limitado por las gráficas de ecuaciones $z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 4 - 2x$.
No evaluar la integral.



Ejemplo: Establecer una integral doble para encontrar el volumen del sólido limitado por las gráficas de ecuaciones $z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 4 - 2x$.
No evaluar la integral.

Intersección

$$\left.\begin{aligned} z &= 4 - x^2 - y^2 \\ z &= 4 - 2x \end{aligned}\right\}$$



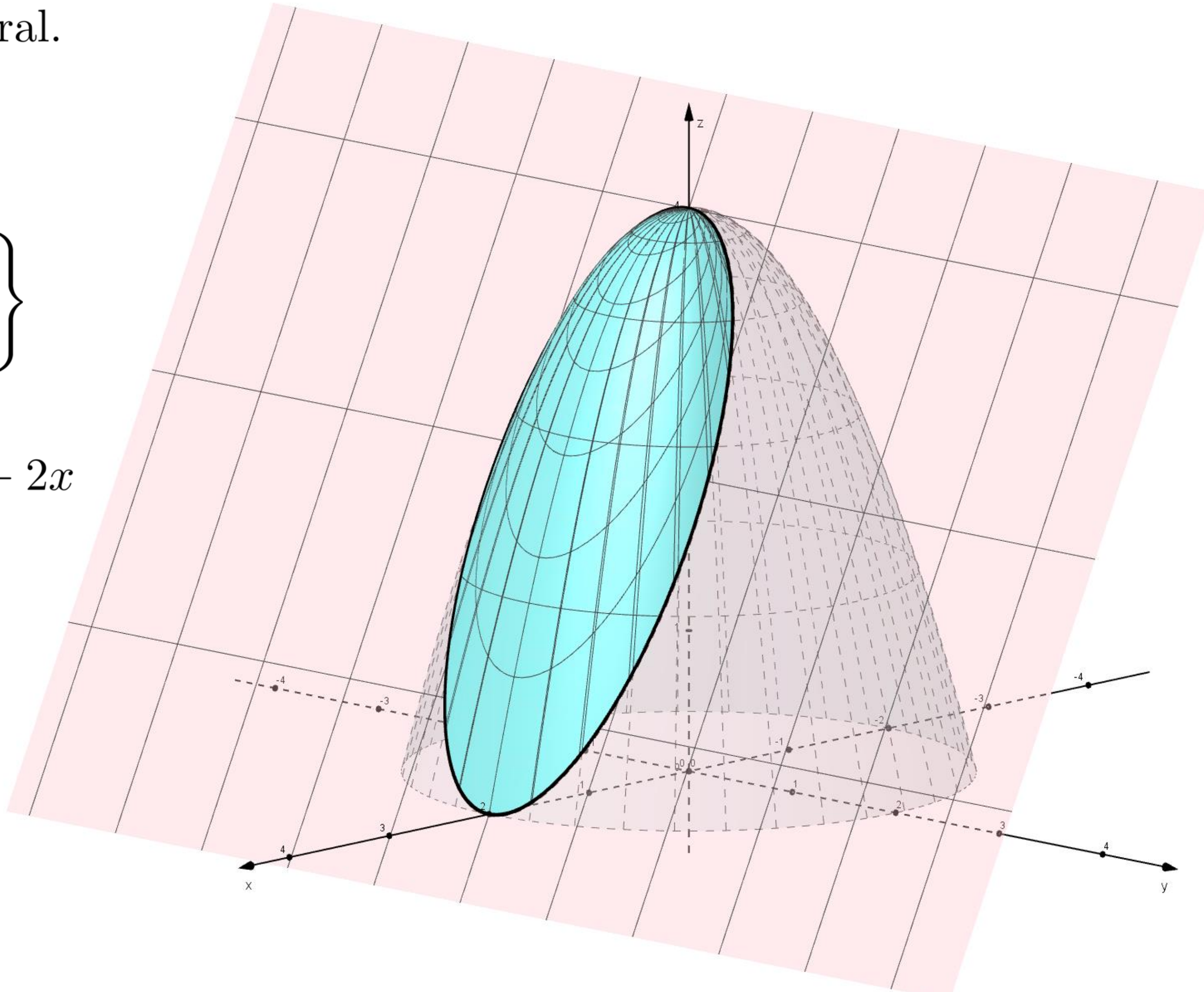
Ejemplo: Establecer una integral doble para encontrar el volumen del sólido limitado por las gráficas de ecuaciones $z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 4 - 2x$.
No evaluar la integral.

Intersección

$$\left.\begin{array}{l} z = 4 - x^2 - y^2 \\ z = 4 - 2x \end{array}\right\}$$

$$4 - x^2 - y^2 = 4 - 2x$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$



Ejemplo: Establecer una integral doble para encontrar el volumen del sólido limitado por las gráficas de ecuaciones $z = 4 - x^2 - y^2,\ z = 4 - 2x$.
No evaluar la integral.

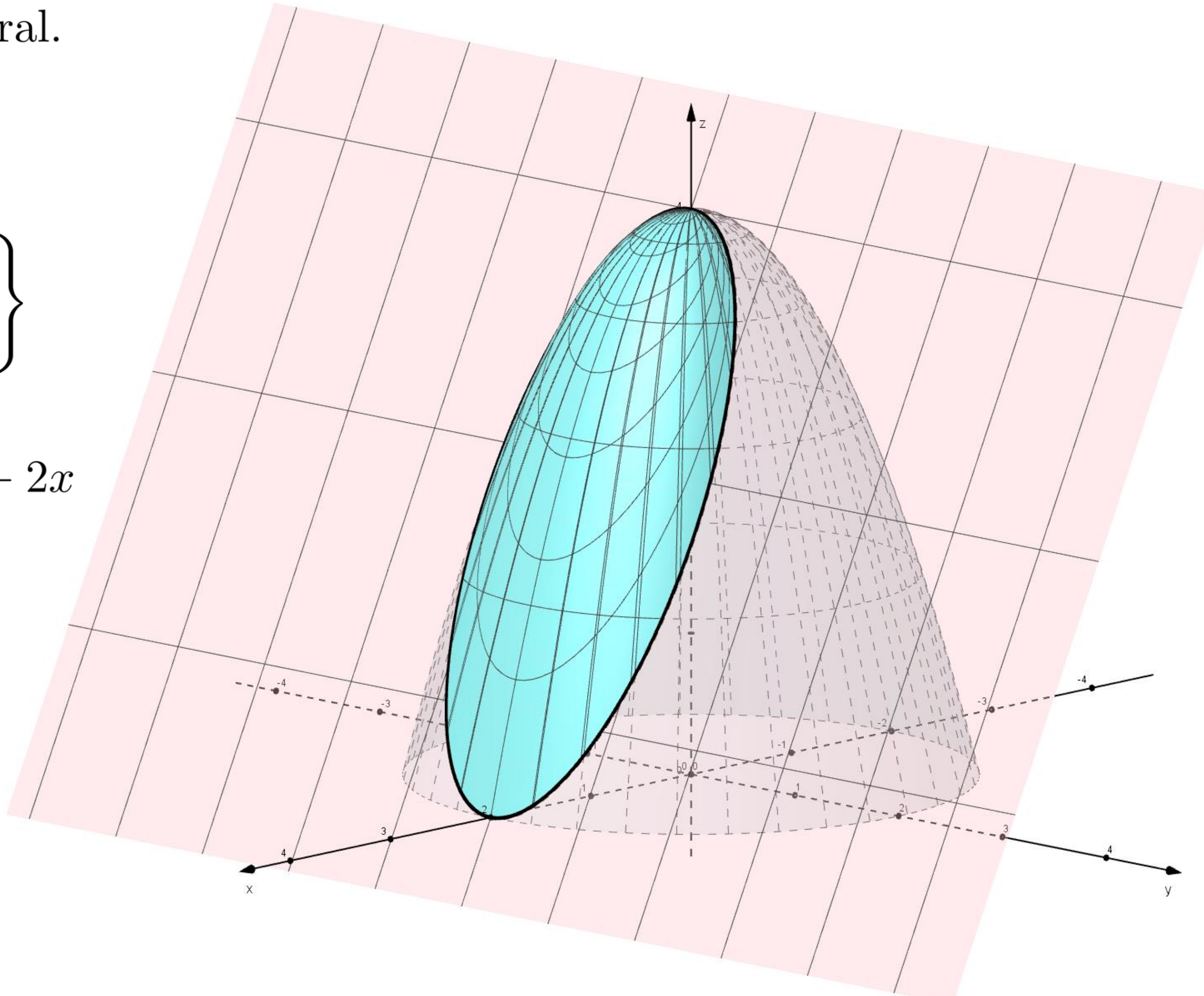
Intersección

$$\left.\begin{aligned} z &= 4 - x^2 - y^2 \\ z &= 4 - 2x \end{aligned}\right\}$$

$$4 - x^2 - y^2 = 4 - 2x$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0$$

$$(x-1)^2 + y^2 = 1$$



Ejemplo: Establecer una integral doble para encontrar el volumen del sólido limitado por las gráficas de ecuaciones $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 4 - 2x$.
No evaluar la integral.

$$V = \iint_{\mathcal{R}} (4 - x^2 - y^2)dA - \iint_{\mathcal{R}} (4 - 2x)dA$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} (2x - x^2 - y^2)dA$$

$$= \int_0^2 \int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}} (2x - x^2 - y^2)dydx$$