Tema 1 – Segunda Parte

Integrales definidas

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua

Δ partición de $[a, b]$

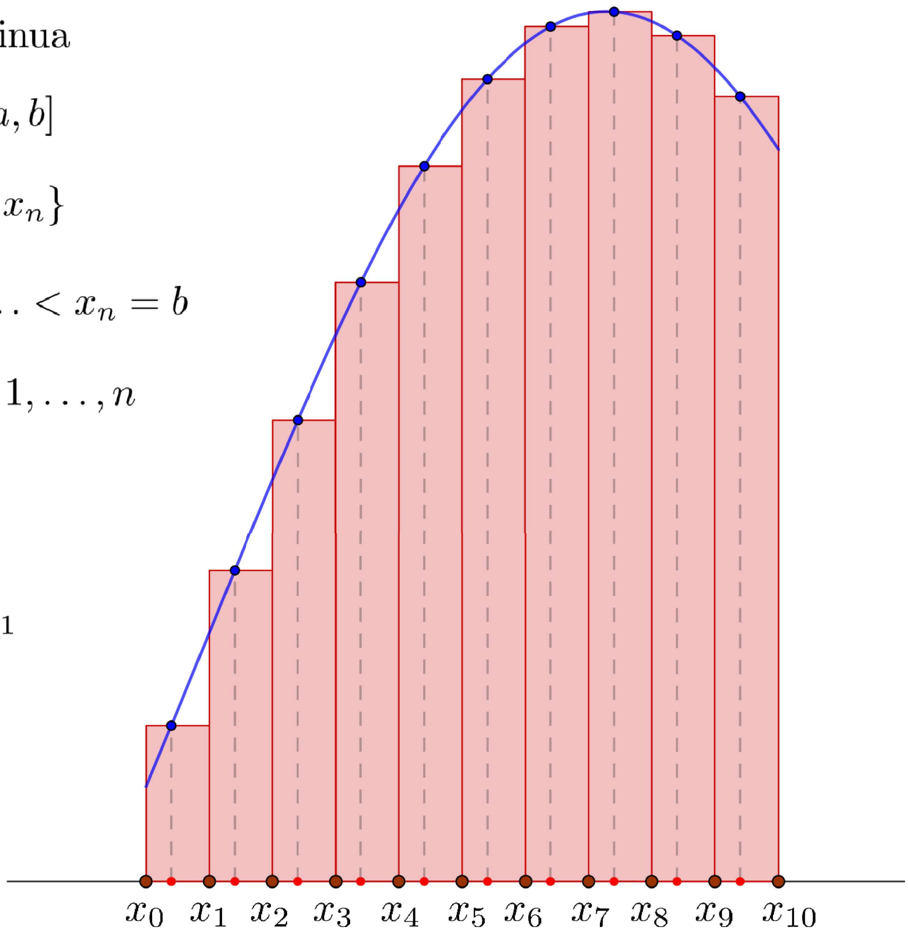
$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

$c_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua

Δ partición de $[a, b]$

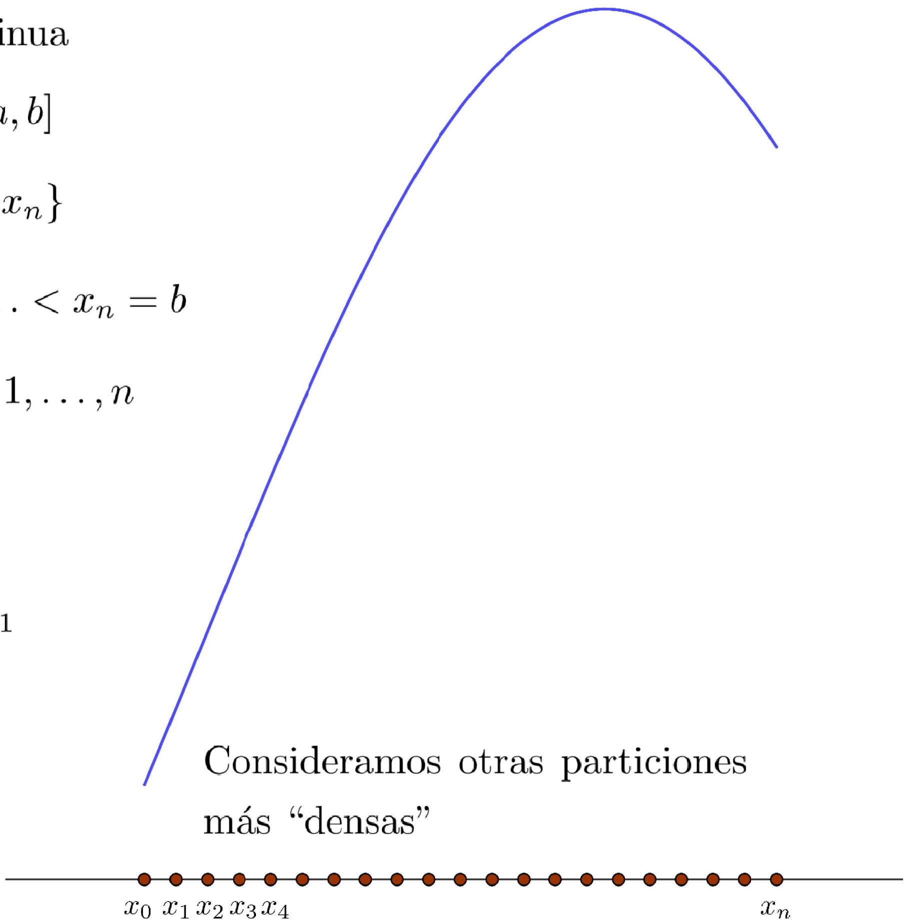
$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

$c_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



Consideramos otras particiones más “densas”

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua

Δ partición de $[a, b]$

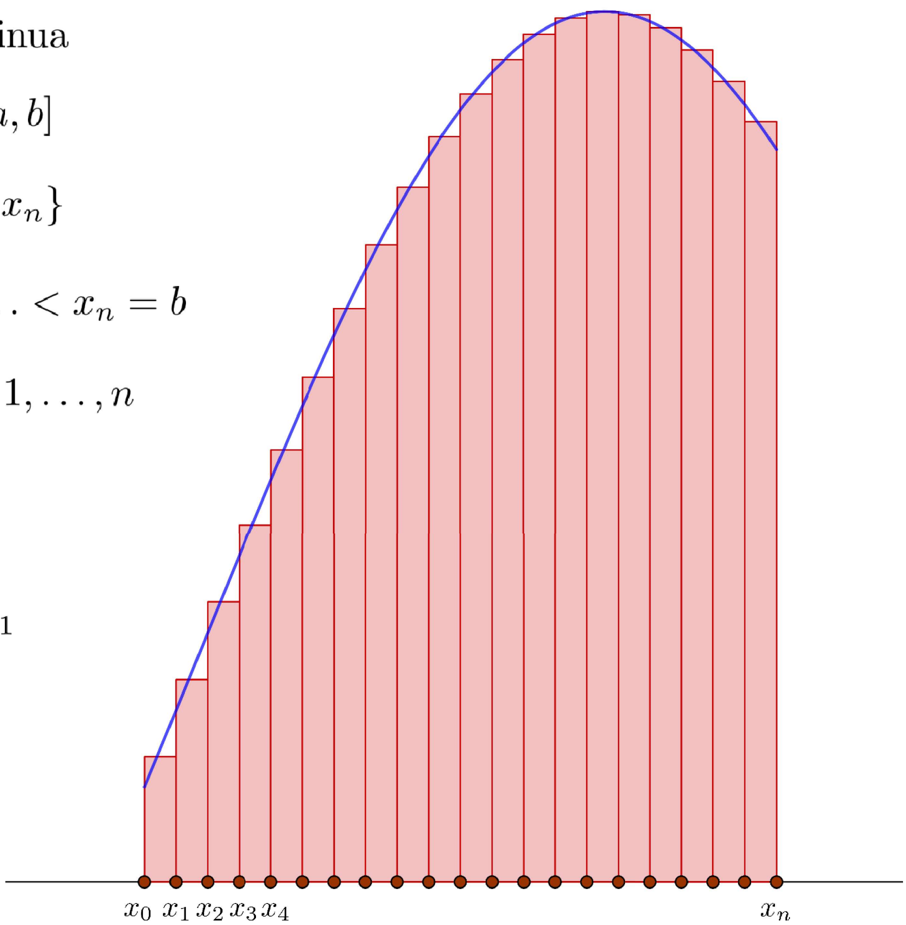
$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

$c_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\, \Delta x_i$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



INTEGRALES DEFINIDAS

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

Δ partición de $[a,b]$

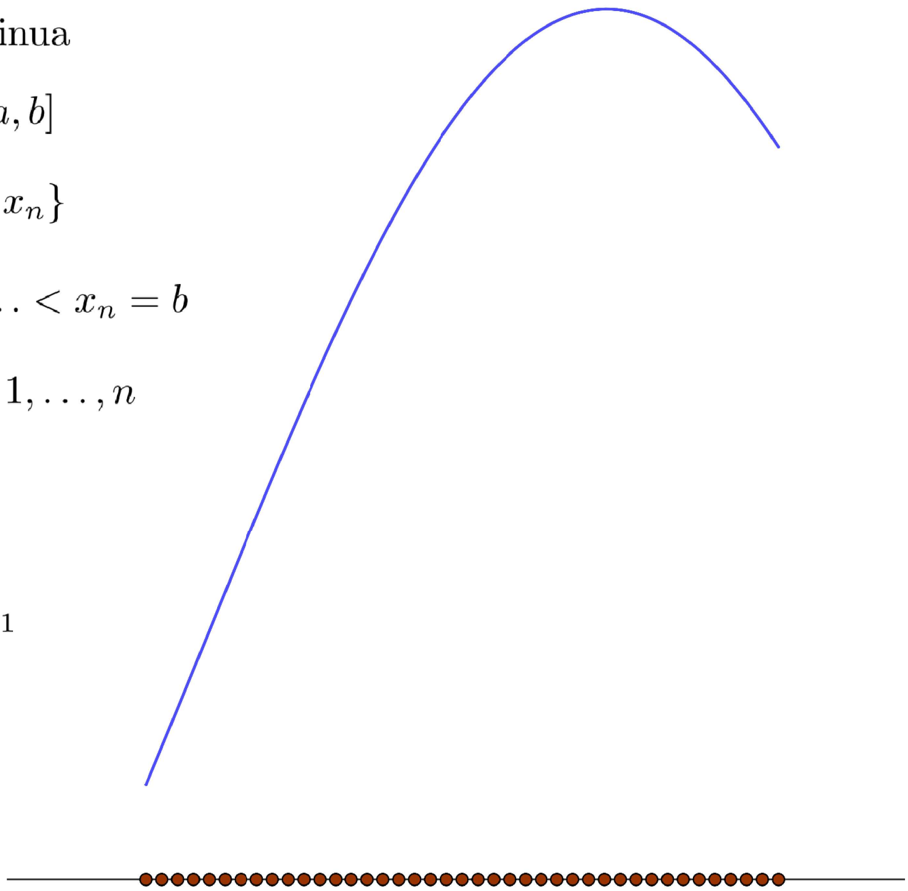
$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

$c_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



INTEGRALES DEFINIDAS

$f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

Δ partición de $[a,b]$

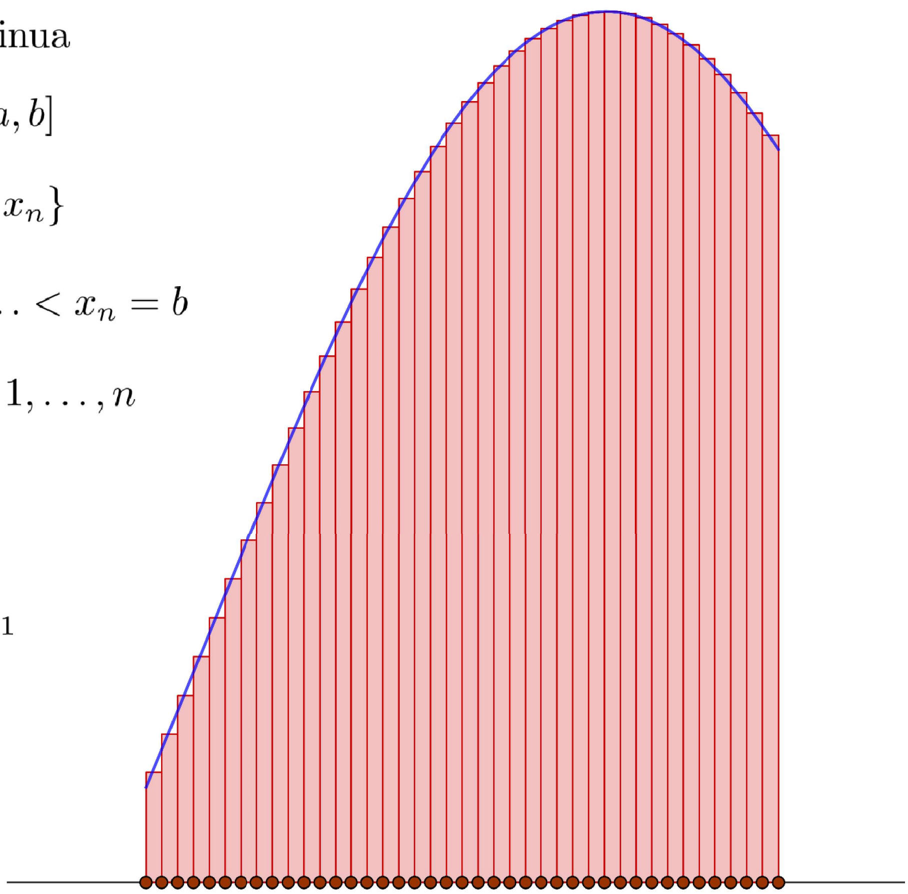
$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

$c_i \in [x_{i-1}, x_i] \qquad i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$



f es integrable (Riemann) en $[a, b]$ si el límite

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \qquad \text{donde } \|\Delta\| = \max\{\Delta x_i : i = 1, \ldots, n\}$$

existe y no depende ni de las particiones $\{x_0, \ldots, x_n\}$ tomadas ni de los valores c_i elegidos para evaluar la función f en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. En ese caso se notará:

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx$$

A este valor se le denomina integral (de Riemann) de f en $[a, b]$

Aunque hemos definido la integral de Riemann para funciones continuas, en realidad esta condición no es necesaria. No veremos la definición general. Sí hay que conocer los siguientes dos resultados:

- Si f es continua en $[a, b]$ entonces f es integrable en $[a, b]$.
- Si f es acotada en $[a, b]$ y tiene una cantidad finita de puntos de discontinuidad, entonces f es integrable en $[a, b]$.

Si f es integrable en $[a,b]$ se define:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$$

Propiedades básicas de la integral definida:

a) Si f es integrable en $[a,b]$ y $c \in (a,b)$ entonces f es integrable en $[a,c]$ y en $[c,b]$ y se verifica

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

b) Si f es integrable en $[a,b]$ y $k \in \mathbb{R}$ entonces kf es integrable en $[a,b]$ y se verifica

$$\int_a^b k\,f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

c) Si f, g son integrables en $[a,b]$ entonces $f+g$ es integrable en $[a,b]$ y se verifica

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Propiedades básicas de la integral definida:

d) Si f es integrable en $[a,b]$ y $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a,b]$, se verifica

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$$

e) Si f, g son integrables en $[a,b]$ y $f(x) \geqslant g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, se verifica

$$\int_a^b f(x)\,dx \geqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

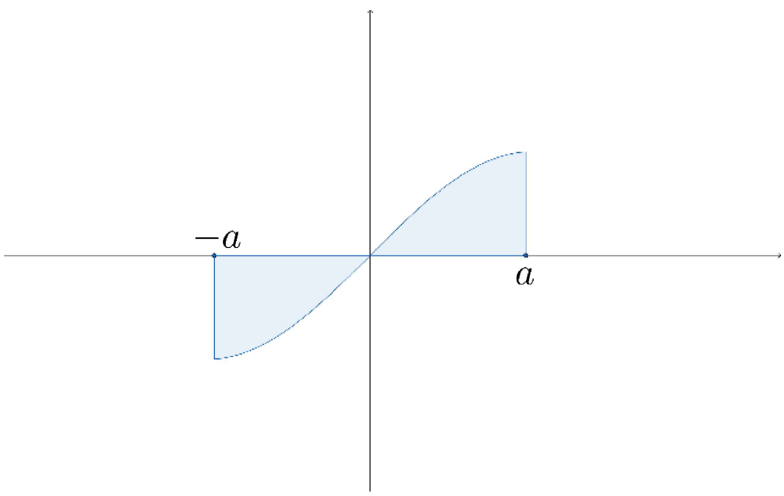
f) Si f es integrable en $[a,b]$ entonces $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y se verifica

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \geqslant \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

Propiedades básicas de la integral definida:

g) Si $a > 0$, f es integrable en $[-a,a]$ y $f(-x) = -f(x)$ para todo $x \in [0,a]$ (es decir, f es impar) se verifica

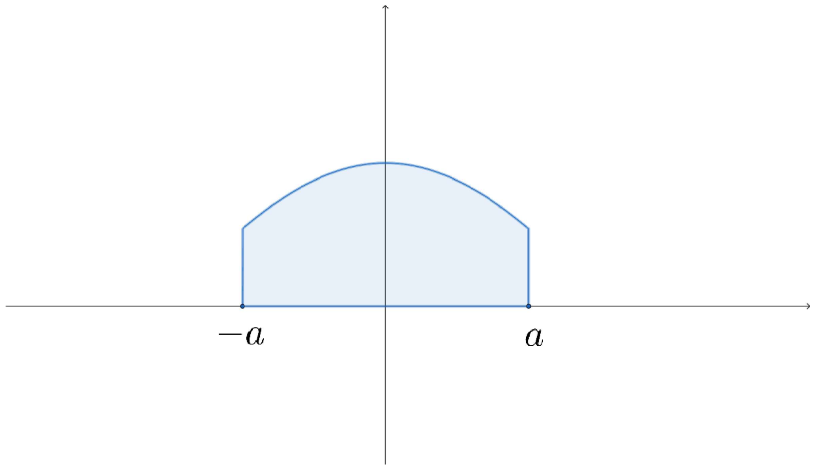
$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$$



Propiedades básicas de la integral definida:

h) Si $a > 0$, f es integrable en $[-a, a]$ y $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in [0, a]$ (es decir, f es par) se verifica

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$



Teorema Fundamental del Cálculo

Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$. Consideramos

$$F(x) = \int_{a}^{x} f(t)\,dt \qquad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Entonces la función F es derivable en $[a, b]$ y

$$F'(x) = f(x) \qquad \text{para todo } x \in [a, b].$$

Ejemplo:

$$F(x) = \int_{0}^{x} e^{t^2}\,dt \qquad \Longrightarrow \qquad F'(x) = e^{x^2}$$

Regla de Barrow

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y sea F una primitiva de f en $[a,b]$ (es decir, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a,b]$). Entonces se verifica

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo:

$$\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln x]_1^e = \ln e - \ln 1 = 1$$

Teorema del cambio de variable

Sea $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable con derivada continua y sea f continua (y cuyo dominio contenga a la imagen de $[a,b]$ por g). Entonces se verifica

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

Ejemplo:

$$\int_4^9 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx = \int_2^3 \frac{2t}{t^2+t}\,dt = \int_2^3 \frac{2}{t+1}\,dt$$

$$\sqrt{x} = t \qquad x = 4 \to t = 2$$

$$x = t^2 \qquad x = 9 \to t = 3$$

$$dx = 2t\,dt$$

Teorema del cambio de variable

Sea $g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ derivable con derivada continua y sea f continua (y cuyo dominio contenga a la imagen de $[a,b]$ por g). Entonces se verifica

$$\int_a^b f(g(x))\, g'(x)\, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\, dt$$

Ejemplo:

$$\int_4^9 \frac{1}{x+\sqrt{x}}\, dx = \int_2^3 \frac{2t}{t^2+t}\, dt = \int_2^3 \frac{2}{t+1}\, dt = \left[2\ln(t+1)\right]_2^3$$

$$= 2\ln 4 - 2\ln 3 = 2\ln\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$\sqrt{x} = t$$
$$x = t^2$$
$$dx = 2t\, dt$$

Ejemplo:

$$\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{2x-1}}\, dx = \int_1^3 \frac{1}{2}\left(\frac{t^2+1}{t}\right) t\, dt = \frac{1}{2}\left[\frac{t^3}{3}+t\right]_1^3 = \frac{16}{3}$$

$$\sqrt{2x-1} = t$$
$$x = \frac{t^2+1}{2}$$
$$dx = t\, dt$$

$$x = 1 \to t = 1$$
$$x = 5 \to t = 3$$

Tema 1 – Tercera Parte

Aplicaciones de la integral

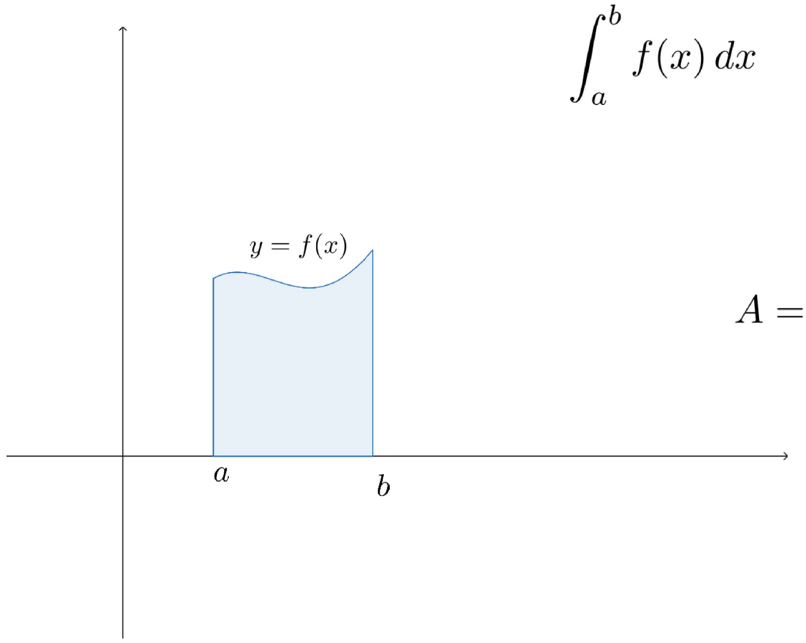
Aplicaciones de la integral hay, literalmente, miles. Nosotros, como pequeña ilustración, solo veremos algunas aplicaciones geométricas:

- Cálculo de áreas planas
- Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución

Cálculo de áreas planas

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces el área de la región delimitada por la gráfica de la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ es igual a

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

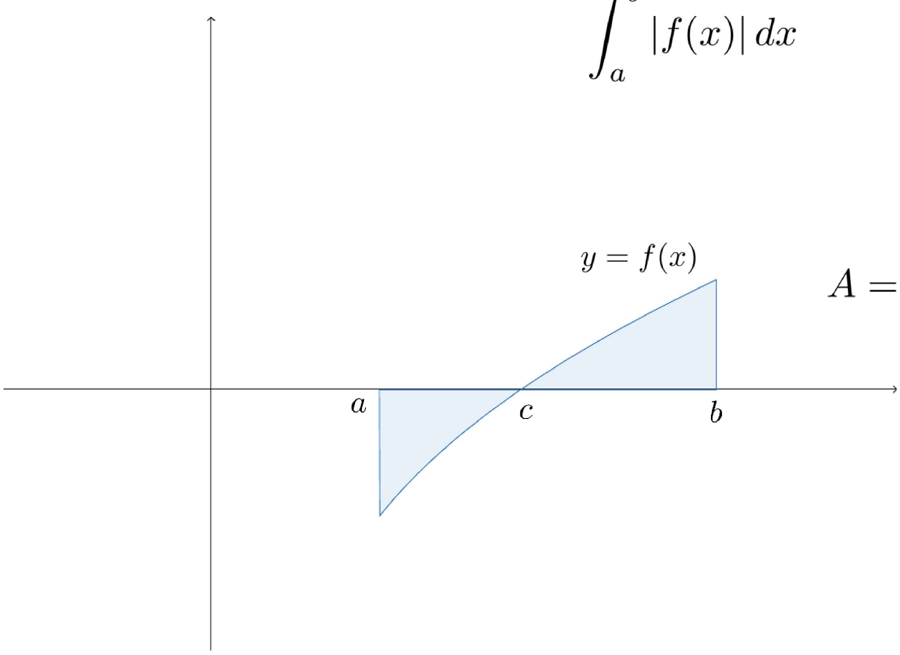


$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

Cálculo de áreas planas

Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces el área de la región delimitada por la gráfica de la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0$, $x = a$ y $x = b$ es igual a

$$\int_a^b |f(x)|\,dx$$



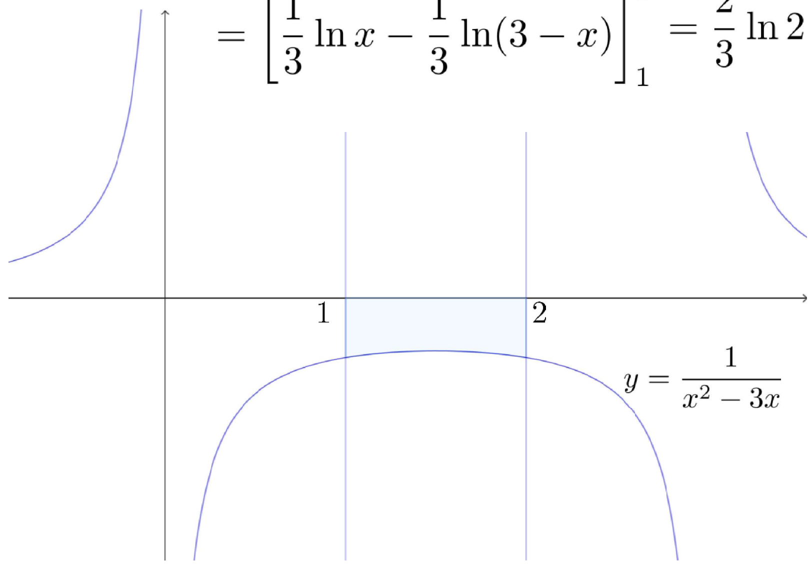
$$A = \int_a^c -f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Ejemplo:

Calcular el área de la región delimitada por la curva $y = \dfrac{1}{x^2 - 3x}$
y las rectas $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$

$$A = \int_1^2 \left| \frac{1}{x^2 - 3x} \right| dx \; = \int_1^2 \frac{-1}{x^2 - 3x}\, dx \; = \int_1^2 \left(\frac{\frac{1}{3}}{x} - \frac{\frac{1}{3}}{x - 3} \right) dx$$

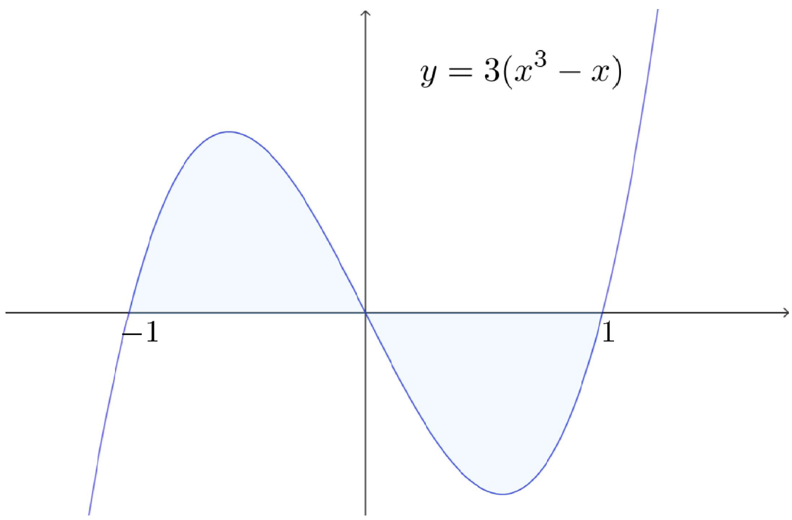
$$= \left[\frac{1}{3} \ln x - \frac{1}{3} \ln(3 - x) \right]_1^2 = \frac{2}{3} \ln 2$$



Ejemplo:

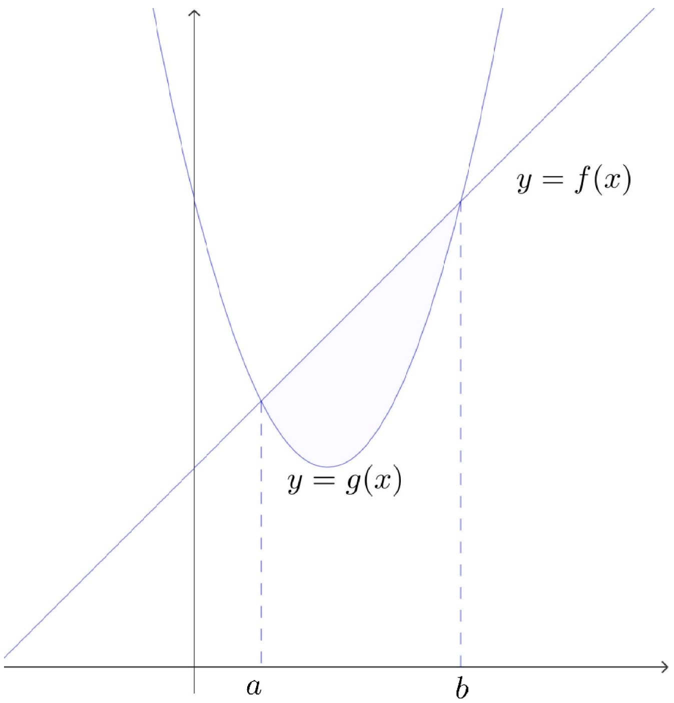
Calcular el área de la región delimitada por la curva $y = 3(x^3 - x)$
y la recta $y = 0$

$$A = \int_{-1}^{1} \left| 3(x^3 - x) \right| dx \; = \int_{-1}^{0} 3(x^3 - x)\, dx + \int_0^1 -3(x^3 - x)\, dx \; = \frac{3}{2}$$



Cálculo de áreas planas

Sea $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas y $f(x) \geq g(x)$ para todo x en $[a,b]$. Entonces el área de la región delimitada por las gráfica de las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a

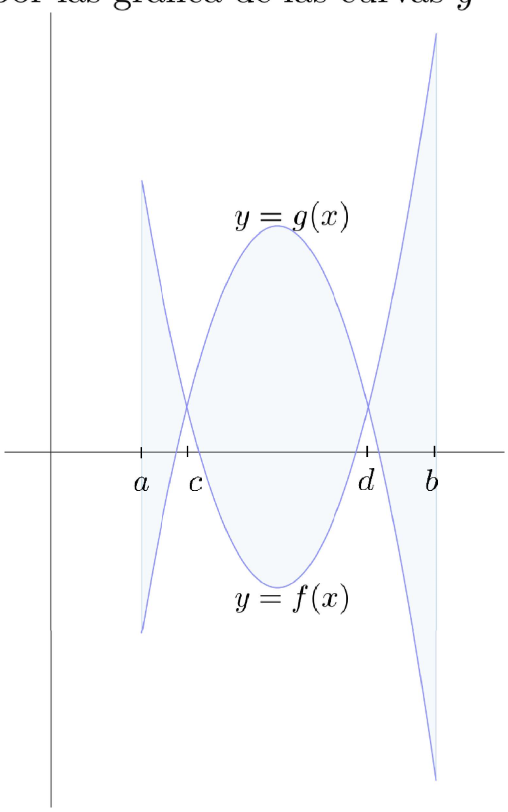


$$\int_a^b (f(x) - g(x))\, dx$$

$$A = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b g(x)\, dx$$

Cálculo de áreas planas

Sea $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas. Entonces el área de la región delimitada por las gráfica de las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ es igual a



$$\int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

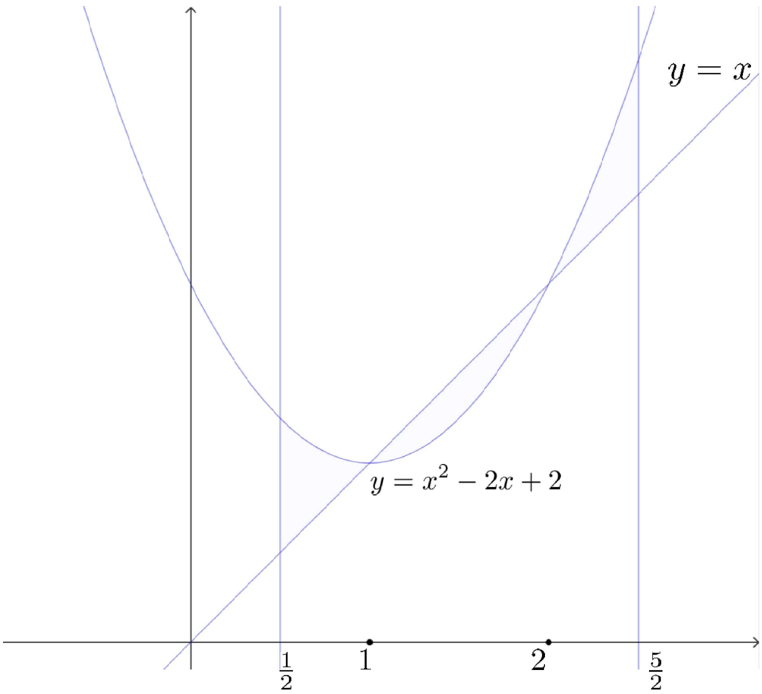
$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$= \int_a^c (f(x) - g(x))\, dx + \int_c^d (g(x) - f(x))\, dx$$

$$+ \int_d^b (f(x) - g(x))\, dx$$

Ejemplo:

Calcular el área de la región delimitada por las gráficas dadas por $y = x^2 - 2x + 2$, $y = x$, $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{5}{2}$.



$$A = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{5}{2}} |(x^2 - 2x + 2) - x|\, dx$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} ((x^2 - 2x + 2) - x)\, dx$$

$$+ \int_{1}^{2} (x - (x^2 - 2x + 2))\, dx$$

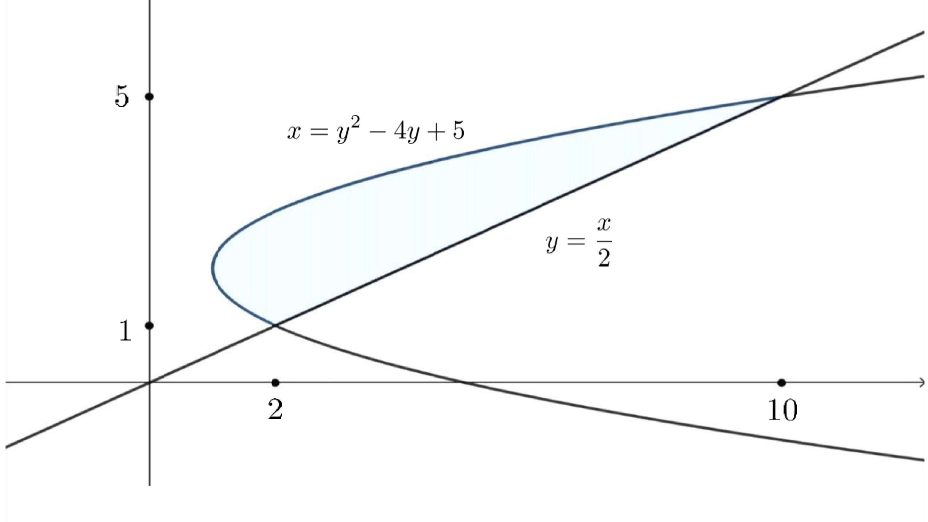
$$+ \int_{2}^{\frac{5}{2}} ((x^2 - 2x + 2) - x)\, dx$$

$$= \frac{1}{2}$$

Ejemplo:

Calcular el área de la región acotada del plano delimitada por la parábola $x = y^2 - 4y + 5$ y la recta $y = \frac{x}{2}$.

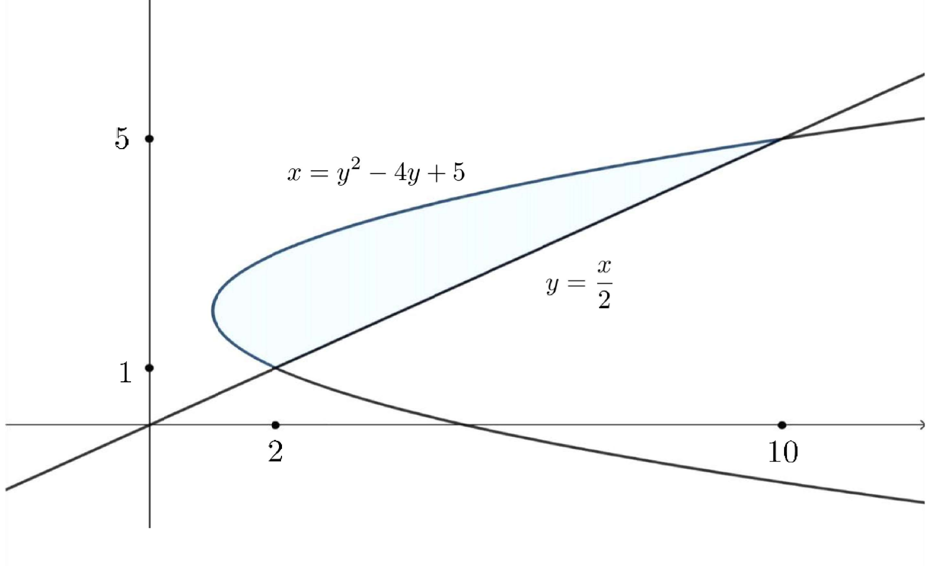
$$\left.\begin{aligned} x &= y^2 - 4y + 5 \\ x &= 2y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} y &= 1 \qquad (2, 1) \\ y &= 5 \qquad (10, 5) \end{aligned}$$



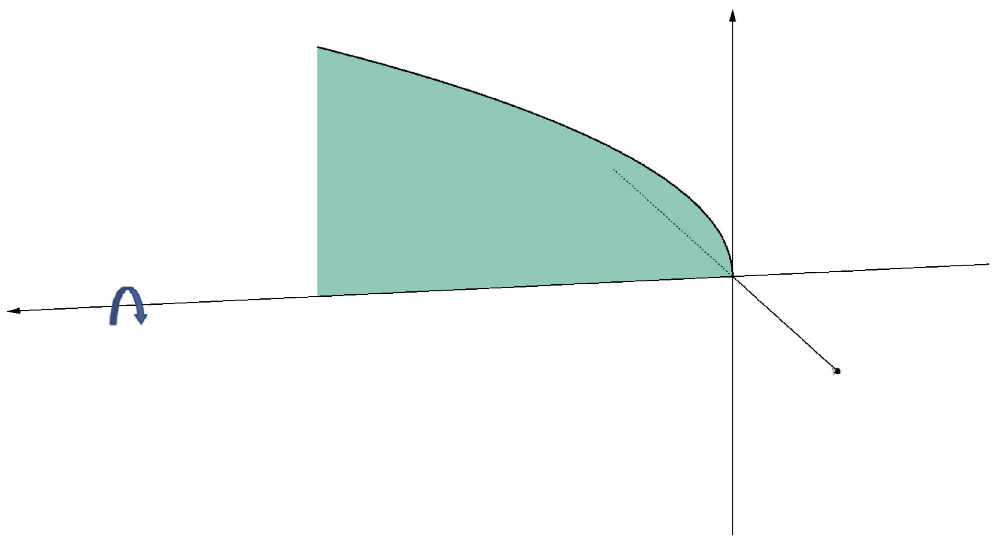
Ejemplo:

Calcular el área de la región acotada del plano delimitada por la parábola $x = y^2 - 4y + 5$ y la recta $y = \dfrac{x}{2}$.

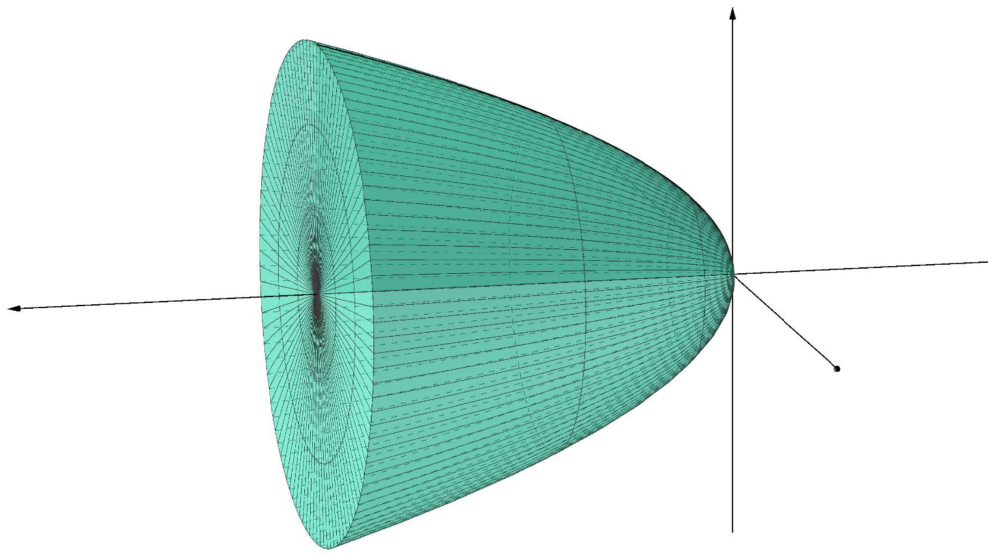
$$A = \int_1^5 \left(2y - (y^2 - 4y + 5)\right) dy = \frac{32}{3}$$



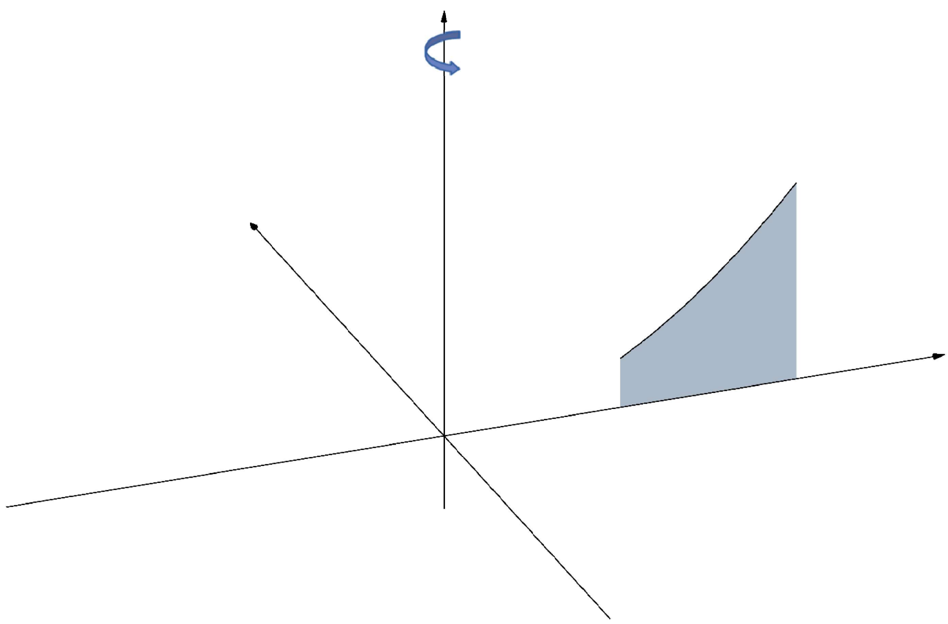
Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución



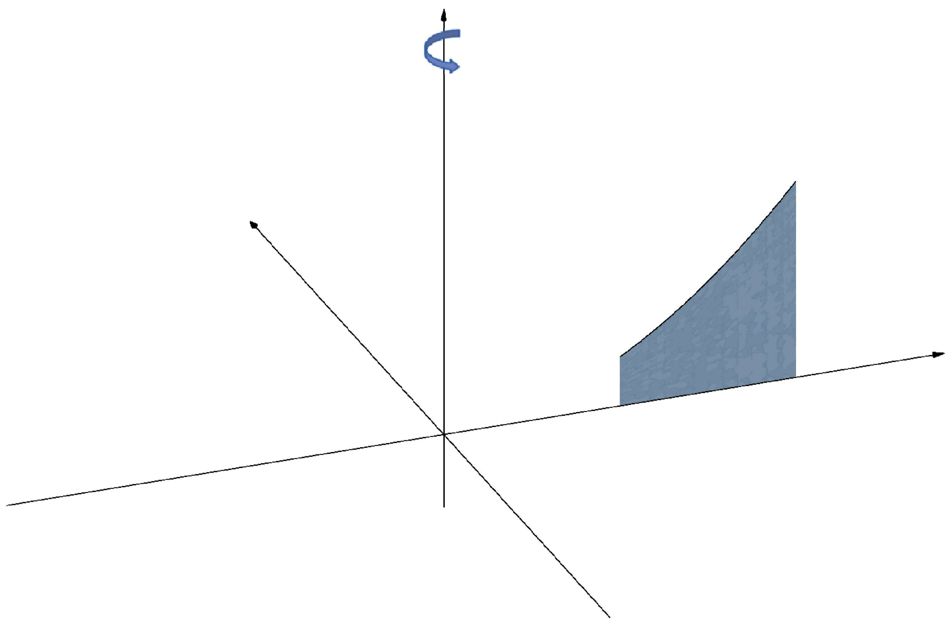
Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución



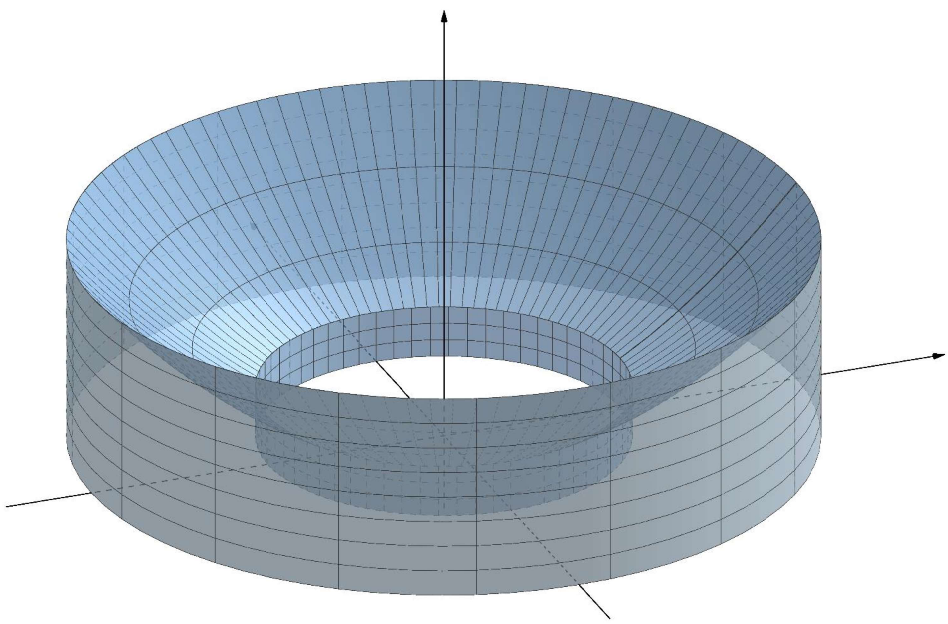
Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución



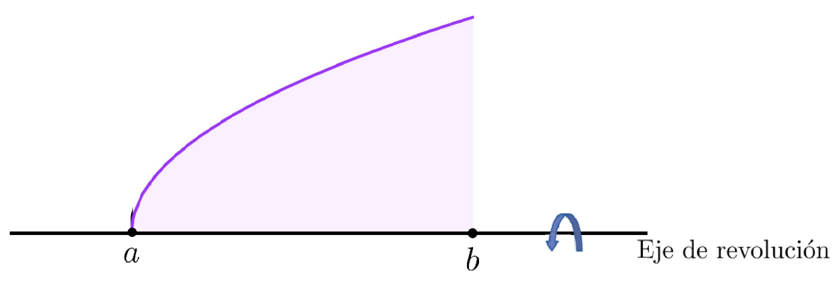
Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución



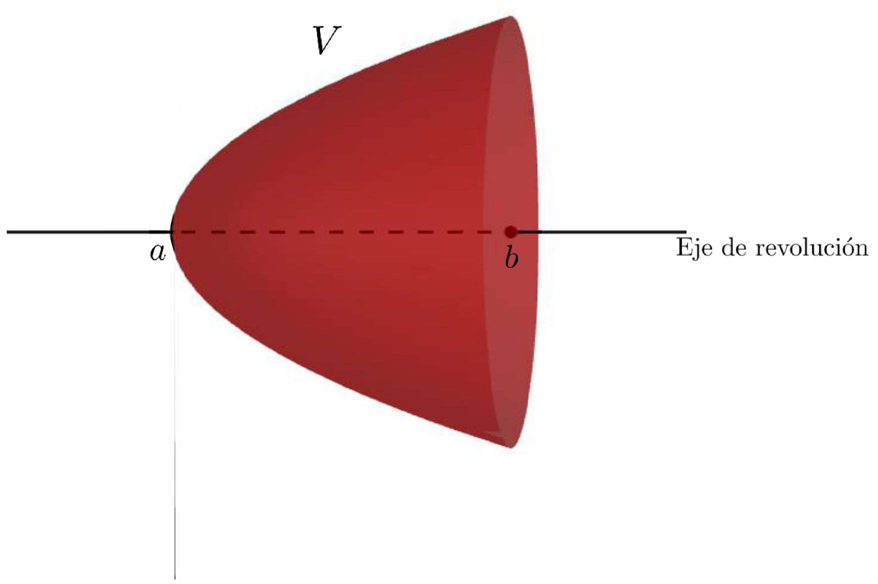
Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución



Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de discos.



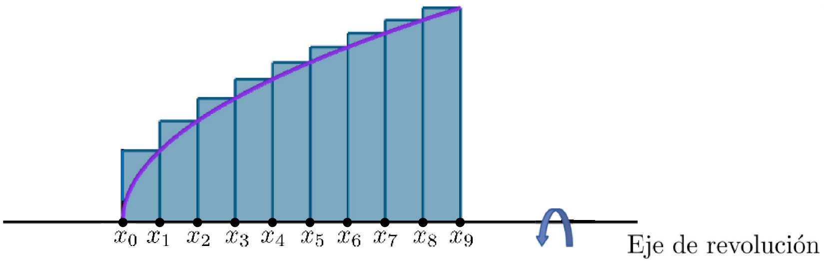
Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de discos.



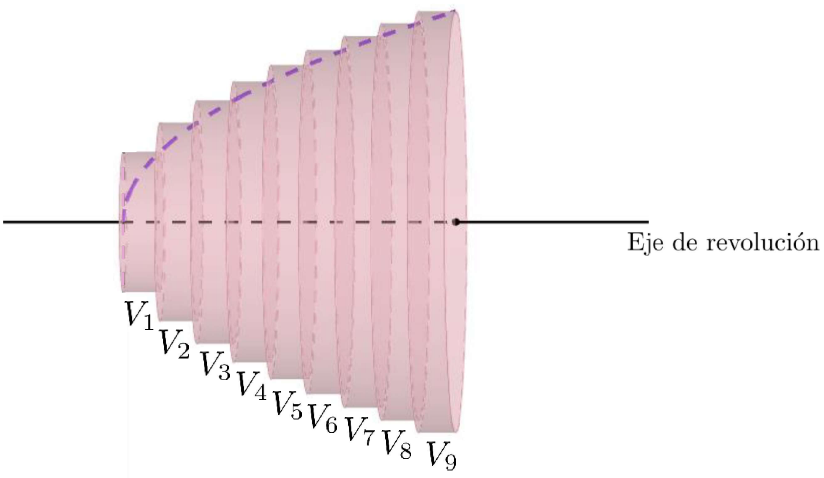
Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de discos.

$$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

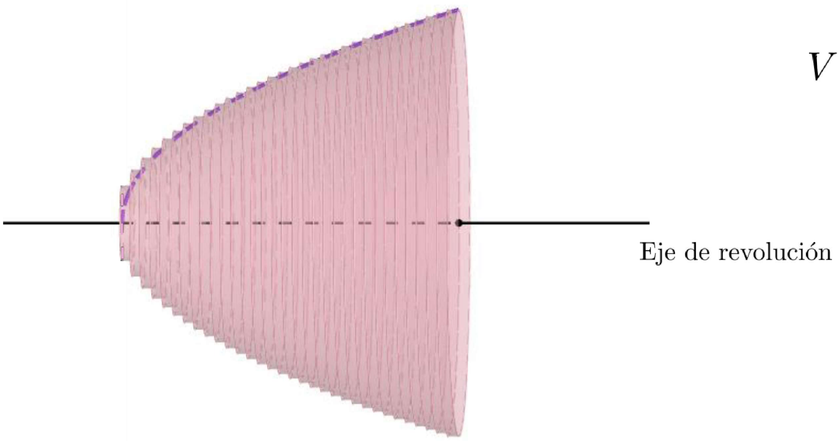
partición de $[a, b]$



Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de discos.



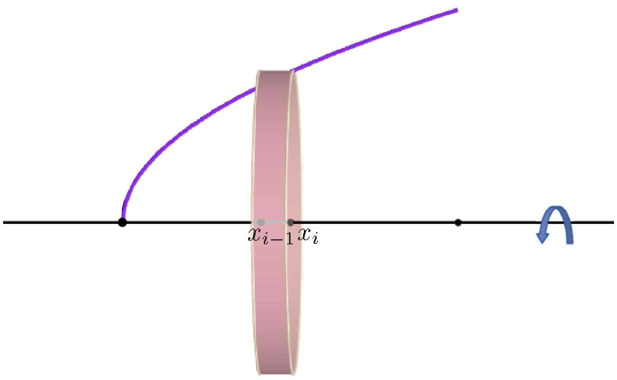
Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de discos.



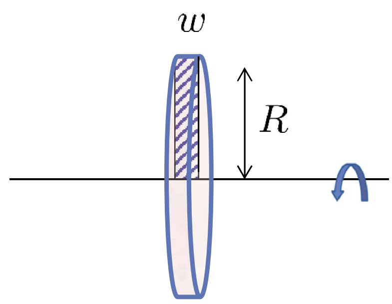
$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} V_i$$

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de discos.



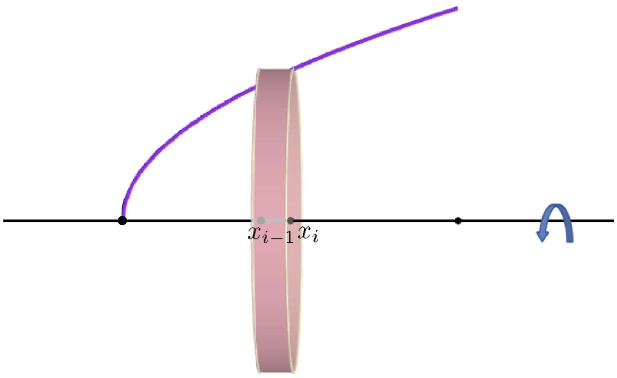
$$V_i = \pi(R(x_i))^2 \, \Delta x$$



$$V = \pi R^2 w$$

Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de discos.

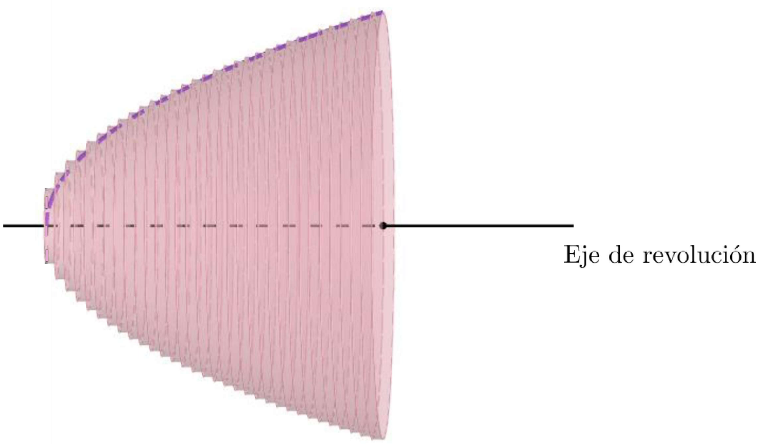
$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi(R(x_i))^2 \Delta x = \pi \int_a^b (R(x))^2 \, dx$$



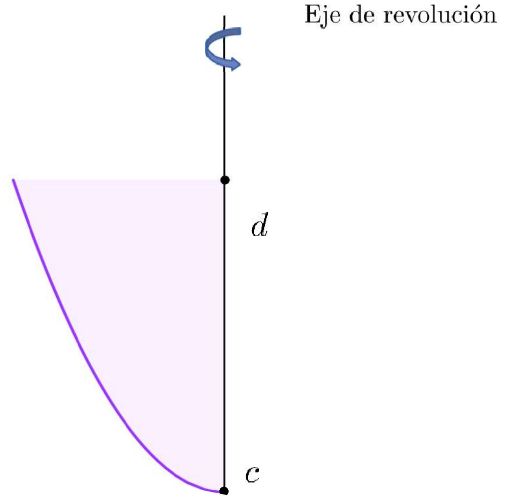
$$V_i = \pi(R(x_i))^2 \, \Delta x$$

Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de discos.

$$V = \pi \int_a^b (R(x))^2 \, dx$$

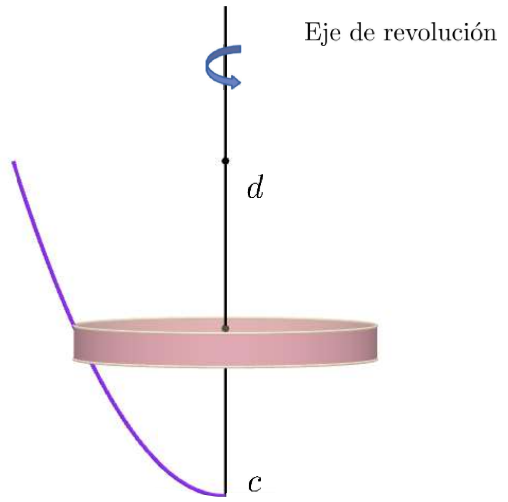


Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de discos.



Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de discos.

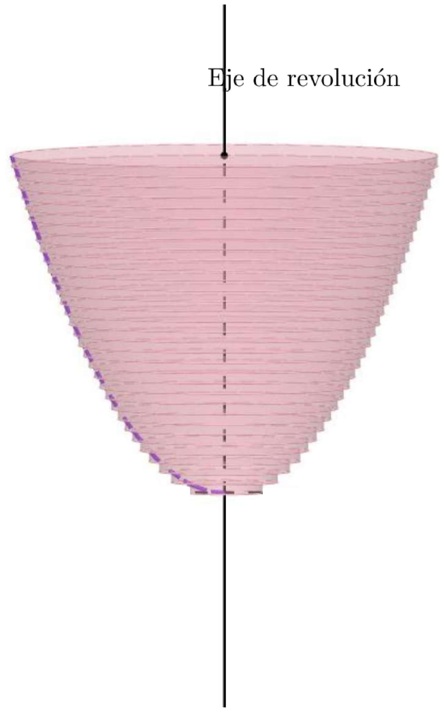
$$V = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \pi (R(y_i))^2 \Delta y \;\; = \pi \int_c^d (R(y))^2 \, dy$$



$$V_i = \pi (R(y_i))^2 \, \Delta y$$

Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de discos.

$$V = \pi \int_c^d (R(y))^2 \, dy$$



Ejemplo:

Considérese la región del primer cuadrante delimitada por la parábola $y = x^2$, el eje OY y la recta $y = 1$. Calcular, por el método de discos, el volumen del sólido obtenido al girar dicha región:

a) respecto del eje OY

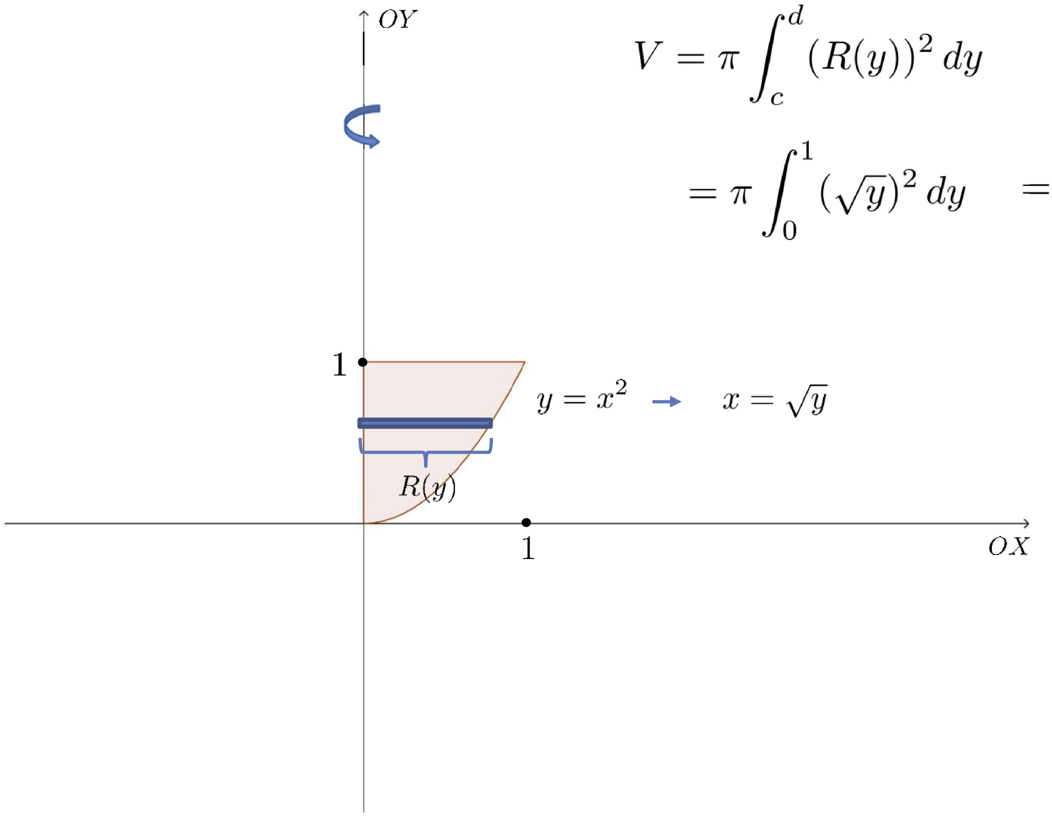
b) respecto del la recta $x = -1$

c) respecto de la recta $x = 1$

d) respecto de la recta $y = 2$

e) respecto de la recta $y = -2$

a) respecto del eje OY



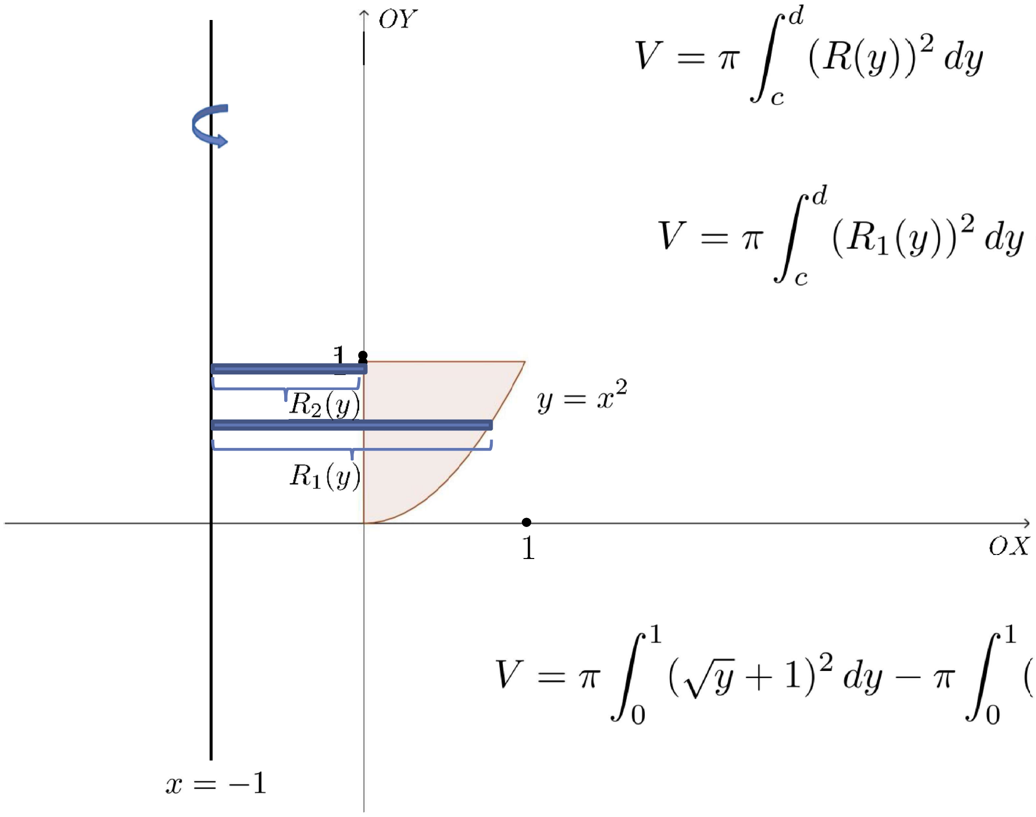
$$V = \pi \int_c^d (R(y))^2\, dy$$

$$= \pi \int_0^1 (\sqrt{y})^2\, dy \quad = \frac{\pi}{2}$$

$y = x^2 \rightarrow x = \sqrt{y}$

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

b) respecto del la recta $x = -1$

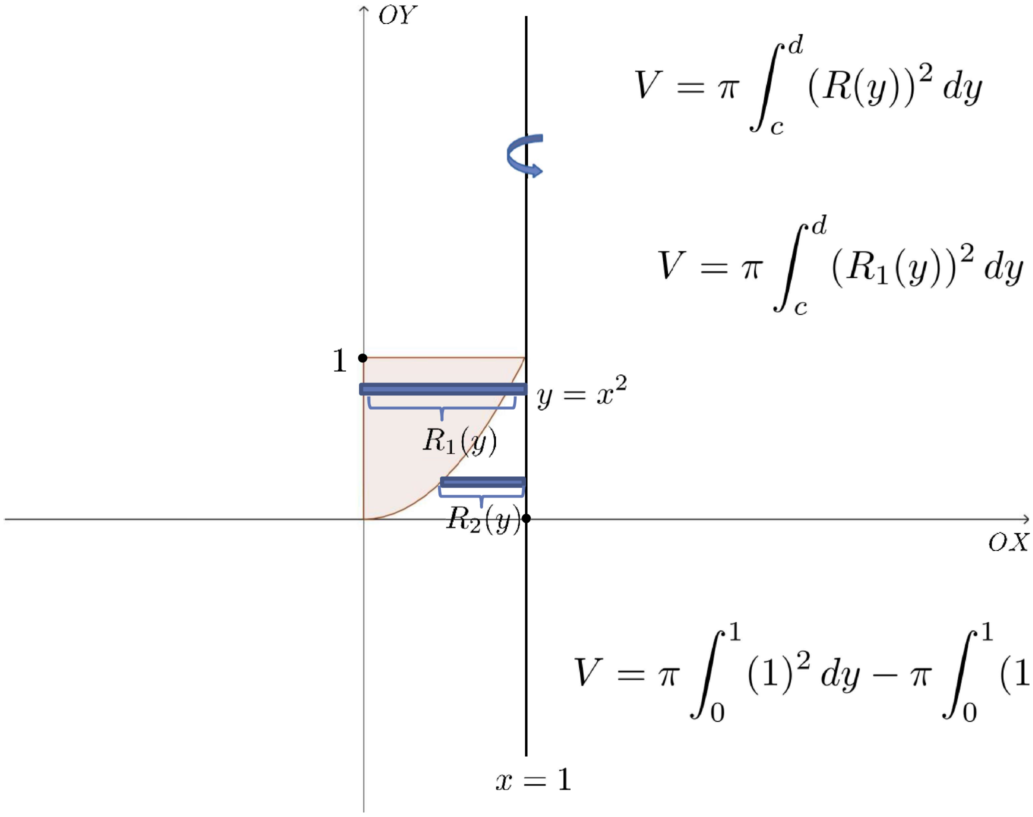


$$V = \pi \int_c^d (R(y))^2\, dy$$

$$V = \pi \int_c^d (R_1(y))^2\, dy - \pi \int_c^d (R_2(y))^2\, dy$$

$$V = \pi \int_0^1 (\sqrt{y}+1)^2\, dy - \pi \int_0^1 (1)^2\, dy = \frac{11}{6}\pi$$

c) respecto de la recta $x = 1$

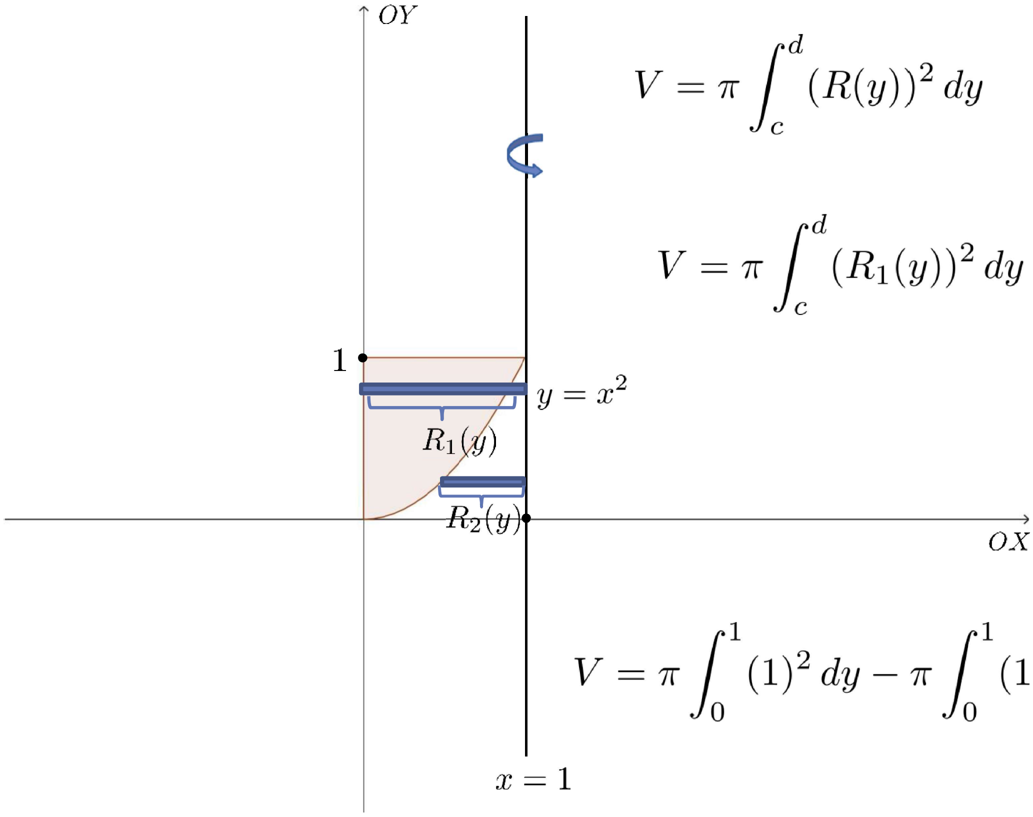


$$V = \pi \int_c^d (R(y))^2 \, dy$$

$$V = \pi \int_c^d (R_1(y))^2 \, dy - \pi \int_c^d (R_2(y))^2 \, dy$$

$$V = \pi \int_0^1 (1)^2 \, dy - \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{y})^2 \, dy$$

c) respecto de la recta $x = 1$

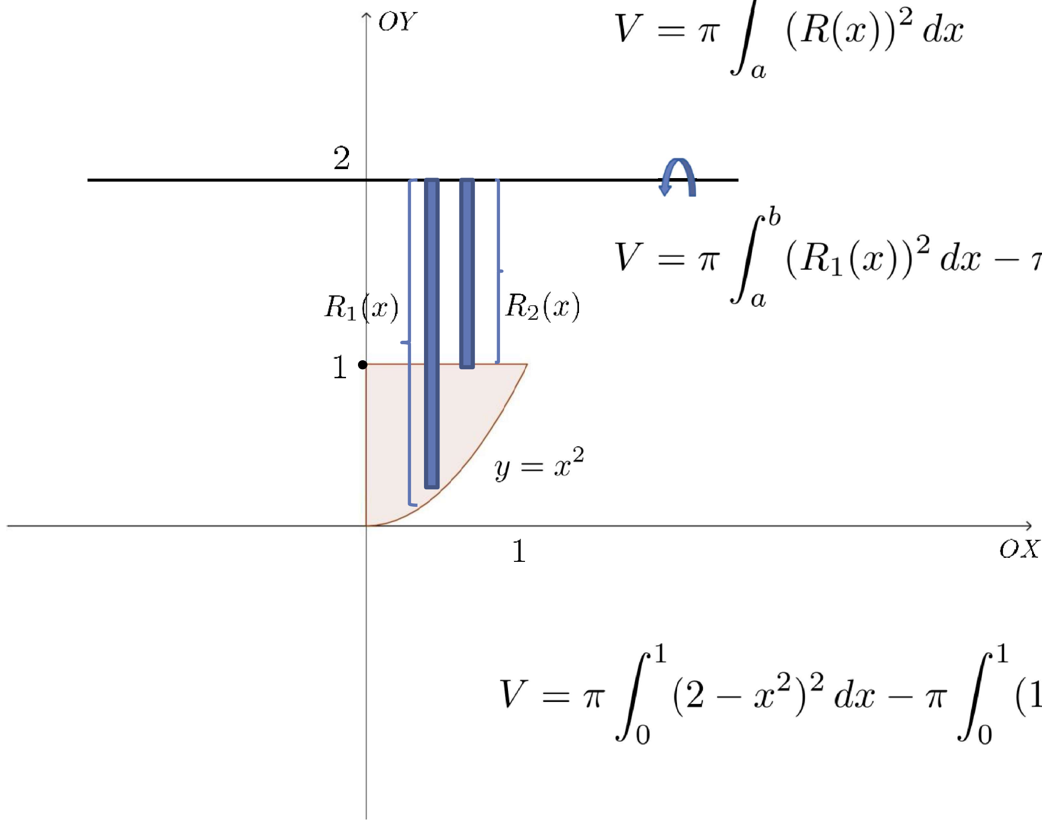


$$V = \pi \int_c^d (R(y))^2 \, dy$$

$$V = \pi \int_c^d (R_1(y))^2 \, dy - \pi \int_c^d (R_2(y))^2 \, dy$$

$$V = \pi \int_0^1 (1)^2 \, dy - \pi \int_0^1 (1 - \sqrt{y})^2 \, dy = \frac{5}{6}\pi$$

d) respecto de la recta $y = 2$

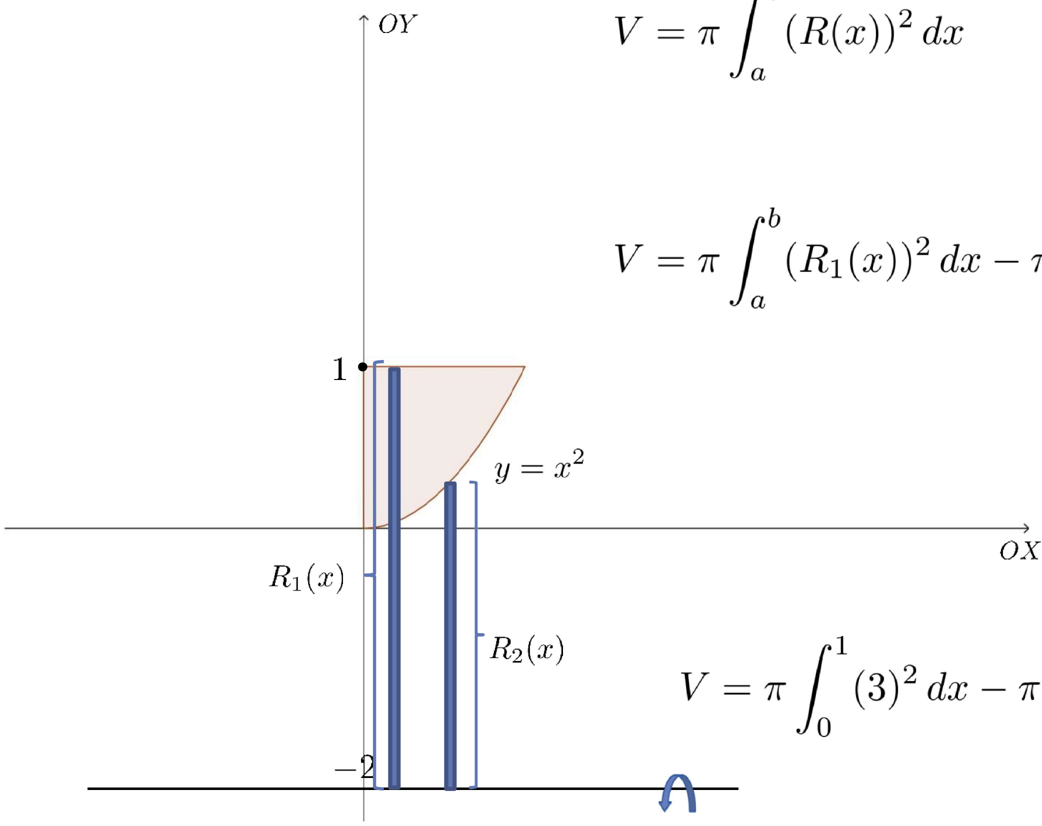


$$V = \pi \int_a^b (R(x))^2\, dx$$

$$V = \pi \int_a^b (R_1(x))^2\, dx - \pi \int_a^b (R_2(x))^2\, dx$$

$$V = \pi \int_0^1 (2 - x^2)^2\, dx - \pi \int_0^1 (1)^2\, dx \quad = \frac{28}{15}\pi$$

e) respecto de la recta $y = -2$



$$V = \pi \int_a^b (R(x))^2\, dx$$

$$V = \pi \int_a^b (R_1(x))^2\, dx - \pi \int_a^b (R_2(x))^2\, dx$$

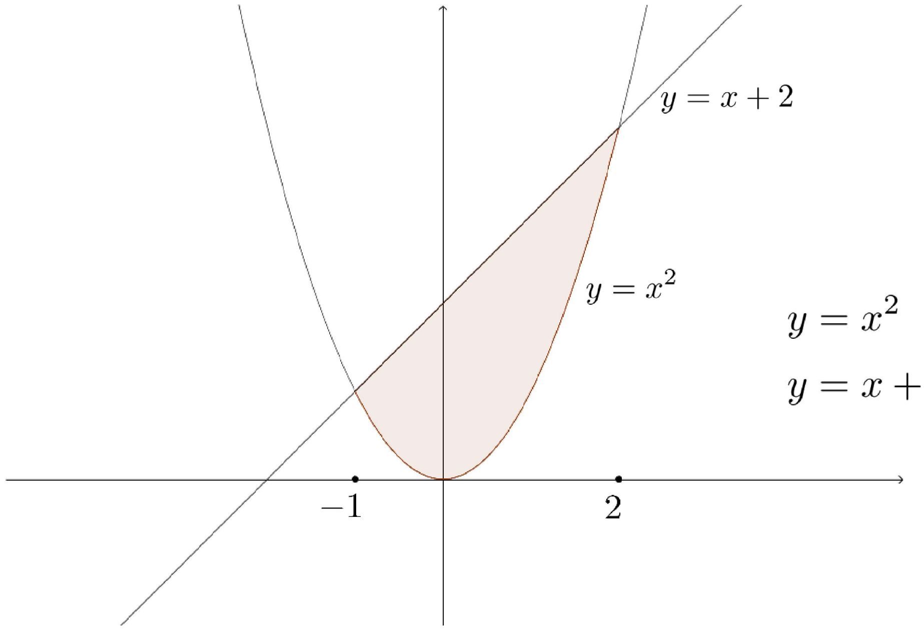
$$V = \pi \int_0^1 (3)^2\, dx - \pi \int_0^1 (2 + x^2)^2\, dx$$

Ejemplo:

Considérese la región acotada del plano limitada por la parábola $y = x^2$ y la recta $y = x + 2$. Calcular el volumen del sólido obtenido al girar dicha región:

a) respecto del eje OX

b) respecto de la recta $y = -1$

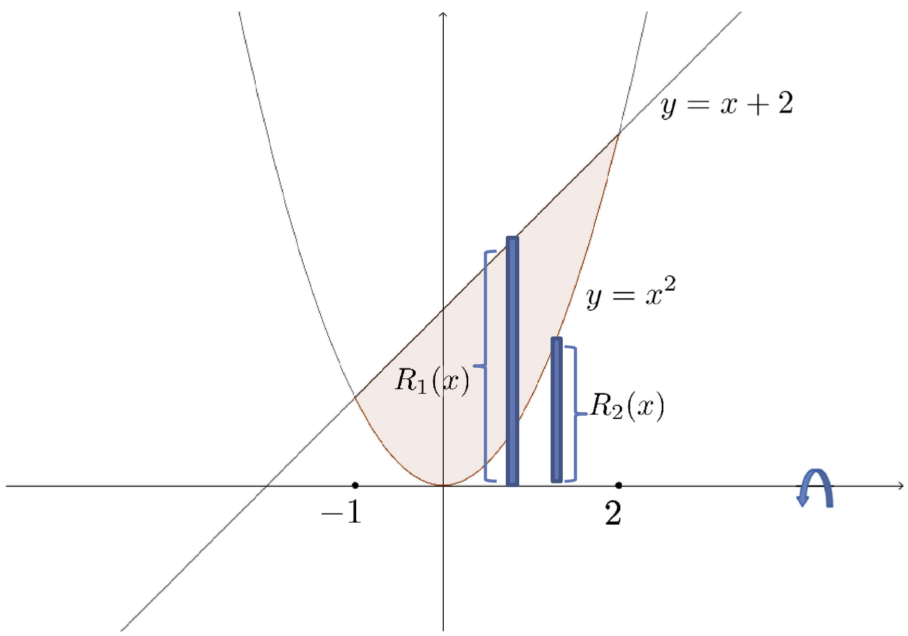


$$\left.\begin{aligned} y &= x^2 \\ y &= x + 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} x &= -1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

APLICACIONES DE LA INTEGRAL

a) respecto del eje OX

$$V = \pi \int_a^b (R_1(x))^2\, dx - \pi \int_a^b (R_2(x))^2\, dx = \pi \int_{-1}^{2} (x+2)^2\, dx - \pi \int_{-1}^{2} (x^2)^2\, dx$$

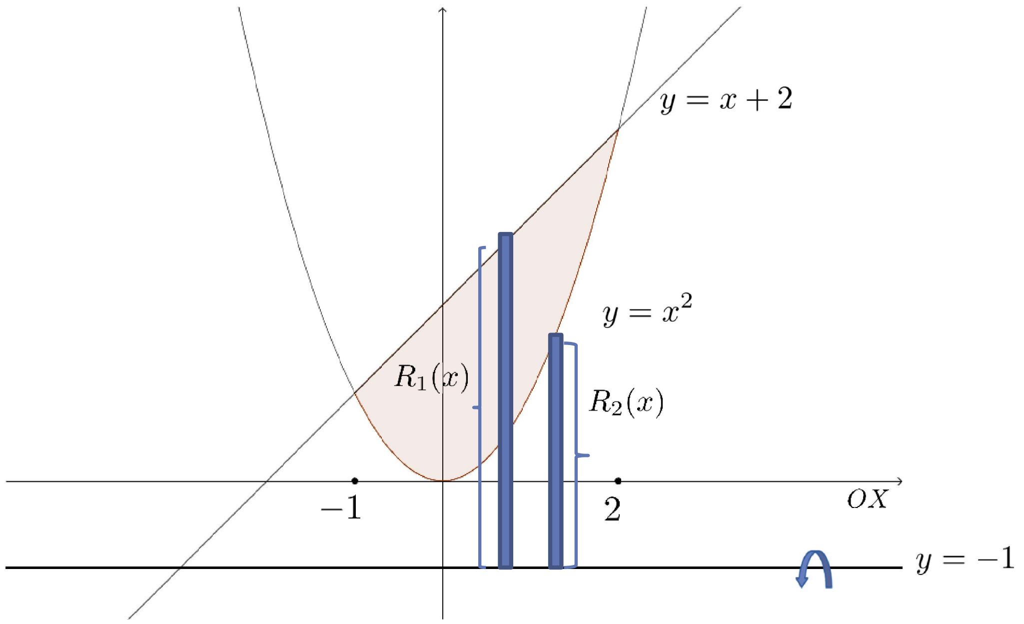


$$V = \frac{72}{5}\pi$$

b) respecto de la recta $y = -1$

$$V = \pi \int_a^b (R_1(x))^2\,dx - \pi \int_a^b (R_2(x))^2\,dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{2} (x+2+1)^2\,dx - \pi \int_{-1}^{2} (x^2+1)^2\,dx$$



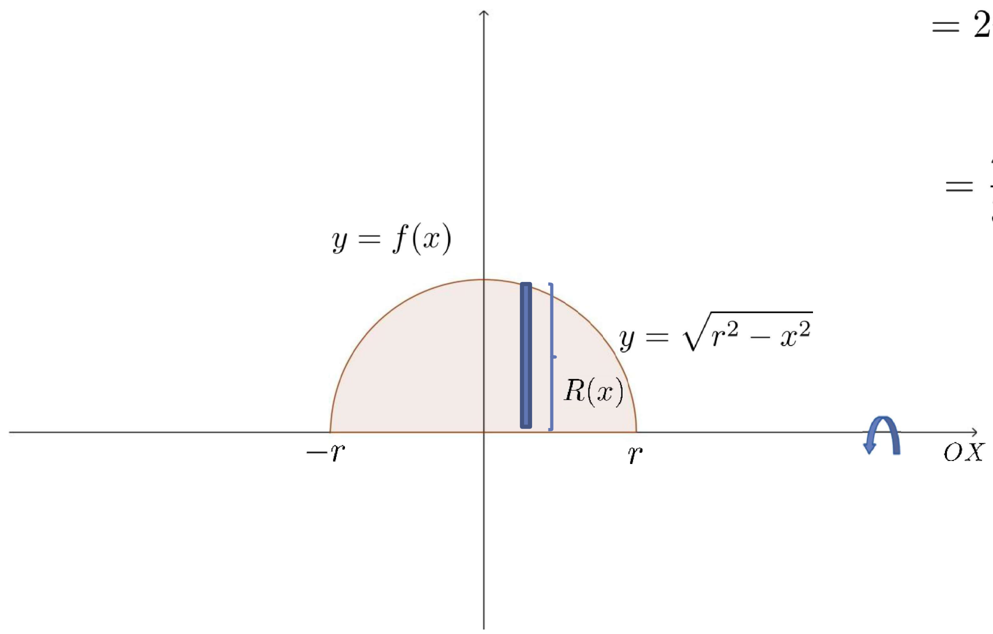
$$V = \frac{117}{5}\pi$$

Ejemplo: Calcular el volumen de la esfera de radio r

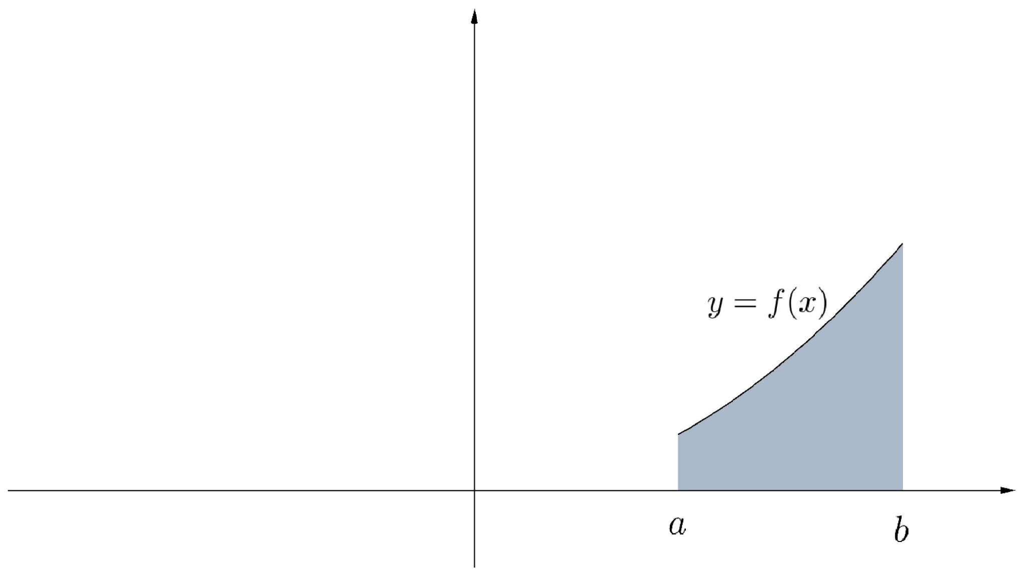
$$V = \pi \int_a^b (R(x))^2\,dx \quad = \pi \int_{-r}^{r} \left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)^2\,dx \;= 2\pi \int_0^r \left(r^2 - x^2\right)\,dx$$

$$= 2\pi \left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^r$$

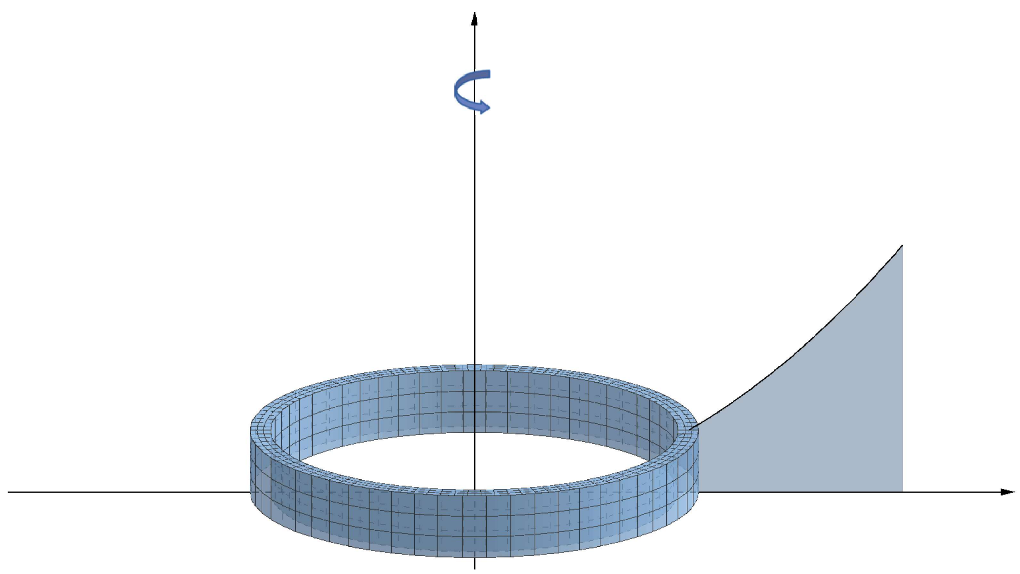
$$= \frac{4}{3}\pi r^3$$



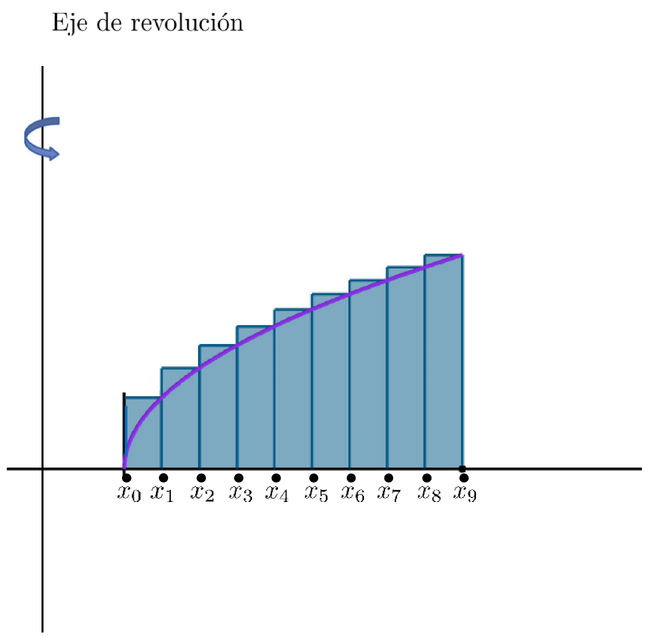
Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de capas.



Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de capas.



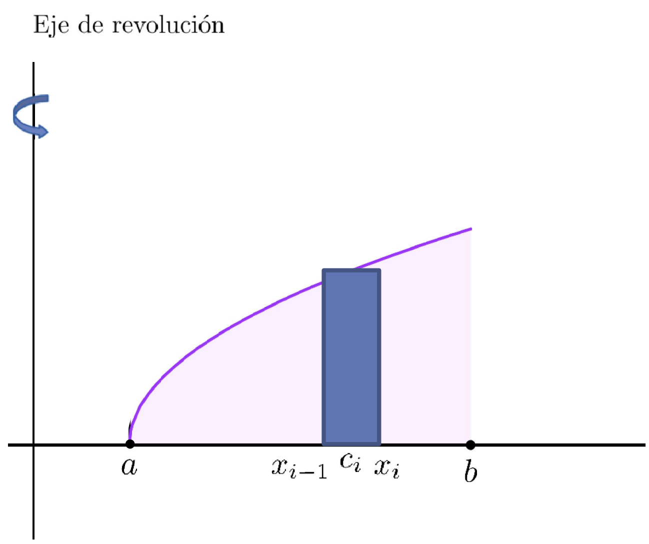
Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de capas.

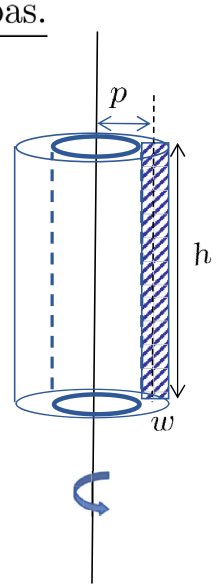


$$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$$

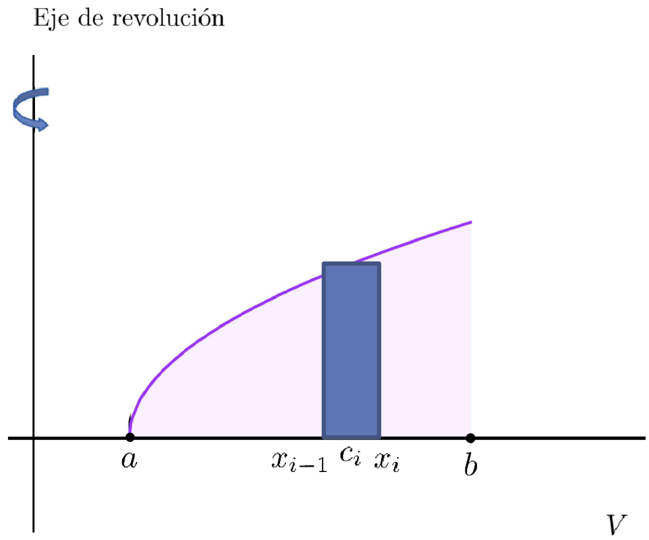
partición de $[a, b]$

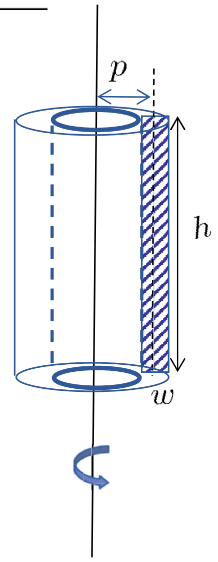
Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de capas.





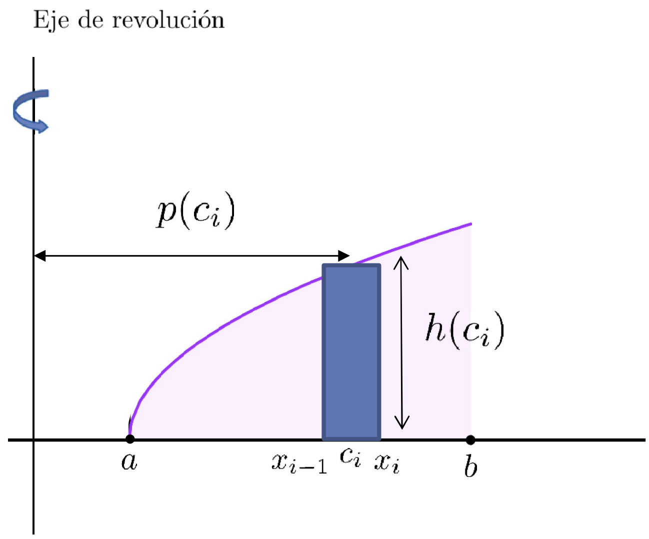
Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de capas.

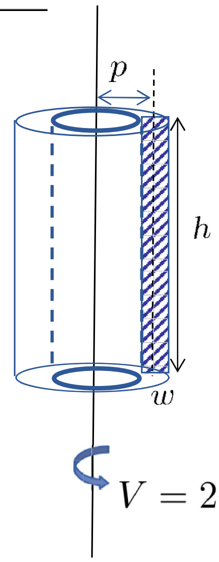




$$
\begin{aligned}
V &= V\,(\text{cilindro exterior}) - V\,(\text{cilindro interior}) \\
&= \pi\left(p+\frac{w}{2}\right)^2 h - \pi\left(p-\frac{w}{2}\right)^2 h \\
&= \pi\left(p^2+\frac{w^2}{4}+pw\right)h - \pi\left(p^2+\frac{w^2}{4}-pw\right)h \\
&= 2\pi phw
\end{aligned}
$$

Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de capas.

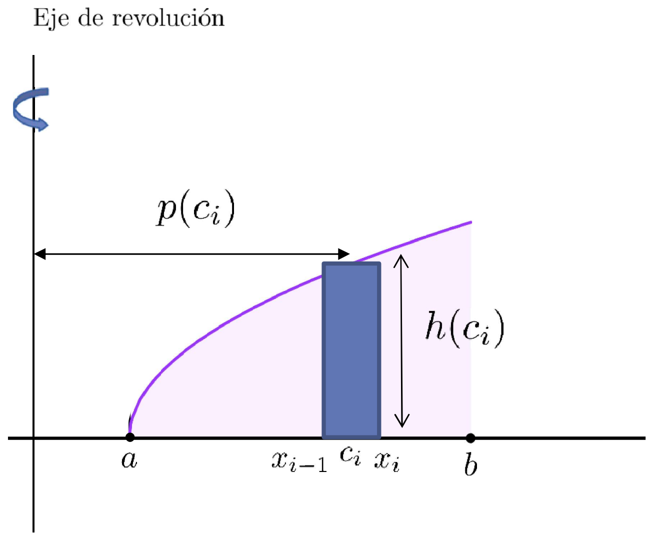


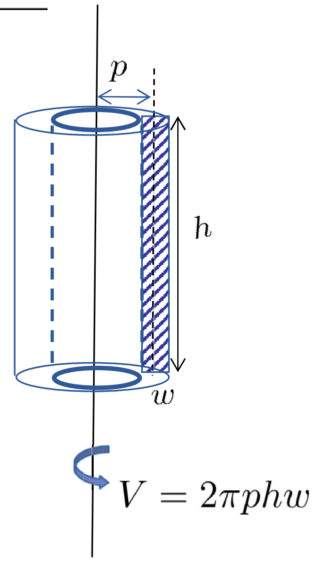


$V = 2\pi phw$

$$V_i = 2\pi p(c_i)h(c_i)\Delta x$$

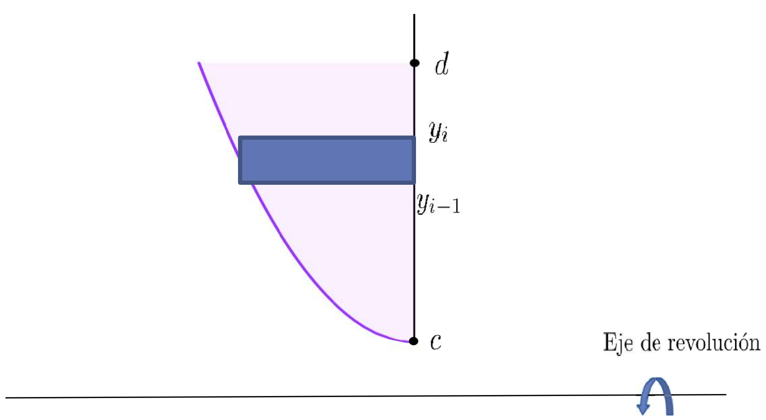
Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de capas.



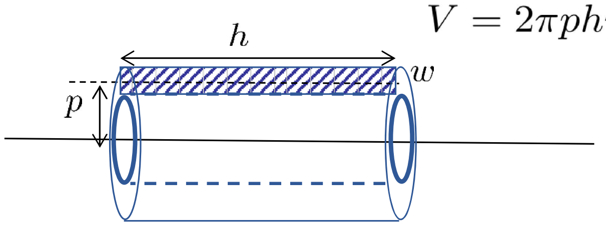


$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi p(c_i)h(c_i)\Delta x \quad = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx$$

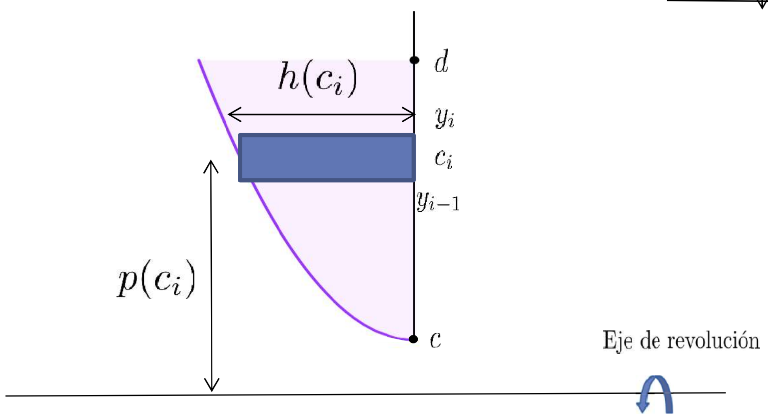
Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de capas.



Cálculo de volúmenes de cuerpos de revolución. Método de capas.



$$V = 2\pi phw$$



$$V_i = 2\pi p(c_i)h(c_i)\Delta y$$

$$V = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} V_i = \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} 2\pi p(c_i)h(c_i)\Delta y \quad = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\, dy$$

Ejemplo:

Considérese la región del primer cuadrante delimitada por la parábola $y = x^2$, el eje OY y la recta $y = 1$. Calcular, por el método de capas, el volumen del sólido obtenido al girar dicha región:

a) respecto del eje OY

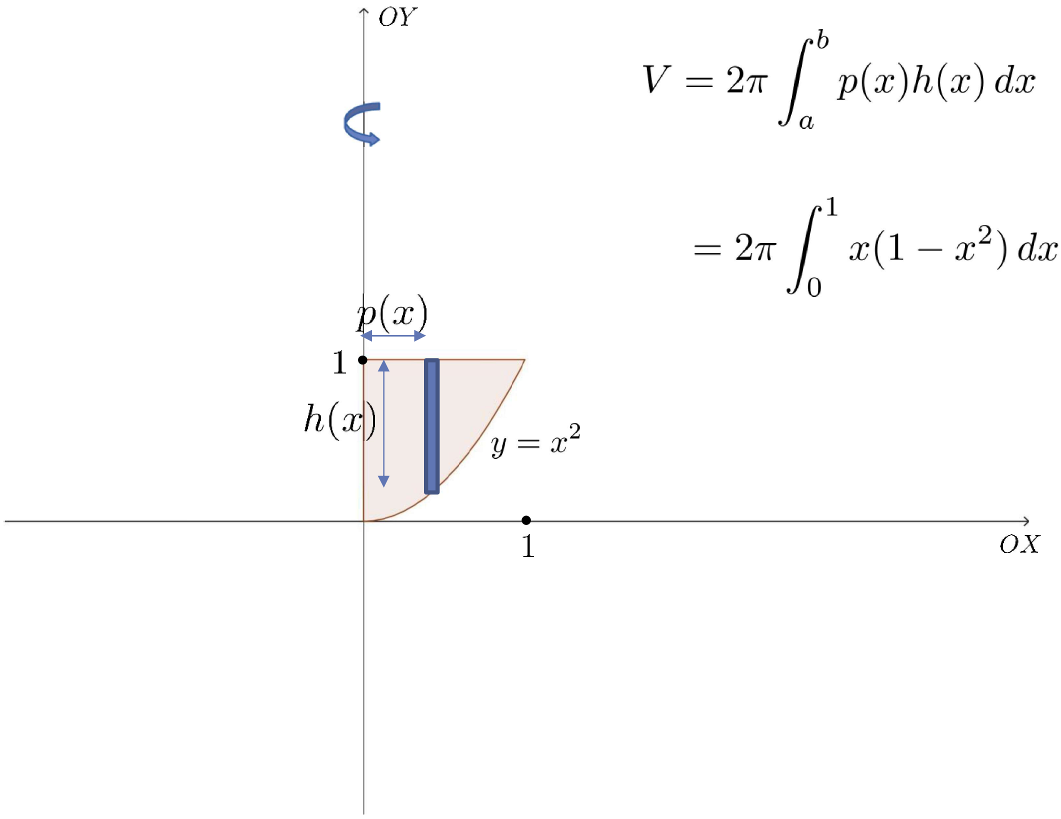
b) respecto de la recta $x = -1$

c) respecto de la recta $x = 1$

d) respecto de la recta $y = 2$

e) respecto de la recta $y = -2$

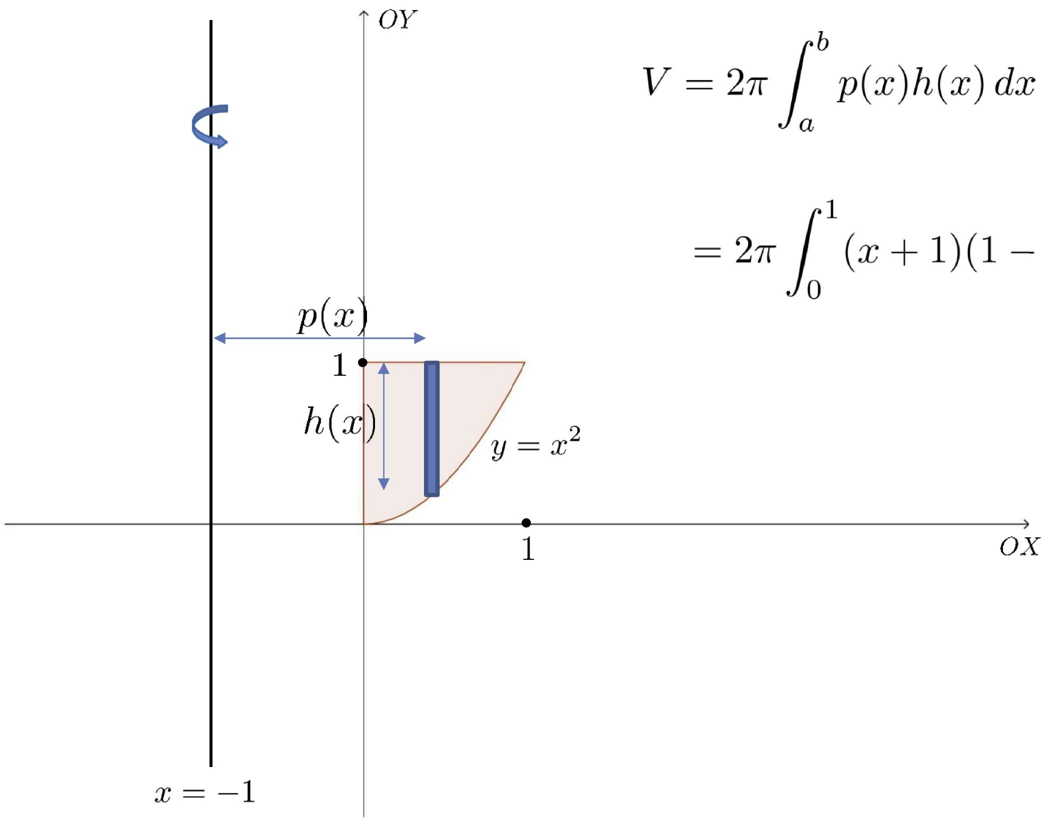
a) respecto del eje OY



$$V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x(1-x^2)\,dx = \frac{\pi}{2}$$

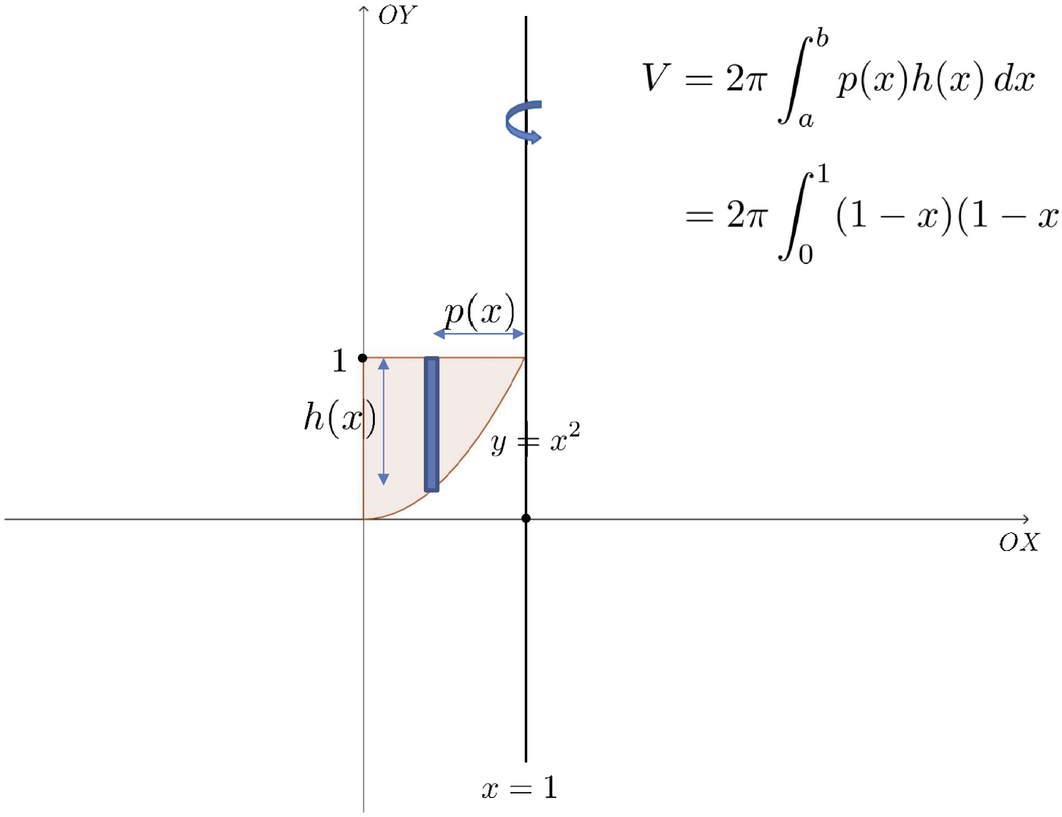
b) respecto de la recta $x = -1$



$$V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (x+1)(1-x^2)\,dx \quad = \frac{11}{6}\pi$$

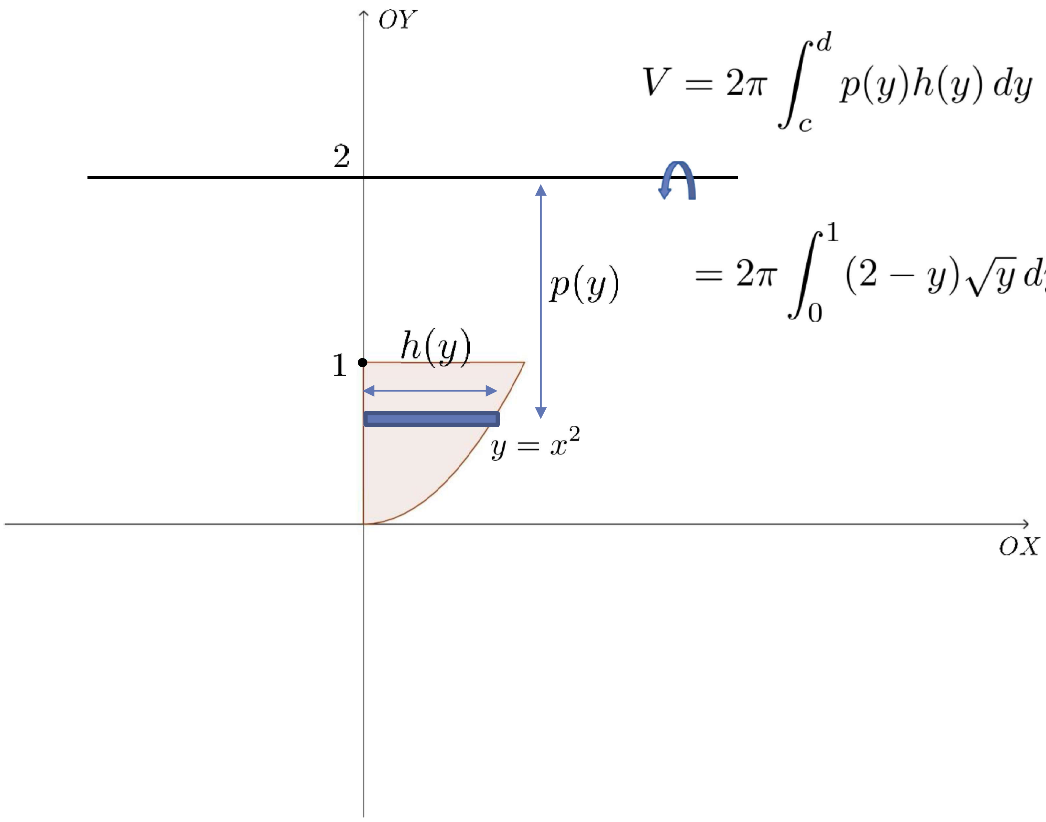
c) respecto de la recta $x = 1$



$$V = 2\pi \int_a^b p(x)h(x)\,dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 (1-x)(1-x^2)\,dx \quad = \frac{5}{6}\pi$$

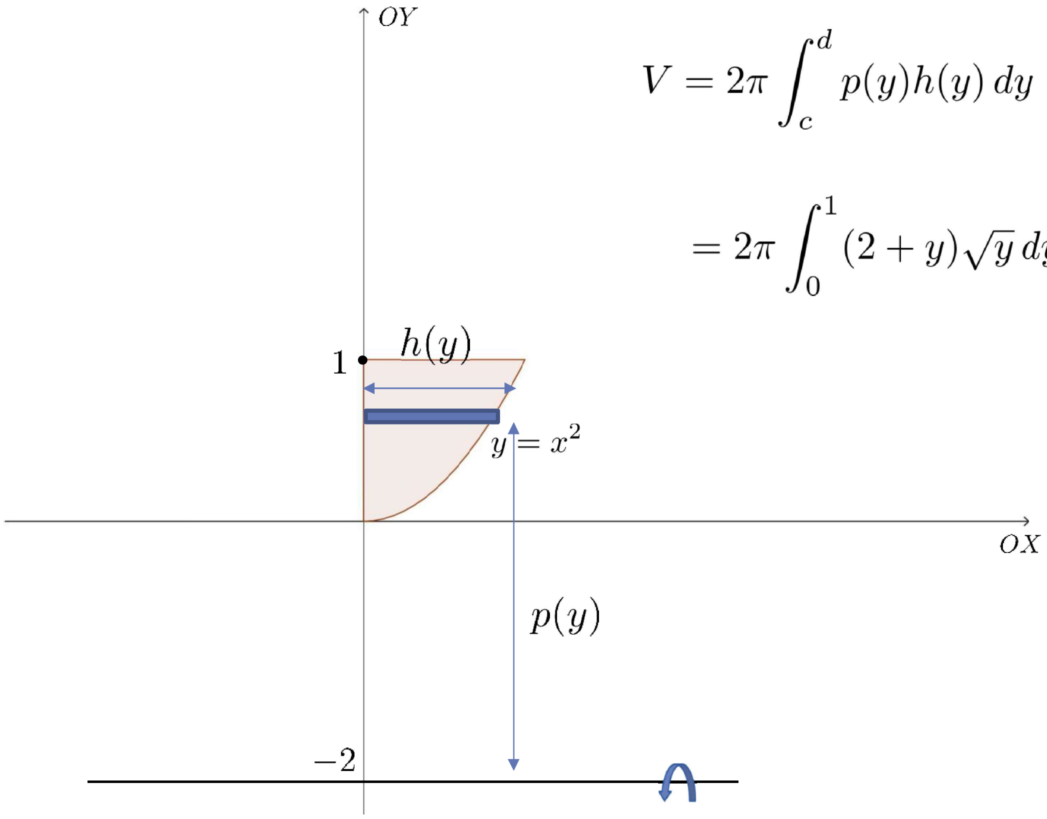
d) respecto de la recta $y = 2$



$$V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\,dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 (2-y)\sqrt{y}\,dy = \frac{28}{15}\pi$$

e) respecto de la recta $y = -2$



$$V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y)\,dy$$

$$= 2\pi \int_0^1 (2+y)\sqrt{y}\,dy = \frac{52}{15}\pi$$

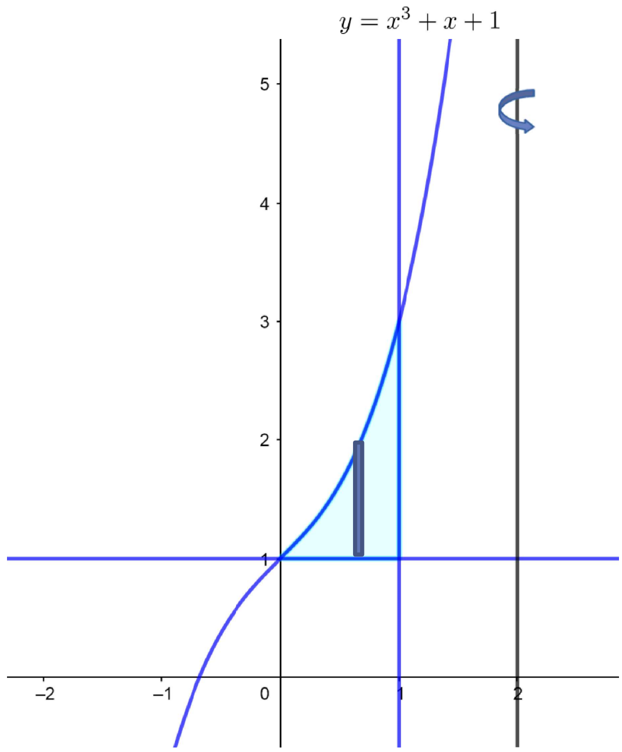
Ejemplo:

Calcular el volumen del sólido generado al girar, alrededor de la recta $x = 2$, la región limitada por las gráficas de $y = x^3 + x + 1$, $y = 1$ y $x = 1$.

$$V = 2\pi \int_0^1 p(x)h(x)\,dx$$

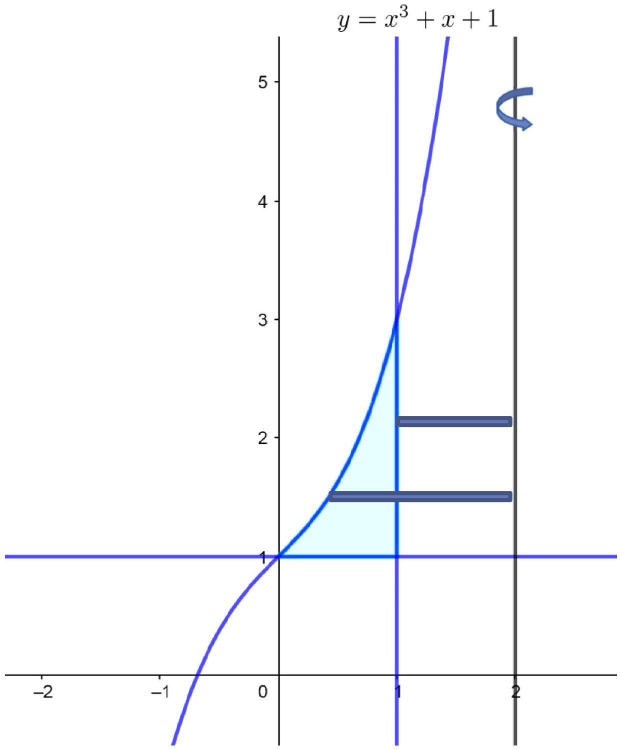
$$= 2\pi \int_0^1 (2-x)\left(x^3 + x + 1 - 1\right)\,dx$$

$$= \frac{29}{15}\pi$$



Ejemplo:

Calcular el volumen del sólido generado al girar, alrededor de la recta $x = 2$, la región limitada por las gráficas de $y = x^3 + x + 1$, $y = 1$ y $x = 1$.



Podemos observar qué ocurre si se intenta aplicar el método de discos

$$V = \pi \int_1^3 (R_1(y))^2\,dy - \pi \int_1^3 (R_2(y))^2\,dy$$

$$= \pi \int_1^3 (R_1(y))^2\,dy - \pi \int_1^3 (1)^2\,dy$$

?

No se puede hacer por el método de discos

Ejemplo:

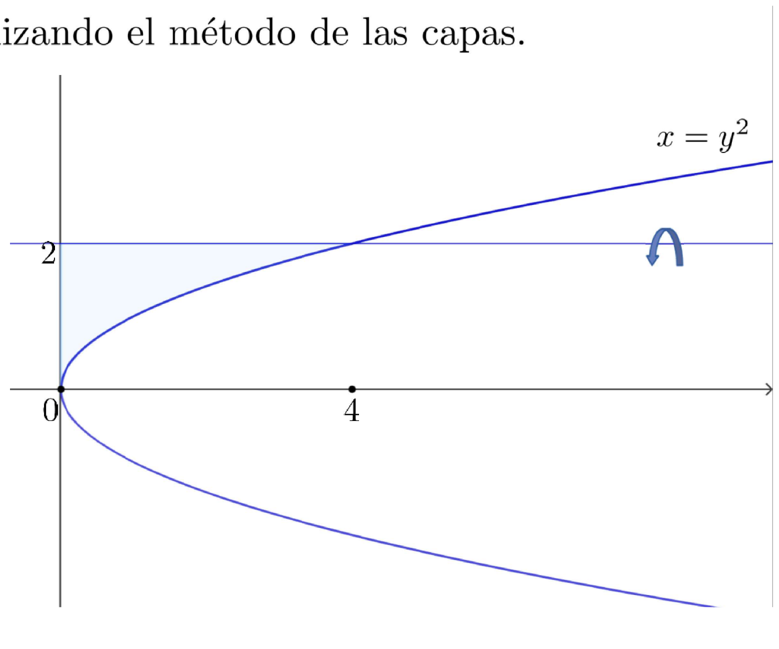
Sea $\mathcal{R}$ la región del plano acotada por la gráfica de $x = y^2$ y las rectas $y = 2$, $x = 0$. Sea S el sólido de revolución que se obtiene cuando $\mathcal{R}$ gira alrededor de la recta $y = 2$.

a) Expresar el volumen de S utilizando el método de los discos.

b) Expresar el volumen de S utilizando el método de las capas.

Intersección

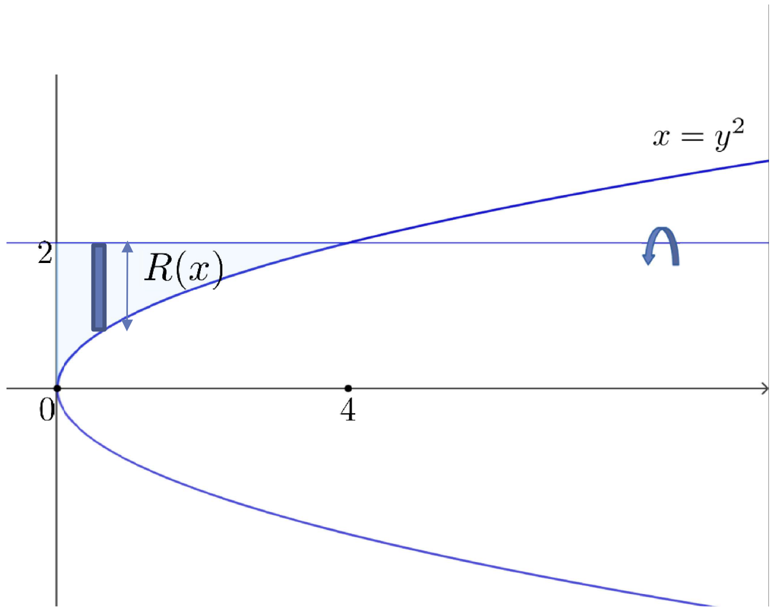
$$\left.\begin{array}{l} x = y^2 \\ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow (4, 2)$$



a) Método de los discos

$$V = \pi \int_a^b (R(x))^2 \, dx$$

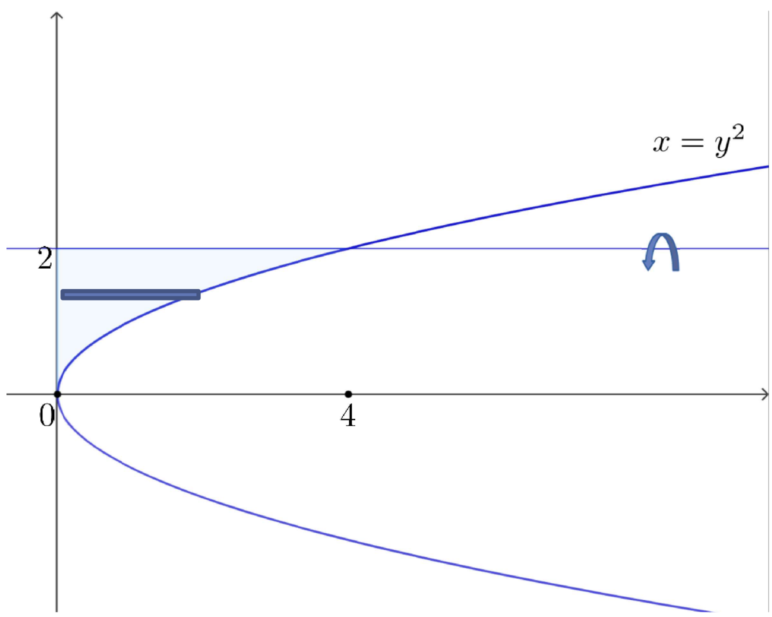
$$= \pi \int_0^4 \left(2 - \sqrt{x}\right)^2 dx$$



b) Método de las capas

$$V = 2\pi \int_c^d p(y)h(y) \, dy$$

$$= 2\pi \int_0^2 (2 - y) \, y^2 dy$$



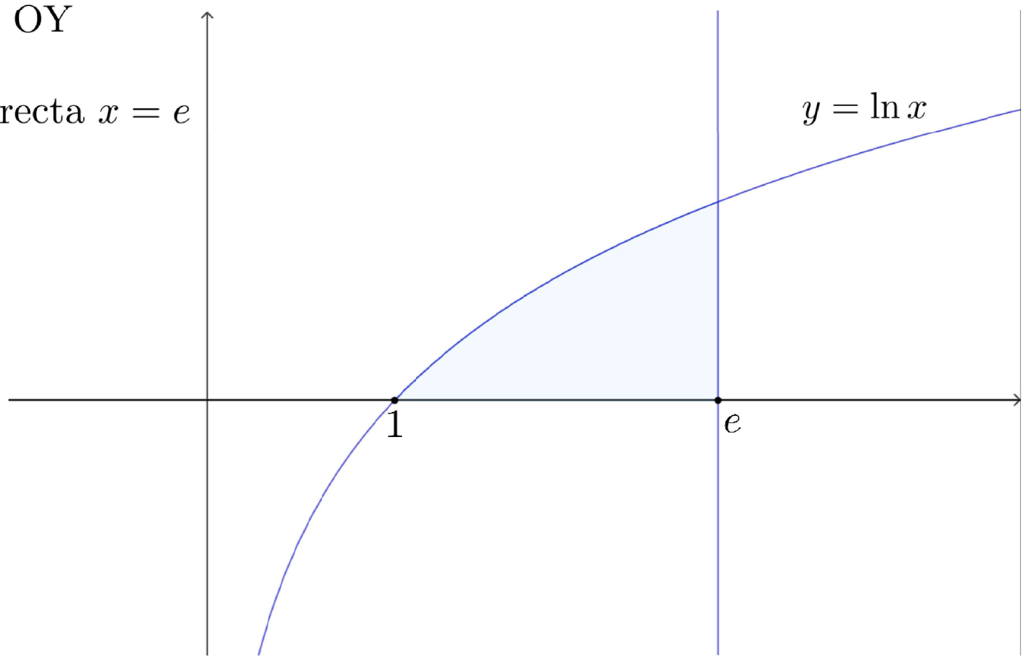
Ejemplo:

Sea $\mathcal{R}$ la región del plano limitada por las gráficas de $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 1$, $x = e$. Calcular el volumen del sólido generado al girar la región $\mathcal{R}$:

a) alrededor del eje OX

b) alrededordel eje OY

c) alrededor de la recta $x = e$



a) alrededor del eje OX

- Método de discos

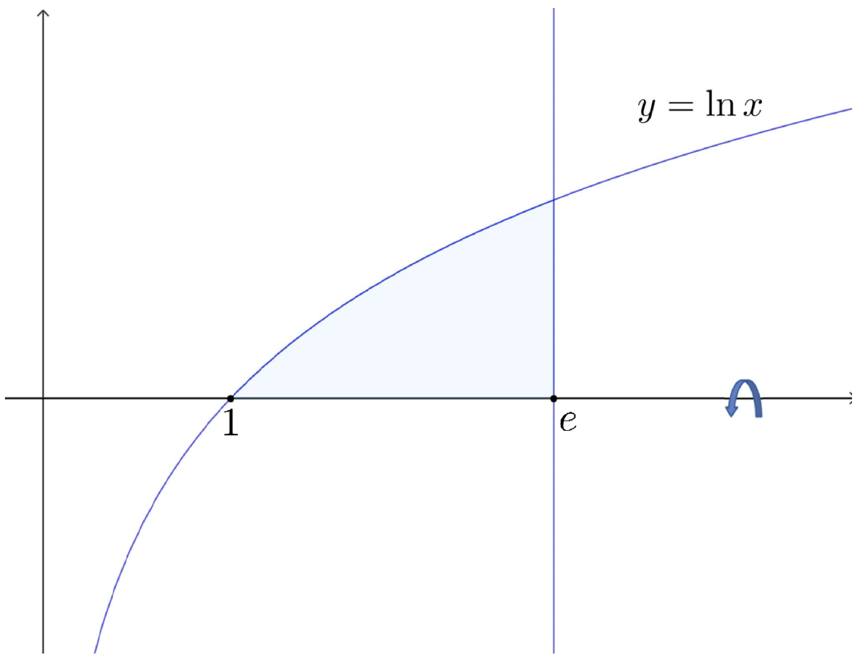
$$V = \pi \int_1^e (\ln x)^2\, dx$$

$$= \pi(e-2)$$

- Método de capas

$$V = 2\pi \int_0^1 y(e - e^y)\, dy$$

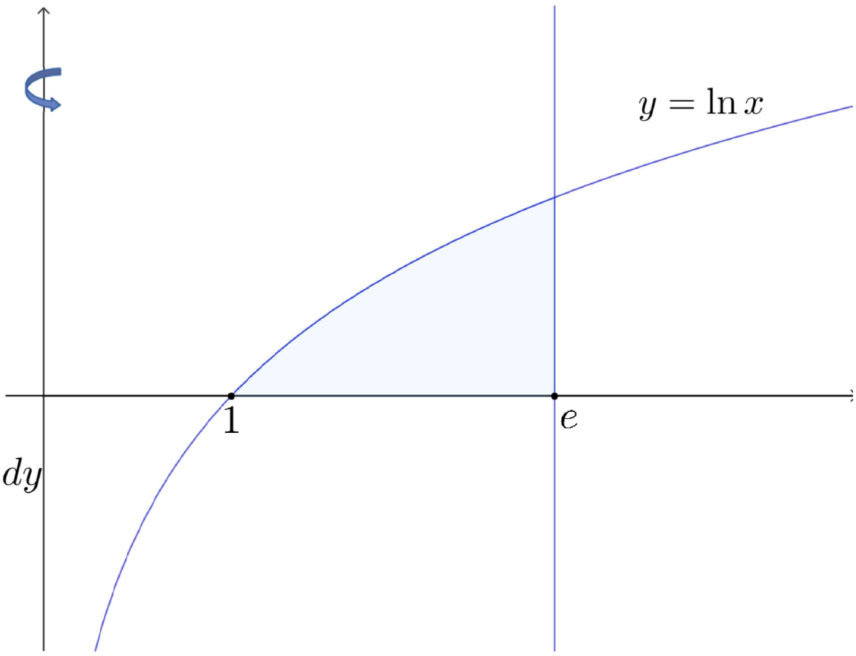
$$= \pi(e-2)$$



b) alrededor del eje OY

- Método de capas

$$V = 2\pi \int_1^e x \ln x \, dx$$
$$= \frac{\pi}{2}(1 + e^2)$$



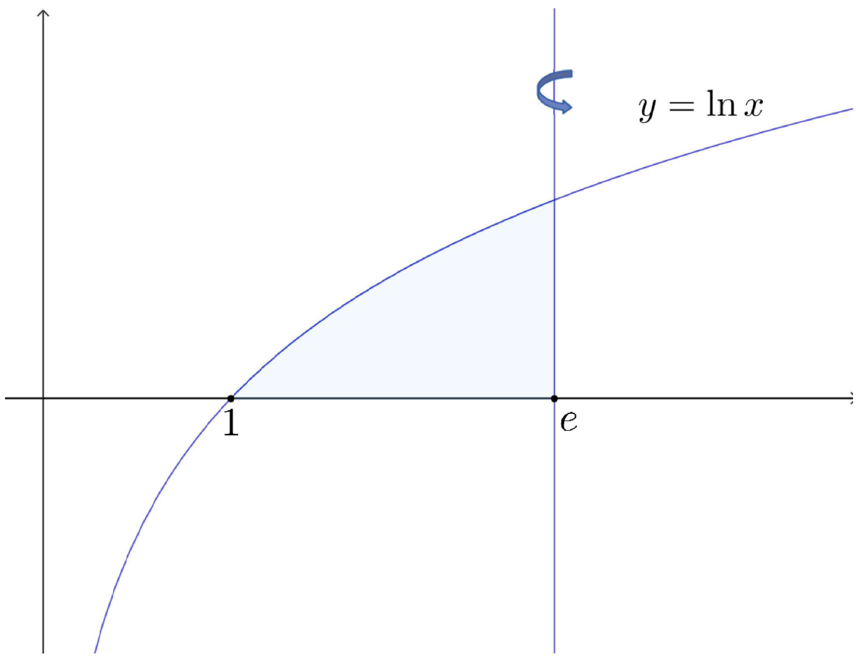
- Método de discos

$$V = \pi \int_0^1 e^2 \, dy - \pi \int_0^1 (e^y)^2 \, dy$$
$$= \frac{\pi}{2}(1 + e^2)$$

c) alrededor de la recta $x = e$

- Método de capas

$$V = 2\pi \int_1^e (e - x) \ln x \, dx$$
$$= 2\pi e - \frac{\pi}{2}(1 + e^2)$$



- Método de discos

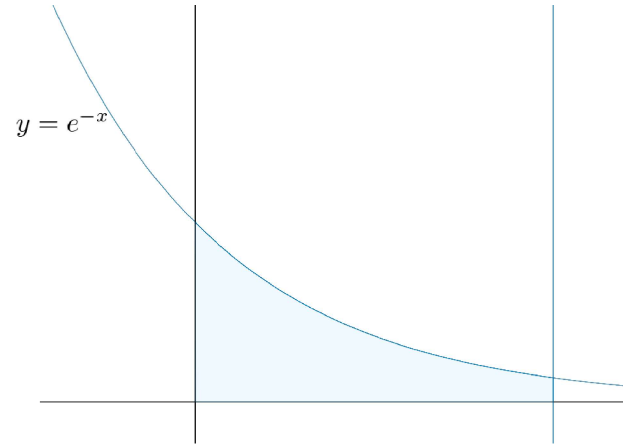
$$V = \pi \int_0^1 (e - e^y)^2 \, dy$$
$$= 2\pi e - \frac{\pi}{2}(1 + e^2)$$

Ejemplo:

Sea $\mathcal{R}$ la región del plano limitada por las gráficas de $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 2$. Calcular el volumen del sólido generado al girar región $\mathcal{R}$ alrededor de:

a) El eje OY

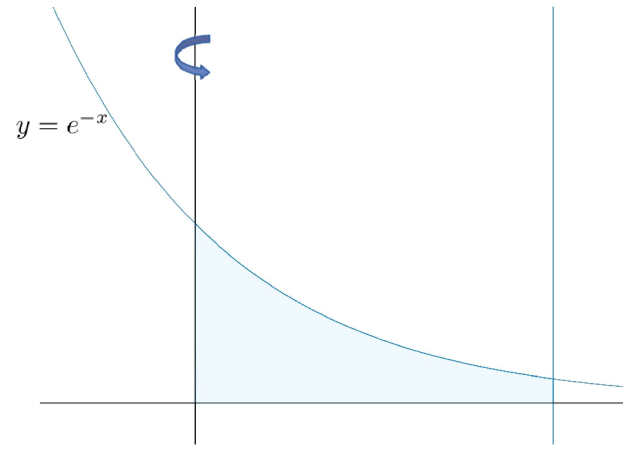
b) La recta $y = 2$



a) Alrededor del eje OY

- Método de capas

$$V = 2\pi \int_0^2 xe^{-x}\, dx \quad = 2\pi(1 - 3e^{-2})$$



- Método de discos

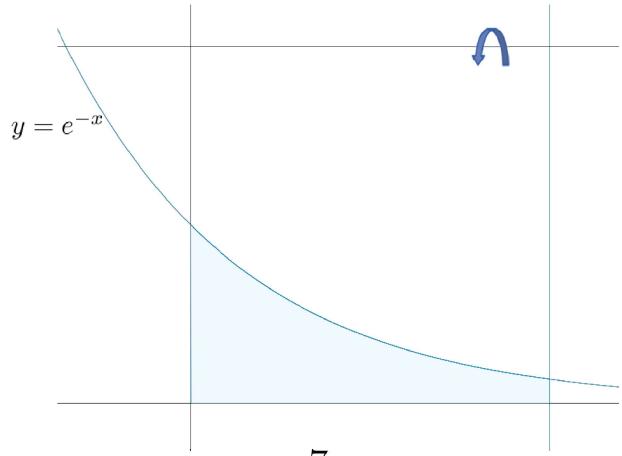
$$V = \pi \int_0^{e^{-2}} 2^2\, dy + \pi \int_{e^{-2}}^1 (-\ln y)^2\, dy \quad = 2\pi(1 - 3e^{-2})$$

b) Alrededor de la recta $y = 2$

- Método de capas

$$V = 2\pi \int_0^{e^{-2}} (2-y)2\,dy + 2\pi \int_{e^{-2}}^{1} (2-y)(-\ln y)\,dy$$

$$= -4\pi e^{-2} + \frac{\pi}{2}e^{-4} + \frac{7}{2}\pi$$



- Método de discos

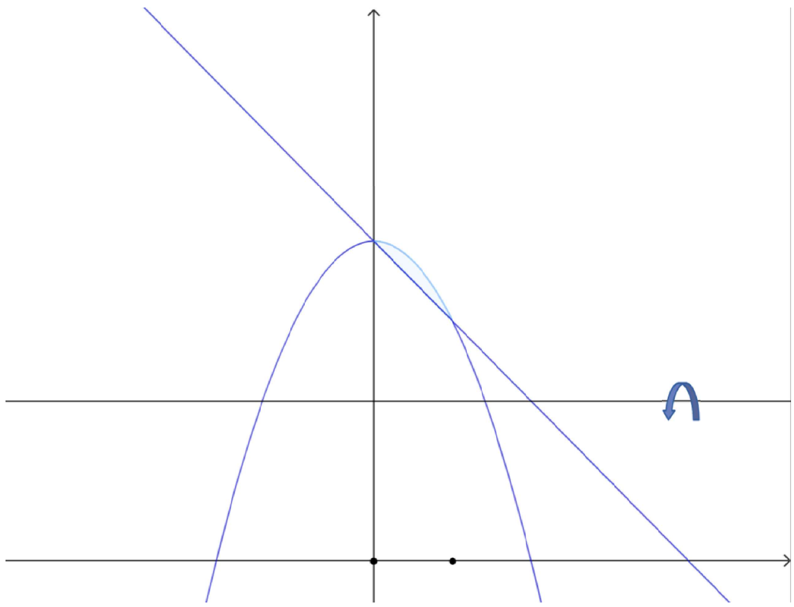
$$V = \pi \int_0^2 2^2\,dx - \pi \int_0^2 (2-e^{-x})^2\,dx \quad = -4\pi e^{-2} + \frac{\pi}{2}e^{-4} + \frac{7}{2}\pi$$

Ejemplo:

Sea S el sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje $y = 2$ la región $\mathcal{R}$ del plano acotada por la parábola $y = 4 - x^2$ y la recta $y = 4 - x$. Dibujar la región $\mathcal{R}$ y expresar, mediante integrales, cómo se puede calcular el volumen de S utilizando:

a) el método de las capas

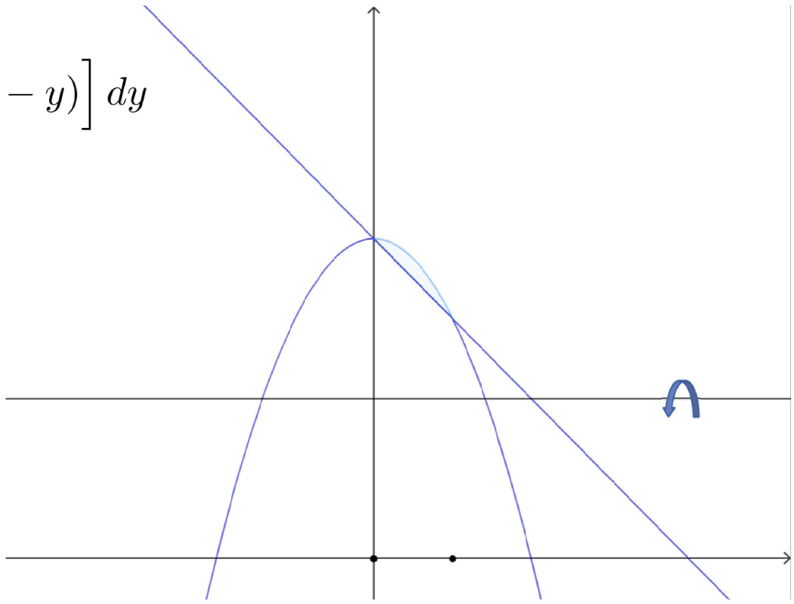
b) el método de los discos



a) el método de las capas

$$V = 2\pi \int_c^d p(y)\, h(y) dy$$

$$= 2\pi \int_3^4 (y-2)\left[\sqrt{4-y} - (4-y)\right] dy$$

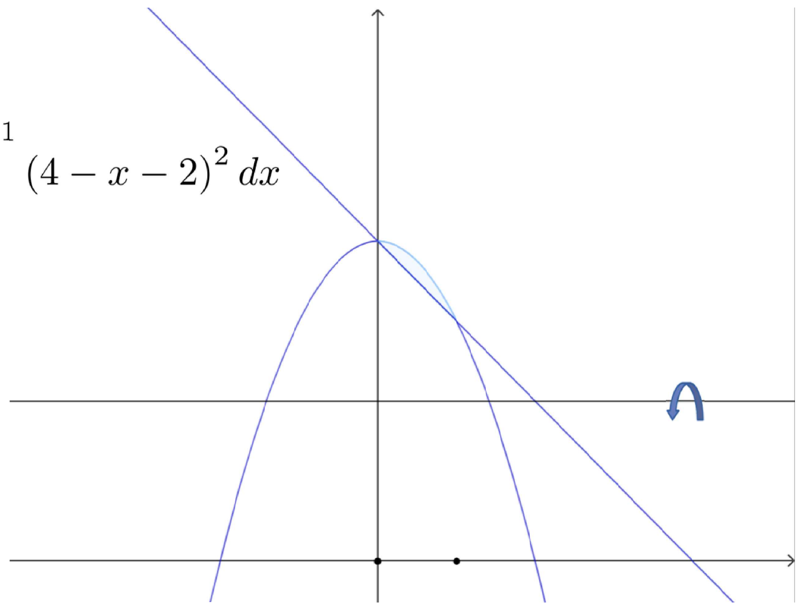


APLICACIONES DE LA INTEGRAL

b) el método de discos

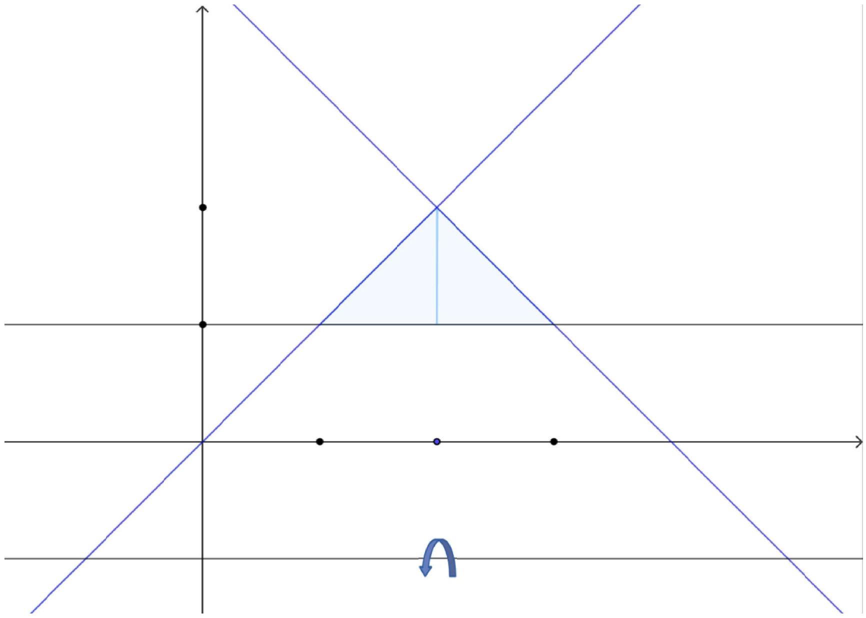
$$V = \pi \int_a^b (R_1(x))^2\, dx - \pi \int_a^b (R_2(x))^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 \left(4 - x^2 - 2\right)^2 dx - \pi \int_0^1 (4 - x - 2)^2\, dx$$



Ejemplo:

Sea S el sólido de revolución que se obtiene al girar alrededor del eje $y=-1$ la región $\mathcal{R}$ del plano limitada por las rectas $y+x=4,\ y=x,\ y=1$. Calcular el volumen.

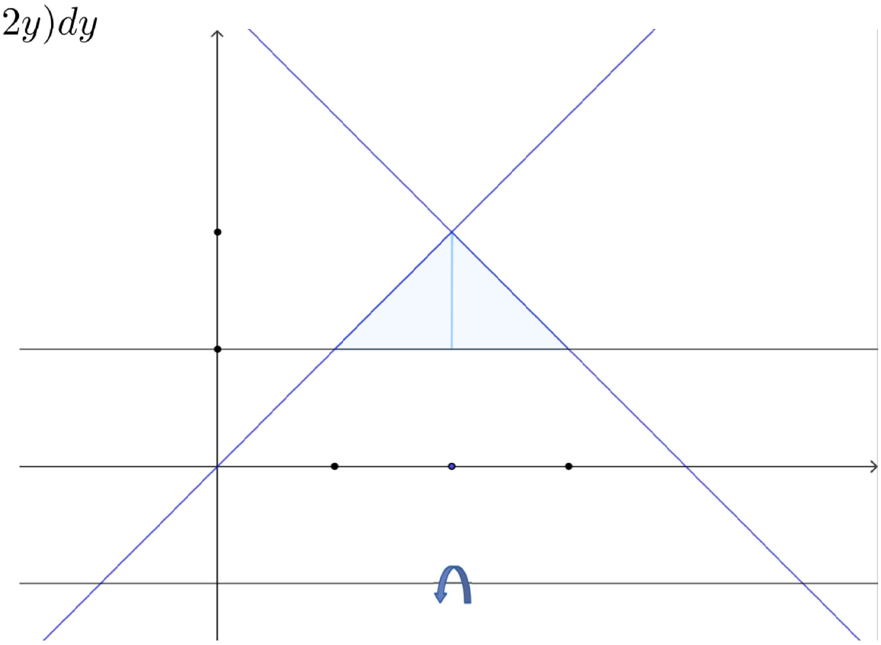


- Método de capas

$$V = 2\pi \int_c^d p\,(y)\,h(y)dy$$

$$= 2\pi \int_1^2 (1+y)\,(4-2y)dy$$

$$= \frac{14}{3}\pi$$



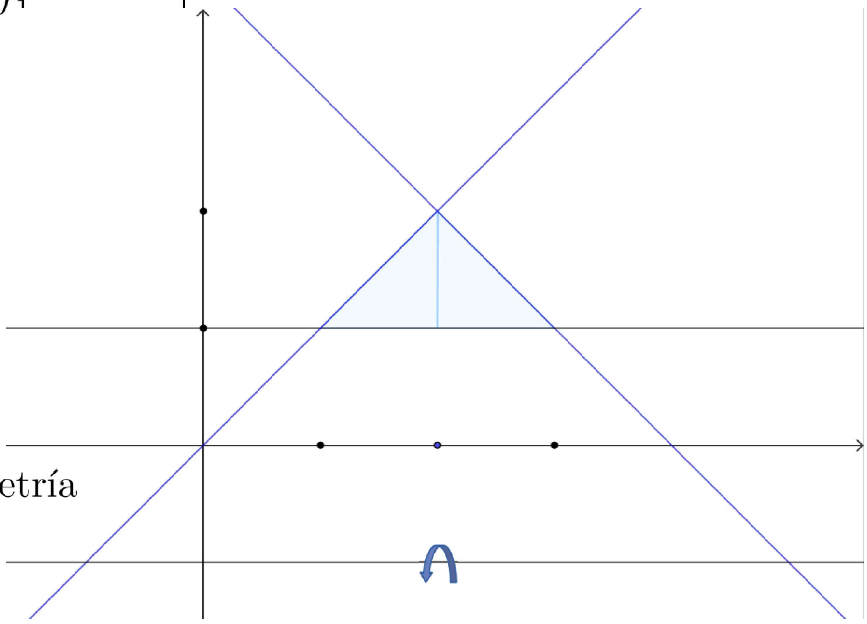
- Método de discos

$$V = \pi \int_a^b (R_1(x))^2\,dx - \pi \int_a^b (R_2(x))^2 dx$$

$$= 2\left[\pi \int_1^2 (x+1)^2\,dx - \pi \int_1^2 (2)^2\,dx\right]$$

$$= \frac{14}{3}\pi$$

Simetría



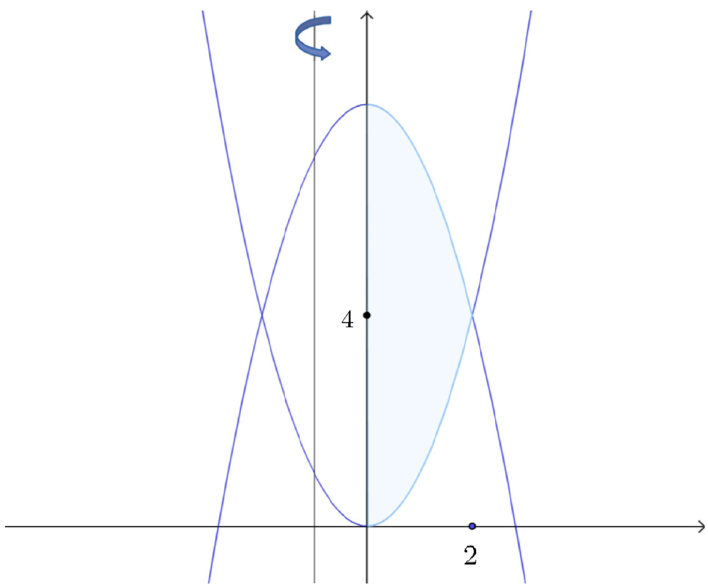
APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Ejemplo:

Calcular el volumen del sólido formado cuando la región del primer cuadrante limitada por $y = x^2$, $y = 8 - x^2$, $x = 0$ gira alrededor de la recta $x = -1$

Intersección

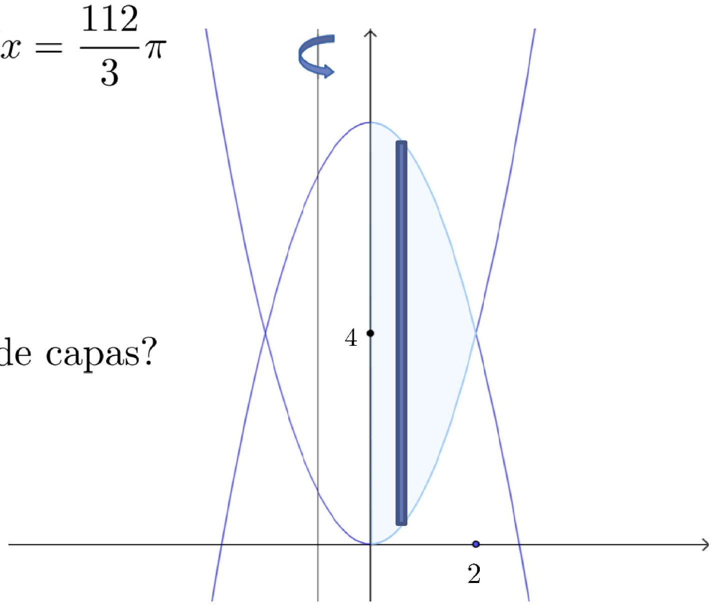
$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = 8 - x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow (2,4)$$



- Método de capas

$$V = 2\pi \int_a^b p(x)\, h(x)\, dx$$

$$= 2\pi \int_0^2 (x+1)\left((8-x^2)-x^2\right) dx = \frac{112}{3}\pi$$

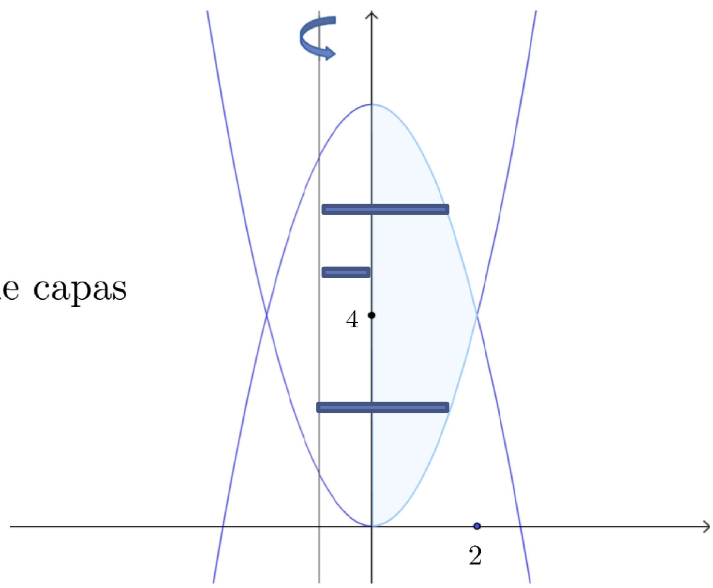


¿Por qué optamos por el método de capas?

- Método de discos

$$V = \pi \int_c^d (R(y))^2\, dy$$

$$V = \pi \int_0^4 (\sqrt{y}+1)^2\, dy + \pi \int_4^8 \left(\sqrt{8-y}+1\right)^2 dy - \pi \int_0^8 (1)^2\, dy = \frac{112}{3}\pi$$



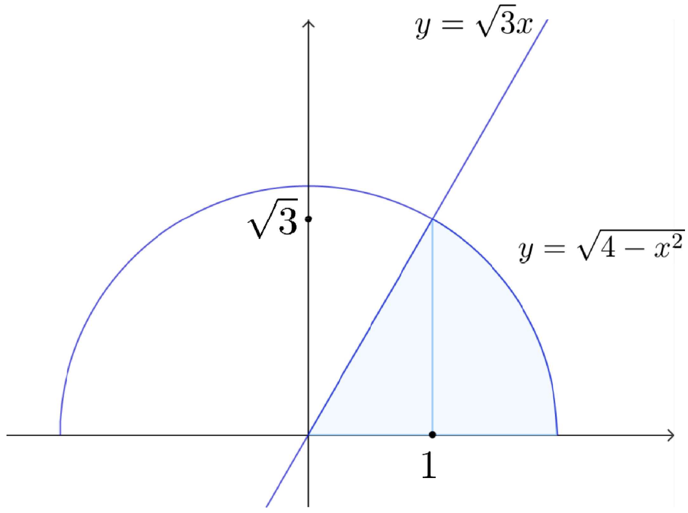
Más complicado que el método de capas

Ejemplo:

Calcular el volumen del sólido de revolución generado cuando la región del plano, acotada por las gráficas $y = \sqrt{3}\,x$, $y = \sqrt{4 - x^2}$ y el semieje positivo de abscisas, gira:

a) Alrededor del eje OX

b) Alrededor del eje OY

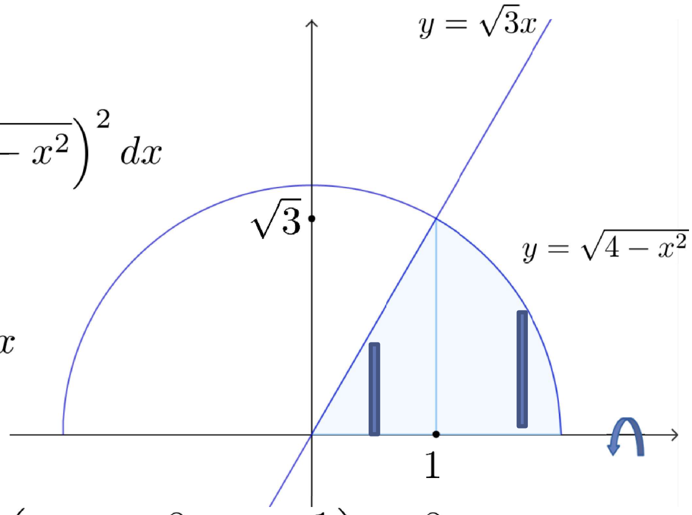


Intersección

$$\left.\begin{array}{l} y = \sqrt{3}x \\ y = \sqrt{4 - x^2} \end{array}\right\} \Rightarrow (1, \sqrt{3})$$

a) Alrededor del eje OX

- Método de discos



$$V = \pi \int_0^1 \left(\sqrt{3}x\right)^2 dx + \pi \int_1^2 \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_0^1 3x^2 dx + \pi \int_1^2 (4 - x^2)\, dx$$

$$= \pi \left(\left[x^3\right]_0^1 + \left[4x - \frac{x^3}{3}\right]_1^2 \right) = \pi \left(1 + 8 - \frac{8}{3} - 4 + \frac{1}{3}\right) = \frac{8}{3}\pi$$

a) Alrededor del eje OX

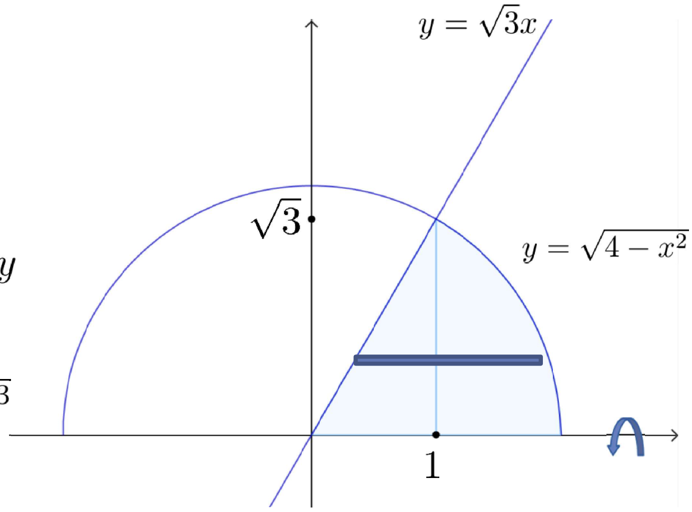
- Método de capas

$$V = 2\pi \int_c^d p(y)\, h(y)\, dy$$

$$V = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} y \left(\sqrt{4-y^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} y \right) dy$$

$$= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(4-y^2)^{3/2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{y^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= 2\pi \left[\frac{7}{3} - 1 \right] = \frac{8}{3}\pi$$



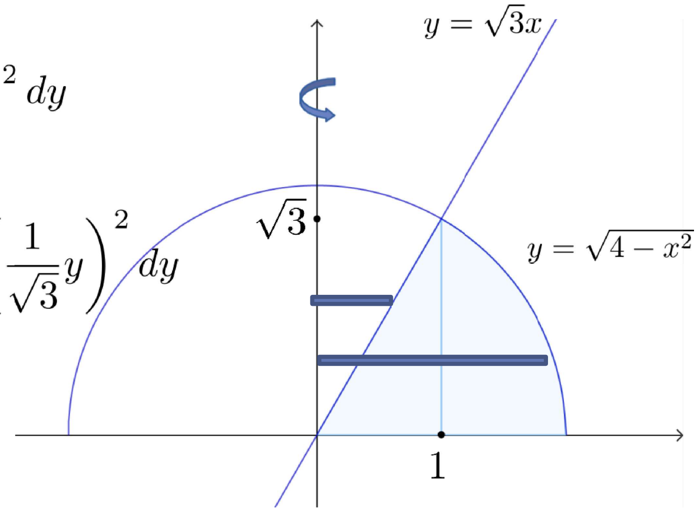
APLICACIONES DE LA INTEGRAL

b) Alrededor del eje OY

- Método de discos

$$V = \pi \int_c^d (R_1(y))^2\, dy - \pi \int_c^d (R_2(y))^2\, dy$$

$$= \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\sqrt{4-y^2} \right)^2 dy - \pi \int_0^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} y \right)^2 dy$$



b) Alrededor del eje OY

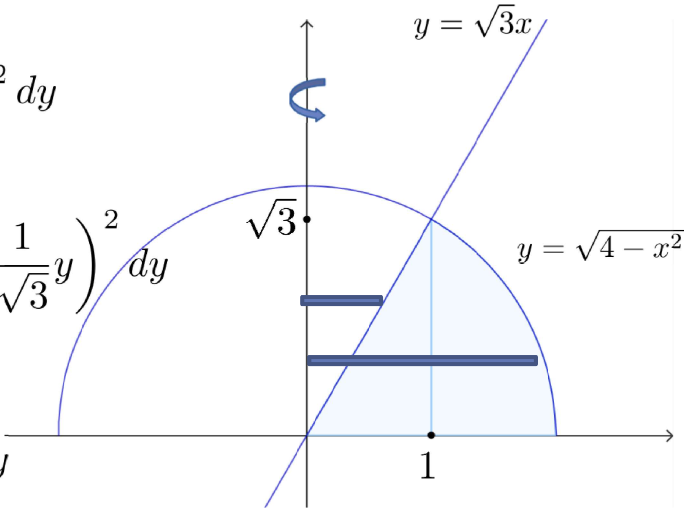
- Método de discos

$$V=\pi\int_c^d (R_1(y))^2\,dy-\pi\int_c^d (R_2(y))^2\,dy$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(\sqrt{4-y^2}\right)^2 dy-\pi\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}y\right)^2 dy$$

$$=\pi\int_0^{\sqrt{3}}(4-y^2)\,dy-\pi\int_0^{\sqrt{3}}\frac{1}{3}y^2dy$$

$$=\pi\left(\left[4y-\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}+\left[\frac{1}{3}\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$$



APLICACIONES DE LA INTEGRAL

b) Alrededor del eje OY

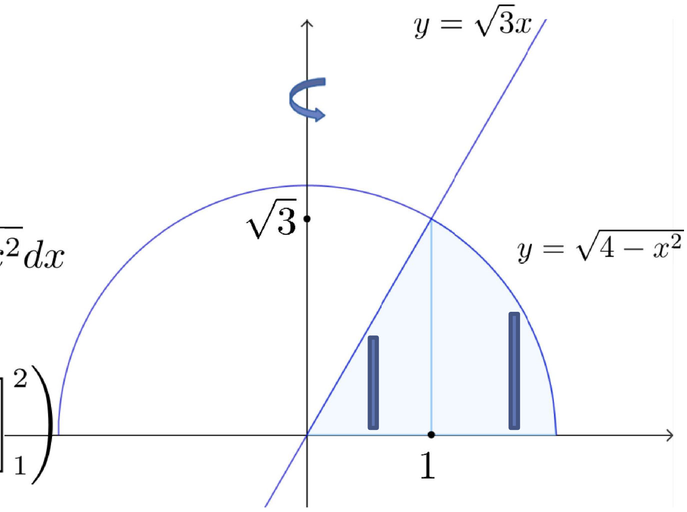
- Método de capas

$$V=2\pi\int_a^b p(x)\,h(x)\,dx$$

$$V=2\pi\int_0^1 x\sqrt{3}x dx+2\pi\int_1^2 x\sqrt{4-x^2}dx$$

$$=2\pi\left(\left[\sqrt{3}\frac{x^3}{3}\right]_0^1+\left[\frac{-1}{3}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2\right)$$

$$=2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{1}{3}3\sqrt{3}\right)=\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$$

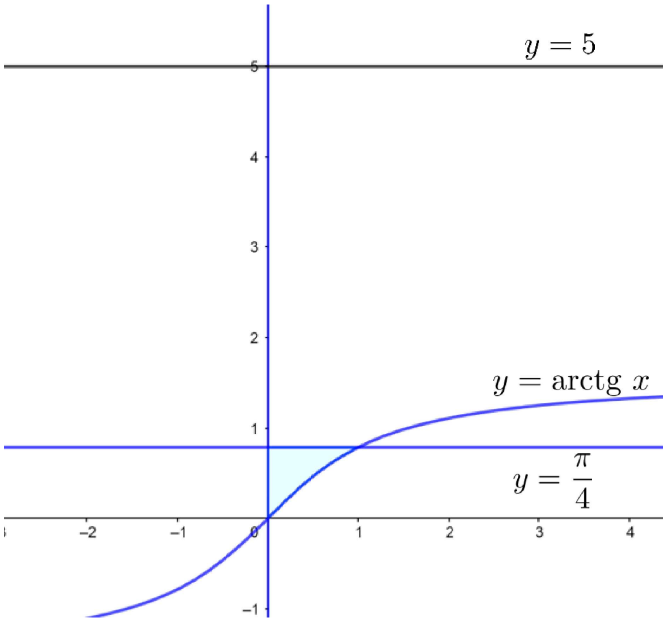


Ejemplo:

Sea $\mathcal{R}$ la región acotada por la gráfica de la función $y = \text{arctg}(x)$, la recta $y = \dfrac{\pi}{4}$ y el eje de ordenadas. Expresar mediante integrales el volumen del sólido de revolución que se obtiene al girar la región $\mathcal{R}$

a) alrededor de la recta $y = 5$.

b) alrededor del eje de ordenadas.



Intersección

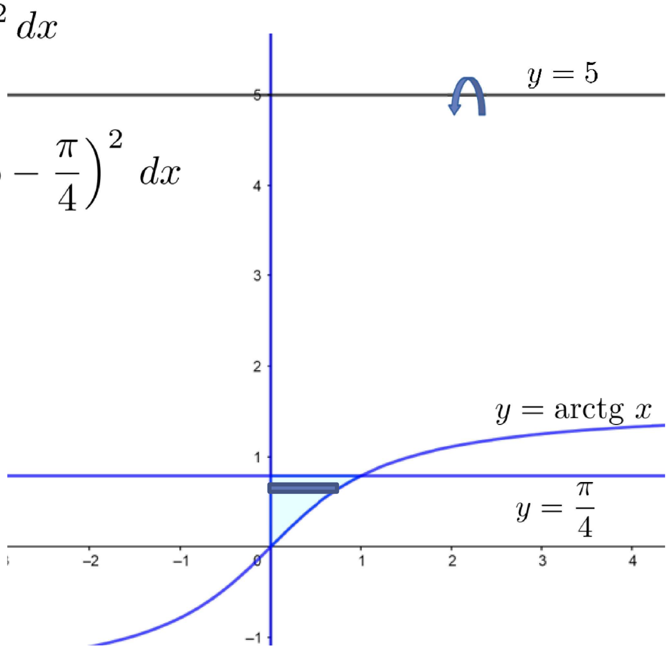
$$\left.\begin{array}{l} y = \text{arctg } x \\ y = \dfrac{\pi}{4} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(1, \frac{\pi}{4}\right)$$

a) alrededor de la recta $y = 5$

- Método de discos

$$V = \pi \int_0^1 (R_1(x))^2\,dx - \pi \int_0^1 (R_2(x))^2\,dx$$

$$= \pi \int_0^1 (5 - \text{arctg } x)^2\,dx - \pi \int_0^1 \left(5 - \frac{\pi}{4}\right)^2\,dx$$



- Método de capas

$$V = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} p(y)h(y)\,dy$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\text{tg } y)(5 - y)\,dy$$

b) alrededor del eje de ordenadas

- Método de discos

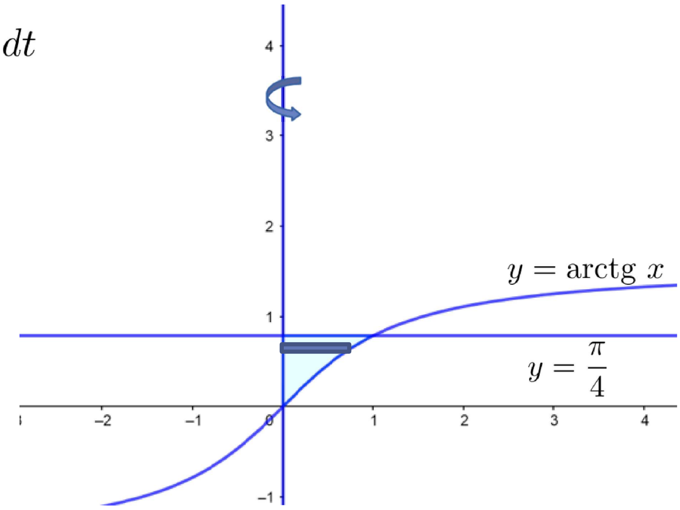
$$V = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (R(y))^2 \, dy \quad = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\text{tg } y)^2 \, dy$$

$$= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\text{sen}^2 y}{\cos^2 y} \, dy \quad = \pi \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2} \, dt$$

$$y = 0 \to t = 0$$
$$y = \tfrac{\pi}{4} \to t = 1$$

$$\boxed{\begin{aligned} \text{tg } y &= t \\ \cos y &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \text{sen } y &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ dy &= \frac{1}{1+t^2} dt \end{aligned}}$$

$$= \pi \left[t - \text{arctg } t\right]_0^1 = \pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$



b) alrededor del eje de ordenadas

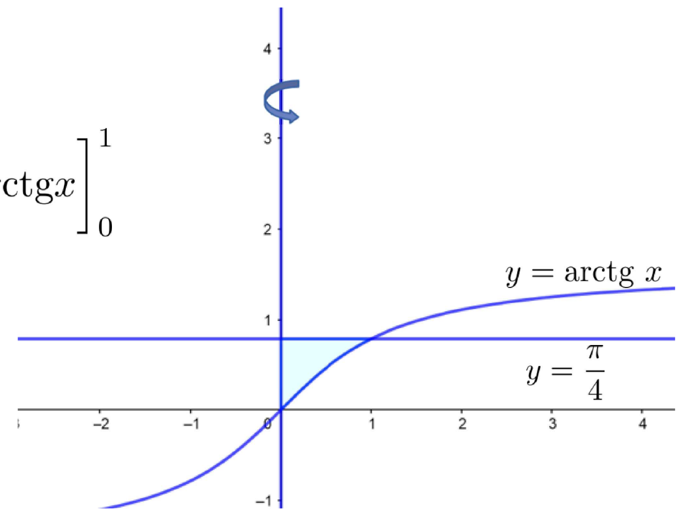
- Método de las capas

$$V = 2\pi \int_0^1 p(x) h(x) \, dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x \left(\frac{\pi}{4} - \text{arctg } x\right) \, dx$$

$$= 2\pi \left[\frac{\pi}{8} x^2 - \frac{x^2}{2} \text{arctg } x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2} \text{arctg} x\right]_0^1$$

$$= \pi \left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$$

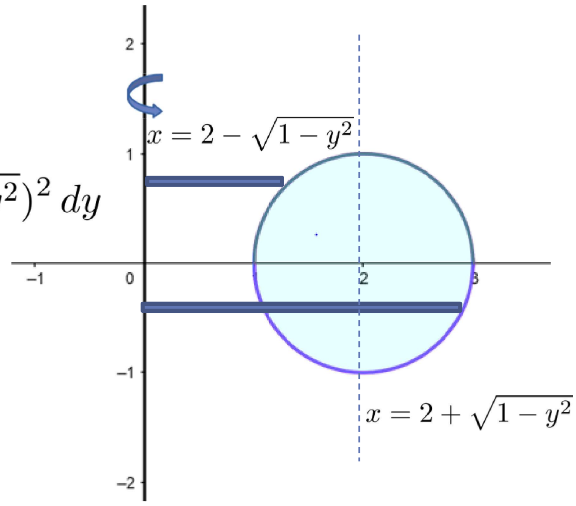


Ejemplo:

Calcular el volumen engendrado por el círculo $\underbrace{x^2 + y^2 - 4x = -3}_{(x-2)^2 + y^2 = 1}$ al girar alrededor del eje OY

Circunferencia de centro $C(2,0)$ y radio 1

- Método de discos



$$V = \pi \int_{-1}^{1} (R_1(y))^2 \, dy - \pi \int_{-1}^{1} (R_2(y))^2 \, dy$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (2 + \sqrt{1-y^2})^2 \, dy - \pi \int_{-1}^{1} (2 - \sqrt{1-y^2})^2 \, dy$$

$$= 8\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2} \, dy \quad = 8\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt$$

$y = \operatorname{sen} t$ $\qquad y = -1 \to t = -\frac{\pi}{2}$
$dy = \cos t dt$ $\qquad y = 1 \to t = \frac{\pi}{2}$

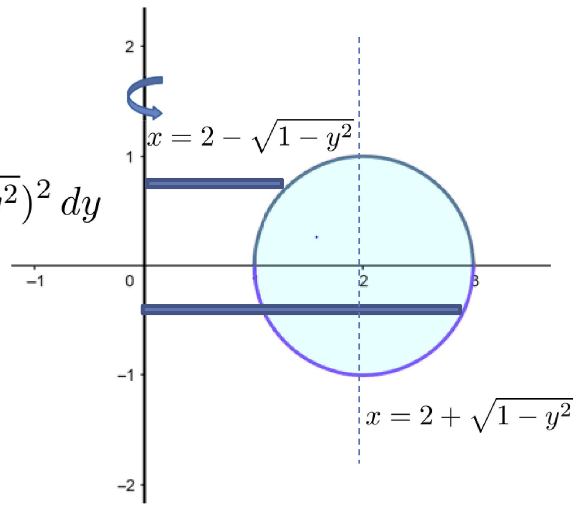
$$= 8\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt \quad = 8\pi \left[\frac{1}{2} t + \frac{\operatorname{sen} 2t}{4} \right]_{\frac{-\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi^2$$

Ejemplo:

Calcular el volumen engendrado por el círculo $\underbrace{x^2 + y^2 - 4x = -3}_{(x-2)^2 + y^2 = 1}$ al girar alrededor del eje OY

Circunferencia de centro $C(2,0)$ y radio 1

- Método de discos



$$V = \pi \int_{-1}^{1} (R_1(y))^2 \, dy - \pi \int_{-1}^{1} (R_2(y))^2 \, dy$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} (2 + \sqrt{1-y^2})^2 \, dy - \pi \int_{-1}^{1} (2 - \sqrt{1-y^2})^2 \, dy$$

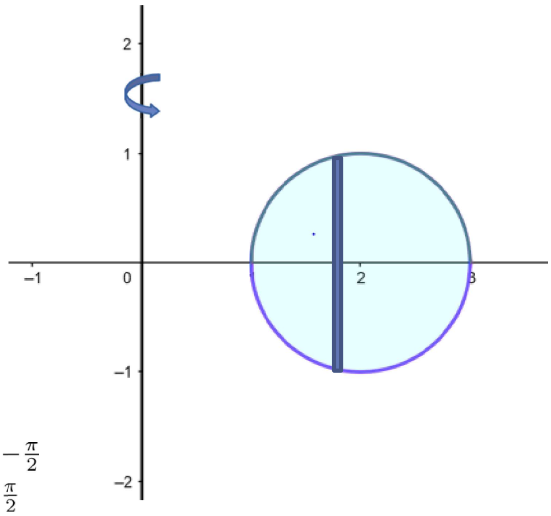
$$= 8\pi \underbrace{\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2} \, dy}_{\substack{\text{Área de un semicírculo de radio 1} \\ \frac{1}{2}\pi 1^2}}$$

Ejemplo:

Calcular el volumen engendrado por el círculo $\underbrace{x^2 + y^2 - 4x = -3}_{(x-2)^2 + y^2 = 1}$ al girar alrededor del eje OY

Circunferencia de centro $C(2,0)$ y radio 1

- Método de capas



$$V = 2\pi \int_1^3 p(x)h(x)\,dx$$

$$= 2\pi \int_1^3 x\,2\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx$$

$$= 4\pi \int_1^3 x\,\sqrt{1-(x-2)^2}\,dx$$

$$x - 2 = \text{sen } t \qquad x = 1 \rightarrow t = -\tfrac{\pi}{2}$$

$$dx = \cos t dt \qquad x = 3 \rightarrow t = \tfrac{\pi}{2}$$

$$= 4\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 + \text{sen } t)\cos^2 t\,dt \quad = 4\pi^2$$