Tema 3 – Tercera Parte

Funciones de varias variables

Regla de la cadena

Derivación implícita

Regla de la cadena

$f(x) \qquad\qquad x = x(t)$

$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{df}{dx}(x(t))\,\frac{dx}{dt}(t)$$

$$f \xrightarrow{\frac{df}{dx}} x \xrightarrow{\frac{dx}{dt}} t$$

Ejemplo: $f(x) = \operatorname{sen} x \qquad x(t) = t^2$

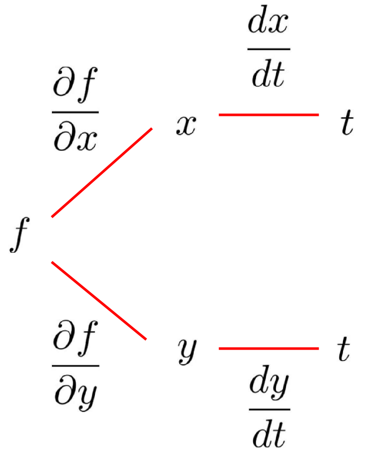
$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{df}{dx}(x(t))\,\frac{dx}{dt}(t) = \cos(t^2)\,2t$$

Regla de la cadena

$$f(x,y) \qquad x = x(t) \qquad y = y(t)$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

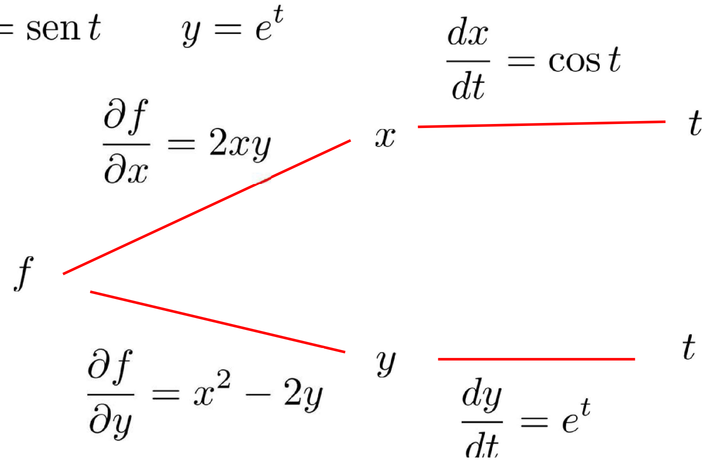
$$\frac{df}{dt}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\, \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\, \frac{dy}{dt}(t)$$



Ejemplo: $f(x,y) = x^2 y - y^2 \qquad x = \operatorname{sen} t \qquad y = e^t$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

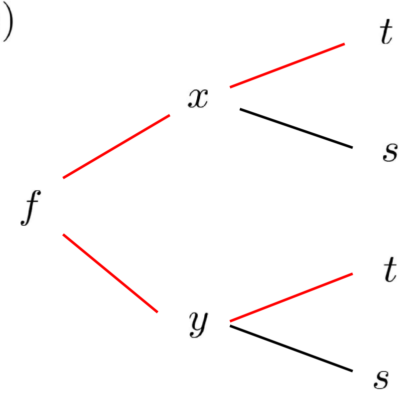
$$\frac{df}{dt} = 2e^t \operatorname{sen} t\, \cos t + (\operatorname{sen}^2 t - 2e^t)e^t$$



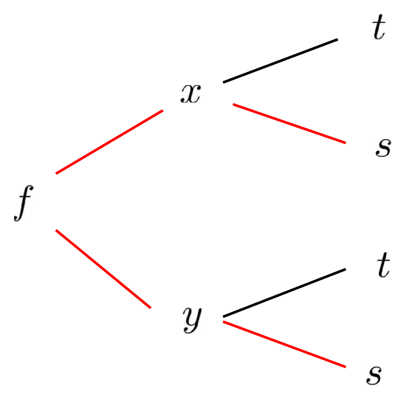
Regla de la cadena

$$f(x,y) \qquad x = x(t,s) \qquad y = y(t,s)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(t,s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t,s), y(t,s))\, \frac{\partial x}{\partial t}(t,s)$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t,s), y(t,s))\, \frac{\partial y}{\partial t}(t,s)$$



$$\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t,s), y(t,s))\, \frac{\partial x}{\partial s}(t,s)$$
$$+\frac{\partial f}{\partial y}(x(t,s), y(t,s))\, \frac{\partial y}{\partial s}(t,s)$$



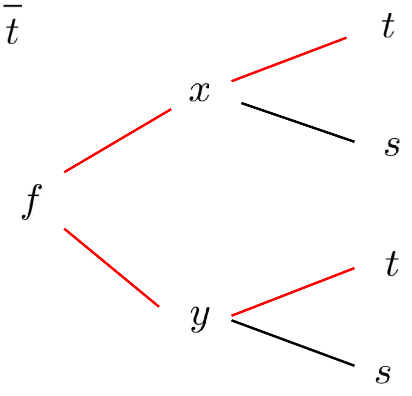
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Regla de la cadena

$$f(x,y) = 2xy \qquad x = t^2 + s^2 \qquad y = \frac{s}{t}$$

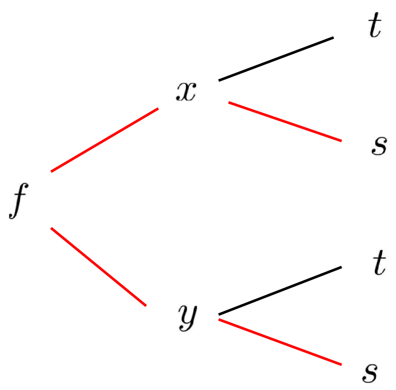
$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left(2\frac{s}{t}\right) 2t + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{-s}{t^2}\right) = \frac{2st^2 - 2s^3}{t^2}$$



$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = 2\left(\frac{s}{t}\right) 2s + 2(s^2 + t^2)\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{6s^2 + 2t^2}{t}$$



FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Regla de la cadena

$$f = f(x,y,z) \qquad x = x(u,v) \qquad y = y(u,v) \qquad z = z(u,v)$$

Regla de la cadena

$f = f(x, y, z) \qquad x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$$

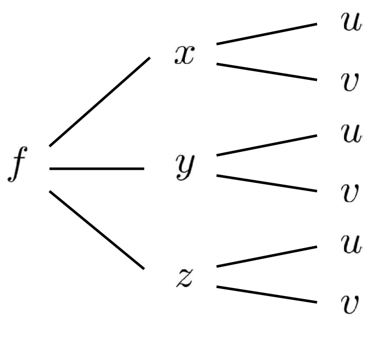
$$\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

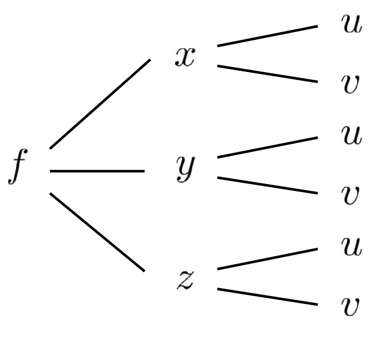
Regla de la cadena

$f = f(x, y, z) \qquad x = x(u, v) \qquad y = y(u, v) \qquad z = z(u, v)$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)$$



$$\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)$$

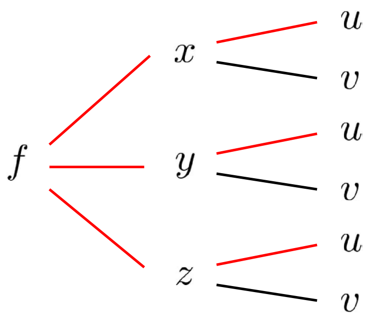


FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

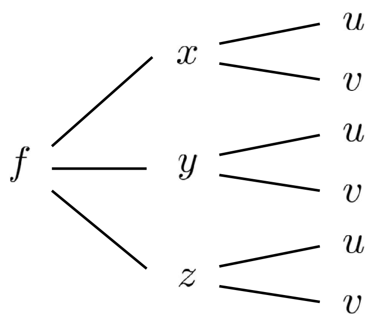
Regla de la cadena

$f = f(x,y,z) \qquad x = x(u,v) \qquad y = y(u,v) \qquad z = z(u,v)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \;& \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\\ &+\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\ &+\frac{\partial f}{\partial z}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\end{aligned}$$



$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v)$$

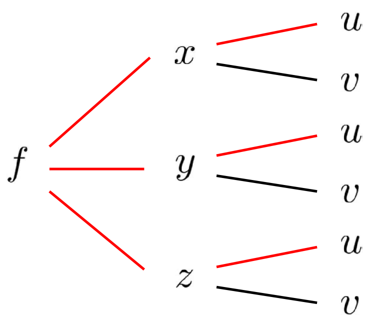


FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

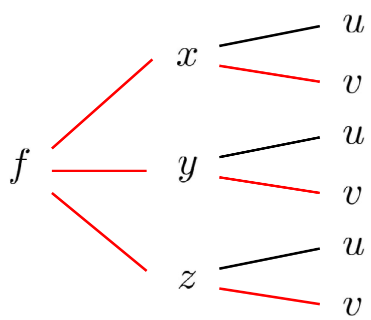
Regla de la cadena

$f = f(x,y,z) \qquad x = x(u,v) \qquad y = y(u,v) \qquad z = z(u,v)$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = \;& \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial x}{\partial u}(u,v)\\ &+\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial y}{\partial u}(u,v)\\ &+\frac{\partial f}{\partial z}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial z}{\partial u}(u,v)\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = \;& \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial x}{\partial v}(u,v)\\ &+\frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial y}{\partial v}(u,v)\\ &+\frac{\partial f}{\partial z}(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial z}{\partial v}(u,v)\end{aligned}$$

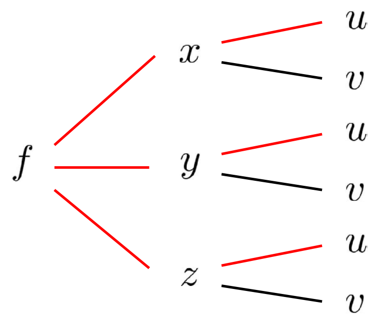


FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

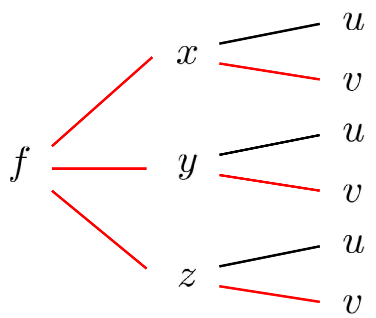
Regla de la cadena

$f = xz + \operatorname{sen} y \qquad x = u + 2v \qquad y = uv \qquad z = 2u - v$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}$$



$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$



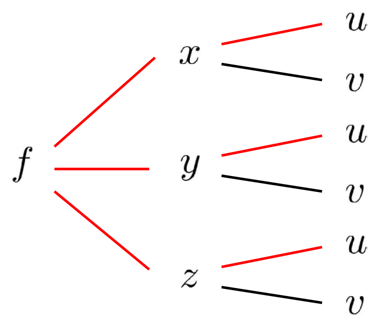
FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Regla de la cadena

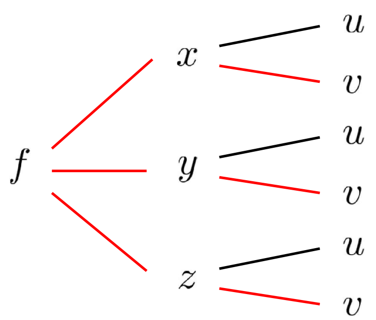
$f = xz + \operatorname{sen} y \qquad x = u + 2v \qquad y = uv \qquad z = 2u - v$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u, v) = (2u - v) + \cos(uv)v + (u + 2v)2$$



$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

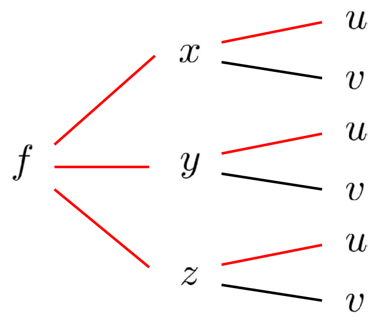


Regla de la cadena

$f = xz + \operatorname{sen} y \qquad x = u + 2v \qquad y = uv \qquad z = 2u - v$

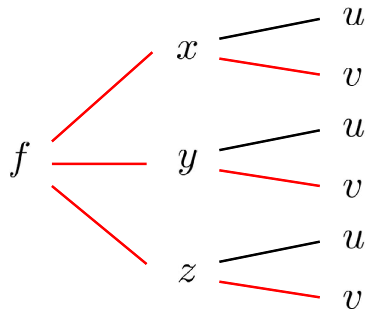
$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u,v) = (2u - v) + \cos(uv)v + (u + 2v)2$$



$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(u,v) = (2u - v)2 + \cos(uv)u + (u + 2v)(-1)$$



Regla de la cadena

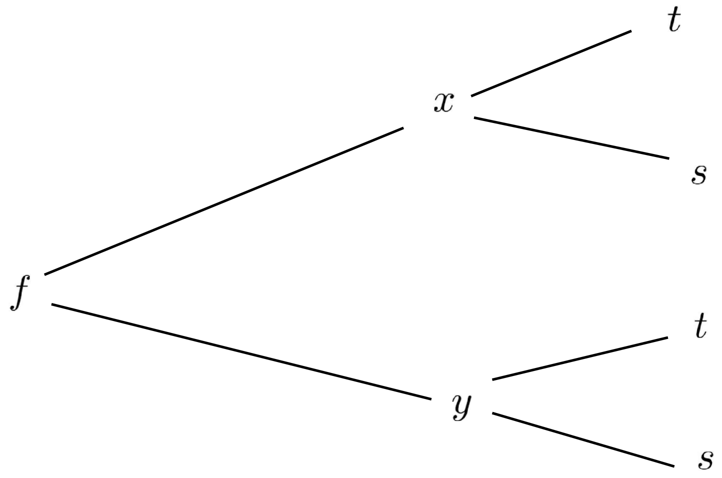
$f(x,y) = e^x + \cos(xy^2) \qquad x = s - t \qquad y = s^2 + t$

Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ para $s = 0, \quad t = 2$

Regla de la cadena

$$f(x,y) = e^x + \cos(xy^2) \qquad x = s - t \qquad y = s^2 + t$$

Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ para $s = 0, \quad t = 2$



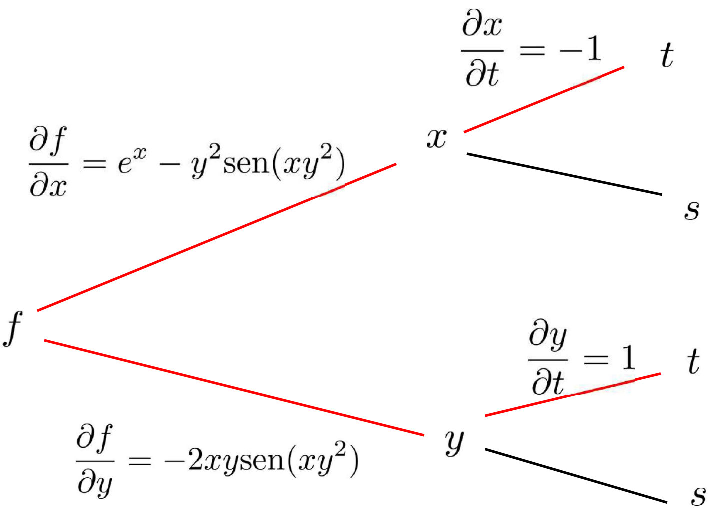
$$s = 0, \quad t = 2 \quad \rightarrow \quad x = -2, \quad y = 2$$

Regla de la cadena

$$f(x,y) = e^x + \cos(xy^2) \qquad x = s - t \qquad y = s^2 + t$$

Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ para $s = 0, \quad t = 2$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$



$$s = 0, \quad t = 2 \quad \rightarrow \quad x = -2, \quad y = 2$$

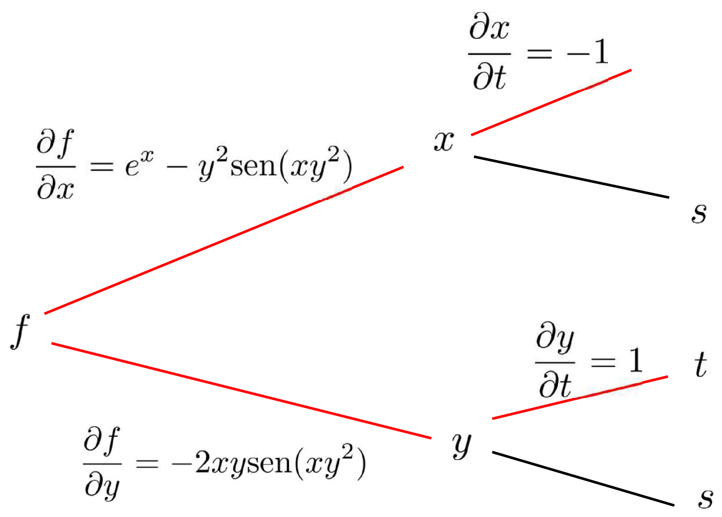
Regla de la cadena

$$f(x,y) = e^x + \cos(xy^2) \qquad x = s - t \qquad y = s^2 + t$$

Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ para $s = 0, \quad t = 2$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0,2) = -e^{-2} - 12\mathrm{sen}\, 8$$



$$s = 0, \quad t = 2 \quad \rightarrow \quad x = -2, \quad y = 2$$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Regla de la cadena

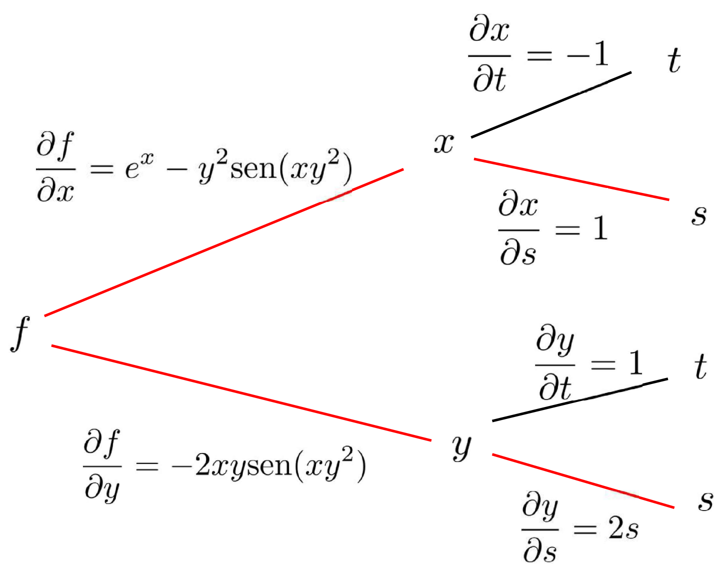
$$f(x,y) = e^x + \cos(xy^2) \qquad x = s - t \qquad y = s^2 + t$$

Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ para $s = 0, \quad t = 2$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0,2) = -e^{-2} - 12\mathrm{sen}\, 8$$

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s}$$



$$s = 0, \quad t = 2 \quad \rightarrow \quad x = -2, \quad y = 2$$

Regla de la cadena

$$f(x,y)=e^x+\cos(xy^2) \qquad x=s-t \qquad y=s^2+t$$

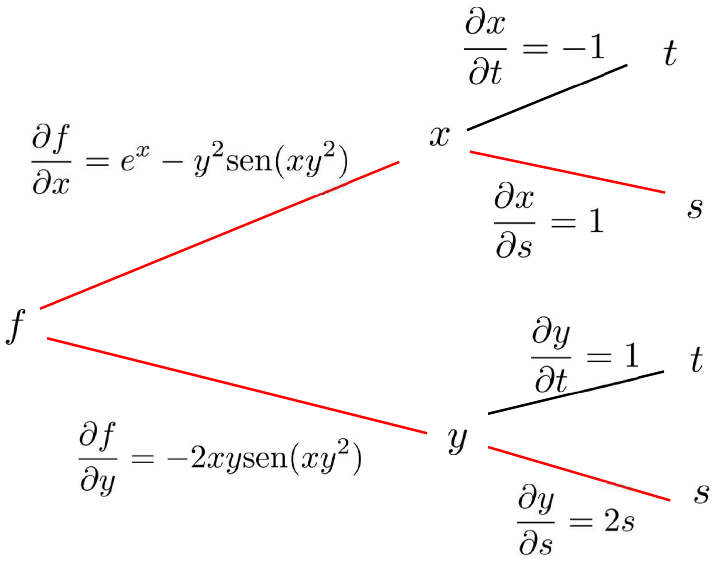
Calcular $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ para $s=0, \quad t=2$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(0,2)=-e^{-2}-12\operatorname{sen}8$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0,2)=e^{-2}+4\operatorname{sen}8$$



$$s=0, \quad t=2 \quad \rightarrow \quad x=-2, \quad y=2$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Recordar que una función de una variable está definida en forma implícita, cuando no aparece despejada la variable y, sino que la relación entre x e y viene dada por una ecuación de dos incógnitas

- Función explícita $y=f(x)$ $\qquad y=x^2$
- Función implícita $F(x,y)=0$ $\qquad x^2-y=0$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Recordar que una función de una variable está definida en forma implícita, cuando no aparece despejada la variable y, sino que la relación entre x e y viene dada por una ecuación de dos incógnitas

- Función explícita $y = f(x)$ $\qquad y = x^2$
- Función implícita $F(x,y) = 0$ $\qquad x^2 - y = 0$

Una función de dos variables está definida en forma implícita, cuando no aparece despejada la variable z, sino que la relación entre x, y, z viene dada por una ecuación de tres incógnitas

- Función explícita $z = f(x,y)$ $\qquad z = \dfrac{\cos(xy)}{e^x + 3}$
- Función implícita $F(x,y,z) = 0$ $\qquad \cos(xy) - z(e^x + 3) = 0$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

No siempre es sencillo, o incluso no es posible, despejar la z para poner la función en forma explícita

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

No siempre es sencillo, o incluso no es posible, despejar la z para poner la función en forma explícita

Para hallar la derivada en forma implícita no es necesario despejar z. Basta derivar tanto el miembro derecho como el izquierdo de la igualdad con respecto a la misma variable, utilizando las reglas de derivación y la regla de la cadena

$$F(x, y, z) = 0$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo: Sea $z = f(x, y)$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2z - 1 = 0$.
Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Ejemplo: Sea $z = f(x, y)$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2z - 1 = 0$.
Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$2x + 2zz_x + 2y + 2z_x = 0$$

Ejemplo: Sea $z = f(x, y)$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2z - 1 = 0$.
Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$2x + 2zz_x + 2y + 2z_x = 0$$

$$(2z + 2)z_x = -2x - 2y$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2z - 1 = 0$.
Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$2x + 2zz_x + 2y + 2z_x = 0$$

$$(2z+2)z_x = -2x - 2y \quad \Longrightarrow \quad z_x = \frac{-2x-2y}{2z+2}$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2z - 1 = 0$.
Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$2x + 2zz_x + 2y + 2z_x = 0$$

$$(2z+2)z_x = -2x - 2y \quad \Longrightarrow \quad z_x = \frac{-2x-2y}{2z+2}$$

- Derivando en la ecuación con respecto a y :

$$2y + 2zz_y + 2x + 2z_y = 0$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2z - 1 = 0$.
Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$2x + 2zz_x + 2y + 2z_x = 0$$

$$(2z+2)z_x = -2x - 2y \quad \Longrightarrow \quad z_x = \frac{-2x-2y}{2z+2}$$

- Derivando en la ecuación con respecto a y :

$$2y + 2zz_y + 2x + 2z_y = 0$$

$$(2z+2)z_y = -2x - 2y$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2z - 1 = 0$.
Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$2x + 2zz_x + 2y + 2z_x = 0$$

$$(2z+2)z_x = -2x - 2y \quad \Longrightarrow \quad z_x = \frac{-2x-2y}{2z+2}$$

- Derivando en la ecuación con respecto a y :

$$2y + 2zz_y + 2x + 2z_y = 0$$

$$(2z+2)z_y = -2x - 2y \quad \Longrightarrow \quad z_y = \frac{-2x-2y}{2z+2}$$

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2z - 1 = 0$.
Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$2x + 2zz_x + 2y + 2z_x = 0$$

$$(2z+2)z_x = -2x - 2y \quad \Rightarrow \quad z_x = \frac{-2x-2y}{2z+2}$$

- Derivando en la ecuación con respecto a y :

$$2y + 2zz_y + 2x + 2z_y = 0$$

$$(2z+2)z_y = -2x - 2y \quad \Rightarrow \quad z_y = \frac{-2x-2y}{2z+2}$$

Observar que las derivadas viene dada en función de x, y, z

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $z = e^x \operatorname{sen}(y+z)$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $z = e^x \text{sen}(y+z)$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$z_x = e^x \text{sen}(y+z) + e^x \cos(y+z) z_x$$

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $z = e^x \text{sen}(y+z)$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$z_x = e^x \text{sen}(y+z) + e^x \cos(y+z) z_x$$

$$(1 - e^x \cos(y+z)) z_x = e^x \text{sen}(y+z)$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $z = e^x \operatorname{sen}(y+z)$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$z_x = e^x \operatorname{sen}(y+z) + e^x \cos(y+z) z_x$$

$$(1 - e^x \cos(y+z)) z_x = e^x \operatorname{sen}(y+z) \quad \Longrightarrow \quad z_x = \frac{e^x \operatorname{sen}(y+z)}{1 - e^x \cos(y+z)}$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $z = e^x \operatorname{sen}(y+z)$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$z_x = e^x \operatorname{sen}(y+z) + e^x \cos(y+z) z_x$$

$$(1 - e^x \cos(y+z)) z_x = e^x \operatorname{sen}(y+z) \quad \Longrightarrow \quad z_x = \frac{e^x \operatorname{sen}(y+z)}{1 - e^x \cos(y+z)}$$

- Derivando en la ecuación con respecto a y :

$$z_y = e^x \cos(y+z)(1 + z_y)$$

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $z = e^x \operatorname{sen}(y+z)$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$z_x = e^x \operatorname{sen}(y+z) + e^x \cos(y+z) z_x$$

$$(1 - e^x \cos(y+z)) z_x = e^x \operatorname{sen}(y+z) \quad \Longrightarrow \quad z_x = \frac{e^x \operatorname{sen}(y+z)}{1 - e^x \cos(y+z)}$$

- Derivando en la ecuación con respecto a y :

$$z_y = e^x \cos(y+z)(1 + z_y)$$

$$(1 - e^x \cos(y+z)) z_y = e^x \cos(y+z)$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $z = e^x \operatorname{sen}(y+z)$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$z_x = e^x \operatorname{sen}(y+z) + e^x \cos(y+z) z_x$$

$$(1 - e^x \cos(y+z)) z_x = e^x \operatorname{sen}(y+z) \quad \Longrightarrow \quad z_x = \frac{e^x \operatorname{sen}(y+z)}{1 - e^x \cos(y+z)}$$

- Derivando en la ecuación con respecto a y :

$$z_y = e^x \cos(y+z)(1 + z_y)$$

$$(1 - e^x \cos(y+z)) z_y = e^x \cos(y+z) \quad \Longrightarrow \quad z_y = \frac{e^x \cos(y+z)}{1 - e^x \cos(y+z)}$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $z = e^x \operatorname{sen}(y+z)$. Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$z_x = e^x \operatorname{sen}(y+z) + e^x \cos(y+z) z_x$$

$$(1 - e^x \cos(y+z)) z_x = e^x \operatorname{sen}(y+z) \Rightarrow z_x = \frac{e^x \operatorname{sen}(y+z)}{1 - e^x \cos(y+z)}$$

- Derivando en la ecuación con respecto a y :

$$z_y = e^x \cos(y+z)(1 + z_y)$$

$$(1 - e^x \cos(y+z)) z_y = e^x \cos(y+z) \Rightarrow z_y = \frac{e^x \cos(y+z)}{1 - e^x \cos(y+z)}$$

Observar que las derivadas viene dada en función de x, y, z

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $z^3 + x^2 + (y^2+1)z = 0$.
Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$3z^2 z_x + 2x + (y^2+1) z_x = 0$$

$$(3z^2 + y^2 + 1) z_x = -2x \Rightarrow z_x = \frac{-2x}{3z^2 + y^2 + 1}$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $z^3 + x^2 + (y^2+1)z = 0$.
Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$3z^2 z_x + 2x + (y^2+1)z_x = 0$$

$$(3z^2 + y^2 + 1)z_x = -2x \quad \Longrightarrow \quad z_x = \frac{-2x}{3z^2+y^2+1}$$

- Derivando en la ecuación con respecto a y :

$$3z^2 z_y + 2yz + (y^2+1)z_y = 0$$

$$(3z^2 + y^2 + 1)z_y = -2yz \quad \Longrightarrow \quad z_y = \frac{-2yz}{3z^2+y^2+1}$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $z^3 + x^2 + (y^2+1)z = 0$.
Calcular $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$3z^2 z_x + 2x + (y^2+1)z_x = 0$$

$$(3z^2 + y^2 + 1)z_x = -2x \quad \Longrightarrow \quad z_x = \frac{-2x}{3z^2+y^2+1}$$

- Derivando en la ecuación con respecto a y :

$$3z^2 z_y + 2yz + (y^2+1)z_y = 0$$

$$(3z^2 + y^2 + 1)z_y = -2yz \quad \Longrightarrow \quad z_y = \frac{-2yz}{3z^2+y^2+1}$$

Observar que las derivadas viene dada en función de x, y, z

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $x^3z - z^3yx = 0$. Calcular z_{xx} y z_{yx}.

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $x^3z - z^3yx = 0$. Calcular z_{xx} y z_{yx}.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$3x^2z + x^3z_x - (3z^2z_xyx + z^3y) = 0 \Rightarrow z_x = \frac{z^3y - 3x^2z}{x^3 - 3xyz^2}$$

- Derivando en la ecuación con respecto a y :

$$x^3z_y - (3z^2z_yyx + z^3x) = 0 \Rightarrow z_y = \frac{z^3x}{x^3 - 3xyz^2}$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $x^3 z - z^3 yx = 0$. Calcular z_{xx} y z_{yx}.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$3x^2 z + x^3 z_x - (3z^2 z_x yx + z^3 y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z_x = \frac{z^3 y - 3x^2 z}{x^3 - 3xyz^2}$$

  - Derivando en la última expresión con respecto a x :

- Derivando en la ecuación con respecto a y :

$$x^3 z_y - (3z^2 z_y yx + z^3 x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z_y = \frac{z^3 x}{x^3 - 3xyz^2}$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $x^3 z - z^3 yx = 0$. Calcular z_{xx} y z_{yx}.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$3x^2 z + x^3 z_x - (3z^2 z_x yx + z^3 y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z_x = \frac{z^3 y - 3x^2 z}{x^3 - 3xyz^2}$$

  - Derivando en la última expresión con respecto a x :

$$z_{xx} = \frac{(3z^2 z_x y - 6xz - 3x^2 z_x)(x^3 - 3xyz^2) - (z^3 y - 3x^2 z)(3x^2 - 3yz^2 - 6xyzz_x)}{(x^3 - 3xyz^2)^2}$$

- Derivando en la ecuación con respecto a y :

$$x^3 z_y - (3z^2 z_y yx + z^3 x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z_y = \frac{z^3 x}{x^3 - 3xyz^2}$$

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $x^3z - z^3yx = 0$. Calcular z_{xx} y z_{yx}.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$3x^2z + x^3z_x - (3z^2z_xyx + z^3y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z_x = \frac{z^3y - 3x^2z}{x^3 - 3xyz^2}$$

  - Derivando en la última expresión con respecto a x :

$$z_{xx} = \frac{(3z^2z_xy - 6xz - 3x^2z_x)(x^3 - 3xyz^2) - (z^3y - 3x^2z)(3x^2 - 3yz^2 - 6xyzz_x)}{(x^3 - 3xyz^2)^2}$$

- Derivando en la ecuación con respecto a y :

$$x^3z_y - (3z^2z_yyx + z^3x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z_y = \frac{z^3x}{x^3 - 3xyz^2}$$

  - Derivando en la última expresión con respecto a x :

$$z_{yx} = \frac{(3z^2z_xx + z^3)(x^3 - 3xyz^2) - z^3x(3x^2 - 3yz^2 - 6xyzz_x)}{(x^3 - 3xyz^2)^2}$$

DERIVACIÓN IMPLÍCITA

Ejemplo: Sea $z = f(x,y)$ tal que $x^3z - z^3yx = 0$. Calcular z_{xx} y z_{yx}.

- Derivando en la ecuación con respecto a x :

$$3x^2z + x^3z_x - (3z^2z_xyx + z^3y) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z_x = \frac{z^3y - 3x^2z}{x^3 - 3xyz^2}$$

  - Derivando en la última expresión con respecto a x :

$$z_{xx} = \frac{(3z^2z_xy - 6xz - 3x^2z_x)(x^3 - 3xyz^2) - (z^3y - 3x^2z)(3x^2 - 3yz^2 - 6xyzz_x)}{(x^3 - 3xyz^2)^2}$$

- Derivando en la ecuación con respecto a y :

$$x^3z_y - (3z^2z_yyx + z^3x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad z_y = \frac{z^3x}{x^3 - 3xyz^2}$$

  - Derivando en la última expresión con respecto a x :

$$z_{yx} = \frac{(3z^2z_xx + z^3)(x^3 - 3xyz^2) - z^3x(3x^2 - 3yz^2 - 6xyzz_x)}{(x^3 - 3xyz^2)^2}$$

Observar que las derivadas viene dada en función de x, y, z, z_x, z_y

Ejemplo: Calcular el plano tangente a la superficie $x \ln z + 2x + y - z = 2$ en el punto $(2, -1, 1)$.

Ejemplo: Calcular el plano tangente a la superficie $x \ln z + 2x + y - z = 2$ en el punto $(2, -1, 1)$.

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Ejemplo: Calcular el plano tangente a la superficie $x \ln z + 2x + y - z = 2$ en el punto $(2, -1, 1)$.

$$x \ln z + 2x + y - z = 2$$

Ejemplo: Calcular el plano tangente a la superficie $x \ln z + 2x + y - z = 2$ en el punto $(2, -1, 1)$.

$$x \ln z + 2x + y - z = 2$$

Derivando respecto de x se tiene

$$\ln z + x\frac{z_x}{z} + 2 - z_x = 0$$

Ejemplo: Calcular el plano tangente a la superficie $x \ln z + 2x + y - z = 2$ en el punto $(2, -1, 1)$.

$$x \ln z + 2x + y - z = 2$$

Derivando respecto de x se tiene

$$\ln z + x\frac{z_x}{z} + 2 - z_x = 0$$

Evaluamos en $(2, -1, 1)$

$$2\, z_x\big|_{(2,-1,1)} + 2 - \, z_x\big|_{(2,-1,1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_x\big|_{(2,-1,1)} = -2$$

Ejemplo: Calcular el plano tangente a la superficie $x \ln z + 2x + y - z = 2$ en el punto $(2, -1, 1)$.

$$x \ln z + 2x + y - z = 2$$

Ejemplo: Calcular el plano tangente a la superficie $x \ln z + 2x + y - z = 2$ en el punto $(2, -1, 1)$.

$x \ln z + 2x + y - z = 2$

Derivando respecto de y se tiene

$$x \frac{z_y}{z} + 1 - z_y = 0$$

FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Ejemplo: Calcular el plano tangente a la superficie $x \ln z + 2x + y - z = 2$ en el punto $(2, -1, 1)$.

$x \ln z + 2x + y - z = 2$

Derivando respecto de y se tiene

$$x \frac{z_y}{z} + 1 - z_y = 0$$

Evaluamos en $(2, -1, 1)$

$$2\, z_y\big|_{(2,-1,1)} + 1 - z_y\big|_{(2,-1,1)} = 0 \quad \Rightarrow \quad z_y\big|_{(2,-1,1)} = -1$$

Ejemplo: Calcular el plano tangente a la superficie $x \ln z + 2x + y - z = 2$ en el punto $(2, -1, 1)$.

$$z_x\big|_{(2,-1,1)} = -2$$

$$z_y\big|_{(2,-1,1)} = -1$$

$$z = 1 - 2(x-2) - (y+1)$$

$$z = -2x - y + 4$$

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$