Escuela Politécnica Superior de Sevilla

MATEMÁTICAS II

Boletín 4 - Integración múltiple

1. Calcular las siguientes integrales iteradas:

a) $\displaystyle\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)\,dy\,dx$ b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}\,dx\,dy$

<u>Solución</u>:

$$a)\ \int_0^1\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x+y)\,dy\,dx = \int_0^1 \left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx = \int_0^1 \left(x\sqrt{1-x^2}+\frac{1-x^2}{2}\right) dx =$$

$$= \left[-\frac{\sqrt{(1-x^2)^3}}{3}+\frac{1}{2}\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$b)\ \int_0^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} \frac{2}{\sqrt{4-y^2}}dxdy = \int_0^2 \left[\frac{2x}{\sqrt{4-y^2}}\right]_0^{\sqrt{4-y^2}} dy = \int_0^2 \frac{2\sqrt{4-y^2}}{\sqrt{4-y^2}}dy = \int_0^2 2dy = 4$$

2. Dibuja la región R cuya área representa la integral iterada. Calcular dicha área, cambiando previamente el orden de integración.

a) $\displaystyle\int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}} dx\,dy$ b) $\displaystyle\int_0^2\int_0^x dy\,dx + \int_2^4\int_0^{4-x} dy\,dx$

<u>Solución</u>:

$$a)\ \int_0^1\int_{y^2}^{\sqrt{y}} dxdy = \int_0^1\int_{x^2}^{\sqrt{x}} dydx = \int_0^1 [y]_{x^2}^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)\,dx = \left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

$$b)\ \int_0^2\int_0^x dydx + \int_2^4\int_0^{4-x} dydx = \int_0^2\int_y^{4-y} dxdy = \int_0^2 (4-2y)\,dy = \left[4y-y^2\right]_0^2 = 4$$

3. Usar una integral iterada para calcular el área de la región acotada por las gráficas de $2x-3y=0,\ x+y=5,\ y=0$.

<u>Solución</u>:

$$A = \int_0^2\int_{\frac{3y}{2}}^{5-y} dxdy = \int_0^2 [x]_{\frac{3y}{2}}^{5-y}\,dy = \int_0^2 \left(5-y-\frac{3y}{2}\right) dy = \left[5y-\frac{5y^2}{4}\right]_0^2 = 5.$$

También puede hacerse integrando primero respecto de y y después respecto de x. En este caso hay que hacer dos integrales.

$$A = \int_0^3\int_0^{\frac{2x}{3}} dydx + \int_3^5\int_0^{5-x} dydx = 5.$$

4. Para calcular las siguientes integrales iteradas es necesario cambiar previamente el orden de integración:

   a) $\displaystyle\int_0^2\int_x^2 x\sqrt{1+y^3}dydx$ b) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 senx^2dxdy.$

   <u>Solución</u>:

   a) $\displaystyle\int_0^2\int_x^2 x\sqrt{1+y^3}\,dy\,dx = \int_0^2\int_0^y x\sqrt{1+y^3}\,dx\,dy = \int_0^2\left[\frac{x^2}{2}\sqrt{1+y^3}\right]_0^y dy$

   $\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^2 y^2\sqrt{1+y^3}dy = \left[\frac{1}{9}\sqrt{(1+y^3)^3}\right]_0^2 = \frac{26}{9}.$

   b) $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 senx^2\,dx\,dy = \int_0^1\int_0^x senx^2dydx = \int_0^1\left[ysenx^2\right]_0^x dx = \int_0^1 xsenx^2dx =$

   $\displaystyle = \frac{1}{2}\left[-\cos x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}(1-\cos 1).$

5. Realizar un esbozo de la región R y calcular la integral doble :

   a) $\displaystyle\iint_R xdA$, donde R es el sector circular en el primer cuadrante acotado por

   $$y=\sqrt{25-x^2},\ 3x-4y=0,\ y=0.$$

   b) $\displaystyle\iint_R (x^2+y^2)dA$ y R: es el semicírculo acotado por $y=\sqrt{4-x^2},\ y=0.$

   <u>Solución</u>:

   a) $\displaystyle\iint_R xdA = \int_0^3\int_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} xdxdy = \frac{1}{2}\int_0^3\left[x^2\right]_{\frac{4}{3}y}^{\sqrt{25-y^2}} dy = \frac{1}{2}\int_0^3\left(25-y^2-\frac{16}{9}y^2\right)dy =$

   $\displaystyle = \frac{25}{2}\int_0^3\left(1-\frac{1}{9}y^2\right)dy = \frac{25}{2}\left(y-\frac{1}{27}y^3\right)_0^3 = 25$

   b) $\displaystyle\iint_R (x^2+y^2)dA = \int_{-2}^2\int_0^{\sqrt{4-x^2}}(x^2+y^2)dydx = 2\int_0^2\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)_0^{\sqrt{4-x^2}}dx$

   $\displaystyle = 2\int_0^2\left(x^2\sqrt{4-x^2}+\frac{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}{3}\right)dx = 2\int_0^2\left(\frac{(4-2x^2)\sqrt{4-x^2}}{3}\right)dx = ...$

   Por este camino salen integrales complicadas. Ahora habría que hacer el cambio $x=2sent$. Es aconsejable hacerlo en coordenadas polares.

   $\displaystyle\iint_R (x^2+y^2)dA = \int_0^\pi\int_0^2 r^2rdrd\theta = \int_0^\pi\int_0^2 r^3drd\theta = \int_0^\pi\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^2 d\theta = 4\int_0^\pi d\theta = 4\pi$

6. Calcular el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones:

   a) $z=xy,\ z=0,\ y=x,\ x=1$, primer octante.

   b) $x^2+z^2=1,\ y^2+z^2=1$, primer octante.

Solución:

a) $V = \int_0^1 \int_0^x xydydx = \int_0^1 \left[\frac{xy^2}{2}\right]_o^x dx = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{2}\right] dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^1 = \frac{1}{8}$

b) $V = 2\int_0^1 \int_0^x \sqrt{1-x^2}dydx = 2\int_0^1 \left[y\sqrt{1-x^2}\right]_0^x dx = 2\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}dx = \left[-\frac{2}{3}\sqrt{(1-x^2)^3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$.

7. Calcular las siguientes integrales dobles, pasando previamente a coordenadas polares.

   a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xydydx$

   b) $\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}dydx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx$

Solución:

a) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} xydydx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\cos\theta} r^3 \cos\theta sen\theta drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta sen\theta \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^{2\cos\theta} d\theta =$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5\theta sen\theta d\theta = \left[-\frac{2\cos^6\theta}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 0 - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$

b) $\int_0^2 \int_0^x \sqrt{x^2+y^2}dydx + \int_2^{2\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{8-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{2\sqrt{2}} r^2 drd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{2\sqrt{2}} d\theta = \frac{4\sqrt{2}\pi}{3}$.

8. Calcular el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones

   a) $z = \sqrt{x^2+y^2},\ z = 0,\ x^2+y^2 = 25.$

   b) $z = \ln(x^2+y^2),\ z = 0,\ x^2+y^2 \geq 1,\ x^2+y^2 \leq 4.$

Solución:

a) $V = \iint_D zdA = 4\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx.$

En cartesianas es muy difícil. Lo calculamos utilizando coordenadas polares.

$V = \iint_D zdA = 4\int_0^5 \int_0^{\sqrt{25-x^2}} \sqrt{x^2+y^2}dydx = \int_0^{2\pi} \int_0^5 rrdrd\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^5 d\theta = \frac{250\pi}{3}$

b) $V = \iint_D zdA = 4\int_1^2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \ln(x^2+y^2)dydx$. En cartesianas es muy difícil. Lo calculamos utilizando coordenadas polares. $V = \iint_D zdA = 4\int_1^2 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \ln(x^2+y^2)dydx = \int_0^{2\pi} \int_1^2 \ln(r^2) rdrd\theta =$ $2\int_0^{2\pi} \int_1^2 \ln(r) rdrd\theta = 2\int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\ln r - \frac{r^2}{4}\right]_1^2 d\theta = \left(4\ln 2 - \frac{3}{2}\right)\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\left(4\ln 2 - \frac{3}{2}\right).$

9. Calcular el volumen del sólido que es interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y al cilíndro $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

   Solución:

   Puede hacerse utilizando integrales dobles o triples. El resultado será el mismo.

   a) Utilizando integrales dobles.
   $V = \iint_D z dA = 2\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} \sqrt{16 - x^2 - y^2} dxdy$. Es complicado hacerlo en coordenadas cartesianas. Pasamos a coordenadas polares.
   $V = \iint_D z dA = 2\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} \sqrt{16 - x^2 - y^2} dxdy = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4sen\theta} r\sqrt{16 - r^2} drd\theta =$
   $= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{-\left(16 - r^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_0^{4sen\theta} d\theta = -\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\left(16 - 16sen^2\theta\right)^{\frac{3}{2}} - 16^{\frac{3}{2}}\right] d\theta =$
   $= -\frac{2}{3}4^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos^3\theta - 1\right) d\theta = -\frac{128}{3}\left[sen\theta - \frac{sen^3\theta}{3} - 1\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{128}{3}\frac{3\pi - 4}{6} = \frac{64}{9}(3\pi - 4)$

   b) Utilizando integrales triples.
   $V = \iiint_Q dV = 2\int_0^4 \int_0^{\sqrt{4y-y^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} dzdxdy$. Es complicado en cartesianas.
   Cambiando a coordenadas cilindricas tenemos:
   $V = \iiint_Q dV = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4sen\theta} \int_0^{\sqrt{16-r^2}} rdzdrd\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{4sen\theta} r\sqrt{16 - r^2} drd\theta$. a partir de aquí salen las mismas cuentas que antes.

10. Determinar a, de modo que el volumen interior al hemisferio $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$ y exterior al cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ sea la mitad del volumen de hemisferio.

    Solución: Llamamos V_H al volumen del hemisferio y Ve al volumen exterior.

    $V_H = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi 4^3 = \frac{128\pi}{3}$ (Puede calcularse con integrales pero no es necesario)

    $Ve = \iiint_Q dV = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_a^4 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} rdzdrd\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_a^4 r\sqrt{16 - r^2} drd\theta = \frac{4}{3}\left[\left(16 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\frac{\pi}{2}.$

    Como $Ve = \frac{1}{2}V_H$, obtenemos que $\frac{4}{3}\left[\left(16 - a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\frac{\pi}{2} = \frac{128\pi}{6} \Rightarrow \left(16 - a^2\right)^{\frac{3}{2}} = 32 \Rightarrow$

    $16 - a^2 = (32)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow a^2 = 16 - \sqrt[3]{2^{10}} \Rightarrow a = \sqrt{16 - 8\sqrt[3]{2}}.$

11. Calcular las siguientes integrales triple:

    a) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x \; dz \; dy \; dx$ b) $\int_0^9 \int_0^{y/3} \int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z \; dz \; dx \; dy.$

    Solución:

    a) $\int_0^1 \int_0^x \int_0^{xy} x \; dz \; dy \; dx = \int_0^1 \int_0^x [xz]_0^{xy} dydx = \int_0^1 \int_0^x x^2 y dydx$
    $= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[x^2 y^2\right]_0^x dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{10}\left[x^5\right]_0^1 = \frac{1}{10}.$

$b)$ $\displaystyle\int_0^9\int_0^{y/3}\int_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} z\ dz\ dx\ dy = \frac{1}{2}\int_0^9\int_0^{y/3}\left[z^2\right]_0^{\sqrt{y^2-9x^2}} dxdy = \frac{1}{2}\int_0^9\int_0^{y/3}\left(y^2-9x^2\right)dxdy$
$\displaystyle = \frac{1}{2}\int_0^9\left[y^2x-3x^3\right]_0^{y/3}dy = \frac{1}{2}\int_0^9\left[\frac{y^3}{3}-\frac{y^3}{9}\right]dy = \frac{1}{36}\left[y^4\right]_0^9 = \frac{729}{4}.$

12. Esbozar la región sólida cuyo volumen representa la integral triple $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_0^{10-x-y} dz\ dy\ dx$ y reescribirla en el orden que se indica $dz\ dx\ dy$.

 <u>**Solución**</u>:

$$\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_0^{10-x-y} dz\ dy\ dx = \int_0^4\int_0^{\sqrt{16-y^2}}\int_0^{10-x-y} dz\ dx\ dy$$

13. Calcular el volumen del sólido acotado por las gráficas de las ecuaciones:

 a) $z = 9-x^2-y^2,\ z=0$ b) $z=4-x^2,\ y=4-x^2$, primer octante.

 <u>**Solución**</u>:

$a)$ $\displaystyle V = \iiint_Q dV = \int_{-3}^3\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_0^{9-x^2-y^2} dzdydx$. La integral en coordenadas cartesianas es difícil. La hacemos en coordenadas cilíndricas.
$\displaystyle V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi}\int_0^3\int_0^{9-r^2} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^3\left(9r-r^3\right)drd\theta = \int_0^{2\pi}\left[\frac{9r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^3 d\theta = \frac{81}{4}\int_0^{2\pi}d\theta = \frac{81\pi}{2}$

$b)$ $\displaystyle V = \iiint_Q dV = \int_0^2\int_0^{4-x^2}\int_0^{4-x^2} dzdydx = \int_0^2\int_0^{4-x^2}[z]_0^{4-x^2}dydx = \int_0^2\int_0^{4-x^2}\left(4-x^2\right)dydx$
$\displaystyle = \int_0^2\left(4-x^2\right)[y]_0^{4-x^2}dx = \int_0^2\left(4-x^2\right)^2dx = \int_0^2\left(16-8x^2+x^4\right)dx = \frac{256}{15}$

14. Pasar la integral a coordenadas cilíndricas y a coordenadas esféricas. Evaluar la que resulte más sencilla:

 a) $\displaystyle\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\ dz\ dy\ dx$ b) $\displaystyle\int_{-a}^a\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_a^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x\ dz\ dy\ dx.$

 <u>**Solución**</u>:

$a)$ **a.1.)** Coordenadas cilíndricas
$$\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\ dz\ dy\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-r^2}} rrdzdrd\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-r^2}} r^2dzdrd\theta.$$

a.2.) Coordenadas esféricas
$$\int_0^4\int_0^{\sqrt{16-x^2}}\int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}}\sqrt{x^2+y^2}\ dz\ dy\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 \rho sen\phi\rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta =$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^4 \rho^3 sen^2\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2\phi\left[\rho^4\right]_0^4 d\phi d\theta = 64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^2\phi d\phi d\theta =$$
$$= 64\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\frac{\phi}{2}-\frac{sen2\phi}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 16\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = 8\pi^2$$

b) **b.1.)** Coordenadas cilíndricas

$$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{a}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x\ dz\ dy\ dx = \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_a^{a+\sqrt{a^2-r^2}} r\cos\theta r dz dr d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^a\int_a^{a+\sqrt{a^2-r^2}} r^2\cos\theta dz dr d\theta$$

b.2.) Coordenadas esféricas

$$\int_{-a}^{a}\int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}}\int_{a}^{a+\sqrt{a^2-x^2-y^2}} x\ dz\ dy\ dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{a}{\cos\phi}}^{2a\cos\phi} \rho sen\phi\cos\theta\rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta =$$

$\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{a}{\cos\phi}}^{2a\cos\phi} \rho^3 sen^2\phi\cos\theta d\rho d\phi d\theta = \int_0^{2\pi} k\cos\theta d\theta = k\left[-sen\theta\right]_0^{2\pi} = 0$. Donde hemos puesto $\displaystyle k = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_{\frac{a}{\cos\phi}}^{2a\cos\phi}\rho^3 sen^2\phi d\rho d\phi$, que no depende de θ.

15. Hallar el volumen del sólido interior a la esfera $x^2+y^2+z^2=4$ y por encima del cono $x^2+y^2-z^2=0$.

    Solución:

    a) Coordenadas cilíndricas $\displaystyle V = \iiint_Q dV = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz dy dx =$

    $$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}}\int_r^{\sqrt{4-r^2}} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{2}} r\left(\sqrt{4-r^2}-r\right) dr d\theta =$$

    $$= \int_0^{2\pi}\left[\frac{-1}{3}\sqrt{(4-r^2)^3}-\frac{1}{3}r^3\right]_0^{\sqrt{2}} d\theta = \frac{8}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{16\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

    b) Coordenadas esféricas $\displaystyle V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^2 \rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen\phi d\phi d\theta =$

    $$\frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{16\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

16. Calcular el volumen del sólido comprendido entre las esferas $x^2+y^2+z^2=4$ y $x^2+y^2+z^2=9$ e interior al cono $x^2+y^2-z^2=0$.

    Solución:

    $$V = \iiint_Q dV = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_2^3 \rho^2 sen\phi d\rho d\phi d\theta = \frac{38}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}} sen\phi d\phi d\theta = \frac{8}{3}\int_0^{2\pi}\left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \frac{76\pi}{3}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

17. Calcular el volumen del sólido comprendido entre las gráficas de $z=x+y,\ z=0, y=0,\ y=x,\ x=0$ y $x=3$.

    Solución:

    $$V = \iiint_Q dV = \int_0^3\int_0^x\int_0^{x+y} dz dy dx = \int_0^3\int_0^x (x+y) dy dx = \int_0^3\left[xy+\frac{y^2}{2}\right]_0^x dx = \frac{3}{2}\int_0^3 x^2 dx = \frac{1}{2}\left[x^3\right]_0^3 = \frac{27}{2}.$$

18. Calcular el volumen del sólido acotado por la gráficas $z = 0$ y $z = 3$, exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e interior al hiperboloide $x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

Solución:

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{10}} \int_{\sqrt{r^2-1}}^{3} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_1^{\sqrt{10}} \left(3r - r\sqrt{r^2-1}\right) dr d\theta =$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{3r^2}{2} - \frac{\sqrt{(r^2-1)^3}}{3} \right]_1^{\sqrt{10}} d\theta = \frac{9}{2}. \int_0^{2\pi} d\theta = 9\pi.$$

19. Calcular el volumen de la región sólida interior al cilindro $x^2 + y^2 = 1$, limitada inferiormente por el paraboloide $z = x^2 + y^2$ y superiormente por la superficie esférica $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Solución:

La descripción del sólido en cilindricas es: $Q \equiv \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ 0 \leq r \leq 1 \\ r^2 \leq z \leq \sqrt{9 - r^2} \end{array} \right.$

$$V = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{r^2}^{\sqrt{9-r^2}} r dz dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r[z]_{r^2}^{\sqrt{9-r^2}} dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 r(\sqrt{9-r^2} - r^2) dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (r\sqrt{9-r^2} - r^3) dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} [-\frac{1}{3}(9-r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^4}{4}]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} (-\frac{8\sqrt{8}}{3} - \frac{1}{4} + 9) d\theta$$

$$= 2\pi(-\tfrac{8\sqrt{8}}{3} - \tfrac{1}{4} + 9) = 7{,}587$$

20. Dada la siguiente integral triple $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} dz dy dx$.

1) Haga un esbozo de la región de integración y exprese la integral en coordenadas cilíndricas.

2) Calcule la integral.

Solución:

1) Los límites de la región sólida de integración son: $Q \equiv \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{16 - x^2 - y^2} \end{array} \right.$

En coordenadas cilíndricas se tendría: $Q \equiv \left\{ \begin{array}{c} 0 \leq r \leq 2 \\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq z \leq \sqrt{16 - r^2} \end{array} \right.$

2) $I = \displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{16-x^2-y^2}} \sqrt{x^2+y^2} dz\ dy\ dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 \int_0^{\sqrt{16-r^2}} r \cdot r\ dz\ dr\ d\theta$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^2 r^2 \left[z\right]_0^{\sqrt{16-r^2}} \; dr \; d\theta = \int_0^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2 \sqrt{16-r^2} dr \; d\theta$$

$$\underset{\substack{r=4sent \\ r=0\to t=0 \\ r=2\to t=\frac{\pi}{6}}}{\overset{=}{\downarrow}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} 16sen^2t\sqrt{16-16sen^2t}(4\cos t) \; dt \; d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} 256sen^2t\cos^2 t \; dt \; d\theta = 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} sen^2 2t \; dt \; d\theta$$

$$= 64 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1-\cos 4t}{2} \; dt \; d\theta = 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(t - \frac{1}{4}sen4t)\right]_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta = 32 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4})d\theta$$

$$= \tfrac{8\pi^2}{3} + 4\pi$$

21. Calcular el volumen del sólido Q limitado inferiormente por el paraboloide $z = 4x^2 + 4y^2$ y superiormente por el paraboloide $z = 6 - 2x^2 - 2y^2$.

La intersección de los dos paraboloides se tiene cuando: $4x^2 + 4y^2 = 6 - 2x^2 - 2y^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$

Luego la descripción del sólido en coordenadas cilíndricas es: $Q \equiv \left\{ \begin{array}{c} 0 \le \theta \le 2\pi \\ 0 \le r \le 1 \\ 4r^2 \le z \le 6 - 2r^2 \end{array} \right.$

$$V = \iiint_Q dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{4r^2}^{6-2r^2} rdzdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 [z]_{4r^2}^{6-2r^2} rdrd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^1 (6 - 2r^2 - 4r^2) rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 (6r - 6r^3)drd\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[3r^2 - 3\frac{r^4}{2}\right]_0^1 d\theta = (3 - \frac{3}{2})2\pi = 3\pi$$

22. Calcular $\iiint_Q z\,dV$ siendo Q la región limitada superiormente por el paraboloide $z = 2 - x^2 - y^2$ e inferiormente por el plano $z = 1$.

Solución:

Resolvemos el problema utilizando coordenadas cilíndricas: $Q \equiv \left\{ \begin{array}{c} 1 \le z \le 2 - r^2 \\ 0 \le r \le 1 \\ 0 \le \theta \le 2\pi \end{array} \right.$

$$\iiint_Q z\,dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_1^{2-r^2} z \; dz \; r \; dr \; d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[\frac{1}{2}z^2\right]_1^{2-r^2} r \; dr \; d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 ((2-r^2)^2-1)\ r\ dr\ d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 ((3-4r^2+r^4)\ r\ dr\ d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 ((3r-4r^3+r^5)drd\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{3}{2}r^2-r^4+\frac{1}{6}r^6\right]_0^1 d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\frac{3}{2}-1+\frac{1}{6})d\theta = \frac{1}{2}\frac{2}{3}2\pi = \frac{2}{3}\pi$$