Algoritmo per la ricerca di componenti fortemente connesse

Manuel Cecere Palazzo

12 Giugno 2020

Contents

1 Introduzione

La nostra intenzione in questo progetto è analizzare l'algoritmo per calcolare le componenti fortemente connesse (o *SCC*) di un grafo. Dopo una sintetica spiegazione di grafo, SCC e dell'algoritmo in questione, andremo a mostrare i risultati sperimentali, concentrandoci soprattutto sul numero di SCC e sul tempo impiegato al variare della probabilità che due nodi siano collegati da un arco e della dimensione del grafo.

2 Teoria dei grafi e dell'algoritmo

2.1 Grafo e SCC

Vediamo dunque le definizioni fondamentali:

- Si definisce **Grafo** una coppia ordinata G = (V, E) di insiemi, con V insieme dei nodi ed E insieme degli archi, tali che gli elementi di E siano coppie di elementi di V.

- Una **componente fortemente connessa** di un grafo G, è un *insieme di massimale di nodi* C $\subseteq$ V tale che, per ogni u, v $\in$ C, esistono entrambi i cammini u $\rightsquigarrow$ v e v $\rightsquigarrow$ u.

2.2 Algoritmo

L'algoritmo trova le componenti fortemente connesse del grafo utilizzando la nozione di grafo inverso e la visita in profondita (*DFS, depth-first-search*). L'algoritmo è composto dai seguenti passi:

- Chiama l'algoritmo DFS

- Calcola il grafo trasposto, invertendo la matrice di adiacenza

- Chiama nuovamente l'algoritmo DFS, sul grafo trasposto, prendendo come ordine di analisi dei vertici il tempo di terminazione della visita eseguita nel punto 1

- Ritorna le componenti fortemente connesse

Possiamo aspettarci che il numero di SCC tenda ad 1, sia all'aumentare del numero di archi, sia all'aumentare del numero di nodi, perchè entrambi questi fattori aumentano la probabilità che vi sia sempre un cammino che collega due nodi qualsiasi del grafo in entrambe le direzioni. Quanto al tempo di esecuzione dell'algoritmo, questo è dipendente dal tempo di esecuzione della DFS, che nel nostro caso, implementando E con una matrice di adiacenza, è $\Theta(|V|^2)$. Possiamo aspettarci quindi che il tempo di esecuzione cresca come il quadrato del numero di nodi.

3 Esperimenti

Gli esperimenti effettuati saranno due:

- Misureremo il numero di SCC e il tempo di esecuzione al **variare della probabilità** che due nodi qualsiasi siano collegati da un arco. Il numero di nodi del grafo è costante e fissato a 100. Calcoleremo una media su 10 campioni per ogni dimensione dell'input.

- Misureremo il numero di SCC e il tempo di esecuzione al **variare del numero dei nodi**, fino a 200. La probabilità della presenza di archi è costante e fissata a 0.1. Calcoleremo una media su 50 campioni per ogni dimensione dell'input.

Calcolatore utilizzato

- **Processore:** Intel Core i7-7700 HQ CPU 2.80 GHz, 4 core
- **Sistema operativo:** Windows 10 Home 10.0.18362 64 bit
- **Memoria:** 8GB SDRAM DDR4, 240GB SSD
- **Versione Python:** Python 3.7

4 Documentazione del codice

Il codice è composto dalle classi *Node e Graph*, usate per implementare il grafo. Abbiamo poi *DFS, DFS-visit e SCC*, le funzioni utilizzate per implementare l'algoritmo di ricerca delle componenti connesse. I due esperimenti sono realizzati usando le funzioni *testProb e testSize* .

Vengono utilizzate la funzione default-timer dal modulo timeit dalla libreria standard di Python per registrare i tempi e il modulo pyplot dalla libreria matplotlib per tracciare i grafici.

5 Risultati sperimentali e Conclusioni

5.1 Misurazione al variare della probabilità

Il numero delle SCC osservato al variare della probabilità (figura 1) rientra nelle nostre previsioni: con basse probabilità vi sarà un maggior numero di componenti fortemente connesse composte da pochi nodi. Tuttavia superata una certa probabilità critica, il numero di SCC scende rapidamente ad 1.

Il tempo impiegato (figura 2) ha un comportamento più irregolare. Questo non mostra una crescita al variare del numero di archi, ma ciò è in linea con le ipotesi, che teorizzano una crescita al variare del numero dei nodi e non degli archi.

5.2 Misurazione al variare del numero di nodi

Il numero delle SCC osservato al variare del numero di nodi (figura 3) rientra nelle nostre previsioni: all'aumentare del numero di nodi, tende ad 1.

Anche il tempo impiegato (figura 4) mostra il comportamento previsto; una crescita quadratica all'aumentare dei nodi.

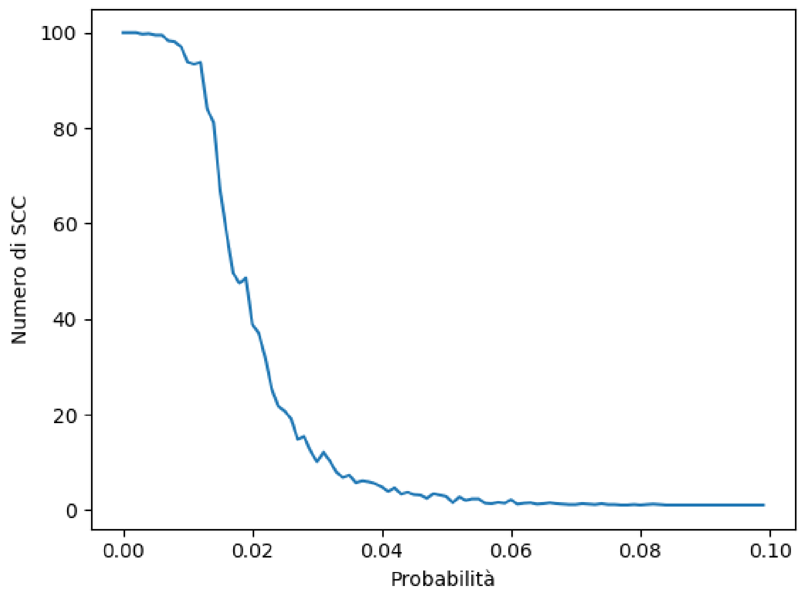

Figure 1: Numero di SCC del grafo all'aumentare della probabilità che due nodi siano connessi

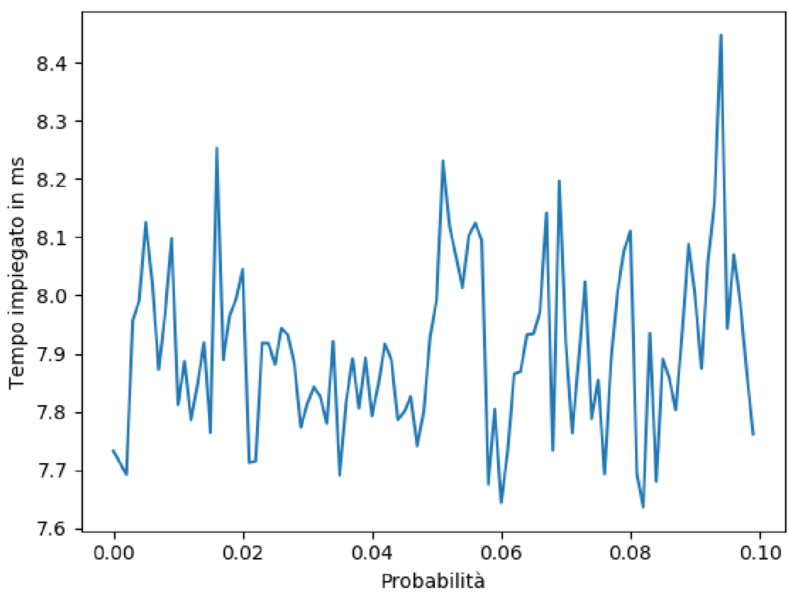

Figure 2: Tempo impiegato nel calcolare le SCC del grafo all'aumentare della probabilità che due nodi siano connessi

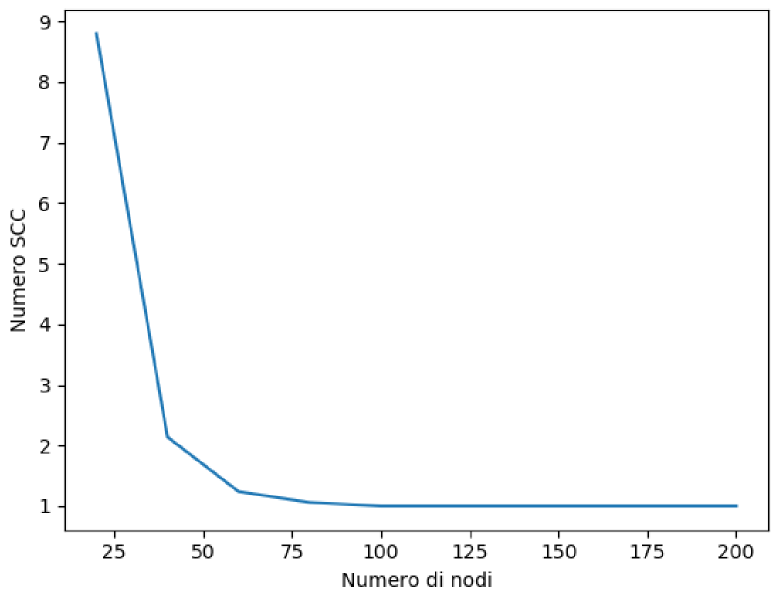

Figure 3: Numero di SCC del grafo all'aumentare del numero di nodi

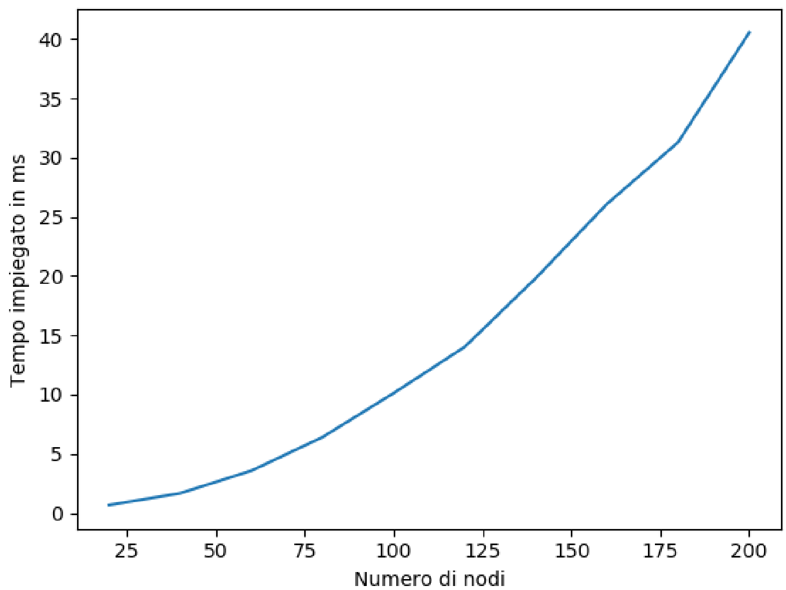

Figure 4: Tempo impiegato a calcolare le SCC del grafo all'aumentare del numero di nodi