Tecnicatura Universitaria de Programación

Matemática 2025

Módulo I

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL MAR DEL PLATA

Contenido:

Índice de contenidos

Unidad Nº1

Lógica Proposicional

Introducción

La lógica es la disciplina que estudia los métodos del razonamiento. A nivel elemental, proporciona reglas y técnicas para determinar la validez de un argumento. Se aplica en matemáticas para demostrar teoremas; en ciencias de la computación, para verificar la corrección de programas y demostrar teoremas; y en las ciencias físicas y naturales, para extraer conclusiones a partir de experimentos. En definitiva, el razonamiento lógico se emplea de manera constante en múltiples disciplinas.

Proposiciones y operaciones lógicas

Una proposición o enunciado es una oración declarativa (afirma o niega algo) que tiene un valor de verdad bien definido: puede ser verdadera o falsa, pero no ambas a la vez.

Ejemplos. ¿Cuáles de las siguientes son proposiciones?

a) La Tierra es redonda.
b) 3+4=7
c) ¿Habla usted inglés?
d) $4\text{-x} = 2$
e) ¡Tome dos aspirinas!
f) Esta proposición es falsa.

Solución:

a) Es proposición, afirma algo verdadero.
b) Es proposición, afirma algo verdadero.
c) No es proposición, es una pregunta.
d) No es proposición, es una afirmación declarativa. Es verdadera o falsa dependiendo del valor de x.
e) No es proposición, es una orden.
f) No es proposición, ya que, si suponemos que es verdadero, entonces resulta falso, pero si suponemos que es falso, resulta verdadero. Como una proposición no puede ser verdadera y falsa a la vez, concluimos que no es proposición.

Las proposiciones se simbolizan con letras minúsculas que suelen ser p, q,r,s,….estas letras denotan **variables propositivas**, es decir, variables que pueden ser reemplazadas por proposiciones. Por ejemplo, podemos escribir:

p: El sol está brillando hoy , q: Hace frío

Se dice que p y q son **proposiciones simples**, ya que no pueden reducirse a otras más sencillas. A los estados de verdadero o falso que puede tener una proposición se les llama **valor de verdad** o **valor lógico** de esa proposición.

Conectivos lógicos - proposiciones compuestas – tablas de verdad

Las proposiciones pueden combinarse por medio de conectivos lógicos para obtener **proposiciones compuestas**. Por ejemplo: "El sol está brillando y hace frío".

El valor de verdad de una proposición compuesta depende solamente de los valores de verdad de las proposiciones que se estén combinando y de los tipos de conectivos que se utilice. Veremos a continuación los conectivos más importantes:

- ### Negación operador not

  Si p es una proposición, la negación de p es la proposición "no p", y se denota: $\neg p$
  Estrictamente hablando, este operador no es un conectivo, en vista de que no une dos proposiciones, y "no p" no es en realidad una proposición compuesta. Sin embargo "no" es una **operación unaria**, y $\neg p$ es una proposición si p lo es. Se puede indicar también: {`, ‒, ~}

- ### Conjunción operador and

Si p y q son proposiciones, la conjunción de p y q es la proposición compuesta denotada por $p \wedge q$. El conectivo "y" se denota por el símbolo $\wedge$. Sobre el conjunto de proposiciones "y" es una **operación binaria**.
Los términos gramaticales más usados para la conjunción son: "y", "pero" , "mas (sin tilde)", "sin embargo"; y los signos de puntuación: "coma"," punto y coma", y "punto".

- ### Disyunción inclusiva o exclusiva

El conectivo "o" es más complicado que el conectivo "y" porque se emplea de dos formas diferentes.

- ✓ **Inclusiva: Operador or**. Dadas dos proposiciones p y q, la disyunción entre ellas es la proposición compuesta, designada por: $p \vee q$.

  El conectivo "o" se denota por el símbolo $\vee$.

- ✓ **Exclusiva: Operador xor**. Dadas dos proposiciones p y q, la disyunción entre ellas es la proposición compuesta, designada por: $p \underline{\vee} q$.

Las formas gramaticales más usadas son:

i) O …….o…….
ii) ……..o…….., pero no ambas
iii) O bien……o…….

Tablas de verdad

Las tablas de verdad son una representación gráfica en el que se establecen todas las combinaciones posibles de valores de verdad, o sea, verdadero o falso (1 ó 0), para las proposiciones simples que componen una proposición compuesta.

Observación: una tabla de verdad está formada por filas y columnas. El número de filas depende del número de proposiciones diferentes que conforman una proposición compuesta. El número de columnas depende del número de proposiciones que integran la proposición y del número de operadores lógicos contenidos en la misma: **N=nº de filas=2^n**

Negación de una proposición simple

p	$\neg p$
1	0
0	1

Conjunción entre dos proposiciones simples

p	q	p∧q
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Disyunciones

Inclusiva

p	q	p ∨ q
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Exclusiva

p	q	p ⊻ q
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Clases de proposiciones: Tautología, contradicción y contingencia

Si al evaluar una fórmula lógica o forma proposicional resulta que todos los valores de verdad resultantes son siempre:

i. Verdaderos para cualquier combinación de sus valores veritativos, decimos que dicha fórmula es una **Tautología** o **Ley lógica**, por ejemplo: $p \vee \neg p$.
ii. Falsos para cualquier combinación de sus valores veritativos, decimos que dicha fórmula es una **contradicción**, por ejemplo: $p \wedge \neg p$
iii. Si una proposición no es una tautología ni una contradicción (es decir que contiene al menos un valor V y otro F) es una **contingencia** o **indeterminada**.

✓ *Ejercicios*

1. ¿Cuáles de las siguientes son proposiciones?
   a) Vamos a la playa o vamos al cine.
   b) ¡Cierra la puerta!
   c) $x \geq 4$
   d) 2+4=9
   e) La combinatoria es un tema que se estudia en la materia matemática de la tecnicatura en programación.
   f) París es la capital de Francia.
   g) Circule con precaución.
   h) $\mathrm{x} + 1 > 3$

2. Niega las siguientes proposiciones:
   a) El mantel es verde.
   b) No tenemos computadora.
   c) $3 > 1$
   d) $4 \leq 7$
   e) Llueve y hace frío.
   f) No llueve, pero hace frío.
   g) La mesa está puesta y la cena está lista.

3. Completa la siguiente tabla, compara los valores de verdad de todas las operaciones y extrae conclusiones:

p	q	$\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{p}$	$\neg \boldsymbol{q}$	$\neg \boldsymbol{p} \wedge \neg \boldsymbol{q}$	$\neg(\boldsymbol{p} \vee \boldsymbol{q})$	$\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}$	$\neg \boldsymbol{p} \vee \neg \boldsymbol{q}$	$\neg(\mathrm{p} \wedge \mathrm{q})$
1	1								
1	0								
0	1								
0	0								

4. Completa la siguiente tabla, compara los valores de verdad de las operaciones de las columnas seleccionadas y extrae conclusiones.

					a	b	
p	q	$p \veebar q$	$-p$	$-q$	$p \wedge -q$	$q \wedge -p$	$a \vee b$
1	1						
1	0						
0	1						
0	0						

5. Sean las proposiciones: P: 2 es un número primo, q: ½ es un número racional, r: 4 es un número par, traduce a lenguaje coloquial cada una de las siguientes proposiciones:

   a) $p \wedge r$ b) $(-p) \vee q$ c) $-p \veebar q$
   d) $-(-p)$ e) $-[(-p) \vee q]$ f) $r \wedge -q$

6. Dadas las proposiciones: P: “No está lloviendo” , q: “Alicia está caminando”, interpreta según los valores de verdad de cada proposición guiándote por el ejemplo:

p	**q**	**Interpretación**
1	1	Es cierto que no está lloviendo. Es cierto que Alicia está caminando.
1	0	
0	1	
0	0	

7. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es la negación de la proposición: “2 es par y -3 es negativo”
   a) 2 es par y -3 es no negativo.
   b) 2 es impar y -3 es no negativo.
   c) 2 es par o -3 es no negativo.
   d) 2 es impar o -3 es no negativo.

8. ¿Cuál de las siguientes proposiciones es la negación de la proposición: “2 es par ó -3 es negativo”.
   a) 2 es par o -3 es no negativo.
   b) 2 es impar y -3 es no negativo.
   c) 2 es impar o -3 es no negativo.
   d) 2 es par y -3 es no negativo.

9. Dadas las proposiciones: p: Voy al cine; q: compro palomitas de maíz; r: llevo el auto; escribe cada una de las siguientes proposiciones en términos de p,q,r y conectivos lógicos.
   a) Voy al cine, pero llevo el auto.
   b) Voy al cine o compro palomitas de maíz.
   c) Voy al cine o compro palomitas de maíz, pero no ambas.
   d) Llevo el auto y voy al cine y compro palomitas de maíz.
   e) No llevo el auto, pero voy al cine.
   f) No voy al cine y no compro palomitas de maíz.
   g) No es cierto que, voy al cine o llevo el auto

10. Dadas las proposiciones simples: *p:”El auto no tiene nafta”; q:”el motor arranca”.* Expresa en forma verbal según las operaciones indicadas y los valores de verdad de las proposiciones simples p y q:

P	**q**	$p \vee q$	**En lenguaje coloquial**
1	1		
1	0		
0	1		
0	0		

11. Completa:

			1	2	3	4	5	6
P	q	r	$p \vee q \vee r$	$r \vee p \vee q$	$p \wedge q \wedge r$	$p \wedge r \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \wedge (q \vee r)$
1	1	1						
1	1	0						
1	0	1						
1	0	0						
0								
0								
0								
0								

a) Compara los valores de verdad de las columnas 1 y 2. Y los de las 3 y la 4
b) Compara los valores de verdad de las columnas 5 y 6. Observa cómo están agrupadas las proposiciones.
c) Si tuvieras que resolver el siguiente cálculo: 2.3+3, qué operación efectuarías primero: 2.3 ó 3+3?

12. En la siguiente tabla figura el orden de jerarquía de los operadores estudiados:

Jerarquía	1º	2º	3º	4º
Operador	( )	$\neg$	$\wedge$	$\vee$

Con la ayuda de la tabla de la página 6 confecciona las tablas de verdad de las proposiciones:

a) $p \wedge (-q \vee -p)$
b) $p \wedge \neg q \vee -p$
c) Extrae conclusiones.

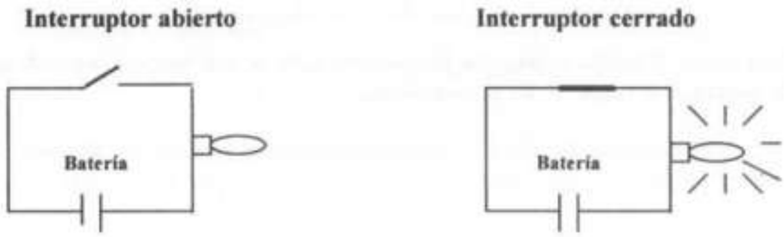
Circuitos eléctricos

Las computadoras digitales están diseñadas para obtener salidas apropiadas a partir de entradas dadas. Tanto las entradas, como las salidas, son procesadas en términos de bits, es decir, 0 ó 1. Todos los datos y programas se reducen, en última instancia, a combinaciones de bits. Se han utilizado variedad de recursos para procesar bits en una computadora. Para esto se han aprovechado los objetos de la vida real que, como las proposiciones, gozan de la propiedad de bivalencia (asumen sólo dos valores). Entre estos están:

- El **interruptor** o **conmutador** (switch) de un circuito eléctrico, que puede estar **cerrado** o **abierto**.
- El **transistor** (inventado por los laboratorios Bell en 1947); cuya corriente puede estar presente o ausente.
- Un magneto, que puede magnetizarse positivamente, que puede magnetizarse positivamente o negativamente.

Las mostraremos a continuación a través de los interruptores.

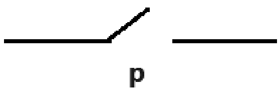
Ya vimos que un interruptor (switch) tiene la cualidad de estar abierto o estar cerrado. Si está abierto no permite el paso de corriente; y si está cerrado deja pasar la misma:



A los interruptores cerrados, al igual que a las proposiciones verdaderas, les asignamos el valor 1; y a los interruptores abiertos, al igual que a las proposiciones falsas, les asignamos el valor 0.

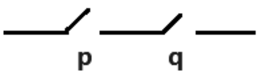
Valor de conducción: (V.deC.) llamaremos valor de conducción de un interruptor al valor 1 ó 0 que le corresponda, según el interruptor esté abierto o cerrado

A los interruptores los esquematizaremos en la forma simple que indica la figura. Para representarlos usaremos las mismas variables que para las proposiciones: p,q,r,s…

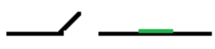
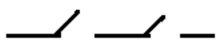


Conexión en serie de interruptores

La <u>conjunción de proposiciones</u> corresponde, en la teoría de circuitos, a la **conexión en serie** de interruptores. En efecto, la tabla de conducción de los dos interruptores conectados en serie coincide con la tabla de verdad de la conjunción:



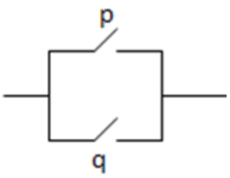
Conexión en serie

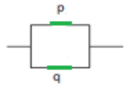
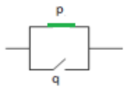
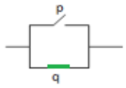
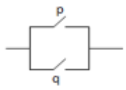
Circuito	p	q	V. de C.
	1	1	1
	1	0	0
	0	1	0
	0	0	0

Conexión en paralelo de interruptores

La disyunción de proposiciones corresponde, en la teoría de circuitos, a la **conexión en paralelo** de interruptores. En efecto, la tabla de conducción de los dos interruptores conectados en paralelo coincide con la tabla de verdad de la disyunción:

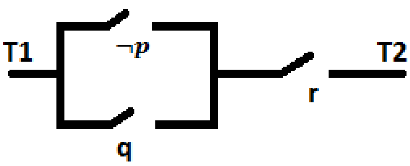
Conexión en paralelo

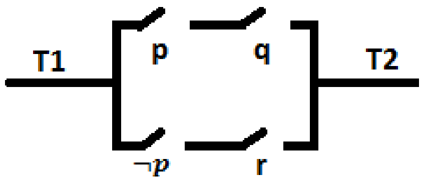


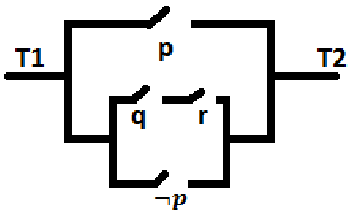
Circuitos	p	q	V. de C.
	1	1	1
	1	0	1
	0	1	1
	0	0	0

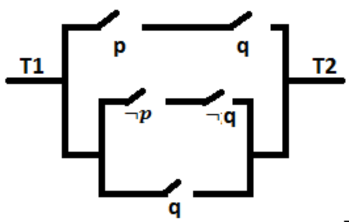
✓ *Ejercicios*

13. Escribe las expresiones simbólicas de:

a)


b)


c)


d)


14. Confecciona los circuitos lógicos correspondientes:
   a) $(p \wedge q) \vee \neg p$
   b) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q)$
   c) $(p \vee q) \wedge (p \wedge \neg q)$
   d) $[(p \wedge q) \vee \neg r] \wedge (\neg p \vee r)$

15. Confecciona los circuitos lógicos suponiendo que los valores de verdad de p y q son respectivamente 1 y 0.
   a) $(p \wedge q) \vee \neg p \equiv p \wedge q \vee \neg p$
   b) $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \equiv p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge q$

Condicional

Se representa por $p \to q$ y se lee: "si p, entonces q"

$$p \to q \equiv \neg p \vee q$$

Es una relación de consecuencia entre dos proposiciones: la primera es la condición (**antecedente**) y la segunda es el resultado (**consecuente**). *Debemos tener cuidado al simbolizar estas proposiciones, ya que en el lenguaje habitual es común encontrarlas expresadas en orden inverso. Por ejemplo: "Sería extremadamente feliz si lavaras el auto" [$p \to q$] [siendo p: "lavaras el auto" y q: "Sería extremadamente feliz"].* Por este motivo recuerda que en forma alternativa podemos decir:

- "Si …, entonces…"
- "…, luego…"
- "…en consecuencia…"
- "q cuando p",
- "p es suficiente para q"
- "p es una condición suficiente para q"
- "p sólo si q"
- "q es una condición necesaria para p"
- "q siempre que p"
- "q si p"

Ejemplos

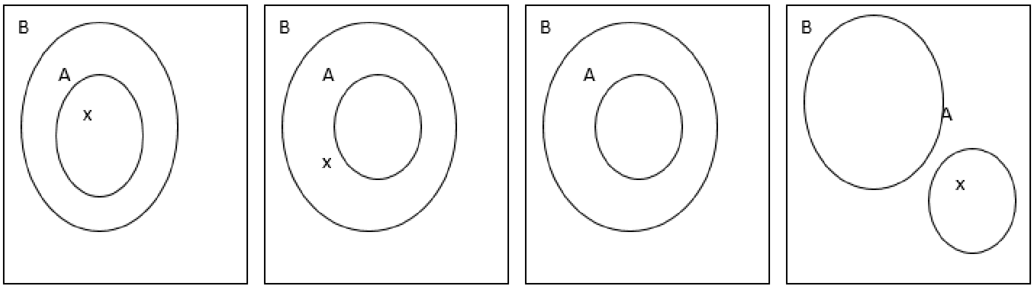
- ✓ "Si hubiera venido caminando, no estaría perdiendo tiempo tratando de estacionar el auto"
- ✓ "Cuando hagas las compras prepararé la cena"
- ✓ "Si no cambias de hábitos, se cansará de vivir contigo"
- ✓ **"**Para ir al campo es necesario que haga buen tiempo"
- ✓ "Si los libros cantan, entonces los árboles lloran"

El carácter absurdo de la última proposición está relacionado con el hecho de que lo importante no es el contenido de la proposición, sino la estructura formal de la misma.

Su tabla de valores de verdad es:

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Para comprender la tabla de valores de verdad utilizamos la definición de inclusión de conjuntos donde $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$. (También puedes leer el ejemplo 2.2 del Grimaldi). Repetiremos este concepto después de estudiar la teoría de conjuntos.



$$\boldsymbol{x \in A \to x \in B}$$

$\mathbf{1 \to 1 \equiv 1}$ $\mathbf{0 \to 1 \equiv 1}$ $\mathbf{0 \to 0 \equiv 1}$ $\mathbf{1 \to 0 \equiv 0}$

Negación del condicional

La negación de una proposición si…entonces… no comienza con *si* porque no es un condicional.

Por ejemplo, la negación de la proposición: "Si Juan va a la laguna, entonces María pagará las cuentas de Juan", es:

"Juan va a la laguna, pero María no paga las compras de Juan" $\neg(p \to q) \equiv \neg(\neg p \vee \boldsymbol{q}) \equiv \boldsymbol{p} \wedge \neg\boldsymbol{q}$

Bicondicional

Se forma a partir de dos conectores condicionales, pero de sentidos contrarios.

$p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$ en donde $\leftrightarrow$ significa bicondicional y $\equiv$ " equivale a"

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Se reconoce su presencia en el contexto de una proposición por la presencia de las partículas gramaticales "si y sólo si" que pueden estar en forma implícita. Se representa por: p$\leftrightarrow$q y se lee " p si y solo si q".

No se debe tener en cuenta el contenido de la proposición ni, en consecuencia, las posibles relaciones efecto-causa existente entre las proposiciones componentes, sino la estructura formal de la proposición.

El bicondicional sólo es verdadero si ambas proposiciones tienen el mismo valor de verdad. Hace referencia a la **condición necesaria y suficiente,** es decir $p \leftrightarrow q$ es equivalente a decir **"p es condición necesaria y suficiente para q"** y viceversa.

Ejemplos: Asocia a cada proposición escrita en lenguaje verbal su expresión simbólica:

I. $p \to q \vee r$	a. Si no fumas en el patio ni en el garaje, no fumas cigarrillos
II. $(-q \wedge -r) \to -p$	b. Si Juan no consigue un billete de avión, la condición necesaria y suficiente Para que llegue a tiempo es que viaje en coche hoy mismo
III. $-p \to (q \leftrightarrow r)$	c. Viajas en auto o viajas en tren pero no en ambos
IV. $(p \vee q) \wedge -(p \wedge q)$	d. Si fumas cigarrillos, fumas en el patio o fumas en el garaje

Órdenes de precedencia

Prioridad de precedencia	Operador lógico	Nombre
Recuerda resolver primero las operaciones entre ( )		
1	$\neg, \sim, \overline{\ }$	Negación
2	$\wedge$	Conjunción (and)
3	$\vee$	Disyunción inclusiva (or)
4	$\rightarrow$	Condicional
5	$\leftrightarrow$	Bicondicional

Presta atención

Para demostrar que dos proposiciones son lógicamente equivalentes la tabla de verdad del bicondicional entre ambas debe ser una tautología.

p	q	$\neg p$	$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1

Asociaciones importantes

En la aritmética de los números reales, las operaciones de suma y multiplicación están relacionadas por la llamada propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma; si a, b, c son números reales:

$\boldsymbol{a.(b+c) = a.b + a.c}$ El siguiente ejemplo muestra una propiedad similar para las proposiciones primitivas. También existe otra ley relacionada con esto que no tiene su contrapartida en la aritmética de los números reales.

$\boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{q}$	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{q \vee r}$	$\boldsymbol{p \wedge (q \vee r)}$	$\boldsymbol{(p \wedge q) \vee (p \wedge r)}$
1	1	1	1	1	$1 \vee 1 \equiv 1$
1	1	0	1	1	$1 \vee 1 \equiv 1$
1	0	1	1	1	$1 \vee 1 \equiv 1$
1	0	0	0	0	$0 \vee 0 \equiv 0$
0	1	1	1	0	$0 \vee 0 \equiv 0$
0	1	0	1	0	$0 \vee 0 \equiv 0$
0	0	1	1	0	$0 \vee 0 \equiv 0$
0	0	0	0	0	$0 \vee 0 \equiv 0$

Conclusión

$$\boldsymbol{I)\ p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)\ \ propiedad\ distributiva\ de\ \wedge\ sobre\ \vee}$$

Puedes confeccionar otra tabla para demostrar que:

$$\boldsymbol{II)\ p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)\ propiedad\ distributiva\ de\ \vee\ sobre\ \wedge}$$

La primera de estas leyes tiene su contrapartida en la aritmética de los números reales:

$$\boldsymbol{p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad a.(b+c) = a.b + a.c}$$

Pero la segunda no, ya que: $\boldsymbol{a + (b.c) \neq (a+b).(a+c)}$

Buscamos un contraejemplo: si $a = 2, b = 3\ y\ c = 5$

$$2 + (3.5) = 2 + 15 = 17$$

$$(2+3).(2+5) = 5.7 = 35 \neq 17$$

Leyes del álgebra proposicional

Como bien dijimos arriba, aquellas fórmulas lógicas que resultan ser siempre verdaderas no importa la combinación de los valores veritativos de sus componentes, son tautologías o leyes lógicas. En el cálculo proposicional existen algunas tautologías especialmente útiles cuya demostración se reduce a la confección de su correspondiente tabla de verdad, a saber:

Proposición 1	**Equivale a**	**Proposición 2**	**Nombre**
$-(-p)$	$\Leftrightarrow$	p	*Ley de doble negación*
$-(p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	$-p \vee -q$	*Leyes de Morgan*
$-(p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	$-p \wedge -q$	
$p \wedge q$	$\Leftrightarrow$	$q \wedge p$	*Leyes conmutativas*
$p \vee q$	$\Leftrightarrow$	$q \vee p$	
$p \wedge (q \wedge r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge q) \wedge r$	*Leyes asociativas*
$p \vee (q \vee r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \vee q) \vee r$	
$p \wedge (q \vee r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	*Leyes distributivas*
$p \vee (q \wedge r)$	$\Leftrightarrow$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	
$p \vee p$	$\Leftrightarrow$	p	*Leyes idempotentes*
$p \wedge p$	$\Leftrightarrow$	p	
$p \wedge -p$	$\Leftrightarrow$	$cualquier\ contradicción$	*Leyes inversas*
$p \vee -p$	$\Leftrightarrow$	$cualquier\ tautología$	
$p \vee (cualquier\ contradicción)$	$\Leftrightarrow$	p	*Leyes de neutro*
$p \wedge (cualquier\ tautología)$	$\Leftrightarrow$	p	
$p \vee (cualquier\ tautología)$	$\Leftrightarrow$	$cualquier\ tautología$	*Leyes de dominación*
$p \wedge (cualquier\ contradicción)$	$\Leftrightarrow$	$cualquier\ contradicción$	
$p \vee (p \wedge q)$	$\Leftrightarrow$	p	*Leyes de absorción*
$p \wedge (p \vee q)$	$\Leftrightarrow$	p	
$p \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$-p \vee q$	*Condicional como disyunción*
$p \leftrightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	*Bicondicional como conjunción*
$p \rightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$-q \rightarrow -p$	*Contrarrecíproco*
$p \leftrightarrow q$	$\Leftrightarrow$	$q \leftrightarrow p$	*Conmutativa del bicondicional*

Ejemplos de equivalencia entre proposiciones

Si llueve entonces hace calor	Hace calor o no llueve
No llueve y no hace calor	No es cierto que llueve o hace calor
No hace calor y no hace frío	No es cierto que hace calor o frío
Llueve y truena	Truene y llueve
Hace calor o frío	Hace frío o calor
Si hay viento y llueve entonces hace frío	Si hay viento entonces si llueve, hace frío
Si llueve entonces hace calor	Si no hace calor entonces no llueve
No es cierto que no hace calor	Hace calor
No llueve o hace calor	No es cierto que, llueve y no hace calor
Si no es cierto que, llueve o hace calor entonces no llueve	Llueve o hace calor o no llueve

Ejercicios

16. Determina el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) Si París es capital de Francia entonces 3+6=7
b) Si París es capital de Inglaterra entonces 3+6=9
c) Si París es capital de Francia entonces 3+6=9
d) Si París es capital de Inglaterra entonces 3+6=7

17. Sean p, q proposiciones primitivas para las que $p \to q$ es falsa. Determina los valores de verdad de:

a) $p \wedge q$ b) $\neg p \vee q$ c) $q \to p$ d) $\neg q \to \neg p$

18. Sean p,q,r,s, las siguientes proposiciones:

- ✓ p:" Termino de escribir mi programa de computación antes de la comida"
- ✓ q:" Jugaré tenis en la tarde"
- ✓ r:" El sol está brillando"
- ✓ s:" La humedad es baja"

Escribe lo siguiente en forma simbólica:

a) Si el sol está brillando, jugaré tenis esta tarde.
b) Terminar de escribir mi programa antes de la comida es necesario para que juegue tenis esta tarde.
c) La humedad baja y el sol brillante son suficientes para que juegue tenis esta tarde.

19. Vuelve a escribir cada una de las siguientes proposiciones utilizando la forma: "si…, entonces…"

a) La práctica diaria de su servicio es una condición suficiente para que Daniela tenga una buena posibilidad de ganar el torneo de tenis.
b) Arregle la calefacción o no pagaré el alquiler.
c) Te prestaré el auto cuando obtengas buenas calificaciones en tus estudios.
d) Te presto el auto cuando ordenes tu cuarto.
e) Bebes alcohol o llevas el auto.
f) Irás al juego de béisbol si haces la tarea.
g) Terminar de escribir mi programa antes de la comida es necesario para que juegue tenis esta tarde.

20. Sean p y q las siguientes proposiciones:

p: hace frío ; q: llueve

Expresa cada proposición en lenguaje coloquial:

Lenguaje simbólico	**Lenguaje coloquial**
$-p$	
$p \wedge q$	
$p \vee q$	
$q \vee -p$	
$-p \wedge -q$	
$-(-q)$	
$p \to q$	

21. Sean las proposiciones:

p: "Has obtenido un 10 en el examen final"

q: “Has hecho todos los ejercicios del módulo”
r: “Has obtenido un 10 en esta asignatura”

Escribe en forma simbólica las siguientes proposiciones utilizando p, q y r, y los conectivos lógicos.

a) Has obtenido un 10 en esta asignatura, pero no has hecho todos los ejercicios del módulo.
b) Has hecho todos los ejercicios del módulo, has obtenido un 10 en esta asignatura y también en el examen final.
c) Conseguir un 10 en el examen final y realizar todos los ejercicios del módulo es suficiente para obtener un 10 en esta asignatura.
d) Puedes conseguir un 10 en esta asignatura si, y sólo si, haces todos los ejercicios del módulo o tu calificación en el examen final es 10.

22. Determina cuáles de las siguientes frases no se correspondería con la estructura: $p \to -q$

p: bebes/beber y q: conduces/conducir

a) Si bebes entonces no conduces.
b) Bebe sólo si no conduces.
c) No conducir es necesario para beber.
d) No bebes y no conduces.
e) Beber es suficiente para no conducir.

23. Construye las tablas de verdad y determina cuáles son contingencias, cuáles contradicciones y cuáles tautologías:

a) $p \wedge -p$
b) $p \vee -p$
c) $p \to q$
d) $q \to p$
e) $(p \to q) \wedge (q \to p)$
f) $-(p \underline{\vee} q)$
g) $p \wedge r \to r$
h) $s \vee t \leftrightarrow s$
i) $-(p \to q) \leftrightarrow (-q \wedge p)$

24. De los cuatro enunciados siguientes hay dos que son equivalentes (igual significado). Verificarlos con tabla de verdad.

a) Si hoy llueve o tengo frío, entonces hoy es martes.
b) Es martes o no llueve y por ello no tengo frío.
c) Si no es martes, no llueve y no tengo frío.
d) Es martes y no tengo frío, o no es cierto que no llueve y tengo frío.

25. Simplifica las siguientes proposiciones compuestas aplicando las leyes estudiadas. Verifica la equivalencia mediante tabla de verdad:

a) $-[-p \vee -(-q)] \wedge -(-p)$
b) $-[(p \to q) \wedge -q]$
c) $q \wedge (-p \to -q)$
d) $-[(p \to -q) \vee q]$
e) $[(p \to q) \wedge \neg q] \to \neg p$
f) $(-p \to q) \wedge (p \vee -q)$
g) $(p \to q) \wedge (p \to \neg q$
h) $-(p \wedge q) \wedge (p \to q)$
i) $[(p \wedge -q) \vee (p \wedge q)] \to (-p \wedge -q)$
i) $[q \wedge (q \to -p)] \to -(p \wedge q)$
k) $\neg(p \leftrightarrow q) \vee (p \vee q)$
l) $(p \underline{\vee} q) \vee (\neg q \vee \neg p)$

26. Niega y simplifica las proposiciones expresadas en lenguaje simbólico. Niega en forma verbal las expresadas en lenguaje verbal:

a) $p \vee q \longrightarrow r$

b) $\neg(p \leftrightarrow q)$

c) Si María va al centro, Juan va al gimnasio

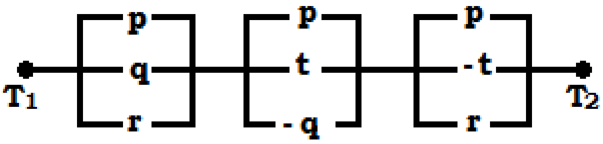
d) No conducir es necesario para beber

e) Si no vienes ya, nos vamos a desayunar

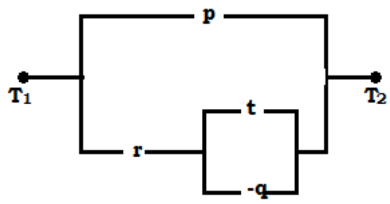
f) No es cierto que vamos a desayunar si y sólo si ordenas tu cuarto

27. Circuitos más complicados. Representa las siguientes redes mediante proposiciones, luego simplifícalas y confecciona el circuito en términos de interruptores. Comprueba confeccionando ambas tablas de verdad que la simplificación es correcta o emplea otro tipo de razonamiento.

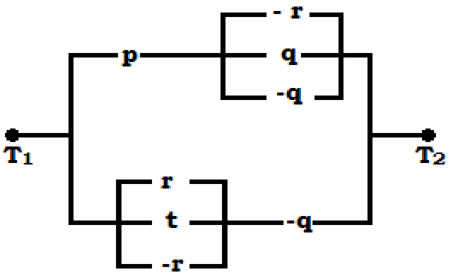
a)



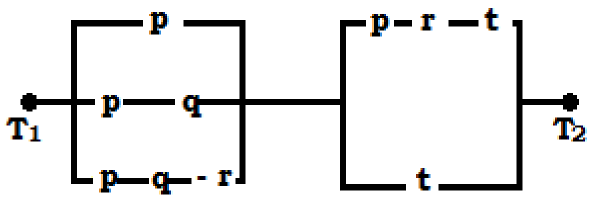
b)



c)



d)



Álgebra de Boole[1]

Introducción

En 1847 un matemático inglés autodidacta llamado George Boole (1815-1864), desarrolla unos símbolos matemáticos con unas reglas que pueden ser aplicadas en problemas de lógica deductiva.

Posteriormente, en 1938, el científico Claude E. Shannon lo aplica a relés[2] y a circuitos de conmutación. A partir de entonces, el Álgebra de Boole se ha utilizado en el diseño de los circuitos lógicos de las computadoras, pues permite simplificar las conexiones físicas reduciendo el hardware y consiguientemente el espacio para alojarlo.

Veremos este tema desde una perspectiva general y abstracta, sin olvidar que son muchas y muy importantes las aplicaciones concretas de esta estructura.

Definición de Álgebra de Boole

Un conjunto cualquiera A en el que se han definido dos operaciones binarias que llamaremos **suma lógica (+) y producto lógico (·),** y una operación unitaria que llamaremos **complemento ($\overline{}$)**, se dice que es un **Álgebra de Boole** si se cumplen las siguientes **<u>propiedades axiomáticas</u>**:

(A1). Conmutativa: $\forall a, b \in A, a + b = b + a \quad y \quad a \cdot b = b \cdot a$

(A2). Identidad: Los elementos neutros de (+) y (·) son, respectivamente, el elemento (0) y el elemento unidad (1): $\forall a \in A\,, a + 0 = a \;\; y \;\; a \cdot 1 = a$

(A3). Distributiva: De la (+) respecto a (·), y del (·) respecto a (+):

$$\forall a, b, c \in A, \qquad a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c) \quad y \quad a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$$

(A4). Complementario: $\forall a \in A,\;\; a + \bar{a} = 1 \;\; y \;\; a \cdot \bar{a} = 0$

❖ Comentarios importantes

a) De los axiomas anteriores se deducen las siguientes tablas para las operaciones (+) y (·)

Suma lógica (+)

+	0	1
0	0	1
1	1	1

Producto lógico (·)

·	0	1
0	0	0
1	0	1

b) Para que el Álgebra de Boole anterior sea *aplicable a circuitos lógicos* se define un conjunto A de dos elementos como $A = \{0,1\}$, con las operaciones $(+)\; y\; (\cdot)$. En consecuencia, las variables $a, b, c, \ldots$ que utilizamos son variables binarias, y sólo pueden tomar un valor de entre dos posibles valores que son "0" y "1".

[1] Matemáticas Especiales para Computación. Luis García Valle.
[2] Relés: interruptor

Al Álgebra de Boole de variables binarias se la denomina **Álgebra de Boole binaria.** A partir de ahora supondremos que seguimos trabajando con este Álgebra.

c) La operación producto lógico $(\cdot)$muchas veces se omitirá, dejándose sobreentendida si se escriben varias variables seguidas; así, por ejemplo, son equivalentes las siguientes expresiones:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \ \leftrightarrow a(b + c) = ab + ac$$

d) Se supondrá, al igual que en el álgebra ordinaria, que la operación $(\cdot)$es prioritaria sobre la $(+)$, salvo que esta prioridad se altere por medio de paréntesis. Así:

$$\boldsymbol{a + b \cdot c = a + (b \cdot c) \quad pero \quad a + b \cdot c \neq (a + b) \cdot c}$$

Teoremas del Álgebra de Boole

Teorema 1: Dualidad
Se puede pasar de una propiedad a otra análoga (dual) entre sí las operaciones $(+)$ y $(\cdot)$y los elementos neutros $(0)\ y\ (1)$ Por ejemplo, la dual de $a + 0 = a\ \ es\ \ a \cdot 1 = a$

	Suma	**Producto**
Teorema 2: idempotencia	$a + a = a$	$a \cdot a = a$
Teorema 3: identidad de los elementos 0 y 1	$a + 1 = 1$	$a \cdot 0 = 0$
Teorema 4: absorción	$a + (a \cdot b) = a$	$a \cdot (a + b) = a$
Teorema 5: asociatividad	$a + (b + c) = (a + b) + c$	$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Teorema 6:complementarios de 0 y 1	$\bar{0} = 1$	$\bar{1} = 0$
Teorema 7: involución o doble complemento	$\bar{\bar{a}} = a$	
	Suma	**Producto**
Teorema 8: leyes de De Morgan	$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$	$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b}$
Teorema 9: no tiene un nombre especial	$a + \bar{a} \cdot b = a + b$	$a \cdot (\bar{a} + b) = a \cdot b$

- Sugerencia: demuestra el Teorema 2

Relación entre Álgebra de conjuntos, Álgebra de Proposiciones y Álgebra de Boole Binaria

❖ El conjunto de las partes de un conjunto tiene estructura de Álgebra de Boole, con las operaciones unión e intersección, y las propiedades de la complementación.

❖ El conjunto de las proposiciones lógicas tiene estructura de Álgebra de Boole con los conectivos disyunción, conjunción y negación.

❖ Las equivalencias entre las operaciones de estas tres álgebras se ponen de manifiesto en la tabla:

Relaciones entre las tres Álgebras					
Álgebra de conjuntos		**Álgebra de proposiciones**		**Álgebra de Boole**	
Unión	($\cup$)	Disyunción	($\vee$)	Suma	($+$)
Intersección	($\cap$)	Conjunción	($\wedge$)	Producto	($\cdot$)
Diferencia simétrica	(Δ)	Disyunción excluyente	($\underline{\vee}$)	Suma	($\oplus$)
Conjunto vacío	($\emptyset$)	Falso	(F) ó (0)	Elemento 0	(0)
Conjunto universal	(E)	Verdadero	(V) ó (1)	Elemento 1	(1)
Complementario	($\overline{\ }$)	Negación	($\overline{\ }$)	Complementario	($\overline{\ }$)

Ejercicios que se resolverán en clase por docentes o ayudantes

I. Demuestra que: $a + b + 1 = 1 \quad y \quad a \cdot b \cdot 0 = 0$
   a) Por tablas de valores.
   b) Por axiomas y teoremas.

II. Demuestra por axiomas y teoremas:
   a) $(b + c) \cdot (\bar{c} + b) = b$
   b) $\overline{a + (b \cdot a)} + 1 = 1$
   c) $c \cdot b + c = c$
   d) $\bar{a} + a.\bar{\bar{b}} = \bar{a} + b$
   e) $a \oplus b = \left(a.\bar{b}\right) + (b.\bar{a})$

Ejercicios para resolver entre los equipos de estudiantes debiendo comparar las respuestas

i) Demuestra usando tabla de valores:

   a) $\overline{a + b + c} = \bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c}$
   b) $\overline{a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b} = \bar{a} \cdot \bar{b} + a \cdot b$

ii) Simplifica aplicando teoremas y axiomas:

   a) $\bar{a} + (\bar{a} + b) \cdot (\bar{a} + b + c)$
   b) $\left[\bar{a} + b \cdot c \cdot \left(\overline{a + b}\right) + a\right] \cdot a + \left(c + \bar{d}\right) \cdot (c + b + \bar{d})$
   c) $\overline{a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b}$
   d) $\left(a \cdot \bar{b} + b\right) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b})$
   e) $b(a + \bar{c}) + b\bar{a}c$ Recuerda que $a \cdot b \equiv ab$
   f) $\overline{a + b(a + c)}$
   g) $\overline{a \oplus b}$

Circuitos combinatorios[3]

Definición: un circuito combinatorio (o lógico) puede pensarse como "una caja" que acepta un conjunto de entradas (imputs)[4] y genera un conjunto de salidas (outputs)[5]. Cada entrada y cada salida es un bit. Los datos de salida están unívocamente determinados por la combinación de los datos de entrada. Un circuito combinatorio no tiene memoria; los datos de entrada anteriores al estado del sistema, no afectan los datos de salida. Los circuitos en los cuales los datos del sistema dependan tanto de los datos del sistema como del estado del sistema se llaman **circuitos secuenciales** (no nos ocuparemos de ellos).

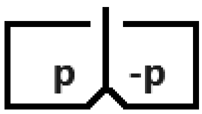
Compuertas lógicas, o **compuertas**

Todo circuito combinatorio, por complicado que sea, se puede construir sobre la base de unos pocos circuitos muy simples, a los que se les da el nombre de **compuertas lógicas** o, simplemente, **compuertas**. Las compuertas esenciales son tres:

- Compuerta-No (Not)
- Compuerta-Y (And)
- Compuerta-O (incluyente) (Or)

Interruptores complementarios

La siguiente figura nos muestra dos interruptores cuyos estados de conducción son opuestos: cuando uno está cerrado el otro está abierto y viceversa:



A dos interruptores que se comportan de este modo se les llama **interruptores complementarios.** Si a uno de ellos se denota con p, al otro se denota con –p (la misma notación que para una proposición y su negación).

Tabla del valor de conducción de dos circuitos complementarios

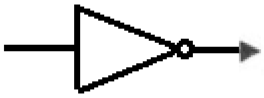
Circuitos	p	-p
	1	0
	0	1

[3] Fundamentos de la Matemática. Jorge Saenz.

[4] Conjunto de datos que se introducen en un sistema o un programa informáticos.

[5] Información que proporciona una computadora después de procesar un conjunto de datos determinados.

Compara esta tabla con la tabla de la negación de las proposiciones. A todos los circuitos cuyas tablas de conducción coincidan con la tabla anterior se les da el nombre genérico de **compuerta-No** o **inversor**, la cual, se simboliza así:



Compuerta-No

Compuerta AND (Y)

Una compuerta Y acepta a y b como datos de entrada, en donde a y b son bits, y produce un dato de salida que se denota $a \wedge b$ en donde:

$$a \wedge b = \begin{cases} 1 & si\ a = 1\ \ y\ b = 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

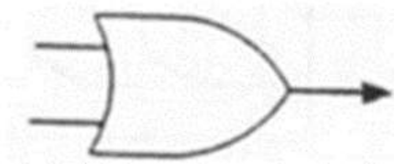
Compuerta-Y

Compuerta OR (O)

Una compuerta O acepta a y b como datos de entrada, en donde a y b son bits, y produce un dato de salida que se denota por $a \vee b$ en donde:

$$a \vee b = \begin{cases} 1 & si\ a = 1\ \ o\ bien\ \ b = 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Compuerta-O



Ejemplo:

El circuito:

Tiene por expresión booleana $\overline{(x_1 . x_2) + x_3} = y$ donde la tabla de verdad correspondiente es:

x_1	x_2	x_3	y
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

El valor de salida se puede calcular rastreando el flujo a través del circuito. Efectuando la tabla de verdad teniendo en cuenta la expresión algebraica obtenemos el mismo conjunto de resultados para las combinaciones de posibilidades:

x_1	x_2	x_3	$x_1.x_2$	$(x_1.x_2)+x_3$	$\overline{(x_1.x_2)+x_3}$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	0	0	0	0	1

- ***Ejercicios***

28. Determina los circuitos, en términos de compuertas, correspondientes a las siguientes proposiciones:

a) $\neg p \vee q$

b) $(\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

c) $(p \wedge \neg q) \vee (q \wedge \neg p)$

d) $p \rightarrow q$

e) $p \leftrightarrow q$

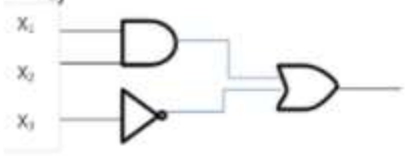
f) $p \veebar q$

29. Escribe las expresiones booleanas que representan los circuitos combinatorios, la tabla lógica y simbólicamente los datos de salida de cada compuerta:

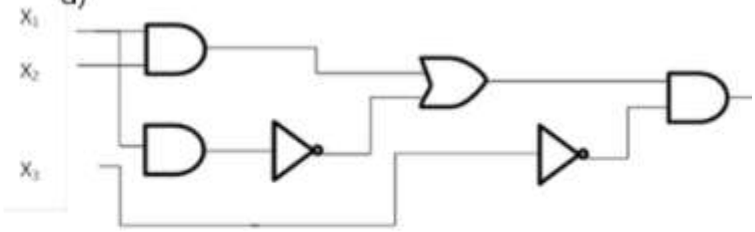
a)

b)

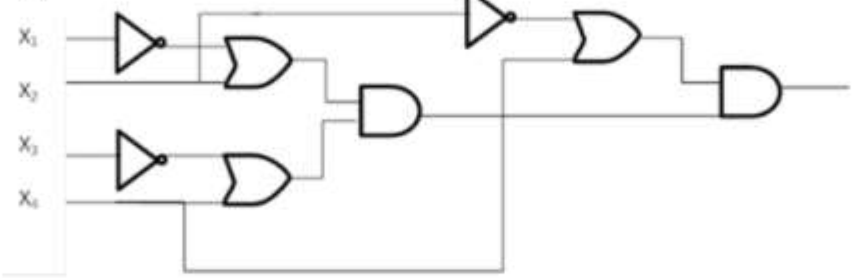
c)



d)

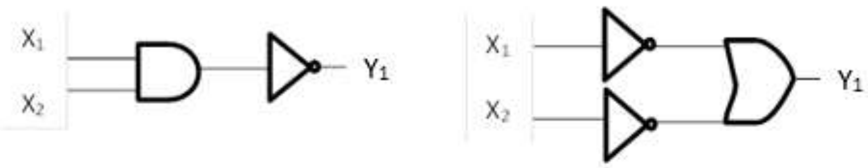


e)

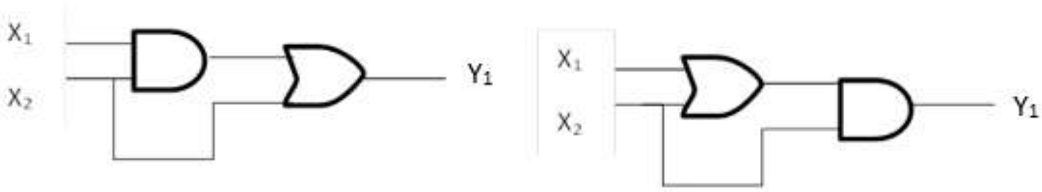


30. Demuestra que los siguientes circuitos combinatorios son equivalentes:

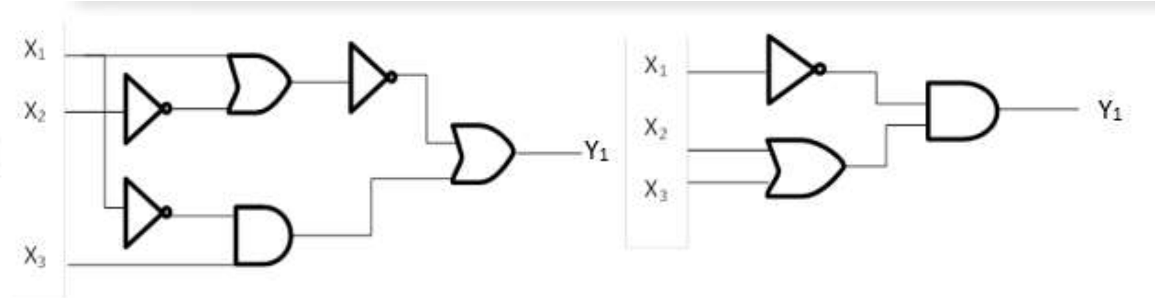
a)



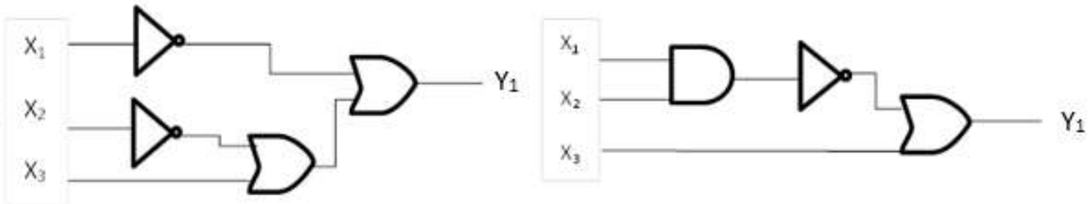
b)



c)



d)



Al finalizar este tema adquirirás las habilidades necesarias como para poder resolver de manera justificada ejercicios como:

1. Dada la proposición: "*Si el examen comenzó a las 8 AM y Lucy llegó a la hora indicada, entonces Petra no llegó 15 minutos más temprano que Lucy o no presentó su examen*".
   I) Asigna una letra a cada proposición simple y expresa en lenguaje simbólico.
   II) Sabiendo que la proposición dada es falsa, responde de manera razonada:
      i) ¿Llegó Lucy a la hora indicada para el examen?
      ii) ¿A qué hora llegó Petra?
      iii) ¿Presentó Petra el examen?

2. Dada la proposición: *"El campeonato no dio sorpresas y los Tiburones ganaron la copa si y sólo si o los Cardenales no participaron o los Tiburones no ganaron la copa"*

   I) Asigna una letra a cada proposición simple y expresa en lenguaje simbólico.
   II) Sabiendo que la proposición es verdadera y los Cardenales sí participaron, responde de manera razonada:
      i) ¿Dio sorpresas el campeonato?
      ii) ¿Ganaron la copa los tiburones?

Unidad Nº2: Teoría de conjuntos

Un **conjunto** es un grupo o colección de objetos diferentes, a los que se conoce como **elementos** o **miembros** del mismo que pueden ser concretos o abstractos. Por ejemplo: la colección de todos los bancos de las aulas, la colección de todos los pájaros negros, o la colección de todos los números naturales comprendidos entre 10 y 100, son, cada uno, un conjunto.

Que un conjunto esté bien definido significa que es posible decidir si un objeto dado pertenece o no a la colección.

Una forma de escribir un conjunto con un número finito de elementos, es hacer una lista de los elementos del conjunto y encerrarla entre llaves. Así, el conjunto de todos los números naturales menores que cuatro es: $\{1,2,3\}$

No importa el orden en que se escriban los elementos del conjunto. Es decir:

$$\{1,3,2\}=\{2,1,3\} = \{3,2,1\} = \{1,2,1,3,2\}$$

Son representaciones del mismo conjunto.

Para designar los conjuntos se emplean letras mayúsculas, como: A, B, C, y para designar los miembros (o elementos) de los conjuntos, letras minúsculas, como: a,b,c,x,y .

Para indicar que x es un elemento del conjunto A, se escribe: $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$; también se indica el hecho de que x no es un elemento de A, escribiendo:$\mathrm{x} \notin \mathrm{B}$

Ejemplo 1. Sea $\mathrm{A} = \{\mathrm{a, e, i, o, u}\}$. Entonces: $\mathrm{a} \in \mathrm{A}$, $\mathrm{i} \in \mathrm{A}$, $\mathrm{c} \notin \mathrm{A}$

En ocasiones no es conveniente o es imposible describir un conjunto por medio de una lista de todos sus elementos. Otra manera útil de definir un conjunto, es especificando una propiedad que los elementos del conjunto tengan en común. Se utiliza la notación $\mathrm{P(x)}$ para denotar una oración o enunciado P relativo al objeto variable x. El objeto definido por $P(x)$ escrito en la forma $\{\mathrm{x/P(x)}\}$, es simplemente la colección de todos los objetos x para los cuales se cumple P. Por ejemplo, $\{\mathrm{x/x\ es\ un\ número\ natural\ menor\ que\ 4}\}$=$\{x/x \in N \ \wedge x < 4\}$ es el conjunto $\{1,2,3\}$.

Determinación de un conjunto

Por extensión: se define nombrando a cada elemento del conjunto.

Por comprensión: se define mediante un enunciado o atributo que representa al conjunto.

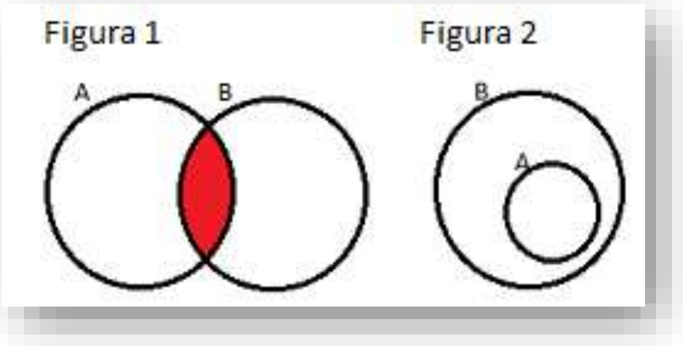
Ejemplo:

Por extensión	Por comprensión
$A = \{a, e, i, o, u\}$	$A = \{x/x\ es\ vocal\ del\ abc\}$
$B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$	$B = \{x/x\ es\ un\ dígito\ del\ sistema\ de\ numeración\ decimal\}$
$C = \{15,20,25,30\}$	$C = \{x/x\ es\ múltiplo\ de\ 5\ comprendido\ entre\ 12\ y\ 32\}$

Diagramas de Venn

Los diagramas de Venn tienen el nombre de su creador, John Venn, matemático y filósofo británico. Venn introdujo el sistema de representación que hoy conocemos en julio de 1880 con la publicación de su trabajo titulado «*De la representación mecánica y diagramática de proposiciones y razonamientos*».

Se usan para mostrar gráficamente la agrupación de cosas *elementos* en conjuntos, representando cada conjunto mediante un círculo o un óvalo.



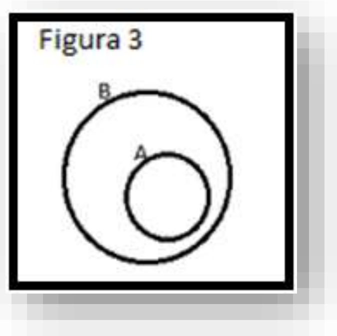
La posición relativa en el plano de tales círculos muestra la relación entre los conjuntos. Por ejemplo, si los círculos de los conjuntos A y B se solapan, se muestra un área común a ambos conjuntos que contiene todos los elementos contenidos a la vez en A y en B. Si el círculo del conjunto A aparece dentro del círculo de otro B, es que todos los elementos de A también están contenidos en B (figura 1 – figura 2).

Clasificación de conjuntos

Universal: Conjunto que contiene todos los elementos posibles para un problema particular en consideración. Se lo simboliza con la letra U (ver página 10).
Infinito: Conjunto que tiene una cantidad ilimitada de elementos.
Finito: Conjunto que tiene una cantidad limitada de elementos.
Vacío: Es aquel conjunto que no tiene elementos, se le representa por: $\emptyset$ o $\{\}$
Unitario: es aquel conjunto que tiene un solo elemento.
Iguales: Son aquellos conjuntos que tienen los mismos elementos.
Diferentes: Dos conjuntos son diferentes si sus elementos no son iguales
Disjuntos: Dos conjuntos son disjuntos si no tienen ningún elemento en común: es decir, todos los elementos de un conjunto son diferentes a los elementos de otro conjunto.

Cardinalidad de un conjunto A

Es el número de elementos que tiene un conjunto, se representa con el símbolo # o $|A|$. Si $A = \{1,2,3\}$, entonces $nA = 3$**Subconjuntos**



Si cada elemento de A es también un elemento de B, es decir, si siempre que $x \in A$ ocurre que $x \in B$, se dice que A es un **subconjunto** de B, o que A está **contenido** en B, y se escribe: $A \subseteq B$ (figura 3).

$$A \subseteq B$$

Si A es un conjunto cualquiera, $A \subseteq A$.Es decir, todo conjunto es un subconjunto de sí mismo. Para un conjunto cualquiera A, como no hay elementos de $\emptyset$ que no estén en A, se tiene que $\emptyset \subseteq A$

Es fácil ver que:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \text{ y } B \subseteq A.$$

Ejemplo 3. Dado el conjunto $A = \{2, 4, 6, 8\}$, entonces $A \subset N.$

Ejemplo 4. Se tiene que $Z^+ \subseteq Z$. Por otra parte, si Q denota el conjunto de todos los números racionales, entonces $Z \subseteq Q.$ Por lo tanto: $Z^+ \subseteq Z \subseteq Q.$

Conjunto Universal

El universo de discurso, conjunto universal o referencial, que normalmente se denota por las letras U, V ó E , es un conjunto cuyo objeto de estudio son los subconjuntos del mismo. Actualmente se debe dejar en claro sobre cuál conjunto se está tratando. Por ejemplo, si estamos tratando conjuntos cuyos elementos son letras, el conjunto referencial sería el conjunto formado por todas las letras del alfabeto.

En los diagramas de Venn, el conjunto universal U se denotará por un rectángulo, mientras que los conjuntos dentro de U serán denotados por círculos.

Conjunto vacío

En teoría de conjuntos, el **conjunto vacío** es el conjunto que no contiene ningún elemento. Puesto que lo único que define a un conjunto son sus elementos, el conjunto vacío es único. Es denotado por el símbolo: Ø Esta notación fue introducida por André Weil en 1939. Otra notación común para el conjunto vacío es la notación extensiva, especificando sus elementos (ninguno) entre llaves: $\{\}$.
Simbólicamente se define como: $\{x/x \neq x\}$

Propiedades

El conjunto vacío tiene las siguientes propiedades generales:

- El conjunto vacío es único: dado dos conjuntos sin elementos, ambos son iguales. (Esto justifica hablar de "el conjunto vacío" y no de "un conjunto vacío")
- El único subconjunto del conjunto vacío es él mismo: $A \subseteq \emptyset$ $sólo\ si$ $A = \emptyset$l número de elementos del conjunto vacío (es decir, su número cardinal) es cero; en particular, el conjunto vacío es un conjunto finito :$n\emptyset = 0$
- Además, el conjunto vacío actúa como el cero en las operaciones del álgebra de conjuntos:
- Para todo conjunto *A*, el conjunto vacío es subconjunto de *A*: $\emptyset \subseteq A$
- El conjunto potencia del conjunto vacío es el mismo Ø. Por lo tanto, el número cardinal de P(Ø)=1, considerando que el cardinal del conjunto vacío es cero.
- El conjunto vacío, a pesar de contener *nada*, sigue siendo *algo* en sí mismo: un conjunto. Esta distinción es importante si situamos a los conjuntos en un contexto. Por ejemplo, si imaginamos a los conjuntos como bolsas, capaces de contener distintos elementos, el conjunto vacío sería aquella bolsa sin elementos dentro; pero aun así seguiría siendo una bolsa. Es por esto que el conjunto potencia siempre contiene al conjunto vacío. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.

✓ *Ejercicios*

1. Marca con una cruz según corresponda la pertenencia de los elementos numéricos a cada conjunto:

	N	**Z**	**Q**	**I**	**R**	**Im**
-1						
3						
$\boldsymbol{\pi}$						
$\sqrt{2}$						
3i						
4/5						
10/2						
$1-\sqrt{3}$						

2. Sea $A = \{1,2,4,a,b,c\}$. Identifica cada uno de los siguientes casos como verdadero o falso.

a) $2 \in A$		b) $3 \in A$		c) $c \notin A$		d) $\emptyset \subset A$		e) $A \subset A$	
V	F	V	F	V	F	V	F	V	F

3. Define según la cantidad de elementos que tenga cada conjunto (unitario, finito, infinito, vacío):
   a) Vocales del abecedario.
   b) Día de la semana que comiencen con la letra j.
   c) Conjunto de números enteros.
   d) Días de la semana.
   e) Meses del año que comiencen con la letra f.

4. En cada inciso, forma un conjunto haciendo una lista de sus elementos.
   a) El conjunto de todos los números naturales que son menores que 10.
   b) $\{x/x \in N \wedge x^2 < 36\}$
   c) El conjunto de todos los números enteros cuyo cubo está comprendido entre -2 y 10.

5. En cada inciso, escribe el conjunto en la forma $\{x/P(x)\}$, en donde $P(x)$ es una propiedad que describe los elementos del conjunto.
   a) $A = \{2,4,6,8,10\}$
   b) $B = \{a,e,i,o,u\}$
   c) $C = \{1,8,27,64,125\}$
   d) $D = \{-2,-1,0,1,2\}$
6. Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales al conjunto A?
   a) $\{4,1,2,3,5\}$
   b) $\{2,3,4\}$
   c) $\{1,2,3,4,5,6\}$
   d) $\{x/x \in Z \wedge x^2 \leq 25\}$

e) $\{x/x \in Z^+ \wedge x \leq 5\}$
f) $\{x/x \in Q^+ \wedge x \leq 5\}$
g) $\{x/x \in Q \wedge x \leq 5\}$

7. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son conjuntos vacíos?
   a) $\{x/x \in R \wedge x^2 - 1 = 0\}$
   b) $\{x/x \in R \wedge x^2 + 1 = 0\}$
   c) $\{x/x \in R \wedge x^2 = -9\}$
   d) $\{x/x \in R \wedge x = 2x + 1\}$
   e) $\{x/x \in R \wedge x = x + 1\}$

8. Observa las siguientes proposiciones y di si son verdaderas o falsas, fundamentando tu respuesta:
a) $\emptyset \subset A$
b) $\{2,3,4\} \in \{1,2,3,4,5\}$
c) $3 = \{3\}$
d) $\{2,3,4\}=\{2,3,4,4,2,3\}$
e) $\emptyset = 0$
f) $2 \in \{2,3,4\}$
g) $0 \in \emptyset$

9. Haz una lista de todos los subconjuntos del conjunto $B = \{google, yahoo, gmail\}$

10. Sean $A = \{1\}$, $B = \{1, a, 2, b, c\}$, $C = \{b, c\}$, $D = \{a, b\}$ y $E = \{1, a, 2, b, c, d\}$, para cada parte, sustituye los puntos suspensivos por $\subseteq$ ó $\not\subseteq$ para dar un enunciado verdadero.

a) $A....B$	b) $\emptyset ....A$	c) $B....C$
d) $C...E$	e) $D....C$	f) $B....E$

11. Si $A = \{2,3,7\}$, encuentra $P(A)$, , #A , y $\#P(A)$

Complemento de un conjunto A

El complemento de todo conjunto *A,* con respecto a un determinado conjunto de referencia, es el conjunto de los elementos de dicho conjunto universal que no pertenecen al conjunto *A* lo designaremos por A', C_A ó $\overline{A}$

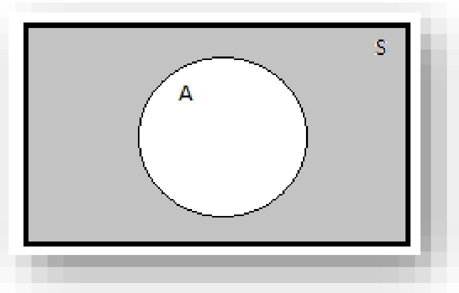


Figura 4

Ejemplos

a) Si $S = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ y $A = \{2,4,6,8,10\}$ el complemento de A con respecto a S es el conjunto $\overline{A}=\{1,3,5,7,9\}$

b) Una empresa X fabrica camisas de manga larga y camisas de manga corta. Sean:

$$S = \{x/x \ es\ una\ camisa\ que\ fabrica\ la\ empresa\ X\}$$

$$A = \{x/x \ es\ una\ camisa\ de\ manga\ larga\ que\ fabrica\ la\ empresa\ X\}$$

El complemento de A con respecto a S es el conjunto:

$$\overline{A} = \{x/x \ es\ una\ camisa\ de\ manga\ corta\ que\ fabrica\ la\ empresa\ X\}$$

c) Si $\mathrm{A} = \{1,2,3\}$ el complemento de A con respecto a los siguientes conjuntos universales es:

Conjunto universal	**Complemento $\overline{A}$**
$S_1 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$	$\overline{A} = \{4,5,6,7,8,9,10\}$
$S_2 = \{1,2,3,4\}$	$\overline{A} = \{4\}$
$S_3 = \{-2,-1,0,1,2,3\}$	$\overline{A} = \{-2,-1,0\}$

Propiedades

- No existe un complemento de A, sino varios, según el conjunto de referencia.
- Un elemento del conjunto universal pertenece a un conjunto A o a su complemento $\overline{\mathrm{A}}$, pero no puede pertenecer a los dos al mismo tiempo (se dice que A y $\overline{\mathrm{A}}$ son mutuamente excluyentes o disjuntos).
- El complemento del conjunto universal con respecto a sí mismo es el conjunto vacío.
- Si $\overline{\mathrm{A}}$ es el complemento de A con respecto a un conjunto de referencia S, entonces A es el complemento de $\overline{\mathrm{A}}$ con respecto a S.

Ejemplo

Si $\mathrm{S} = \{\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}\}$, enumera todos los subconjuntos de S y el complemento de cada subconjunto con respecto a S.

Subconjuntos de *S*	Complemento de cada subconjunto con respecto a *S*
$\emptyset$	$\{a,b,c\}$
$\{a\}$	$\{b,c\}$
$\{b\}$	$\{a,c\}$
$\{c\}$	$\{a,b\}$
$\{a,b\}$	$\{c\}$
$\{a,c\}$	$\{b\}$
$\{b,c\}$	$\{a\}$
$\{a,b,c\}$	$\emptyset$

Operaciones con conjuntos

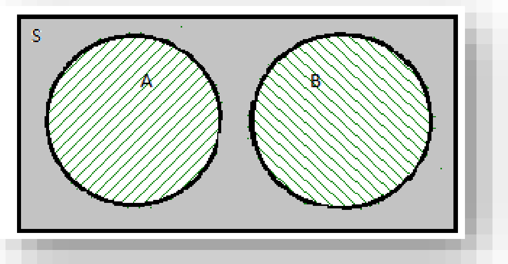
Intersección de conjuntos

La intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen tanto a A como a B. En otros términos, la intersección de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos comunes a A y B. El símbolo de la intersección es: ∩

$$A \cap B\text{: } léase\ A\ intersección\ B = \{x/x \in A\ \wedge\ x \in B\}$$

Representación por los diagramas de Venn

Los diagramas de Venn permiten visualizar el concepto de intersección de los conjuntos. Se raya cada uno de los conjuntos con líneas en sentidos opuestos; la intersección es representada por el área en la cual se intersecan éstas.



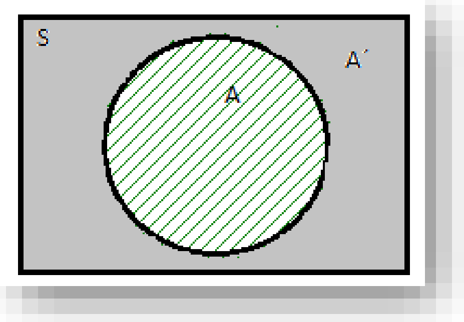
Se presentan tres casos:

1. Los dos conjuntos son disjuntos, es decir: los dos conjuntos no tienen ningún elemento en común.

   $$A \cap B = \emptyset$$

   Podemos definir el conjunto vacío como la intersección de dos conjuntos disjuntos.

Nota: distingue claramente entre $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}$ y $\mathrm{n}(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$.

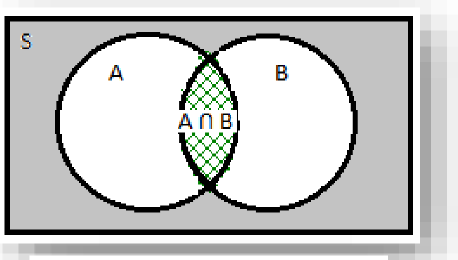


Caso particular: **los dos conjuntos son complementarios** uno de otro con respecto al conjunto S.

$$A \cap \overline{A} = \emptyset \qquad n\left(A \cap \overline{A}\right) = 0$$

2. **Los dos conjuntos se traslapan parcialmente**. Si A y B tienen 3 elementos en común:

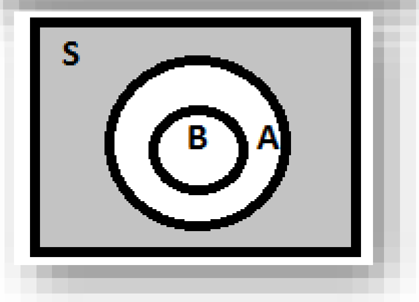
   $$n(A \cap B) = 3$$



3. **Uno de los dos conjuntos es subconjunto del otro**

Si B es subconjunto de A, todos los elementos de B pertenecen a A y los elementos comunes de A y B son los elementos de B, entonces:

$$A \cap B = B \qquad n(A \cap B) = n(B)$$



Unión de dos conjuntos

La unión de dos conjuntos A y B es el conjunto de los elementos que pertenecen *por lo menos* a uno de los dos conjuntos A y B. el símbolo de la unión es: **U**

$$A \cup B = léase\ A\ unión\ B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$$

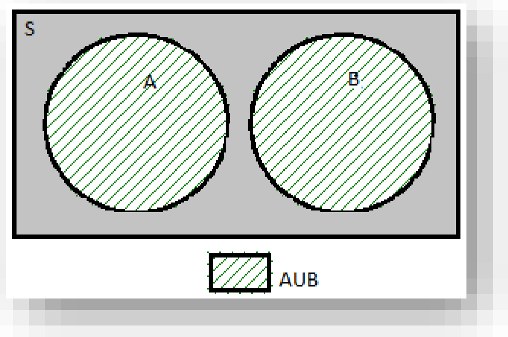
A ∪ B es un nuevo conjunto, cuyos elementos pertenecen a A o a B (o a los dos).

Casos que se presentan:

1. Los dos conjuntos A y B son disjuntos (figura 9). A y B no tienen ningún elemento en común.

En este caso:

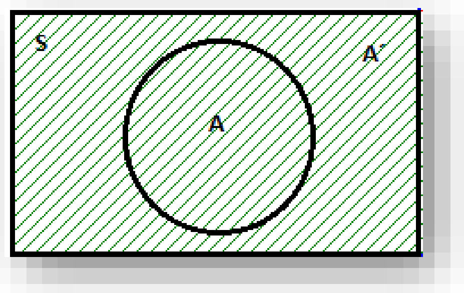
$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$



Ejemplo: Si 10 personas leen exclusivamente La Capital y 5 exclusivamente El Atlántico, ¿cuántas personas leen La Capital o El Atlántico?

Caso particular: los dos conjuntos son complementarios uno de otro con respecto a un conjunto de referencia (figura 10)

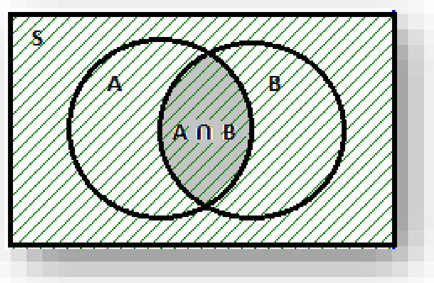
$$A \cup \overline{A} = S \qquad n(A \cup \overline{A}) = n(S)$$



2. Los dos conjuntos A y B se traslapan parcialmente.

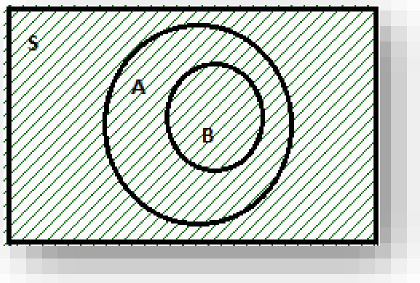
Los dos conjuntos tienen algunos elementos en común. En este caso:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$



3. Uno de los dos conjuntos es subconjunto de otro).

Por ejemplo: $B \subset A$



$$B \subset A \ \rightarrow A \cup B = A \; por\ lo\ tanto\ n(A \cup B) = n(A)$$

Diferencia entre conjuntos

Si A y B son los conjuntos de la figura 13, entonces A-B y B-A están representados por las regiones sombreadas de las figuras 14 a y 14 b.

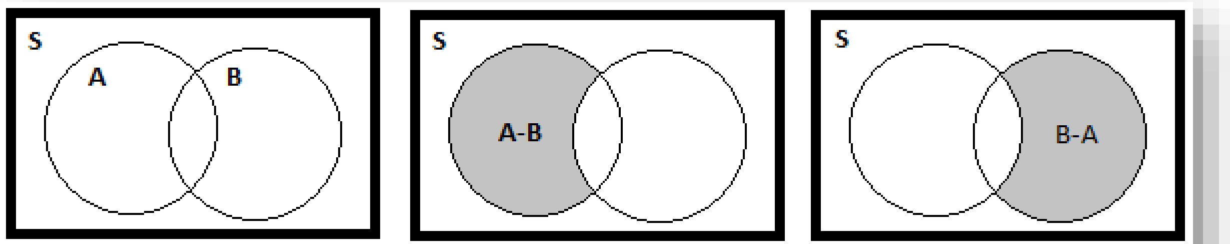
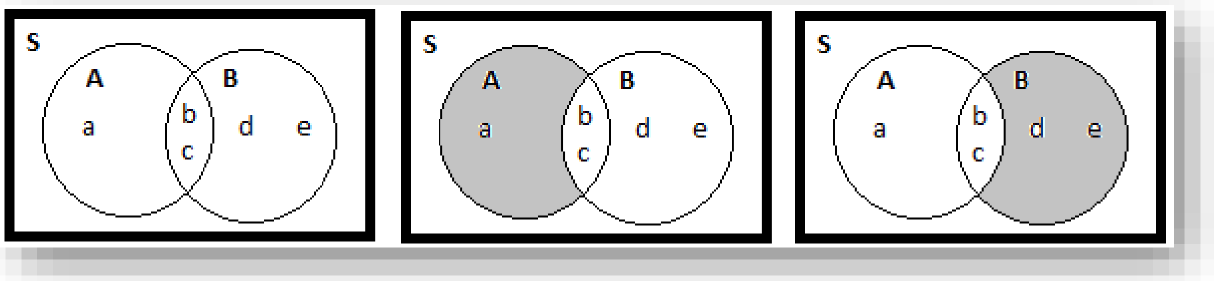


figura 13 figura 14 a figura 14 b

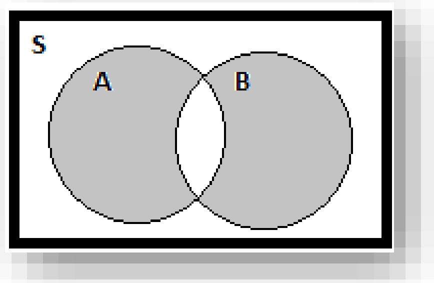
$$A - B = \{x/x \in A \wedge x \notin B\} \qquad B - A = \{x/x \in B \ \wedge x \notin A\}$$

Ejemplo: Sean los conjuntos $A = \{a, b, c\}\ y\ B = \{b, c, d, e\}$. Define por extensión: A-B y B-A



$A - B = \{a\}$, $B - A = \{d, e\}$

Diferencia simétrica

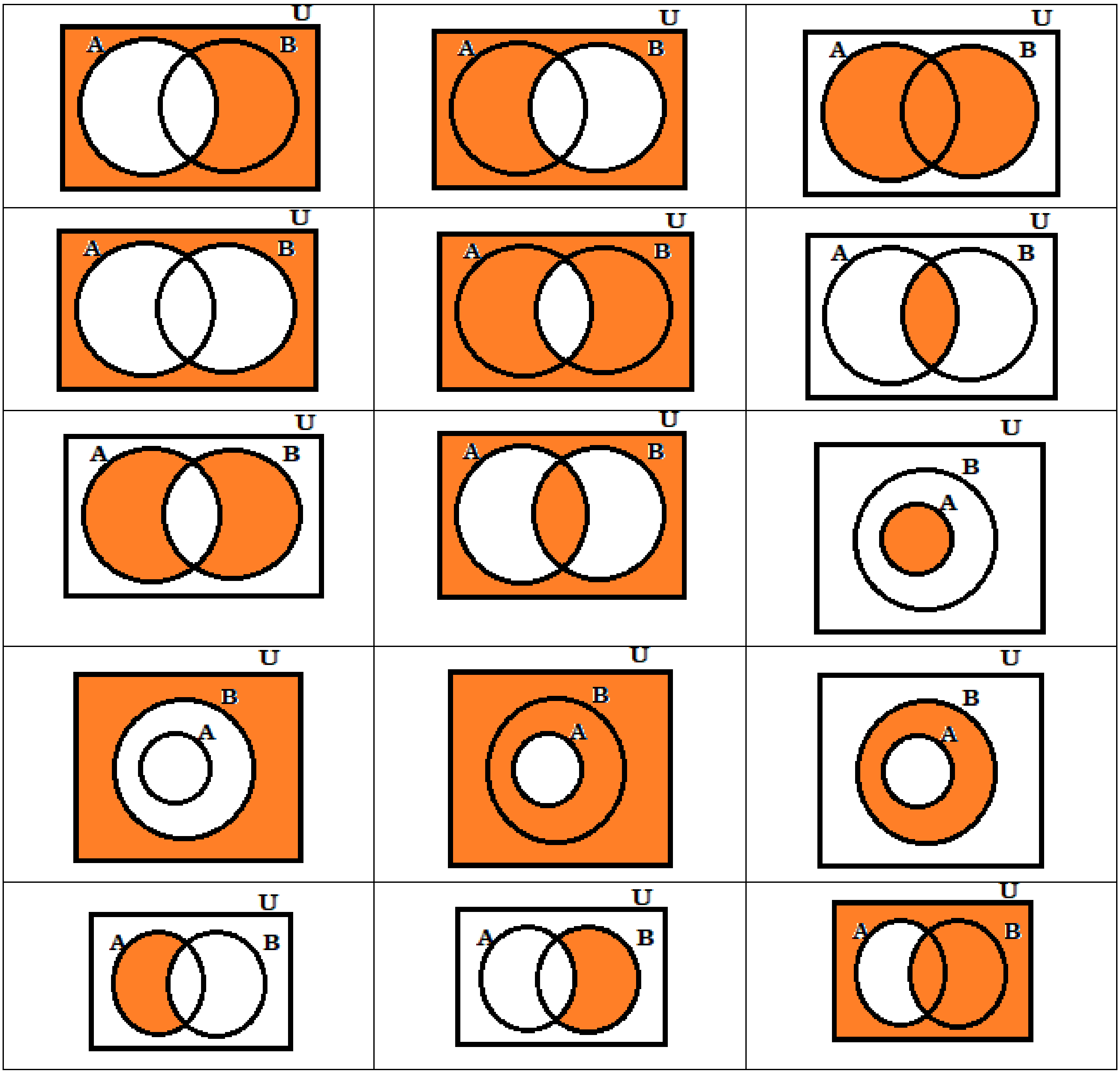


Si A y B son los conjuntos de la figura 13, su diferencia simétrica es la región

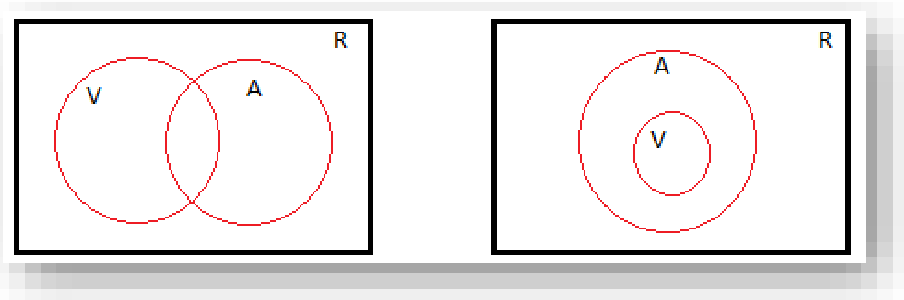
Sombreada: $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$

- ✓ ***Ejercicios***

1. Indica la operación correspondiente en cada caso:



2. Para cada uno de los siguientes apartados dibuja los siguientes diagramas y sombrea la operación indicada:



a) $V \cup A$ b) $V \cap A$ c) $A - V$ d) $(A\text{-}V) \cap A$

e) $\overline{V}$ f) $\overline{A}$ g) $\overline{A \cap V}$ h) $\overline{V} \cap A$

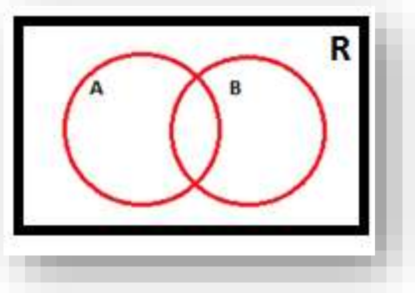
3. Sean los conjuntos: $A = \{a, b, c, g\}$, $B = \{d, e, f, g\}$, $C = \{a, c, f\}$, $D = \{f, h, k\}$ y el referencial $S = \{a, b, c, d, e, f, g, h, k\}$ define por extensión y halla el valor del numeral en cada caso.

a) $A \cup B$ b) $B \cup C$ c) $A \cap C$ d) $B \cap C \cap D$
e) A-B f) $\overline{A}$ g) $A \Delta B$ h) $A \Delta C$

4. Si A y B son conjuntos disjuntos tales que $n(A \cup B) = n(A)$, qué deberá ser verdadero acerca de B?

5. Dados los conjuntos:
$R = \{x/x \text{ es una persona}\}$, $A = \{x/x \text{ consume pescado}\}$, $B = \{x/x \text{ consume pollo}\}$

Ubica en el siguiente diagrama a cada persona según sus preferencias de consumo.



a) Soledad sólo consume pollo.
b) Joaquín no consume ni pescado ni pollo.
c) Juan consume ambos.
d) Mario sólo consume pescado.

6. De 400 alumnos que estudian en una escuela de idiomas 120 estudian únicamente francés, 200 estudian francés e inglés y 50 estudian otros idiomas diferentes. Responde:

a) ¿Cuántos estudian sólo inglés?
b) ¿Cuántos estudian inglés?
c) ¿Cuántos no estudian francés?
d) ¿Cuántos estudian por lo menos un idioma?

7. A un campamento concurren 52 alumnos, 23 saben cocinar, 18 saben armar carpas y 25 no saben cocinar ni armar carpas. Utilizando diagramas conjuntistas hallar:

a) ¿Cuántos alumnos saben armar carpas y cocinar?
b) ¿Cuántos saben cocinar y no saben armar carpas?

Operaciones con tres conjuntos

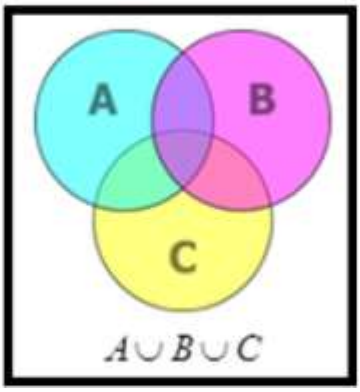
En el curso de ingreso se introdujo el concepto de conjunto como una colección de elementos diferentes. Se vio que los elementos se representan con letras minúsculas y los conjuntos con mayúsculas. Se definiceron las operaciones de complemento, intersección, unión, diferencia y diferencia simétrica entre dos conjuntos. Ahora se amplía el análisis a 3 conjuntos y la aplicación de las leyes lógicas a la teoría de conjuntos.

Unión

Dados los conjuntos $A, B\ y\ C$, la unión entre ellos:

$$A \cup B \cup C = \{x/x \in A \vee x \in B \vee x \in C\}$$

es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al menos a alguno de los tres conjuntos.



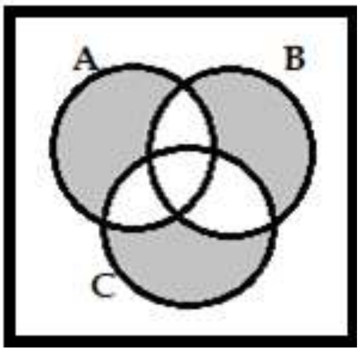
Intersección

Dados los conjuntos $A, B\ y\ C$, la intersección entre ellos es el conjunto formado por los elementos que pertenecen a la vez a ambos conjuntos.

$$A \cap B \cap C = \{ x/x \in A \wedge x \in B \wedge x \in C \}$$

Diferencia simétrica

$$A \Delta B \Delta C \equiv \left(A \cap \overline{B \cup C}\right) \cup \left(B \cap \overline{A \cup C}\right) \cup \left(C \cap \overline{A \cup B}\right)$$



Numeral de la unión de conjuntos

$$\boldsymbol{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

$$\boldsymbol{n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)}$$

Propiedades comunes a la unión e intersección de conjuntos

	Unión	Intersección
Idempotencia	$A \cup A$	$A \cap A$
Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$	$A \cap B = B \cap A$
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
Absorción	$A \cup (A \cap B) = A$	$A \cap (A \cup B) = A$
Distributiva	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Además, si $B \subset A$, $A \cup B = A$ y $A \cap B = B$

Propiedades del complemento de un conjunto

Complementación	$A \cup \overline{A} = U$ y $A \cap \overline{A} = \phi$
Doble complementación	$\overline{\overline{A}} = A$
Leyes de De Morgan	$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ y $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
Complementación de U y ϕ	$\overline{U} = \phi$ y $\overline{\phi} = U$

Propiedades del Álgebra de Conjuntos

Cualesquiera sean los conjuntos A, B y C incluidos en un conjunto referencial U, se cumplen las siguientes propiedades:

Unión		Intersección
$A \cup A = A$	**Idempotencia**	$A \cap A = A$
$A \cup B = B \cup A$	**Conmutativa**	$A \cap B = B \cap A$
$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$	**Asociativa**	$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$A \cup (A \cap B) = A$	**Absorción**	$A \cap (A \cup B) = A$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ Unión respecto intersección	**Distributiva**	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ Intersección respecto unión
$A \cup \overline{A} = U$	**Complementación**	$A \cap \overline{A} = \phi$
$A \cup \phi = A$ ϕ es elemento neutro de la unión	**Identidad**	$A \cap U = A$ U es elemento neutro de la intersección
$A \cup U = U$	**Identidad de Universal y vacío**	$A \cap \phi = \phi$

Por cumplir las propiedades anteriores, el conjunto P(U), con las operaciones unión e intersección y las propiedades de la complementación, tiene una estructura de álgebra de Boole.

Relación entre la teoría de conjuntos y la lógica proposicional

Existe una relación muy estrecha entre la Teoría de Conjuntos y la Lógica Proposicional. Para mostrar dicha relación, denotemos por letras mayúsculas A,B ... los conjuntos y por las correspondientes minúsculas a,b ...sus propiedades características (es decir, la proposición lógica que caracteriza a los elementos de cada conjunto); entonces se tiene la siguiente correspondencia:

Conjuntos	$A \subseteq B$	$A = B$	$A \cup B$	$A \cap B$	$\overline{A}$	$A - B$	$A \,\Delta\, B$
Proposiciones	$a \to b$	$a \leftrightarrow b$	$a \vee b$	$a \wedge b$	$\neg a$	$a \wedge \neg b$	$a \underline{\vee} b$

Además, el conjunto vacío se corresponde con una **contradicción** y el conjunto universal con una **tautología.** Mediante esta correspondencia, todos los resultados sobre conjuntos se pueden reescribir en términos de lógica proposicional y viceversa; a modo de ejemplo:

$A \cup (A \cap B) = A$	$a \vee (a \wedge b) \leftrightarrow a$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$a \vee (b \wedge c) \leftrightarrow (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
$\overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}$	$\neg(a \vee b) \leftrightarrow \neg a \wedge \neg b$

Ejercicios

1. Demuestra utilizando diagramas de Venn las siguientes propiedades: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ y $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
2. Dados los conjuntos: A ={1, 2 , 3 , 4 } ; B = { 2,4,5 } ; C = { 3,5,7 } Señala qué operación deberá efectuarse para que el resultado sea el conjunto { 3, 5 } .

3. Sean los conjuntos: P = { x $\in$ N / x es divisor de 12 } y Q = { x $\in$ N / x es divisor de 24 } ¿Cuál de las siguientes alternativas es incorrecta ?
   a) P $\cup$ Q = { 1, 2, 3, 4, 6, 8,12, 24 }
   b) P $\cap$ Q = { 1, 2, 3, 4, 6, 12 }
   c) P $\subseteq$ Q
   d) P - Q = { 8, 24 }
   e) (Q - P) $\cup$ (P - Q) = { 8, 24 }

4. Si el conjunto A está dado por: A = {p$\in$N/p es número primo y 1< p < 10}, si U = N, entonces, $\overline{A}$ =?

5. Dados los conjuntos: A = { x $\in$ N / x es múltiplo de 2 } y B = { x $\in$ N / x es múltiplo de 3 } entonces, se puede afirmar que :

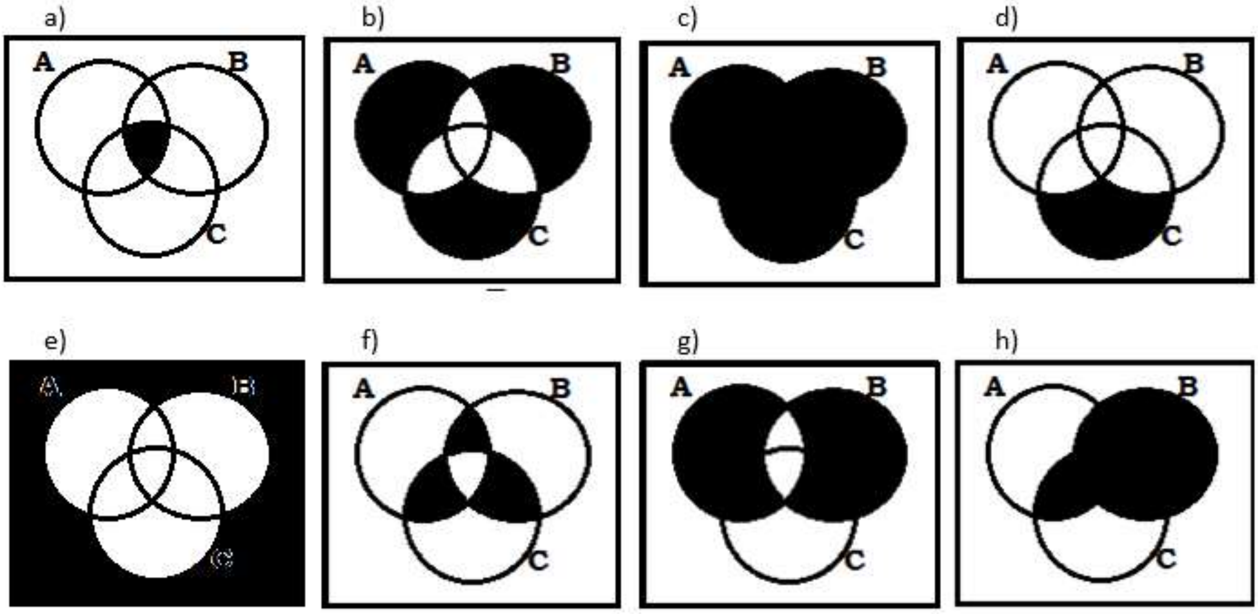
   a) A $\cup$ B = {múltiplos de 5 }
   b) A ∩ B = {múltiplos de 5 }
   c) A $\cup$ B = {múltiplos de 6 }

   d) A ∩ B = { 6, 12, 18, 24,… }
   e) A - B = { −1 }

6. Asocia cada operación con la gráfica correspondiente:

   $A \Delta B \Delta C$; $B \cup (A \cap C)$; $A \cap B \cap C$; $\overline{A \cup B \cup C}$; $A \cup B \cup C$; $\overline{A \cup B} \cap C$

$$Faltan\ dos, cuáles\ son?$$



7. Se hizo una evaluación de control de calidad a un lote de 50 equipos de cómputo en malas condiciones de fabricación. Los criterios analizados fueron: H: defecto en el disco duro. B: defecto en la placa base (board) Se observó que los equipos con mal funcionamiento en ambos dispositivos, disco duro y board, son el doble de los que sólo tienen disco duro dañado; mientras que los que sólo tienen desperfecto en board son 23 equipos.

a) Vuelca la información en diagramas de Venn (recuerda: si te falta algún dato usa una letra que lo represente).

b) Encuentra el número de equipos con desperfecto en disco duro y el número de equipos con daño en ambos dispositivos.

8. De un total de 135 alumnos que se presentaron a rendir examen de matemática (M); física (F) y química (Q) se obtuvo el siguiente cuadro de aprobados:
   $n(F) = 38 \quad n(M) = 52 \quad n(Q) = 35 \quad n(M \cap F) = 12 \quad n(Q \cap F) = 10 \quad M \cap Q = 14 \quad M \cap F \cap Q = 4$

a) ¿Cuántos alumnos no aprobaron ningún examen?
b) ¿Cuántos alumnos aprobaron solamente física?
c) ¿Cuántos alumnos aprobaron matemática y química exclusivamente?

9. Una academia enseña francés, inglés y alemán. Tiene 90 alumnos. Algunos estudian un solo idioma y otros dos. Hay 13 alumnos que estudian inglés y francés, 5 que estudian inglés y alemán, 4 que estudian francés y alemán, 28 que solamente estudian francés. La lista del curso de inglés tiene 52 alumnos. Responder:

a) ¿Cuántos estudian sólo inglés?
b) ¿Cuántos estudian sólo alemán?

10. En cuanto al consumo de semillas de lino, sésamo y chía, se sabe que: 10 personas sólo consumen las de lino; 15 personas sólo consumen las de sésamo; 25 personas sólo consumen las de chía; 7 consumen lino y chía pero no sésamo; 9 sésamo y chía pero no lino.
    Además $L \cap S \cap \bar{C} = \emptyset \ y \ \overline{L \cup S \cup C} = 2$. Si el total de encuestados fue de 75 personas, ¿cuántas personas consumen las tres semillas?

11. Una encuesta sobre 200 personas reveló los siguientes datos acerca del consumo de tres productos A , B y C : 5 personas consumían sólo A ; 25 personas consumían sólo B; 10 personas consumían sólo C ; 15 personas consumían A y B, pero no C; 80 personas consumían B y C, pero no A; 8 personas consumían C y A, pero no B; 17 personas no consumían ninguno de los tres productos. Responder:

a) ¿Cuántas personas consumían A?
b) ¿Cuántas personas consumían B?
c) ¿Cuántas personas consumían C?
d) ¿Cuántas personas consumían A, B y C?
e) ¿Cuántas personas consumían por lo menos uno de los tres productos?
f) ¿Cuántas personas consumían A o B?
g) ¿Cuántas personas no consumían C?
h) ¿Cuántas personas no consumían ni C ni A?

12. Un profesor tiene dos docenas de libros de introducción a las ciencias de la computación y está interesado en la forma en que tratan los temas (A) compiladores, (B) estructuras de datos y (C) intérpretes. Los siguientes datos representan la cantidad de libros que contienen material relativo a estos temas:
$n(A) = 8\,; n(B) = 13\,; n(C) = 13\,; n(A \cap B) = 5\,; n(A \cap C) = 3\,; n(B \cap C) = 6$ y $A \cap B \cap C = 2$

a) ¿Cuántos libros incluyen el material de exactamente uno de estos temas?
b) ¿Cuántos no tratan ninguno de estos temas?
c) ¿Cuántos no tienen material sobre compiladores?

13. En un aula hay un cierto número de alumnos que hemos de determinar. Se sabe que cada uno de los alumnos presentes en el aula estudia, al menos, una de las tres asignaturas siguientes: Matemática, Física, Química. Pues bien, en sucesivas veces se pide que levanten la mano los que estudian:

✓ Matemática, y lo hacen 48.
✓ Física, y lo hacen 45.
✓ Química, y lo hacen 49.
✓ Matemática y Física, y lo hacen 28.
✓ Matemática y Química, y lo hacen 26.
✓ Física y Química, y lo hacen 28.
✓ Las tres asignaturas, y lo hacen 18.

Se pregunta:

a) ¿Cuántos alumnos hay en el aula?
b) Cuántos estudian $(M \cap F) \cap \bar{Q}$?
c) ¿Cuántos estudian nada más que Química?

14. Una empresa de servicios medioambientales va a ampliar su red comercial, y por ello necesita incorporar a 25 comerciales. La empresa requiere fundamentalmente personas que posean, al menos, una de las siguientes características: Alguna experiencia en el área de ventas (A); Formación técnica (F); Conocimientos de inglés (I). En concreto, la empresa ofrece:

✓ 12 puestos para los de la característica (A).

- ✓ 14 para los de la (F)
- ✓ 11 para los de la (I)
- ✓ la empresa quiere que 5 comerciales posean las características (A) y (F)
- ✓ que 3 comerciales posean (A) e (I)
- ✓ que 6 comerciales posean (F) e (I)

Se pregunta:

a) ¿Cuántos de esos 25 comerciales quiere la empresa que posean las tres características citadas?
b) A cuántos comerciales se les exige nada más que la característica: ¿tener conocimientos de inglés?
c) Cuántos $(A \cap I) \cap \bar{F}$?
d) ¿Cuántos comerciales tienen nada más que una de las características pedidas?

15. De 1000 televidentes encuestados se obtiene la siguiente información:

- ✓ 391 ven programas deportivos.
- ✓ 230 ven programas cómicos.
- ✓ 545 ven programas sobre el mundo animal.
- ✓ 98 ven programas cómicos y deportivos.
- ✓ 152 ven programas cómicos y mundo animal.
- ✓ 88 ven programas deportivos y mundo animal.
- ✓ 90 no ven ninguno de esos tres programas.

Se pregunta:

a) ¿Cuántos entrevistados ven los tres tipos de programas?
b) ¿Cuántos ven sólo uno de los tres tipos?
c) ¿Cuántos ven al menos un programa?
d) ¿Cuántos ven a lo sumo 2 programas?
e) ¿Cuántos ven sólo 2 programas?

Unidad Nº3: Par ordenado – Producto cartesiano - Relaciones

Par ordenado

Un ***par* ordenado** es un conjunto con dos elementos en un orden específico. Usamos la notación (x, y) para denotar el par ordenado en la cual el primer elemento o componente o coordenada es "x" y el segundo elemento objeto es "y". De esta forma, dos pares ordenados (a, b) y (c, d) son iguales si sus correspondientes componentes son iguales.

Es decir: (a, b) = (c, d) si y solamente si a = c y b = d

Mientras que los conjuntos {a, b} y {b, a} son iguales, los pares ordenados (a, b) y (b, a) son diferentes, salvo que a y b sean iguales.

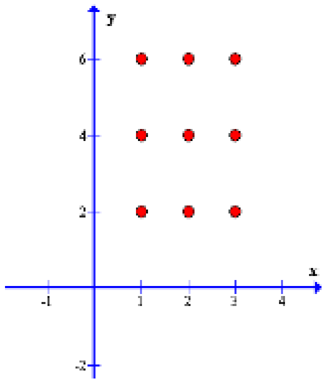
Producto cartesiano

El producto cartesiano de dos conjuntos A y B es el conjunto de ***todos*** los pares ordenados (x,y) donde $x \in A$ e $y \in B$ En símbolos: $\mathrm{AxB} = \{(x, y)/x \in A \; e \; y \in B\}$

Ejemplo:

Sean los conjuntos A= {1,2,3} y B= {2,4,6} se tiene:
A x B= {(1,2), (1,4), (1,6), (2,2), (2,4), (2,6), (3,2), (3,4), (3,6)}
El producto cartesiano ***A x B*** no es igual al producto cartesiano ***B x A*** (no es conmutativo)

Representación cartesiana



Observaciones:

- ✓ $\mathrm{A} = \emptyset \quad \mathrm{o} \quad \mathrm{B} = \emptyset \quad \leftrightarrow \quad \mathrm{AxB} = \emptyset$ por lo tanto $\mathrm{AxB} \neq \emptyset \quad \leftrightarrow \mathrm{A} \neq \emptyset \;\; \mathrm{y} \;\; \mathrm{B} \neq \emptyset$
- ✓ Si $\mathrm{A} = \mathrm{B}$, resulta que $\mathrm{AxB} = \mathrm{AxA} = \mathrm{A}^2 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y})/\mathrm{x} \in \mathrm{A} \text{ e } \mathrm{y} \in \mathrm{A} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y})/\mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{A}\}\}$

Ejercicios

1. Escribir 5 pares ordenados tales que:

a) La primera componente sea múltiplo de 2 y la segunda sea múltiplo de 3.
b) La primera componente sea número primo y la segunda sea número compuesto.
c) La primera componente sea número primo y la segunda sea múltiplo de 2.

d) La segunda componente sea el número opuesto[6] de la primera componente.
e) La primera componente sea el recíproco[7] de la segunda componente.

2. Verificar que no se cumple la propiedad conmutativa efectuando el producto cartesiano A X B y B X A siendo $A = \{x/x \in Z^- \ \wedge x + 7 > 4\} \ y \ B = \{x/x \in N \ \wedge x < 3\}$

3. Dados los conjuntos: $A = \{1,3\}$, $B = \{a, b, 3\}$ y $C = \{b\}$, halla:
   a) AXB
   b) $(A \cup B)XC$

4. Dados los mismos conjuntos del ejercicio 3 halla:
   a) AX(BUC)
   b) (BUC)XA

Relaciones

Definición: Una **relación** (binaria) de un conjunto A a un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano AxB. Si el par $(x, y) \in R$, se escribe xRy, se dice que x está relacionada con y. Si A=B, se llama **relación** (binaria) sobre A.

$$\mathbf{R\ es\ relaci\acute{o}n\ de\ A\ con\ B\ \leftrightarrow R \subseteq AxB}$$

Conjunto de partida y conjunto de llegada

Si R es una relación de A con B ,es decir $R \subseteq AxB$, entonces **A** es el **conjunto de partida** y **B** es el **conjunto de llegada.**

Ejemplos:

Sean los conjuntos $\mathrm{A} = \{0,1,2\}$ y $\mathrm{B} = \{0,1\}$, sabemos que $\mathrm{AxB} = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1), (2,0), (2,1)\}$

Los siguientes subconjuntos de A con B son relaciones:

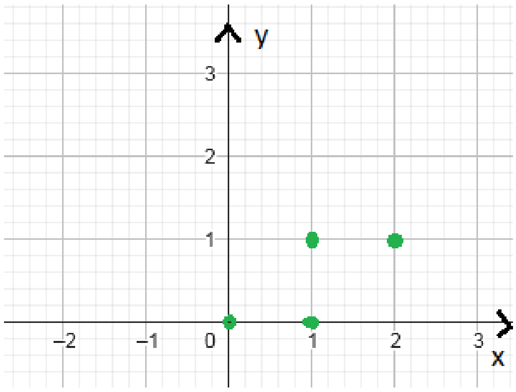
- ✓ $\mathrm{R}_1 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{AxB}/\mathrm{x} \leq \mathrm{y}\} = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$
- ✓ $\mathrm{R}_2 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{AxB}/\mathrm{y} = \mathrm{x} - 1\} = \{(1,0), (2,1)\}$
- ✓ $\mathrm{R}_3 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{AxB}/\mathrm{x} = \mathrm{y}\} = \{(0,0), (1,1)\}$
- ✓ $\mathrm{R}_4 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{AxB}/\mathrm{x} + \mathrm{y} = 1\} = \{(0,1), (1,0)\}$
- ✓ $\mathrm{R}_5 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{AxB}/\mathrm{x} = \mathrm{y} \text{ ó } \mathrm{y} = \mathrm{x} - 1\} = \{(0,0), (1,1), (1,0), (2,1)\}$
- ✓ $\mathrm{R}_6 = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{AxB}/\mathrm{x} + \mathrm{y} \leq 2 \ \text{ y } \ \mathrm{x} = \mathrm{y}\} = \{(0,0), (1,1)\}$

Observa que todas las relaciones están incluidas en el producto cartesiano AxB.

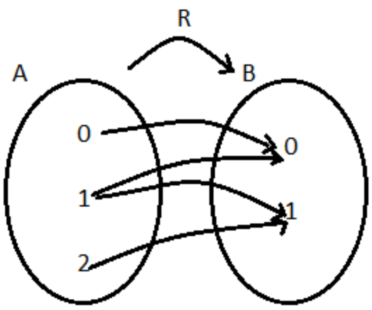
[6] Definición de número opuesto: si x es un número real (excepto natural) existe – x (se lee: opuesto de x) tal que x+(-x) =0. El "0" no tiene opuesto.
[7] Definición de número recíproco o inverso multiplicativo: si x es un número real distinto de cero su recíproco es 1/x. que x*(1/x)=1

Representación cartesiana

Dados los conjuntos $\mathbf{A} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}\}$ $\mathbf{y}$ $\mathbf{B} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$, $\mathbf{AxB} = \{(\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{0}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}), (\mathbf{2}, \mathbf{0}), (\mathbf{2}, \mathbf{1})\}$ y la relación $\mathbf{R_5} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbf{AxB}/\mathbf{x} = \mathbf{y}\ \mathbf{o}\ \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{1}\} = \{(\mathbf{0}, \mathbf{0}), (\mathbf{1}, \mathbf{1}), (\mathbf{1}, \mathbf{0}), (\mathbf{2}, \mathbf{1})\}$, vemos que la representación cartesiana de esta relación es:



Representación mediante diagrama de flechas



Dominio, rango (recorrido/conjunto imagen) y codominio

- **Definición**: El conjunto $\{x \in A/(x, y) \in R\ para\ alguna\ y \in B\}$ se llama **dominio** de R. El dominio no necesariamente debe ser todo el conjunto de partida.

Ejemplos

Para los conjuntos $\mathrm{A} = \{0,1,2\}$ y $\mathrm{B} = \{0,1\}$ y las relaciones dadas a continuación vemos que en alguna de ellas el dominio es A y en otras no:

- ✓ $\mathrm{R_1} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{AxB}/\mathrm{x} \leq \mathrm{y}\} = \{(0,0), (0,1), (1,1)\}$, $\mathrm{DomR_1} = \{0,1\}$
- ✓ $\mathrm{R_2} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{AxB}/\mathrm{y} = \mathrm{x} - 1\} = \{(1,0), (2,1)\}$, $\mathrm{DomR_2} = \{1,2\}$
- ✓ $\mathrm{R_5} = \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in \mathrm{AxB}/\mathrm{x} = \mathrm{y}\ \mathrm{o}\ \mathrm{y} = \mathrm{x} - 1\} = \{(0,0), (1,1), (1,0), (2,1)\}$, $\mathrm{DomR_5} = \{0,1,2\} = \mathrm{A}$

- **Definición**: El conjunto $\{y \in B/(x,y) \in R\ para\ alguna\ x \in A\}$ se llama **rango** de R, es decir, es el conjunto formado por los elementos del segundo conjunto a los cuales llegan flechas.

Ejemplos

Para los conjuntos $\mathrm{A} = \{0,1,2\}$ y $\mathrm{B} = \{0,1\}$ hallamos los rangos de las relaciones dadas a continuación:

- ✓ $\mathrm{R_1} = \{(\mathrm{x,y}) \in \mathrm{AxB}/\mathrm{x} \leq \mathrm{y}\} = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}\ \mathrm{RgR_1} = \{0,1\}$
- ✓ $\mathrm{R_2} = \{(\mathrm{x,y}) \in \mathrm{AxB}/\mathrm{y} = \mathrm{x}-1\} = \{(1,0),(2,1)\}, \mathrm{RgR_2} = \{0,1\}$
- ✓ $\mathrm{R_5} = \{(\mathrm{x,y}) \in \mathrm{AxB}/\mathrm{x} = \mathrm{y\ o\ y} = \mathrm{x}-1\} = \{(0,0),(1,1),(1,0),(2,1)\}, \mathrm{RgR_5} = \{0,1\}$

No necesariamente el rango debe ser igual al codominio como podrás observar en el ejemplo que está a continuación de la siguiente definición.

- **Definición**: si $(x,y) \in R$, la segunda componente del par es la **imagen** de la primera y la primera componente del par es la **preimagen** de la segunda.

Para los conjuntos $\mathrm{A} = \{0,1,2\}$ y $\mathrm{B} = \{0,1\}$ y la relación $\mathrm{R_1} = \{(\mathrm{x,y}) \in \mathrm{AxB}/\mathrm{x} \leq \mathrm{y}\} = \{(0,0),(0,1),(1,1)\}$ en el par (0,1) decimos que 1 es la imagen del 0 y que 0 es la preimagen del 1.

- **Definición**: el codominio es el conjunto de llegada, $codR = B$

Ejemplo

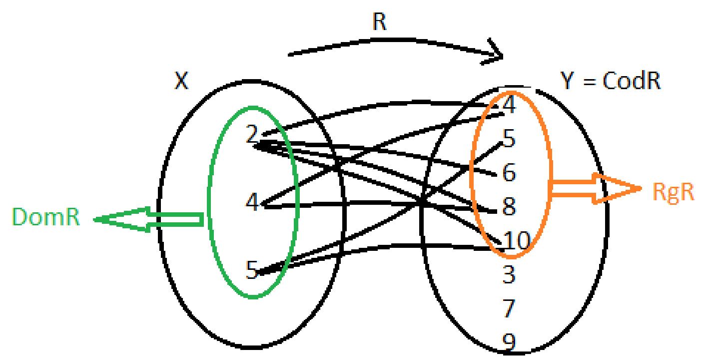
Sean los conjuntos:

$$X = \{2,4,5\}\ \ e\ \ Y = \{y/y \in Z, 3 \leq y \leq 10\}$$

Considérese que xRy si y sólo si y es divisible entre x (es decir: x es divisor de y).

a) $Y = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$
b) $R = \{(2,4),(2,6),(2,8,(2,10),(4,4),(4,8),(5,5),(5,10)\}$
c) $DomR = \{2,4,5\}$ y $RgR = \{4,5,6,8,10\}$

En este ejemplo se da que el $DomR = X\ \ y\ \ RgR \subset Y$.



Ejercicios

5. Dados los conjuntos $A = \{1,2,3\}\ y\ B = \{x/x \in N\ \wedge 4 < x \leq 8\}$ se pide que:

a) Definas por extensión todos los elementos de los productos AxB y BxA
b) Encuentra la relación que existe entre las componentes x e y de las siguientes relaciones:
   i. $R1 = \{(1,6), (2,7), (3,8)\}$
   ii. $R2 = \{(1,5), (2,6), (3,7\}$
   iii. $R3 = \{(2,7)\}$
   iv. $R4 = \{(2,5), (3,7)\}$
   v. Para cada relación enuncia dominio y rango.

6. Sean los conjuntos $X = \{2,3,4\}$, $Y = \{3,4,5,6,7\}$, si se define una relación R de X a Y por $(x, y) \in R\ si\ x\ divide\ a\ y$:
a) Define por extensión a los elementos de la relación R y enuncia la cantidad de elementos de la misma.
b) Reescribe la relación como tabla.
c) Enuncia dominio y rango.

Concepto de función

Matemáticamente podemos definir el concepto de función como un caso especial de las relaciones.

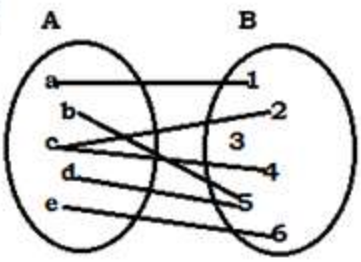
"Para que una relación sea función, a cada elemento del dominio (conjunto de partida) le debe corresponder uno y solo un elemento del codominio (conjunto de llegada), pudiendo en el codominio quedar elementos sin ser imagen de elementos del dominio"

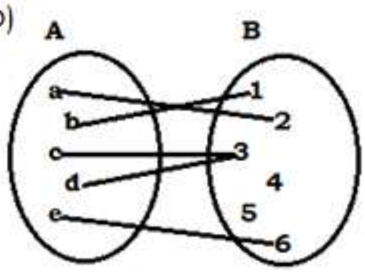
El conjunto A (primer conjunto) es el conjunto de partida o "dominio de definición de la función". El conjunto B se denomina conjunto de llegada o codominio. El conjunto formado por los elementos de B (segundo conjunto) que son imagen de algún elemento del dominio, se denomina "conjunto imagen".

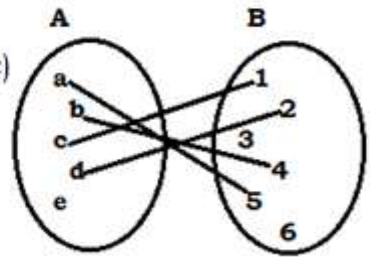
Otra definición: A una relación la llamamos función cuando a cada valor de la variable independiente (valor de x) le corresponde un único valor de la variable dependiente (valor de y). En este caso se dice que "y es función de x" , y se simboliza y = f (x), siendo f el nombre de la función. Las funciones se simbolizan con una letra imprenta minúscula, como por ejemplo: f, g, h.

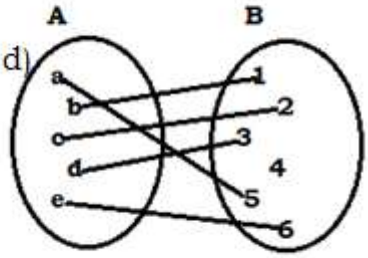
Ejercicios para resolver con tu docente

Determina si las siguientes relaciones son funciones, fundamenta tu respuesta. Determina dominio, codominio e imagen.

a)


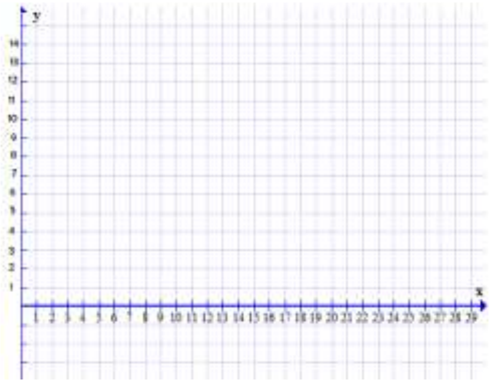
b)


c) 

d) 

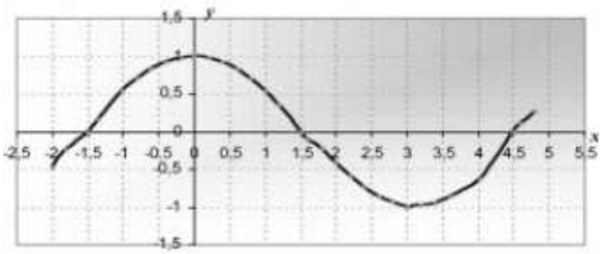
7. Hemos tomado nota de las temperaturas anunciadas por radio a lo largo de un día de invierno en el Gran Buenos Aires, desde las 5 a las 22 y 30. Obtuvimos los siguientes datos:

Hora del día	5	6.15	7	8.45	9.30	12	14.30	16	18	21	22.30
T (·C)	0	-2	-2.4	-1.8	2	8.3	12.1	12	9.2	7	6



a) Vuelca la información en el gráfico.
b) Teniendo en cuenta los datos de la tabla, responde las siguientes preguntas:
A las 21 hizo 7 grados. ¿Habrá hecho esa misma temperatura en algún otro momento del día?
c) ¿Cuál habrá sido la temperatura aproximada a las 17?
d) La mínima que registramos fue - 2.4. ¿Habrá sido la mínima del día? ¿Por qué?
e) ¿En qué momentos del día la temperatura aumentó y en cuáles disminuyó?
f) ¿Cuándo hizo $0°$? ¿Y $5°$?
g) Ni la tabla ni la gráfica nos indican qué pasó antes de las 5 ni después de las 22.30. Esos horarios están fuera del dominio en el que registramos datos. ¿Podríamos realizar alguna suposición respecto de la temperatura para esos horarios?
h) Analiza las respuestas de los incisos f y g. Extrae conclusiones.

8. Dada la siguiente gráfica, que representa a una **función f,** cuyo dominio es el conjunto de los números reales R. Observa que la notación en símbolos $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{R} \rightarrow \boldsymbol{R}$ significa que la función tiene como dominio y codominio al conjunto de números reales.



a) ¿Para qué valores de x la imagen se anula? Indica las coordenadas (x,y) de dichos puntos.
b) Halla: f(-1), f(0), f(1) y f(3)
c) ¿Cuál es el conjunto imagen si acotamos el dominio al intervalo (-1,3]?

9. Los lados de un cuadrado de 4 centímetros de longitud se aumentan *x* centímetros. ¿Cuál es la función que relaciona el perímetro con el lado del cuadrado? Representa la gráfica de la función.

10. Un contrato de conexión a internet cuesta 20 € mensuales más 0,60 € por cada hora de conexión.
    a) ¿Qué cantidad debe pagar un usuario que ha utilizado el servicio 15 horas en el último mes?
    b) ¿Y si ha usado la conexión durante 10 h 35 min?
    c) Representa la gráfica de la función asociada.

11. La cuota anual de un club de montañeros es de 30 € y por asistir a cada excursión que se organiza se abonan 10 € para cubrir los gastos extraordinarios.
    a) Construye una tabla de valores para expresar la cantidad que paga cada socio en función del número de excursiones que realice.
    b) Representa gráficamente los resultados obtenidos en la tabla.

12. La tarifa de un taxi es 1,75 € por la bajada de bandera y 1,35 € por cada kilómetro recorrido.
    a) ¿Cuál es el precio de un viaje de 10 km?
    b) Elabora una tabla con los precios que hay que pagar según los kilómetros que se recorren.
    c) Si se representa la gráfica asociada a la situación, ¿tiene sentido unir todos los puntos obtenidos?