# El problema de Alice y Bob sobre la teleportación cuántica

Manuel Alejandro Estrella González*
*Departamento de Física Aplicada, CINVESTAV-IPN*
(Dated: August 23, 2023)

Una de las aplicaciones más interesantes y contraintuitivas del entrelazamiento es la teleportación cuántica. Como consecuencia, el modelo clásico de comunicación tiene que adaptarse para incluir las sutilezas de la teleportación. La primera parte del presente documento hablará sobre los fundamentos y significado de la teleportación cuántica y su relación con el entrelazamiento. Posteriormente, se construirá y ejecutará un circuito cuántico por medio del IBM Quantum Lab en donde se abordará el conocido problema de transmisión de información de Alice y Bob.

Keywords: first keyword, second keyword, third keyword

## I. INTRODUCCIÓN

### 1. Espacio de Hilbert

En mecánica cuántica, el estado físico de un sistema es representado por un vector en un espacio de Hilbert: un espacio vectorial complejo con producto interno. Este espacio es conocido como el espacio de estados del sistema. El sistema está completamente descrito por su vector de estado, el cual es un vector unitario en el espacio de fases del sistema.
El sistema cuántico más simple es el qubit, el cual puede representarse por un vector unitario en un espacio complejo 2-dimensional. La base más empleada para representar qubits en este espacio es la base estándar

$$|0\rangle := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad |1\rangle := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{1}$$

El estado $|\psi\rangle$ de un qubit se puede expresar como una combinación lineal de los estados base

$$|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle \tag{2}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, conocidos como amplitudes para el estado $|\psi\rangle$. La condición para que $|\psi\rangle$ sea un vector unitario se conoce como condición de normalización $\langle\psi, \psi\rangle = 1$. La ecuación (2) indica que el estado $|\psi\rangle$ se encuentra en superposición de los dos estados base.
Justo como los bits clásicos tienen un estado - uno o cero - un qubit también posee cierta descripción de su estado. Para un qubit existen dos estados posibles, el $|0\rangle$ y el $|1\rangle$, que corresponden a los estados 0 y 1 para el bit clásico. La diferencia entre bits y qubits radica en que el segundo objeto puede encontrarse en una superposición de estados, tal como en la ecuación (2). Un bit clásico es como una moneda: cara o cruz. En contraste, un qubit puede existir en un continuo de estados entre $|0\rangle$ y $|1\rangle$ hasta que es observado.
Otra de forma útil de pensar en los qubits es por medio de la siguiente representación geométrica

$$|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2} |1\rangle, \quad \theta, \phi \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Los números $\theta$ y $\phi$ definen un punto en la esfera unitaria tridimensional llamada esfera de Bloch como se muestra en Figure I

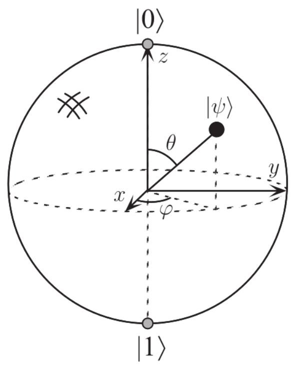


Figure 1. Esfera de Bloch. Representación geométrica de un qubit en coordenadas esféricas.

Un estado puro $|\psi\rangle = \alpha |0\rangle + \beta |1\rangle$ es represetando por un punto en la superficie de la esfera con $\alpha = \cos\frac{\theta}{2}$ y $\beta = e^{i\phi} \sin\frac{\theta}{2}$. Desafortunadamente, la visualización para más de un qubit es limitada, ya que no existe generalización simple de la esfera de Bloch para sistemas multi-qubit.

### 2. Medición en Mecánica Cuántica

Como se ha dicho, un qubit se encuentra en una superposición de estados base y cuando realizamos una observación o medición, el estado colapsa a uno de los dos estados base. Más formalmente, $|\alpha|^2$ y $|\beta|^2$ determinan unívocamente las probabilidades de obtener $|0\rangle$ o $|1\rangle$. Después de la observación, el estado original colapsa al estado medido y altera de forma

* Correspondence email address: manuel.estrella.g@cinvestav.mx

irreversible al estado original. Esto quiere decir que si el qubit colapsa en algún estado en particular, observaciones posteriores resultarán siempre en el mismo estado colapsado.

### 3. Sistemas cuánticos compuestos

El espacio de fase de un sistema cuántico compuesto por $n$ subsistemas, cada uno de ellos modelado por vectores 2-dimensionales, es una combinación de los subsistemas mediante el producto tensorial denotado por $\otimes$, resultando en un espacio de $2^n$ dimensiones.
Si los subsistemas son numerados desde 1 hasta $n$ entonces el estado compuesto $|\psi\rangle$ es

$$|\psi\rangle = \bigotimes_{i=1}^{n} |\psi_i\rangle \tag{4}$$

Una notación más compacta es usar $|\psi_1\psi_2\cdots\psi_n\rangle$ para representar $|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle \otimes \cdots |\psi_n\rangle$ y es la que usaremos de ahora en adelante.
Sean $V$ y $W$ espacios vectoriales correspondientes a dos qubits, cada uno con la base estándar. El sistema compuesto por los dos qubits tendrá la base

$$\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\} \tag{5}$$

Justo como en el caso de un qubit, los posibles estados de un sistema de dos qubits pueden encontrarse en una superposición de los estados base

$$|\psi\rangle = \alpha_0 |00\rangle + \alpha_1 |01\rangle + \alpha_2 |10\rangle + \alpha_3 |11\rangle \tag{6}$$

con coeficientes complejos y cumpliendo la condición de normalización.

### 3. Entrelazamiento Cuántico

El entrelazamiento se define como el fenómeno que ocurre cuando dos o más qubits poseen estados correlacionados. En particular, si tenemos dos qubits que se encuentran en entrelazamiento y realizamos alguna medición en uno de ellos, entonces podemos determinar el resultado del segundo basado en la medición del primero.
Sea $|\psi\rangle$ el estado de un sistema compuesto asociado a un espacio $V$ con descomposición tensorial de la forma $V = V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots V_n$, el estado $|\psi\rangle$ se le llama separable con respecto a la descomposición anterior si

$$|\psi\rangle = |v_1\rangle \otimes |v_2\rangle \otimes \cdots |v_n\rangle, \qquad v_i \in V_i \tag{7}$$

de otro modo $|\psi\rangle$ se encontrará en entrelazamiento respecto a esa descomposición.
La gran mayoría de estados de $n$ qubits no se pueden escribir como el producto tensorial de $n$ estados de qubits independientes. A estos estados se les llama estados entrelazados y por lo tanto no podremos determinar el estado de cada qubits por separado. El estado de los qubit tiene que ver con la relación entre los dos como con sus estados individuales.
Existe un conjunto de estados que cumple con las condiciones anteriores para encontrarse en entrelazamiento cuántico. A este conjunto de estados se le conoce como estados de Bell o pares EPR y son representados por

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \tag{8}$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \tag{9}$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \tag{10}$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \tag{11}$$

e indican el entrelazamiento entre los estados de dos qubits. Los estados 8, 9, 10 y 11 se dice que se encuentran en entrelazamiento, ya que es imposible encontrar $a$, $b$, $c$, $d$ que aseguren una descomposición tensorial de la forma

$$|\Phi^+\rangle = (a|0\rangle + b|1\rangle) \otimes (c|0\rangle + d|1\rangle) \tag{12}$$

## II. TELEPORTACIÓN CUÁNTICA

- Teleportación en general
- Aspectos matemáticos
- Circuito

## III. CONCLUSIONES

Suspendisse vel felis. Ut lorem lorem, interdum eu, tincidunt sit amet, laoreet vitae, arcu. Aenean faucibus pede eu ante. Praesent enim elit, rutrum at, molestie non, nonummy vel, nisl. Ut lectus eros, malesuada sit amet, fermentum eu, sodales cursus, magna. Donec eu purus. Quisque vehicula, urna sed ultricies auctor, pede lorem egestas dui, et convallis elit erat sed nulla. Donec luctus. Curabitur et nunc. Aliquam dolor odio, commodo pretium, ultricies non, pharetra in, velit. Integer arcu est, nonummy in, fermentum faucibus, egestas vel, odio.
Sed commodo posuere pede. Mauris ut est. Ut quis purus. Sed ac odio. Sed vehicula hendrerit sem. Duis non odio. Morbi ut dui. Sed accumsan risus eget odio.

In hac habitasse platea dictumst. Pellentesque non elit. Fusce sed justo eu urna porta tincidunt. Mauris felis odio, sollicitudin sed, volutpat a, ornare ac, erat. Morbi quis dolor. Donec pellentesque, erat ac sagittis semper, nunc dui lobortis purus, quis congue purus metus ultricies tellus. Proin et quam. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos hymenaeos. Praesent sapien turpis, fermentum vel, eleifend faucibus, vehicula eu, lacus.

**ACKNOWLEDGEMENTS**

Pellentesque habitant morbi tristique senectus et netus et malesuada fames ac turpis egestas. Donec odio elit, dictum in, hendrerit sit amet, egestas sed, leo. Praesent feugiat sapien aliquet odio. Integer vitae justo. Aliquam vestibulum fringilla lorem. Sed neque lectus, consectetuer at, consectetuer sed, eleifend ac, lectus. Nulla facilisi. Pellentesque eget lectus. Proin eu metus. Sed porttitor. In hac habitasse platea dictumst. Suspendisse eu lectus. Ut mi mi, lacinia sit amet, placerat et, mollis vitae, dui. Sed ante tellus, tristique ut, iaculis eu, malesuada ac, dui. Mauris nibh leo, facilisis non, adipiscing quis, ultrices a, dui.

[1] Robert S. Sutor, *Dancing with Qubits* (Packt Publishing, Birmingham, 2019).
[2] Robert S. Sutor, *Dancing with Python* (Packt Publishing, Birmingham, 2021).
[3] Robert Loredo, *Learn Quantum Computing with Python and IBM Quantum Experience* (Packt Publishing, Birmingham, 2020).
[4] Robert Hundt, *Quantum Computing for Programmers* (Packt Publishing, Birmingham, 2020).
[5] Michael A. Nielsen, *Quantum Computation and Quantum Information* (Cambrigde University Press, Cambridge, 2010).
[6] Wolfgang Scherer, *Mathematics of Quantum Computing* (Springer, Switzerland, 2019).

**Appendix: Appendix**

Morbi luctus, wisi viverra faucibus pretium, nibh est placerat odio, nec commodo wisi enim eget quam. Quisque libero justo, consectetuer a, feugiat vitae, porttitor eu, libero. Suspendisse sed mauris vitae elit sollicitudin malesuada. Maecenas ultricies eros sit amet ante. Ut venenatis velit. Maecenas sed mi eget dui varius euismod. Phasellus aliquet volutpat odio. Vestibulum ante ipsum primis in faucibus orci luctus et ultrices posuere cubilia Curae; Pellentesque sit amet pede ac sem eleifend consectetuer. Nullam elementum, urna vel imperdiet sodales, elit ipsum pharetra ligula, ac pretium ante justo a nulla. Curabitur tristique arcu eu metus. Vestibulum lectus. Proin mauris. Proin eu nunc eu urna hendrerit faucibus. Aliquam auctor, pede consequat laoreet varius, eros tellus scelerisque quam, pellentesque hendrerit ipsum dolor sed augue. Nulla nec lacus.

Suspendisse vitae elit. Aliquam arcu neque, ornare in, ullamcorper quis, commodo eu, libero. Fusce sagittis erat at erat tristique mollis. Maecenas sapien libero, molestie et, lobortis in, sodales eget, dui. Morbi ultrices rutrum lorem. Nam elementum ullamcorper leo. Morbi dui. Aliquam sagittis. Nunc placerat. Pellentesque tristique sodales est. Maecenas imperdiet lacinia velit. Cras non urna. Morbi eros pede, suscipit ac, varius vel, egestas non, eros. Praesent malesuada, diam id pretium elementum, eros sem dictum tortor, vel consectetuer odio sem sed wisi.

Sed feugiat. Cum sociis natoque penatibus et magnis dis parturient montes, nascetur ridiculus mus. Ut pellentesque augue sed urna. Vestibulum diam eros, fringilla et, consectetuer eu, nonummy id, sapien. Nullam at lectus. In sagittis ultrices mauris. Curabitur malesuada erat sit amet massa. Fusce blandit. Aliquam erat volutpat. Aliquam euismod. Aenean vel lectus. Nunc imperdiet justo nec dolor.